Esercizi di Analisi 2

Aguti Vittorio
vittorio.aguti@mail.polimi.it

Contents

1 Equazioni differenziali **2**

2 Curve in $\mathbb{R}^n$ **13**

3 Serie di funzioni **20**

4 Serie trigonometriche e serie di Fourier **29**

5 Calcolo differenziale per funzioni in più variabili **32**

6 Ottimizzazione libera e vincolata **45**

7 Calcolo integrale per funzioni di più variabili **57**

8 Studio qualitativo di equazioni differenziali ordinarie **72**

1 Equazioni differenziali

Esercizio 1.1. *Determinare l'integrale generale di $y' = 2xy^2$ e, se esistono, determinare le soluzioni dei problemi di Cauchy:*

$$\begin{cases} y' = 2xy^2 \\ y\left(\frac{1}{4}\right) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = 2xy^2 \\ y(0) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Soluzione. **1. Ricerca delle soluzioni stazionarie**
Per prima cosa cerchiamo soluzioni costanti $y(x) = k$. Se y è costante, $y' = 0$. Sostituendo nell'equazione:

$$0 = 2xy^2 \implies y^2 = 0 \implies y(x) \equiv 0.$$

La funzione identicamente nulla $y(x) \equiv 0$ è una soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$.

2. Separazione delle variabili
Supponendo $y \neq 0$, possiamo dividere per y^2:

$$\frac{y'}{y^2} = 2x \implies \int y^{-2}\, dy = \int 2x\, dx$$

Calcolando gli integrali otteniamo:

$$-\frac{1}{y} = x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Esplicitando la y, otteniamo la famiglia di soluzioni non costanti:

$$y(x) = -\frac{1}{x^2 + C}.$$

L'integrale generale è quindi costituito da:

- $y(x) \equiv 0$ (soluzione singolare);
- $y(x) = -\frac{1}{x^2+C}$ con $C \in \mathbb{R}$.

3. Primo Problema di Cauchy: $y(1/4) = 0$
Proviamo a imporre la condizione alla famiglia $y(x) = -1/(x^2 + C)$. Otterremmo $0 = -1/(\dots)$, che è impossibile poiché il numeratore è diverso da zero. Tuttavia, notiamo che la condizione iniziale $y = 0$ è soddisfatta esattamente dalla soluzione stazionaria trovata all'inizio.

$$\text{Soluzione: } y(x) \equiv 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

4. Secondo Problema di Cauchy: $y(0) = 1/4$
Imponiamo la condizione iniziale alla famiglia di soluzioni non costanti:

$$y(0) = -\frac{1}{0^2 + C} = \frac{1}{4} \implies -\frac{1}{C} = \frac{1}{4} \implies C = -4.$$

Sostituendo $C = -4$ nell'equazione, otteniamo l'espressione analitica della soluzione:

$$y(x) = -\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{4 - x^2}.$$

Analisi dell'intervallo massimale di esistenza
Per definire correttamente la soluzione di un problema di Cauchy, non basta trovare la formula; dobbiamo determinare il dominio. L'espressione $y(x) = \frac{1}{4-x^2}$ ha senso algebrico quando il denominatore è diverso da zero:

$$4 - x^2 \neq 0 \iff x \neq \pm 2.$$

Il dominio naturale dell'espressione è l'unione di tre intervalli disgiunti:

$$D = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty).$$

Tuttavia, per definizione, la soluzione di un'equazione differenziale deve essere definita su un **intervallo** (un insieme connesso, senza "buchi"), poiché la funzione deve essere derivabile e quindi continua nel suo dominio. Non possiamo "saltare" le singolarità $x = \pm 2$.

Dobbiamo quindi scegliere, tra i tre intervalli disponibili, quello che contiene la condizione iniziale $x_0 = 0$.

- $(-\infty, -2)$ non contiene 0;
- $(-2, 2)$ **contiene** 0;
- $(2, +\infty)$ non contiene 0.

Pertanto, l'intervallo massimale di esistenza è $I = (-2, 2)$.

$$\text{Soluzione finale: } y(x) = \frac{1}{4 - x^2}, \quad x \in (-2, 2).$$

Esercizio 1.2. *Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$, determinare tutte le eventuali soluzioni del problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y' = e^{x-y} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Tracciare inoltre il grafico delle soluzioni.

Soluzione. **1. Risoluzione analitica**
L'equazione è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ e $f(x, y) = e^{x-y}$ è di classe C^∞, quindi esiste un'unica soluzione locale per ogni dato iniziale. Non esistono soluzioni costanti poiché l'esponenziale è strettamente positivo.

Procediamo per separazione delle variabili:

$$y' = \frac{e^x}{e^y} \implies e^y\, dy = e^x\, dx$$

Integrando ambo i membri:

$$\int e^y\, dy = \int e^x\, dx \implies e^y = e^x + C$$

Da cui ricaviamo l'integrale generale (imponendo l'argomento del logaritmo positivo):

$$y(x) = \ln(e^x + C), \quad \text{con } e^x + C > 0.$$

Imponiamo la condizione iniziale $y(0) = y_0$:

$$y_0 = \ln(1 + C) \implies e^{y_0} = 1 + C \implies C = e^{y_0} - 1.$$

La soluzione del problema di Cauchy è:

$$y(x) = \ln\left(e^x + e^{y_0} - 1\right).$$

2. Analisi del dominio e comportamento

Dobbiamo studiare il segno dell'argomento del logaritmo: $e^x > 1 - e^{y_0}$.

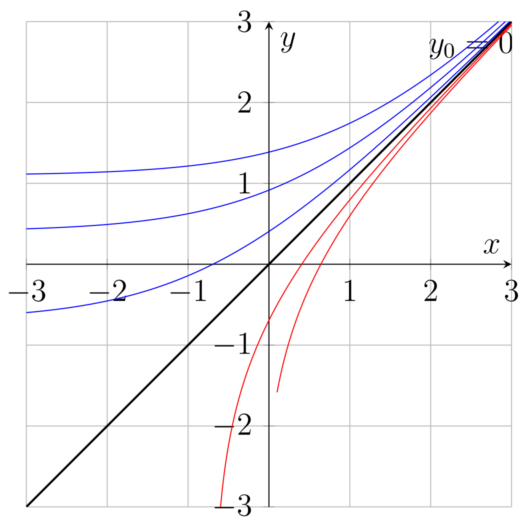
- **Caso A:** $y_0 = 0$
  Allora $C = 0$. La soluzione è $y(x) = \ln(e^x) = x$. Questa è una retta, definita su tutto $\mathbb{R}$.

- **Caso B:** $y_0 > 0$
  Allora $e^{y_0} > 1$, quindi $1 - e^{y_0} < 0$. Poiché e^x è sempre positivo, la disuguaglianza $e^x >$ numero negativo è vera $\forall x \in \mathbb{R}$.
  - **Dominio:** $\mathbb{R}$.
  - **Asintoti:** Per $x \to +\infty$, $y(x) \approx \ln(e^x) = x$. Per $x \to -\infty$, $y(x) \to \ln(e^{y_0} - 1)$ (asintoto orizzontale sinistro).
  - **Concavità:** $y(x) > x$, la funzione è convessa.

- **Caso C:** $y_0 < 0$
  Allora $e^{y_0} < 1$, quindi $1 - e^{y_0} > 0$. La condizione diventa $e^x > 1 - e^{y_0}$, ovvero $x > \ln(1 - e^{y_0})$.
  - **Dominio:** $(\ln(1 - e^{y_0}), +\infty)$.
  - **Asintoti:** Asintoto verticale destro in $x = \ln(1 - e^{y_0})$. Per $x \to +\infty$, $y(x) \approx x$.
  - **Concavità:** $y(x) < x$, la funzione è concava.

