

Dimostrazioni richieste Analisi II

Teorema 1 (Formula risolutiva per le EDO del primo ordine lineari). *Date $a, b : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue in I , l'integrale generale della EDO*

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t), \quad t \in I$$

è dato dalla formula:

$$y(t) = e^{A(t)} [B(t) + C], \quad t \in I$$

dove $C \in \mathbb{R}$, A è una primitiva di a , cioè $A(t) = \int a(t) dt$, e B è una primitiva di $e^{-A}b$, cioè $B(t) = \int b(t)e^{-A(t)} dt$.

Proof. Svolgiamo la dimostrazione in 3 passi:

Passo 1: Porto a sinistra il termine con la funzione a e moltiplico per e^{-A} .

$$\underbrace{y'e^{-A} - aye^{-A}}_{(ye^{-A})'} = be^{-A}$$

Infatti, per la regola della derivata del prodotto e della funzione composta:

$$(ye^{-A})' = y'e^{-A} + y(e^{-A})' = y'e^{-A} - aye^{-A}$$

essendo $(e^{-A})' = e^{-A}(-A)' = -ae^{-A}$. Quindi, l'EDO del primo ordine lineare è equivalente a:

$$(ye^{-A})' = be^{-A}$$

Passo 2: Applico il TFCI (Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale) e trovo la primitiva su entrambi i membri dell'equazione:

$$ye^{-A} = \int (ye^{-A})' dt = \int be^{-A} dt + C$$

dove $C \in \mathbb{R}$ è la costante generica di integrazione.

Passo 3: Moltiplico per e^A entrambi i membri per isolare $y(t)$:

$$y(t) = y(t) \underbrace{e^{-A(t)+A(t)}}_{e^0=1} = e^{A(t)} \left[\underbrace{\int be^{-A} dt + C}_{B(t)} \right]$$

Otteniamo così la formula finale: $y(t) = e^{A(t)}[B(t) + C]$. □

Teorema 2 (Struttura dell'integrale generale - EDO 2° ordine lineare omogenea). *Siano $a, b, c : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue in I , con $a(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$. L'integrale generale dell'equazione omogenea:*

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0 \quad (*)$$

è uno spazio vettoriale di dimensione 2. Ovvero, le soluzioni sono tutte e sole della forma:

$$y_0(t) = C_1 y_{0,1}(t) + C_2 y_{0,2}(t)$$

con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, dove $y_{0,1}$ e $y_{0,2}$ sono due soluzioni linearmente indipendenti (l.i.).

Proof. Dal principio di sovrapposizione deduciamo che l'insieme di tutte le soluzioni è uno spazio vettoriale (essendo chiuso rispetto alla somma di soluzioni e al prodotto per uno scalare). Per dimostrare che la dimensione di tale spazio è 2, dobbiamo:

- a) Determinare 2 soluzioni l.i. $y_{0,1}$ e $y_{0,2}$;
- b) Verificare che ogni soluzione $\bar{y}_0(t)$ si possa scrivere come combinazione lineare di $y_{0,1}$ e $y_{0,2}$.

Parte a): Fissiamo $t_0 \in I$ e scegliamo $y_{0,1}$ e $y_{0,2}$ come soluzioni di due problemi di Cauchy. Precisamente, $y_{0,1}$ è soluzione di:

$$\begin{cases} a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0 \\ y(t_0) = 1 \\ y'(t_0) = 0 \end{cases}$$

e $y_{0,2}$ è soluzione di:

$$\begin{cases} a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0 \\ y(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = 1 \end{cases}$$

Tali soluzioni esistono e sono uniche su tutto I grazie al teorema di esistenza e unicità globale per il problema di Cauchy. Verifichiamo che siano l.i. procedendo per assurdo: assumiamo che esista $C \neq 0$ tale che $y_{0,1}(t) = Cy_{0,2}(t)$ per ogni $t \in I$. Per la definizione data sopra avremmo:

$$1 = y_{0,1}(t_0) = Cy_{0,2}(t_0) = C \cdot 0 = 0$$

che è una contraddizione. Quindi $y_{0,1}$ e $y_{0,2}$ sono linearmente indipendenti.