3. Grafico delle soluzioni

Le curve soluzione "riempiono" il piano senza intersecarsi. La retta $y = x$ funge da separatrice.



Legenda: In nero la soluzione per $y_0 = 0$. In blu le soluzioni con $y_0 > 0$ (definite su tutto $\mathbb{R}$). In rosso le soluzioni con $y_0 < 0$ (definite a destra di un asintoto verticale).

Esercizio 1.3. *Risolvere il seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y' = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Soluzione. Iniziamo a determinare l'integrale generale, l'unica soluzione costante è $y(x) \equiv 0$, per trovare le soluzioni non costanti possiamo trattare l'equazione come a variabili separabili:

$$\int y^{-\frac{1}{3}}\ dy = \frac{3}{2}\int 1\ dx$$

$$\frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \cdot x + C$$

$$y^2 = (x+C)^3$$

Possiamo estrarre la radice supponendo che il radicando sia non negativo, cioè supponendo $x \geq -c$:

$$y(x) = \pm\sqrt{(x+C)^3} = \pm(x+C)^{\frac{3}{2}}$$

Imponendo le condizioni iniziali:

$$y(0) = 0 \iff \pm C^{\frac{3}{2}} = 0 \iff C = 0$$

Sostituendo la costante trovata nell'integrale generale:

$$y(x) = \pm\sqrt{x^3} \quad \text{Per } x \geq 0$$

Quindi in definitiva le soluzioni del problema di Cauchy sono:

$$y_1(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$y_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x^{\frac{3}{2}} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$$y_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ -x^{\frac{3}{2}} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio 1.4. *Si consideri il seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y' = xe^{y^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Sapendo che ammette un'unica soluzione:

1) Stabilire se la soluzione è costante

2) Se la soluzione non è costante precisarne la monotonia per quanto possibile

3) Calcolare la formula di McLaurin al terzo ordine della soluzione

Soluzione. 1) La soluzione non è sicuramente costante infatti è evidente che:

$$0 = xe^{y^2}$$

Non abbia soluzioni $\forall x \in \mathbb{R}$.

2) Per studiare la monotonia della soluzione $y(x)$, analizziamo il segno della derivata prima definita dall'equazione differenziale:

$$y'(x) = xe^{y^2}$$

Osserviamo che il termine esponenziale e^{y^2} è strettamente positivo per ogni valore di $y \in \mathbb{R}$. Pertanto, il segno di $y'(x)$ dipende esclusivamente dal segno della variabile indipendente x:

- Per $x > 0$, si ha $y'(x) > 0$, dunque la soluzione $y(x)$ è **strettamente crescente**.
- Per $x < 0$, si ha $y'(x) < 0$, dunque la soluzione $y(x)$ è **strettamente decrescente**.
- Per $x = 0$, si ha $y'(0) = 0 \cdot e^{y(0)^2} = 0$.

Dato che la funzione decresce a sinistra di $x = 0$ e cresce a destra di $x = 0$, possiamo concludere che il punto $x = 0$ è un **punto di minimo relativo** per la soluzione $y(x)$. Inoltre, poiché $y(0) = 0$ (dalle condizioni iniziali), il valore minimo locale della funzione è 0.

3) Possiamo sviluppare in serie tramite ciò che già sappiamo:

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 0$$

$$y''(x) = e^{y^2} + 2xyy'e^{y^2} \implies y''(0) = e^0 + 0 = 1$$

$$y'''(x) = 2yy'e^{y^2} + 2yy'e^{y^2} + x(2yy'e^{y^2})' \implies y'''(x) \implies 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 = 0$$

Quindi lo sviluppo di McLaurin al grado richiesto è:

$$0 + 0 \cdot x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \mathrm{o}(x^3) = \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^3)$$

Esercizio 1.5. *Verificare che l'equazione:*

$$(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

ammette soluzioni nello spazio vettoriale V_p dei polinomi reali con grado minore o uguale a due. Determinare la soluzione generale dell'equazione.

Soluzione. Si tratta di un'equazione differenziale del secondo ordine lineare omogenea a coefficienti variabili. Poiché il coefficiente del termine di grado massimo $a(x) = x^2 + 1$ non si annulla mai per $x \in \mathbb{R}$, l'equazione è regolare su tutto l'asse reale e lo spazio delle sue soluzioni ha dimensione due.

Consideriamo un generico polinomio di secondo grado $y(x) \in V_p$:

$$y(x) = ax^2 + bx + c$$

Le sue derivate sono:

$$y'(x) = 2ax + b, \quad y''(x) = 2a$$

Sostituiamo queste espressioni nell'equazione differenziale:

$$(x^2+1)(2a) - 2x(2ax+b) + 2(ax^2+bx+c) = 0$$

Sviluppando i calcoli otteniamo:

$$2ax^2 + 2a - 4ax^2 - 2bx + 2ax^2 + 2bx + 2c = 0$$

Raggruppiamo i termini in base alle potenze di x:

- Termini in x^2: $2a - 4a + 2a = 0$ (identicamente nullo per ogni a)
- Termini in x: $-2b + 2b = 0$ (identicamente nullo per ogni b)
- Termine noto: $2a + 2c = 0 \implies c = -a$

L'equazione è soddisfatta per ogni $b \in \mathbb{R}$ e per ogni coppia (a, c) tale che $c = -a$. Questo conferma che esistono soluzioni in V_p. Per trovare una base dello spazio delle soluzioni, scegliamo dei valori per i parametri liberi a e b:

1. Se $a = 1$ e $b = 0$, otteniamo $c = -1$, quindi: $y_1(x) = x^2 - 1$
2. Se $a = 0$ e $b = 1$, otteniamo $c = 0$, quindi: $y_2(x) = x$

Le due funzioni $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono linearmente indipendenti (non sono proporzionali). Pertanto, la soluzione generale dell'equazione è data dalla loro combinazione lineare:

$$y(x) = C_1(x^2 - 1) + C_2 x$$

con $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Esercizio 1.6. *Si determini la soluzione del seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{t+1} + \frac{2}{t-1} \\ y(t_0) = 0 \end{cases} \qquad \forall t_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

Soluzione. Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea della forma $y' = a(t)y + b(t)$, con:

$$a(t) = \frac{1}{t+1}, \quad b(t) = \frac{2}{t-1}$$

La formula risolutiva per l'integrale generale è:

$$y(t) = e^{A(t)} \left(\int b(t) e^{-A(t)} \, dt + C \right)$$

dove $A(t) = \int a(t)\, dt = \ln|t+1|$. Sostituendo le funzioni:

$$y(t) = |t+1| \left(\int \frac{2}{t-1} \cdot \frac{1}{|t+1|} \, dt + C \right)$$

Notiamo che, indipendentemente dal segno di $(t+1)$, il termine $|t+1|$ fuori dall'integrale e quello al denominatore dentro l'integrale si compensano (il segno meno uscirebbe da entrambi, diventando positivo). Possiamo quindi semplificare e scrivere:

$$y(t) = (t+1) \left(\int \frac{2}{(t-1)(t+1)} \, dt + C \right)$$

Procediamo con la scomposizione in fratti semplici dell'integranda:

$$\frac{2}{(t-1)(t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} = \frac{A(t+1)+B(t-1)}{(t-1)(t+1)}$$

Risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=2 \end{cases} \implies A=1,\ B=-1$$

L'integrale diventa quindi:

$$\int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \ln|t-1| - \ln|t+1| = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|$$

L'integrale generale dell'equazione è:

$$y(t) = (t+1)\left(\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C\right)$$

Imponiamo la condizione iniziale $y(t_0) = 0$:

$$(t_0+1)\left(\ln\left|\frac{t_0-1}{t_0+1}\right| + C\right) = 0 \implies C = -\ln\left|\frac{t_0-1}{t_0+1}\right|$$

La soluzione particolare è dunque:

$$y(t) = (t+1)\left(\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \ln\left|\frac{t_0-1}{t_0+1}\right|\right) = (t+1)\ln\left|\frac{(t-1)(t_0+1)}{(t+1)(t_0-1)}\right|$$

Nota sul dominio: L'equazione non è definita per $t=-1$ e $t=1$. L'intervallo di definizione della soluzione è il più grande intervallo aperto non contenente tali punti in cui è incluso il valore iniziale t_0. Quindi il dominio sarà $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ oppure $(1,+\infty)$ a seconda della scelta di t_0.

Esercizio 1.7. *Si determini la soluzione del seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y' + y\sin t = e^{\cos t} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Soluzione. Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea della forma $y' = a(t)y + b(t)$, dove:

$$a(t) = -\sin t, \quad b(t) = e^{\cos t}$$

La formula risolutiva per l'integrale generale è:

$$y(t) = e^{A(t)}\left(\int b(t)e^{-A(t)}\,dt + C\right)$$

dove $A(t)$ è una primitiva di $a(t)$:

$$A(t) = \int -\sin t\,dt = \cos t$$

Sostituendo le funzioni nell'integrale generale:

$$y(t) = e^{\cos t} \left(\int e^{\cos t} \cdot e^{-\cos t} \, dt + C \right)$$

Poiché $e^{\cos t} \cdot e^{-\cos t} = e^{\cos t - \cos t} = e^0 = 1$, l'integrale si semplifica notevolmente:

$$y(t) = e^{\cos t} \left(\int 1 \, dt + C \right) = e^{\cos t}(t + C)$$

Ora imponiamo la condizione iniziale $y(1) = 0$ per trovare il valore della costante C:

$$y(1) = 0 \iff e^{\cos 1}(1 + C) = 0$$

Poiché la funzione esponenziale $e^{\cos 1}$ non è mai nulla, deve essere:

$$1 + C = 0 \implies C = -1$$

La soluzione particolare del problema di Cauchy è quindi:

$$y(t) = e^{\cos t}(t - 1)$$

Essendo i coefficienti $a(t)$ e $b(t)$ funzioni continue su tutto $\mathbb{R}$, l'intervallo massimale di esistenza della soluzione è tutto l'asse reale $\mathbb{R}$.

Esercizio 1.8. *Trovare tutte le soluzioni di:*

$$y' = 2ty - (2t + 1)e^{-t^2} y^2$$

Determinare inoltre la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy:

$$\textit{1)} \begin{cases} y' = 2ty - (2t + 1)e^{-t^2} y^2 \\ y(1) = 0 \end{cases} \qquad \textit{2)} \begin{cases} y' = 2ty - (2t + 1)e^{-t^2} y^2 \\ y(0) = 4 \end{cases}$$

Soluzione. L'equazione proposta è un'equazione di Bernoulli della forma $y' = a(t)y + b(t)y^\alpha$, con $\alpha = 2$.

1. Ricerca delle soluzioni costanti Notiamo immediatamente che la funzione costante $y(t) \equiv 0$ soddisfa l'equazione $(0 = 0)$, dunque è una soluzione valida per ogni $t \in \mathbb{R}$.

2. Ricerca delle soluzioni non nulle Per $y \neq 0$, dividiamo per y^2:

$$y^{-2} y' = 2ty^{-1} - (2t + 1)e^{-t^2}$$

Poniamo il cambio di variabile $z = y^{1-2} = y^{-1}$, da cui $z' = -y^{-2} y'$. L'equazione diventa lineare in z:

$$-z' = 2tz - (2t + 1)e^{-t^2} \implies z' = -2tz + (2t + 1)e^{-t^2}$$

Applichiamo la formula risolutiva per le equazioni lineari del primo ordine con $A(t) = \int -2t \, dt = -t^2$:

$$z(t) = e^{-t^2} \left(\int (2t + 1)e^{-t^2} \cdot e^{t^2} \, dt + C \right)$$

Semplificando gli esponenziali all'interno dell'integrale $(e^{-t^2} e^{t^2} = 1)$:

$$z(t) = e^{-t^2} \left(\int (2t + 1) \, dt + C \right) = e^{-t^2}(t^2 + t + C)$$

Tornando alla variabile originale $y = 1/z$:

$$y(t) = \frac{e^{t^2}}{t^2 + t + C}$$

L'insieme di tutte le soluzioni è composto dalla famiglia appena trovata e dalla soluzione costante $y(t) \equiv 0$.

3. Problemi di Cauchy

Caso 1: $y(1) = 0$ La condizione iniziale è soddisfatta dalla soluzione costante. Poiché l'equazione soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale, la soluzione $y(t) \equiv 0$ è l'unica soluzione del problema.

Caso 2: $y(0) = 4$ Usiamo la soluzione generale non nulla:

$$y(0) = \frac{e^0}{0 + 0 + C} = 4 \implies \frac{1}{C} = 4 \implies C = \frac{1}{4}$$

La soluzione è:

$$y(t) = \frac{e^{t^2}}{t^2 + t + \frac{1}{4}} = \frac{e^{t^2}}{(t + 1/2)^2}$$

Dominio di esistenza: La funzione non è definita per $t = -1/2$. Poiché la condizione iniziale è data in $t_0 = 0$, l'intervallo massimale di esistenza è quello che contiene lo zero senza includere la singolarità:

$$I = \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

Esercizio 1.9. *Trovare la soluzione, precisandone l'intervallo di definizione, del seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y' = -\frac{2}{x+1} y + \frac{1}{x^2-1}\sqrt{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Soluzione. L'equazione è di Bernoulli con $\alpha = 1/2$. Sostituiamo $z = \sqrt{y}$, da cui $z' = \frac{y'}{2\sqrt{y}}$. L'equazione si trasforma nella lineare:

$$z' + \frac{1}{x+1} z = \frac{1}{2(x^2 - 1)}$$

Considerando l'intervallo $(-1, 1)$ che contiene il dato iniziale $x = 0$, l'integrale generale per $z(x)$ è:

$$z(x) = \frac{1}{x+1} \left(\int \frac{x+1}{2(x-1)(x+1)} \, dx + C \right) = \frac{1}{x+1} \left(\frac{1}{2} \ln(1 - x) + C \right)$$

Imponendo la condizione iniziale $z(0) = \sqrt{y(0)} = 1$:

$$1 = \frac{1}{0+1} \left(\frac{1}{2} \ln(1) + C \right) \implies C = 1$$

La scelta $C = 1$ è l'unica compatibile con la condizione $z(x) \geq 0$. La soluzione per z è dunque:

$$z(x) = \frac{\ln(1 - x) + 2}{2(x + 1)}$$

Elevando al quadrato, otteniamo la soluzione $y(x)$:

$$y(x) = \frac{[\ln(1-x)+2]^2}{4(x+1)^2}$$

Intervallo di definizione: Oltre alla continuità dei coefficienti in $(-1,1)$, dobbiamo garantire $z(x) \geq 0$.

$$\ln(1-x)+2 \geq 0 \iff \ln(1-x) \geq -2 \iff 1-x \geq e^{-2} \iff x \leq 1-e^{-2}$$

L'intervallo massimale di definizione della soluzione è quindi:

$$I = \left(-1, 1-e^{-2}\right]$$

Esercizio 1.10. *Si consideri l'equazione differenziale dipendente dal parametro reale $\alpha \geq 0$:*

$$y'(t) + \frac{y(t)}{1+\alpha t} = \frac{2}{1+\alpha t}$$

a) Fissato $\alpha \geq 0$, determinare il più ampio intervallo contenente $t = 0$ su cui le soluzioni risultano definite, distinguendo i casi $\alpha > 0$ e $\alpha = 0$.

b) Per $\alpha = 1$, determinare esplicitamente l'integrale generale dell'equazione differenziale su tale intervallo.

c) Stabilire se esistono soluzioni limitate su tutto l'intervallo.

d) Risolvere il problema di Cauchy relativo alla condizione $y(0) = 1$.