Parte b): Sia \bar{y}_0 una qualunque soluzione particolare di (*) e cerchiamo costanti $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ per le quali \bar{y}_0 coincida con la funzione $z(t) := C_1 y_{0,1}(t) + C_2 y_{0,2}(t)$ per ogni $t \in I$. Scegliamo C_1 e C_2 in maniera tale che:

$$\bar{y}_0(t_0) = z(t_0) \quad \text{e} \quad \bar{y}'_0(t_0) = z'(t_0)$$

Ovvero poniamo il sistema:

$$\begin{cases} \bar{y}_0(t_0) = z(t_0) := C_1 \underbrace{y_{0,1}(t_0)}_1 + C_2 \underbrace{y_{0,2}(t_0)}_0 = C_1 \\ \bar{y}'_0(t_0) = z'(t_0) := C_1 \underbrace{y'_{0,1}(t_0)}_0 + C_2 \underbrace{y'_{0,2}(t_0)}_1 = C_2 \end{cases}$$

Otteniamo quindi $C_1 = \bar{y}_0(t_0)$ e $C_2 = \bar{y}'_0(t_0)$. La combinazione lineare candidata è:

$$\bar{z}(t) = \bar{y}_0(t_0)y_{0,1}(t) + \bar{y}'_0(t_0)y_{0,2}(t)$$

Concludiamo osservando che sia $\bar{z}(t)$ che $\bar{y}_0(t)$ sono soluzioni dello stesso problema di Cauchy:

$$\begin{cases} a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0 \\ y(t_0) = \bar{y}_0(t_0) \\ y'(t_0) = \bar{y}'_0(t_0) \end{cases}$$

Per il teorema di esistenza e unicità globale, deve essere $\bar{y}_0(t) = \bar{z}(t)$ per ogni $t \in I$. Questo conclude la dimostrazione. \square

Teorema 3 (Calcolo del raggio di convergenza). *Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$, abbiamo che se uno dei seguenti limiti esiste:*

$$(i) \quad R := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

$$(ii) \quad R := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

con $R \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$, allora la serie ha raggio di convergenza R .

Proof. Grazie al teorema "Raggio di convergenza" è sufficiente verificare che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-x_0)^n|$:

a) converga per $|x-x_0| < R$;

b) non converga per $|x-x_0| > R$.

Caso (ii): Assumiamo che il limite (ii) esista e verifichiamo (a) e (b). Osserviamo che $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = |x-x_0| \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}_{\frac{1}{R} \text{ (ii)}} = \frac{|x-x_0|}{R}$$

Quindi (a) e (b) sono diretta conseguenza del criterio della radice per la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-x_0)^n|$.

Caso (i): Assumiamo che il limite (i) esista e verifichiamo (a) e (b). Osserviamo che tutte le serie di potenze convergono per $x = x_0$ e che per $x \neq x_0$ abbiamo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}|}{|a_n(x-x_0)^n|} = |x-x_0| \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}_{\frac{1}{R} \text{ (i)}} = \frac{|x-x_0|}{R}$$

Quindi (a) e (b) sono diretta conseguenza del criterio del rapporto per la serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-x_0)^n|$. \square

Teorema 4 (Calcolo dei coefficienti di Fourier). *Se una funzione 2π -periodica $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione somma di una serie trigonometrica, cioè:*

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

con $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$, con convergenza totale su $[-\pi, \pi]$, allora necessariamente a_0, a_n, b_n sono i coefficienti di Fourier di f per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Proof. Assumiamo che esistano $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tali che $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ con convergenza totale su $[-\pi, \pi]$.

Calcolo di a_0 : Integriamo termine a termine grazie alla convergenza totale:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right] dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} a_0 dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx \\ &= \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} a_0 dx}_{a_0 2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot 0 = a_0 2\pi\end{aligned}$$

Da cui otteniamo: $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$.

Calcolo degli a_k per ogni $k \in \mathbb{N}$: Moltiplichiamo per $\cos(kx)$ ed integriamo termine a termine (lecito per la conv. totale poiché $|\cos(kx)| \leq 1$):

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right] \cos(kx) dx \\ &= a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(kx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(kx) dx \\ &= a_0 \cdot 0 + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{\infty} a_n \cdot 0 + a_k \cdot \pi + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot 0 = a_k \cdot \pi\end{aligned}$$

Dove abbiamo usato le formule di ortogonalità:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(kx) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq k \\ \pi & \text{se } n = k \end{cases}$$

Quindi: $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$. Si procede analogamente per i coefficienti $b_k, k \in \mathbb{N}$. \square