Soluzione. a) L'equazione è lineare del primo ordine. L'intervallo di definizione dipende dalla continuità dei coefficienti:

- **Caso** $\alpha = 0$: L'equazione diventa $y' + y = 2$. Il coefficiente è costante, quindi l'intervallo è $(-\infty, +\infty)$.
- **Caso** $\alpha > 0$: I termini sono definiti per $1 + \alpha t \neq 0$, ovvero $t \neq -1/\alpha$. L'intervallo più ampio contenente $t = 0$ è $(-1/\alpha, +\infty)$.

b) Per $\alpha = 1$, l'equazione su $(-1, +\infty)$ è $y' + \frac{1}{1+t}y = \frac{2}{1+t}$. Utilizziamo il fattore integrante $\mu(t) = e^{\int \frac{1}{1+t}dt} = e^{\ln(1+t)} = 1 + t$:

$$\frac{d}{dt}[y(t)(1+t)] = \frac{2}{1+t}(1+t) = 2$$

Integrando:

$$y(t)(1+t) = 2t + C \implies y(t) = \frac{2t+C}{1+t}$$

L'integrale generale è $y(t) = \frac{2t+C}{1+t}$ con $C \in \mathbb{R}$.

c) Analizziamo il comportamento agli estremi dell'intervallo $(-1, +\infty)$ per la soluzione $y(t) = \frac{2(t+1)+C-2}{1+t} = 2 + \frac{C-2}{1+t}$:

- Per $t \to +\infty$, $y(t) \to 2$ per ogni C (limite finito).

- Per $t \to -1^+$, $y(t)$ diverge a $\pm\infty$ a meno che $C - 2 = 0$.

Esiste un'unica soluzione limitata su tutto l'intervallo per $C = 2$, ovvero la soluzione costante $y(t) = 2$.

d) Imponiamo la condizione $y(0) = 1$ nell'integrale generale:

$$1 = \frac{2(0) + C}{1 + 0} \implies C = 1$$

La soluzione del problema di Cauchy è:

$$y(t) = \frac{2t + 1}{t + 1}$$

2 Curve in $\mathbb{R}^n$

Esercizio 2.1. *Sia $\gamma(t) = (t - t^2, t - t^3)$ con $t \in [0,1]$. Stabilire se la curva è semplice, chiusa, regolare, disegnare qualitativamente il sostegno.*

Soluzione. Una curva generica definita su un intervallo $[a,b]$ si dice semplice se è iniettiva sull'intervallo $[a,b)$ Questo significa che per ogni coppia di punti t_1 e t_2 nell'intervallo, le loro posizioni nello spazio devono essere diverse. Cerchiamo dunque due punti distinti $t_1 \neq t_2$ tali che $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$.

$$\begin{cases} t_1 - t_1^2 = t_2 - t_2^2 \\ t_1 - t_1^3 = t_2 - t_2^3 \end{cases}$$

Riscriviamo la prima equazione come:

$$(t_1 - t_2) - (t_1^2 - t_2^2) = 0$$

$$(t_1 - t_2) - (t_1 - t_2)(t_1 + t_2) = 0$$
$$(t_1 - t_2) \cdot [1 - (t_1 + t_2)] = 0$$

Poichè cerchiamo punti distinti ($t_2 \neq t_2$) possiamo scartare il primo fattore. Resta la condizione:

$$t_1 + t_2 = 1 \implies t_2 = 1 - t_1$$

Sostituendo nella seconda equazione si ottiene:

$$t_1 - t_1^3 = 1 - t_1 - (1 - t_1)^3$$

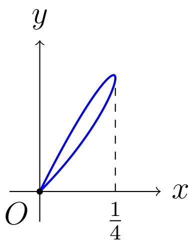
$$t_1 - t_1^3 = 1 - t_1 - (1 - 3t_1 + 3t_1^2 - t_1^3)$$
$$t_1 - t_1^3 = 1 - t_1 - 1 + 3t_1 - 3t_1^2 + t_1^3$$
$$2t_1^3 - 3t_1^2 + t_1 = 0$$
$$t_1(2t_1^2 - 3t_1 + 1) = 0$$

Da cui otteniamo $t_1 = 0$, $t_1 = 1$, $t_1 = \frac{1}{2}$. Se $t_1 = \frac{1}{2}$ allora $t_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ma noi cerchiamo $t_1 \neq t_2$. Se $t_1 = 0$ allora $t_2 = 1$ guardando le immagini $\gamma(0) = (0,0) = \gamma(1)$ tuttavia 1 e 0 sono gli estremi dell'intervallo su cui vogliamo vericare la semplicità della curva, quindi per definizione questo non prova che la curva sia semplice, bensì che sia chiusa. Stessa cosa se $t_1 = 1$ e $t_2 = 0$, è il simmetrico del caso precedente. Abbiamo quindi verificato che la curva è chiusa e semplice su $[0,1]$.

Ricordiamo che una curva parametrica $\gamma(t)$ definita su un intervallo I si dice regolare se è differenziabile con continuità ($\gamma(t) \in C^1(I)$) e se il vettore derivata non si annulla mai cioè $\gamma'(t) \neq (0,0)$ $\forall t \in I$. Per la nostra curva la prima condizione è automaticamente verificata in quanto le funzioni che la compongono sono polinomi che sono di classe C^∞ e in particolare C^1. Verificare la seconda condizione è facile:

$$\gamma'(t) = 0 \iff \begin{cases} 1 - 2t = 0 \\ 1 - 3t^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ 1 = \frac{3}{8} \end{cases}$$

Che chiaramente è impossibile. Per cui la curva è regolare su $\mathbb{R}$ e in particolare sull'intervallo dato. Per disegnare qualitativamente il grafico può essere utile notare che $x(t)$ è crescente in $[0, \frac{1}{2}]$ mentre $y(t)$ è crescente in $[0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$. Il grafico di $\gamma(t)$ per $t \in [0,1]$ è:



Il sostegno della curva è un "laccio" situato interamente nel primo quadrante. La curva parte dall'origine con tangente $y = x$ (poiché per $t \to 0$, il rapporto $y'(t)/x'(t) \to 1$), raggiunge la massima estensione orizzontale in $x = 1/4$ (per $t = 1/2$), raggiunge la massima altezza poco dopo (per $t = 1/\sqrt{3}$) e ritorna nell'origine con una pendenza maggiore (tangente $y = 2x$, poiché per $t \to 1$ il rapporto delle derivate tende a 2).

Esercizio 2.2. *Calcolare la lunghezza del grafico di $f(x) = x^{3/2}$ per $x \in [1, 4]$.*

Soluzione. Per il grafico di una funzione esplicita $y = f(x)$ si usa la parametrizzazione $\vec{r}(x) = (x, f(x))$. Qui

$$\vec{r}'(x) = \big(1, f'(x)\big) = \big(1, \tfrac{3}{2}x^{1/2}\big),$$

quindi la lunghezza è

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\, dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx.$$

Ponendo $u = 1 + \frac{9}{4}x$ si ha $du = \frac{9}{4}\,dx$, quindi $dx = \frac{4}{9}\,du$. Quando $x = 1$ si ha $u = \frac{13}{4}$ e quando $x = 4$ si ha $u = 10$. Otteniamo

$$L = \frac{4}{9}\int_{13/4}^{10} u^{1/2}\,du = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left[u^{3/2}\right]_{13/4}^{10} = \frac{8}{27}\Big(10^{3/2} - \big(\tfrac{13}{4}\big)^{3/2}\Big).$$

Si può semplificare la seconda potenza frazionaria: $\big(\frac{13}{4}\big)^{3/2} = \dfrac{13\sqrt{13}}{8}$. Quindi

$$L = \frac{8}{27}\cdot 10\sqrt{10} - \frac{8}{27}\cdot\frac{13\sqrt{13}}{8} = \frac{1}{27}\big(80\sqrt{10} - 13\sqrt{13}\big).$$

Valore numerico:

$$L \approx 7.6337054160 \approx 7.63.$$

Esercizio 2.3. *Disegnare la linea Γ di equazione $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$. Scriverne una parametrizzazione, specificare se essa è regolare e calcolarne la lunghezza.*

Soluzione. Notiamo che la funzione non è esplicitabile per y. Per ottenere una parametrizzazione si può pensare di sfruttare una parametrizzazione trigonometrica:

$$\begin{cases} x^{\frac{1}{3}} = \cos(t) \\ y^{\frac{1}{3}} = \sin(t) \end{cases} \iff \begin{cases} x = \cos^3(t) \\ y = \sin^3(t) \end{cases} \qquad \forall t \in [0, 2\pi]$$

Otteniamo quindi $\vec{r}(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t))$, verifichiamo se la curva è regolare:

$$\vec{v}(t) = (-3\sin(t)\cos^2(t), 3\cos(t)\sin^2(t))$$

$$\vec{v}(t) = 0 \iff \begin{cases} -3\sin(t)\cos^2(t) = 0 \\ 3\cos(t)\sin^2(t) = 0 \end{cases} \iff t = \frac{k\pi}{2}$$

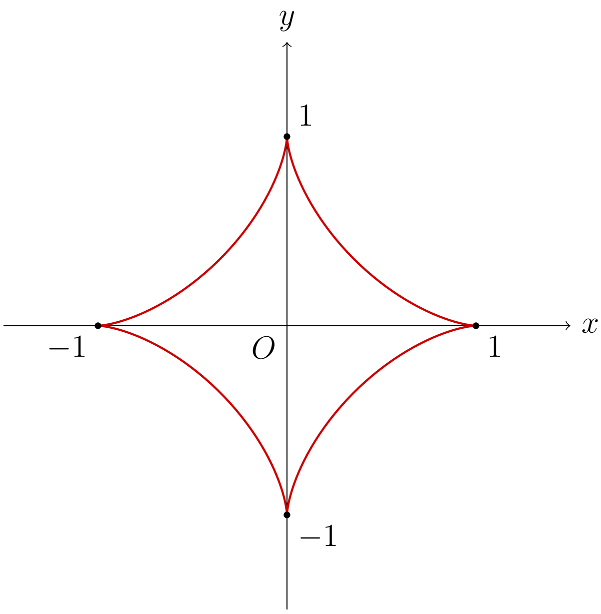
Quindi la parametrizzazione non è regolare, tuttavia è regolare a tratti per cui la lunghezza della curva è comunque ben definita. Se ora calcolassimo direttamente la lunghezza senza ulteriori semplificazioni l'integrale da risolvere sarebbe troppo difficile. Possiamo però notare che la curva è simmetrica sia rispetto all'asse x che rispetto all'asse y, infatti si verifica facilmente che sostituendo x con $-x$ e y con $-y$ a causa del quadrato l'espressione della curva non cambia. Questo significa che il grafico è diviso in quattro "spicchi" identici e possiamo calcolare la lunghezza totale come la lunghezza di uno spicchio moltiplicata per 4:

$$||\vec{v}(t)|| = \sqrt{9\sin^2(t)\cos^4(t) + 9\cos^2(t)\sin^4(t)} = \sqrt{9\sin^2(t)\cos^2(t)\cdot 1} = 3|\sin(t)\cos(t)|$$

Scegliendo la porzione di grafico nel primo quadrante ($t \in [0, \frac{\pi}{2}]$) possiamo togliere il modulo e calcolare la lunghezza come:

$$L = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin(t)\cos(t)\,dt = 6 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin(t)\cos(t)\,dt =$$

$$= 6 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)\,dt = [-3\cos(2t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 3 + 3 = 6$$



Il sostegno è un ipocicloide a quattro cuspidi (detto astroide). La curva è contenuta nel quadrato $[-1,1]\times[-1,1]$. Si notano chiaramente le quattro cuspidi in $(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)$ dove la tangente non è unica (la derivata si annulla). La simmetria rispetto agli assi è evidente.

Esercizio 2.4. *Dato un filo disposto lungo la curva definita da* $\vec{r}(t) = (t^2+1)\underline{i} + e^t\underline{j} + 2t\underline{k}$ *per* $t \in [1,2]$. *Calcolare la massa totale del filo se la densità è* $\delta(x,y,z) = \sqrt{4x+y^2}$

Soluzione. La massa M sarà pari all'integrale di linea di prima specie:

$$M = \int_\gamma \delta\,ds = \int_1^2 \delta(\vec{r}(t)) \cdot ||\vec{v}(t)||\,dt$$

Calcoliamo la velocità e la sua norma:

$$\vec{v}(t) = (2t, e^t, 2) \implies ||\vec{v}(t)|| = \sqrt{4t^2 + e^{2t} + 4}$$

Valutiamo la densità lungo la curva sostituendo $x = t^2 + 1$ e $y = e^t$:

$$\delta(\vec{r}(t)) = \sqrt{4(t^2+1) + (e^t)^2} = \sqrt{4t^2 + 4 + e^{2t}}$$

Notiamo che la densità e la norma della velocità coincidono, quindi il loro prodotto elimina la radice:

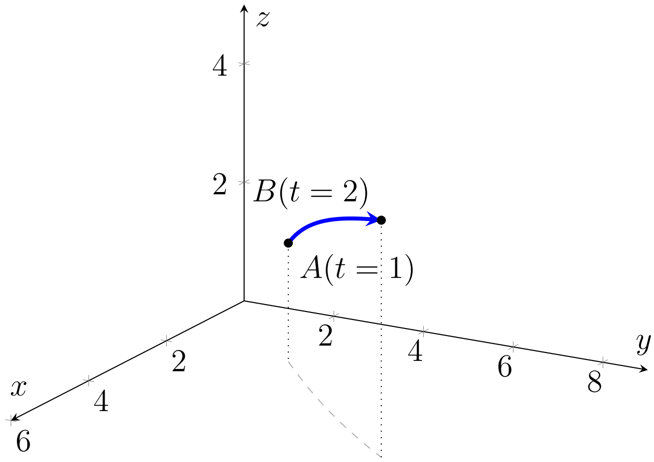
$$\delta(\vec{r}(t)) \cdot ||\vec{v}(t)|| = \left(\sqrt{4t^2 + e^{2t} + 4}\right)^2 = 4t^2 + e^{2t} + 4$$