Teorema 5 (Invarianza della lunghezza di una curva per riparametrizzazioni). *Sia $\underline{r} : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva regolare con sostegno γ . Sia $\underline{v} : [c, d] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una riparametrizzazione di γ relativa al cambiamento di variabili $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$, cioè $\underline{v}(s) = \underline{r} \circ \varphi(s)$ per ogni $s \in [c, d]$. Allora:*

$$\text{lunghezza}(\underline{r}([a, b])) = \int_c^d \|\underline{v}'(s)\| ds$$

dove $\text{lunghezza}(\underline{r}([a, b])) = \int_a^b \|\underline{r}'(t)\| dt$.

Proof. Ricordiamo che, siccome \underline{r} è regolare, la sua lunghezza è definita come:

$$\text{lunghezza}(\underline{r}([a, b])) = \int_a^b \|\underline{r}'(t)\| dt \quad (*)$$

Usando la formula di derivazione delle funzioni composte componente per componente, otteniamo che:

$$\underline{v}'(s) = \begin{pmatrix} v'_1(s) \\ v'_2(s) \\ \vdots \\ v'_n(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_1(\varphi(s)))' \\ (r_2(\varphi(s)))' \\ \vdots \\ (r_n(\varphi(s)))' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r'_1(\varphi(s))\varphi'(s) \\ r'_2(\varphi(s))\varphi'(s) \\ \vdots \\ r'_n(\varphi(s))\varphi'(s) \end{pmatrix} = \varphi'(s) \underbrace{\begin{pmatrix} r'_1(\varphi(s)) \\ r'_2(\varphi(s)) \\ \vdots \\ r'_n(\varphi(s)) \end{pmatrix}}_{\underline{r}'(\varphi(s))}$$

Quindi $\underline{v}'(s) = \varphi'(s)\underline{r}'(\varphi(s))$. Calcolando la norma per ogni $s \in [c, d]$ si ha:

$$\|\underline{v}'(s)\| = \|\varphi'(s)\underline{r}'(\varphi(s))\| = |\varphi'(s)| \cdot \|\underline{r}'(\varphi(s))\|$$

Vogliamo effettuare il cambio di variabile $t = \varphi(s)$ nell'integrale (*), il che implica $dt = \varphi'(s) ds$. Per gli estremi di integrazione abbiamo due possibilità:

1. **Se φ è crescente:** allora $\varphi(c) = a$ e $\varphi(d) = b$. In questo caso $\varphi'(s) \geq 0$, quindi $\|\underline{v}'(s)\| = \varphi'(s)\|\underline{r}'(\varphi(s))\|$. L'integrale diventa:

$$\int_a^b \|\underline{r}'(t)\| dt = \int_c^d \|\underline{r}'(\varphi(s))\| \varphi'(s) ds = \int_c^d \|\underline{v}'(s)\| ds$$

2. **Se φ è decrescente:** allora $\varphi(c) = b$ e $\varphi(d) = a$. In questo caso $\varphi'(s) \leq 0$, quindi $\|\underline{v}'(s)\| = -\varphi'(s)\|\underline{r}'(\varphi(s))\|$. L'integrale diventa:

$$\int_a^b \|\underline{r}'(t)\| dt = \int_d^c \|\underline{r}'(\varphi(s))\| \varphi'(s) ds = - \int_c^d \|\underline{r}'(\varphi(s))\| \varphi'(s) ds$$

Poiché in questo caso $-\varphi'(s) = |\varphi'(s)|$, otteniamo:

$$\int_c^d \|\underline{r}'(\varphi(s))\| (-\varphi'(s)) ds = \int_c^d \|\underline{v}'(s)\| ds$$

In entrambi i casi, il valore dell'integrale è identico, il che conclude la dimostrazione. \square

Teorema 6 (Condizione necessaria alla differenziabilità). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile nel punto $\underline{x}_0 \in A$. Allora f è continua in \underline{x}_0 .*

Proof. Dobbiamo dimostrare che $\exists \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0)$. Siccome f è differenziabile in \underline{x}_0 , per definizione abbiamo che:

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle + o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|) \quad (*)$$

per $\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0$. Di conseguenza, possiamo scrivere la catena di disuguaglianze:

$$\begin{aligned} 0 \leq |f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)| &\stackrel{(*)}{=} |\langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle + o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|)| \\ &\leq |\langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle| + |o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|)| \quad (\text{Dis. triangolare}) \\ &= |\langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle| + o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|) \\ &\leq \|\nabla f(\underline{x}_0)\| \cdot \|\underline{x} - \underline{x}_0\| + o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|) \quad (\text{Dis. di Cauchy-Schwarz}) \end{aligned}$$

Prendendo il limite per $\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0$, otteniamo:

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} |f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)| &\leq \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} [\|\nabla f(\underline{x}_0)\| \cdot \|\underline{x} - \underline{x}_0\|] + \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|) \\ &= \|\nabla f(\underline{x}_0)\| \cdot \underbrace{\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} \|\underline{x} - \underline{x}_0\|}_0 + \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} \left(\frac{o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|)}{\|\underline{x} - \underline{x}_0\|} \cdot \|\underline{x} - \underline{x}_0\| \right) \\ &= \|\nabla f(\underline{x}_0)\| \cdot 0 + \underbrace{0 \cdot 0}_0 \quad (\text{per la def. di } o\text{-piccolo}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Per il teorema del confronto, concludiamo che:

$$\exists \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} |f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)| = 0 \implies \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0)$$

La funzione è dunque continua in \underline{x}_0 . \square

Teorema 7 (Formula del Gradiente). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in $\underline{x}_0 \in A$. Allora per ogni $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ con $\|\underline{v}\| = 1$ esiste la derivata direzionale di f in \underline{x}_0 lungo la direzione \underline{v} e vale la formula:*

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) = \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{v} \rangle$$

Proof. Siccome f è differenziabile in \underline{x}_0 , sappiamo che:

$$f(\underline{x}_0 + \underline{h}) = f(\underline{x}_0) + \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{h} \rangle + o(\|\underline{h}\|) \quad \text{per } \underline{h} \rightarrow 0$$

Possiamo applicare tale equazione ponendo $\underline{h} = t\underline{v}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ abbastanza piccolo:

$$\begin{aligned} f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) &= f(\underline{x}_0) + \langle \nabla f(\underline{x}_0), t\underline{v} \rangle + o(\|t\underline{v}\|) \\ &= f(\underline{x}_0) + t\langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{v} \rangle + o(t) \end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che $o(\|t\underline{v}\|) = o(|t| \cdot \|\underline{v}\|) = o(|t|) = o(t)$, dato che per ipotesi $\|\underline{v}\| = 1$.

Sottraendo $f(\underline{x}_0)$ e dividendo per t , otteniamo l'espressione per il rapporto incrementale:

$$\frac{f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{t} = \frac{t\langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{v} \rangle}{t} + \frac{o(t)}{t} \quad (*)$$

Concludiamo osservando che, per la definizione di derivata direzionale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) &:= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{t} \\ &\stackrel{(*)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t\langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{v} \rangle}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t)}{t} \\ &= \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{v} \rangle + \underbrace{0}_{\text{per def. di } o\text{-piccolo}} \\ &= \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{v} \rangle \end{aligned}$$

La dimostrazione è così conclusa. □

Teorema 8 (Ortogonalità del gradiente agli insiemi di livello). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile in A . Supponiamo che l'insieme di livello $k \in \mathbb{R}$ di f , cioè:*

$$I_k := \{\underline{x} \in A : f(\underline{x}) = k\},$$

sia il sostegno di una curva regolare $\underline{r} : I \rightarrow A$ dove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo. Allora abbiamo che:

$$\langle \nabla f(\underline{r}(t)), \underline{r}'(t) \rangle = 0, \quad \forall t \in I$$

Proof. Consideriamo la funzione composta $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$F(t) := (f \circ \underline{r})(t) = f(\underline{r}(t)), \quad \text{per } t \in I$$

Osserviamo che per ipotesi l'immagine della curva (il suo sostegno) coincide con l'insieme di livello I_k :

$$\{\underline{r}(t) : t \in I\} = I_k := \{\underline{x} \in A : f(\underline{x}) = k\}$$

e quindi, sostituendo la curva nella funzione f , si ottiene sempre il valore costante k :

$$F(t) := f(\underline{r}(t)) = k$$

Poiché F è una funzione costante su I , la sua derivata è nulla ovunque:

$$F'(t) = 0, \quad \forall t \in I \quad (D1)$$

Per il teorema di derivazione delle funzioni composte (regola della catena), abbiamo che:

$$F'(t) = \langle \nabla f(\underline{r}(t)), \underline{r}'(t) \rangle \quad (D2)$$