Risolviamo l'integrale:

$$M = \int_1^2 (4t^2 + e^{2t} + 4)\, dt = \left[\frac{4t^3}{3} + \frac{e^{2t}}{2} + 4t\right]_1^2 =$$

$$= \left(\frac{32}{3} + \frac{e^4}{2} + 8\right) - \left(\frac{4}{3} + \frac{e^2}{2} + 4\right) =$$

$$= \frac{28}{3} + 4 + \frac{e^4 - e^2}{2} = \frac{40}{3} + \frac{e^4 - e^2}{2}$$



Esercizio 2.5. *Si consideri la curva parametrizzata da:* $\vec{r}(t) = e^t \underline{i} + \sqrt{2}t\underline{j} - e^{-t}\underline{k}$ *per* $t \in [0, \log(4)]$. *Stabilire se è semplice, chiusa e regolare. Se possibile calcolare la lunghezza nell'intervallo specificato.*

Soluzione. La curva è semplice, per verificarlo basta osservare che $x(t) = e^t$ è iniettiva, quindi la curva è anch'essa iniettiva. Per verificare se è chiusa o meno basta valutare il valore che assume $\vec{r}(t)$ agli estremi: $\vec{r}(0) = (1, 0, -1) \neq \vec{r}(\log(4)) = (4, \sqrt{2}\log(4), -\frac{1}{4})$ quindi $\vec{r}$ non è chiusa. Per determinare se è regolare osserviamo che ognuna delle tre funzioni che compongono la curva è di classe C^∞ e in particolare C^1. Siccome l'esponenziale non si annulla per nessun t possiamo concludere che la derivata di $\vec{r}$ non si annulla mai, quindi $\vec{r}(t)$ è regolare. Calcoliamo la lunghezza L del grafico nell'intervallo dato:

$$L = \int_0^{\log(4)} ||\vec{v}(t)||\, dt = \int_0^{\log(4)} \sqrt{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}\, dt =$$

$$\int_0^{\log(4)} \sqrt{(e^t + e^{-t})^2}\, dt = \int_0^{\log(4)} e^t + e^{-t}\, dt = 4 - 1 - \frac{1}{4} + 1 = \frac{15}{4}$$

Esercizio 2.6. *Sia γ così descritta: $\vec{r}(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t))$, con $t \in [0, 4\pi]$. Stabilire se è semplice, chiusa, regolare e calcolare l'integrale su γ di $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.*

Soluzione. La curva $\vec{r}(t)$ descrive una spirale logaritmica le cui componenti in coordinate polari sono $\rho(t) = e^t$ e $\theta(t) = t$. Iniziamo analizzando le proprietà della curva. Poiché il raggio vettore $\rho(t) = e^t$ è una funzione strettamente crescente, la distanza dall'origine aumenta costantemente per ogni t; questo garantisce l'iniettività della funzione, pertanto la curva è semplice (non passa mai due volte per lo stesso punto). La curva non è chiusa, dato che il punto iniziale $\vec{r}(0) = (1, 0)$ è distinto dal punto finale $\vec{r}(4\pi) = (e^{4\pi}, 0)$.

Per quanto riguarda la regolarità, osserviamo che le componenti sono funzioni di classe C^1. Calcoliamo il vettore velocità:

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = (e^t(\cos t - \sin t),\ e^t(\sin t + \cos t))$$

La norma del vettore velocità risulta essere:

$$\|\vec{v}(t)\| = \sqrt{e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2} = \sqrt{2e^{2t}(\cos^2 t + \sin^2 t)} = \sqrt{2}e^t$$

Poiché l'esponenziale è strettamente positivo, $\|\vec{v}(t)\| \neq 0$ per ogni $t \in [0, 4\pi]$, dunque la curva è regolare in tutto il dominio.

Concludiamo calcolando l'integrale di linea di prima specie. Sostituendo la parametrizzazione nella funzione integranda otteniamo $f(\vec{r}(t)) = \sqrt{(e^t \cos t)^2 + (e^t \sin t)^2} = e^t$. L'integrale diventa:

$$\int_\gamma f\, ds = \int_0^{4\pi} f(\vec{r}(t)) \cdot \|\vec{v}(t)\|\, dt = \int_0^{4\pi} e^t \cdot \sqrt{2}e^t\, dt = \sqrt{2} \int_0^{4\pi} e^{2t}\, dt$$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{e^{2t}}{2}\right]_0^{4\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}(e^{8\pi} - 1).$$

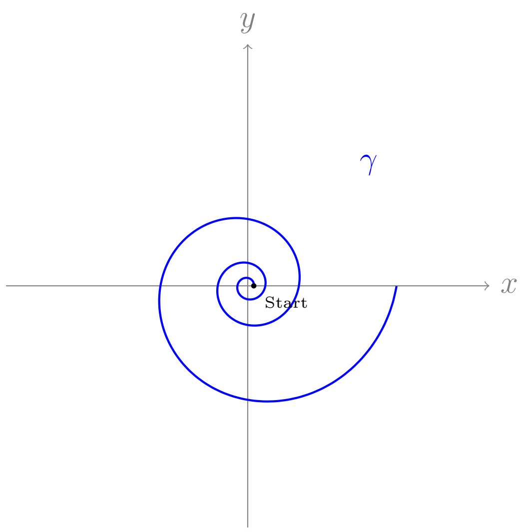


Figure 1: Rappresentazione qualitativa della spirale γ

Esercizio 2.7. *Si consideri la curva $\phi(t) = (\log(t^2 - 1), t)$ con $t \in [2, 3]$. Scrivere l'equazione della retta tangente al sostegno nel punto $\phi(5/2)$ e calcolare la lunghezza della curva.*

Soluzione. Svolgiamo il primo punto (equazione della retta tangente) in due modi diversi per verifica.

Metodo 1: Teorema del Dini (Funzioni Implicite) Eliminando il parametro t (dato che $y = t$), otteniamo l'equazione cartesiana $x = \log(y^2 - 1)$, che possiamo scrivere in forma implicita come:

$$F(x, y) = x - \log(y^2 - 1) = 0$$

La funzione F è di classe C^∞ nel dominio considerato. Il punto di contatto è $P = \phi(5/2) = (\log(21/4), 5/2)$. Verifichiamo che $F(P) = 0$ (ovvio per costruzione). Calcoliamo le derivate parziali:

$$F_x = 1, \quad F_y(x, y) = -\frac{2y}{y^2 - 1}$$

Valutiamo F_y nel punto P (dove $y = 5/2$):

$$F_y(P) = -\frac{2(5/2)}{(5/2)^2 - 1} = -\frac{5}{21/4} = -\frac{20}{21} \neq 0$$

Poiché $F_y \neq 0$, possiamo applicare il teorema. Il coefficiente angolare m è dato da:

$$m = -\frac{F_x(P)}{F_y(P)} = -\frac{1}{-20/21} = \frac{21}{20}$$

L'equazione della retta tangente passante per P è dunque:

$$y - \frac{5}{2} = \frac{21}{20}\left(x - \log\frac{21}{4}\right)$$

Metodo 2: Vettore derivato (Parametrico) Calcoliamo il vettore velocità:

$$\phi'(t) = \left(\frac{d}{dt}\log(t^2 - 1), \frac{d}{dt}t\right) = \left(\frac{2t}{t^2 - 1}, 1\right)$$

La curva è regolare poiché la seconda componente (1) non è mai nulla. Valutiamo il vettore in $t = 5/2$:

$$\phi'(5/2) = \left(\frac{2(5/2)}{25/4 - 1}, 1\right) = \left(\frac{5}{21/4}, 1\right) = \left(\frac{20}{21}, 1\right)$$

Questo è il vettore direttore $\vec{v}$. Il coefficiente angolare è il rapporto tra la componente y e la componente x: $m = 1/(20/21) = 21/20$, che conferma il risultato precedente.

Calcolo della lunghezza La lunghezza L è data dall'integrale della norma del vettore velocità:

$$L = \int_2^3 \|\phi'(t)\|\, dt = \int_2^3 \sqrt{\left(\frac{2t}{t^2 - 1}\right)^2 + 1^2}\, dt$$

Svolgiamo i calcoli sotto radice (minimo comune multiplo):

$$= \int_2^3 \sqrt{\frac{4t^2 + (t^2 - 1)^2}{(t^2 - 1)^2}}\, dt = \int_2^3 \sqrt{\frac{t^4 - 2t^2 + 1 + 4t^2}{(t^2 - 1)^2}}\, dt$$

Riconosciamo il quadrato perfetto al numeratore ($t^4 + 2t^2 + 1 = (t^2 + 1)^2$):

$$= \int_2^3 \sqrt{\frac{(t^2 + 1)^2}{(t^2 - 1)^2}}\, dt = \int_2^3 \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}\, dt$$

Ora utilizziamo la scomposizione in fratti semplici. Osserviamo che $\frac{t^2+1}{t^2-1} = \frac{t^2-1+2}{t^2-1} = 1 + \frac{2}{t^2-1}$. Scomponendo ulteriormente $\frac{2}{t^2-1} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}$, otteniamo:

$$L = \int_2^3 \left(1 + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt$$

Integriamo:

$$= [t + \log|t-1| - \log|t+1|]_2^3 = \left[t + \log\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\right]_2^3$$

Sostituiamo gli estremi:

$$= \left(3 + \log\frac{2}{4}\right) - \left(2 + \log\frac{1}{3}\right)$$

$$= 3 + \log\frac{1}{2} - 2 - \log\frac{1}{3} = 1 - \log 2 - (\log 1 - \log 3)$$

$$= 1 - \log 2 + \log 3 = 1 + \log\left(\frac{3}{2}\right)$$

3 Serie di funzioni

Esercizio 3.1. *Stabilire se la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n}$ *è convergente puntualmente, assolutamente, totalmente su* $\mathbb{R}$.

Soluzione. Se riuscissimo a dimostrarre che la serie converge totalmente, sarebbe anche dimostrato che converge assolutamente e puntualmente. In questo caso è facile dimostrare ciò tramite il criterio di Weierstrass, anche noto come M-test.

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\sin(nx)}{2^n} \right| = \frac{1}{2^n}$$

Ma $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ è una serie geometria convergente, si conclude che la serie di partenza è convergente in $\mathbb{R}$ e quindi è anche assolutamente e puntualmente convergente.

Esercizio 3.2. *Stabilire se la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nx}{e^n x}$ *è convergente puntualmente, assolutamente, totalmente su* $\mathbb{R}$.

Soluzione. Sia $f_n(x) = \frac{nx}{e^n x}$, allora applicando il criterio del rapporto su $f_n(x)$ si ha che:

$$\left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \frac{(n+1)|x|}{e^{(n+1)x}} \cdot \frac{e^{nx}}{n|x|} = \frac{n+1}{e^x n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{e^x}$$

Quindi per il criterio del rapporto si ha che se $x > 0$ allora $e^x > 1$ e quindi $\frac{1}{e^x} < 1$ perciò la serie è assolutamente convergente e puntualmente convergente. Al contrario se $x < 0$ allora $\frac{1}{e^x} > 1$ la serie non converge. Per $x = 0$ il termine della serie diventa:

$$f_n(x) = f_n(0) = 0$$

E quindi ovviamente la serie converge assolutamente e semplicemente. Dunque l'insieme di convergenza è $E = [0, +\infty)$. Per ciò che riguarda la convergenza totale possiamo subito dire che sicuramente non c'è su $\mathbb{R}$ però magari c'è su E:

$$\sup_{x\in E} |f_n(x)| = \sup_{x\geq 0} \frac{nx}{e^n x} = \frac{1}{e}$$

Ma la serie di $\frac{1}{e}$ non converge, per cui non c'è convergenza totale in E.

Esercizio 3.3. *Si consideri la serie* $s := \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-5}x^4$. *Stabilire qual è l'insieme di convergenza* E *e specificare in quali sottoinsiemi di* E *la convergenza è assoluta e totale.*

Soluzione. Questa serie è una serie di potenze del tipo:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n \text{ con } a_n = \frac{1}{n^5} \text{ e } x_0 = 0$$

Calcoliamo il raggio di convergenza:

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^5}{n^5} = 1$$

Da cui abbiamo che la serie converge totalmente $\forall x \in (-1, 1)$. Non sappiamo nulla però sulla convergenza agli estremi, che dobbiamo controllare. Per $x = \pm 1$:

$$s = \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{(\pm 1)^n}{n^5}$$

Che è assolutamente convergente. Si conclude che l'insieme di convergenza di s è $E = [-1, 1]$. Possiamo verificare facilmente che la convergenza su E è totale infatti:

$$\sup_{x \in E} \left| \frac{x^n}{n^5} \right| = \frac{1}{n^5}$$

Ma $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5}$ converge quindi la convergenza di s è totale su E.

Esercizio 3.4. *Si studi la convergenza della serie* $s := \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n - \sqrt{n}}$

Soluzione. Si tratta di una serie di potenze centrata nell'origine. Calcoliamo il raggio di convergenza:

$$R = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n + 1 - \sqrt{n+1}}{n - \sqrt{n}} \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{n+1}{n} = 1$$

Quindi c'è convergenza assoluta su $(-1, 1)$, verifichiamo gli estremi:

$$\text{Per } x = 1 \quad s = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n - \sqrt{n}}$$

Che diverge per il criterio del confronto asintotico ($\sim \frac{1}{n}$). Mentre:

$$\text{Per } x = -1 \quad s = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}}$$

Che sicuramente non converge assolutamente, altrimenti otterremmo la stessa serie che per $x = 1$, però converge semplicemente per il criterio di Leibniz, infatti dato:

$$b_n = \frac{1}{n - \sqrt{n}}$$

Si dimostra facilmente che $b_n \geq 0 \ \forall n, \lim_{n \to +\infty} b_n = 0$ e che b_n sia definitivamente decrescente. Si conclude che l'insieme di convergenza è $E = [-1, 1)$ con convergenza assoluta solo su $(-1, 1)$. Inoltre per la convergenza uniforme di una serie di potenza sui compatti possiamo anche dire che c'è convergenza totale su ogni sottoinsieme compatto, cioè chiuso e limitato in $(-1, 1)$.

Esercizio 3.5. *Determinare l'insieme di convergenza puntuale e assoluto di* $s := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n} (x - 1)^n$.