Confrontando le espressioni (D1) e (D2), otteniamo infine:

$$0 = F'(t) = \langle \nabla f(\underline{r}(t)), \underline{r}'(t) \rangle, \quad \forall t \in I$$

Questo dimostra che in ogni punto il gradiente di f è ortogonale al vettore tangente della curva che descrive l'insieme di livello. \square

Teorema 9 (Criterio della matrice Hessiana). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, sia $f \in \mathcal{C}^2(A)$ e sia $\underline{x}_0 \in A$ un punto critico di f . Sia $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la forma quadratica indotta dalla matrice Hessiana $H_f(\underline{x}_0)$. Abbiamo che:*

- (i) *Se q è definita positiva, allora \underline{x}_0 è un punto di minimo locale;*
- (ii) *Se q è definita negativa, allora \underline{x}_0 è un punto di massimo locale;*
- (iii) *Se q è indefinita, allora \underline{x}_0 è un punto di sella.*

Proof. Verifichiamo l'asserzione (i) (la dimostrazione di (ii) è analoga). Osserviamo che la matrice Hessiana $H_f(\underline{x}_0)$ è:

- A. simmetrica grazie al teorema di Schwarz siccome $f \in \mathcal{C}^2(A)$;
- B. ha tutti gli autovalori reali e positivi, siccome q è definita positiva.

Quindi da A. e B. ne deduciamo che:

$$\langle \underline{h}, H_f(\underline{x}_0) \underline{h} \rangle = q(\underline{h}) \geq \lambda_{\min} \|\underline{h}\|^2 \quad (D1)$$

$\forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n$, dove λ_{\min} denota il minimo degli autovalori di $H_f(\underline{x}_0)$. Inoltre, dato che \underline{x}_0 è un punto critico di f , dalla formula di Taylor al secondo ordine otteniamo che:

$$\begin{aligned} f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0) &= \underbrace{\langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{h} \rangle}_0 + \frac{1}{2} \underbrace{\langle \underline{h}, H_f(\underline{x}_0) \underline{h} \rangle}_{q(\underline{h})} + o(\|\underline{h}\|^2) \\ &= \frac{1}{2} q(\underline{h}) + o(\|\underline{h}\|^2) \\ &\stackrel{(D1)}{\geq} \frac{\lambda_{\min}}{2} \|\underline{h}\|^2 + o(\|\underline{h}\|^2) \end{aligned} \quad (D2)$$

per $\|\underline{h}\| \rightarrow 0$, dove nella disuguaglianza abbiamo usato (D1). Per la definizione di o -piccolo abbiamo che:

$$\lim_{\underline{h} \rightarrow 0} \frac{o(\|\underline{h}\|^2)}{\|\underline{h}\|^2} = 0,$$

e quindi $\exists \delta > 0$ tale che se $\|\underline{h}\| < \delta$ e $\underline{h} \neq \underline{0}$, allora:

$$\frac{|o(\|\underline{h}\|^2)|}{\|\underline{h}\|^2} < \frac{1}{4} \lambda_{\min}$$

dove usiamo che $\lambda_{\min} > 0$ grazie a B. Quindi, in particolare $\exists \delta > 0$ tale che $\forall \underline{h} \in B_\delta(\underline{0})$ abbiamo che:

$$o(\|\underline{h}\|^2) \geq -\frac{1}{4}\lambda_{\min}\|\underline{h}\|^2 \quad (\text{D3})$$

Pertanto, da (D2) e (D3) possiamo concludere che:

$$\begin{aligned} f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0) &\stackrel{(D2)}{\geq} \frac{1}{2}\lambda_{\min}\|\underline{h}\|^2 + o(\|\underline{h}\|^2) \\ &\stackrel{(D3)}{\geq} \frac{1}{2}\lambda_{\min}\|\underline{h}\|^2 - \frac{1}{4}\lambda_{\min}\|\underline{h}\|^2 \\ &= \frac{1}{4}\underbrace{\lambda_{\min}}_{>0}\|\underline{h}\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\forall \underline{h} \in B_\delta(\underline{0})$ tale che $\underline{x}_0 + \underline{h} \in A$, che implica che \underline{x}_0 è un punto di minimo locale di f . \square