Soluzione. Si tratta di una serie di potenza centrata in $x_0 = 1$, calcoliamo il raggio di convergenza:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{3^n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{3^n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{3} = \frac{(1)^2}{3} = \frac{1}{3}$$

Da cui si ha che $R = 3$. Quindi la serie converge assolutamente $\forall x \in (-2, 4)$ e non converge per $x < -2 \vee x > 4$. Analizziamo ora il comportamento della serie ai due estremi:

$$\text{Per } x = -2 \quad s = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 (-3)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n n^2$$

Che non converge in quanto il modulo del termine generale non tende a 0 per $n \to +\infty$ e quindi neanche il termine generale stesso tende a 0, per cui la serie non può convergere.

$$\text{Per } x = 4 \quad s = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2(3)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2$$

Che ovviamente diverge a $+\infty$. Dunque l'insieme di convergenza è $I = (-2, 4)$ nel quale la convergenza è assoluta. C'è convergenza totale in qualsiasi intervallo $[a, b] \subset I$.

Esercizio 3.6. *Si consideri la serie* $t := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n - n}{3^n(n+1)}(x+1)^n$

a) Discutere la convergenza puntuale, assoluta e totale.

b) Dire se è possibile integrale per serie nell'intervallo $[-2, 0]$

Soluzione. a) Si tratta di una serie di potenze centrata in $x_0 = -1$ calcoliamo il raggio di convergenza:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n - n}{3^n(n+1)}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{3^n n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{3e^{\frac{\ln(n)}{n}}} = \frac{2}{3}$$

Per cui il raggio di convergenza è $R = \frac{3}{2}$ e si ha convergenza assoluta per $x \in (-\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$. Adesso verifichiamo la convergenza negli estremi:

$$\text{Per } x = \frac{1}{2} \quad t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n - n}{3^n(n+1)} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Che non converge, infatti $\frac{2^n-n}{3^n(n+1)} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n \sim \frac{2^n}{3^n n} \cdot \frac{3^n}{2^n} = \frac{1}{n}$. Riguardo l'altro estremo:

$$\text{Per } x = -\frac{5}{2} \quad t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n - n}{3^n(n+1)} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2^n - n)}{2^n(n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n)}{2^n(n+1)}$$

Questa è una somma di serie convergenti, infatti la prima converge semplicemente per il criterio di Leibniz mentre la seconda converge assolutamente e quindi semplicemente, in quanto:

$$\left|\frac{(-1)^n n}{(n+1)2^n}\right| = \frac{n}{(n+1)2^n} \sim \frac{n}{n \cdot 2^n} = \frac{1}{2^n}$$

Di cui la serie converge semplicemente. Quindi per $x = -\frac{5}{2}$ s converge semplicemente. Dunque l'insieme di convergenza puntuale è $[-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}]$ mentre quello di convergenza assoluta è $(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$. Possiamo anche dire che c'è convergenza totale su ogni sottoinsieme chiuso e limitato di $(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$.

b) Avendo stabilito l'insieme di convergenza possiamo dire che $\forall x \in [-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}]$ è definita la funzione somma della serie ovvero:

$$s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n - n}{3^n(n+1)} \cdot (x+1)^n$$

Integrare per serie significa calcolare l'integrale della funzione somma nell'intervallo specificato come:

$$\int_{-2}^{0} s(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-2}^{0} f_n(x)dx$$

Essendo la serie convergente totalmente in $[-2, 0] \subset (-\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$l'uguaglianza è garantita, per cui non ci resta che calcolare l'integrale:

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{0} s(x)\, dx &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n - n}{3^n(n+1)} \int_{-2}^{0} (x+1)^n dx \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n - n}{3^n(n+1)} \left[\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1} \right]_{-2}^{0} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n - n}{3^n(n+1)^2} \cdot \left[1 - (-1)^{n+1} \right]
\end{aligned}$$

Esercizio 3.7. *Data l'uguaglianza* $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$ $\forall x \in (-1, 1]$

a) Verificare la convergenza della serie in $I = (-1, 1]$

b) Verificare la validità del'uguaglianza per $x \in [0, 1]$ *deducendola dalla formula di McLaurin con il resto di Lagrange.*

Soluzione. Si tratta di una serie di potenze centrata in $x_0 = 0$, calcoliamo il raggio di convergenza:

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Quindi il raggio di convergenza R è uguale a 1. La convergenza è verificata dunque per $E = (-1, 1)$, analizziamo la convergenza negli estremi, per $x = 1$ la serie diventa:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Che converge per il criterio di Leibniz. Per $x = -1$ invece si ha:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot (-1)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

Che è divergente. Quindi l'insieme di convergenza è effettivamente $I = (-1, 1]$.

$b)$ Dobbiamo dimostrare che la funzione coincide con la sua serie di Taylor, ovvero che il resto n-esimo tende a 0 per $n \to +\infty$. La derivata k-esima di $f(x) = \ln(1+x)$ è data da:

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$

Scriviamo il resto di Lagrange di ordine n, dove $\xi \in (0, x)$:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{(-1)^n n!}{(1+\xi)^{n+1}(n+1)!} x^{n+1}$$

Semplificando i fattoriali ($\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$):

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{1+\xi}\right)^{n+1}$$

Consideriamo il valore assoluto del resto per $x \in [0,1]$. Sapendo che $0 < \xi < x$, abbiamo che $1+\xi > 1$ e quindi il termine $\frac{1}{(1+\xi)^{n+1}} < 1$. Inoltre, poiché $x \leq 1$, anche $x^{n+1} \leq 1$. Possiamo effettuare la maggiorazione:

$$0 \leq |R_n(x)| = \frac{1}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}} \leq \frac{1}{n+1}$$

Calcolando il limite per $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \implies \lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$$

Poiché il resto è infinitesimo, l'uguaglianza tra la funzione e la serie è verificata in tutto l'intervallo $[0,1]$.

Esercizio 3.8. *Si consideri la serie* $k = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3-\sqrt{n}}{n^2\cdot 3^n} \cdot (x-4)^n$

a) Discutere la convergenza puntuale e totale della serie

b)Determinare la serie derivata e discuterne la convergenza puntuale e totale

Soluzione. a) Si tratta di una serie di potenze centrata in $x_0 = 4$, calcoliamo il raggio di convergenza:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3-\sqrt{n}}{n^2\cdot 3^n}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{n^2\cdot 3^n}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{3^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{\ln(n)}{n}}}{3} = \frac{1}{3}$$

Da cui si ha che $R = 3$. Quindi c'è convergenza assoluta $\forall x \in (1,7)$. Analizziamo la convergenza agli estremi:

$$\text{Per } x = 7 \quad k = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3-\sqrt{n}}{n^2} \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n = +\infty$$

Quindi nel primo estremo non abbiamo convergenza. Controlliamo il secondo:

$$\text{Per } x = 1 \quad k = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\cdot(n^3-\sqrt{n})}{n^2}$$

Che non converge in quanto il termine generale non è infinitesimo. Concludiamo che nell'intervallo $I = (1,7)$ abbiamo convergenza puntuale e assoluta mentre abbiamo convergenza totale in $[a,b] \subset (1,7)$.

b) La serie derivata di s è semplicemente:

$$k' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3-\sqrt{n}}{n\cdot 3^n}(x-4)^{n-1}$$

La teoria garantisce che questa serie abbia lo stesso raggio di convergenza della serie iniziale. In questo caso ha anche lo stesso insieme di convergenza, infatti non converge per $x = 1$ e $x = 7$. Abbiamo anche gli stessi insiemi di convergenza totale $[a, b] \subset (1, 7)$. Inoltre nell'intervallo $(1, 7)$ è possibile derivare per serie, ovvero è verificata l'uguaglianza:

$$k'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3 - \sqrt{n}}{n \cdot 3^n}(x-4)^{n-1}$$

Esercizio 3.9. *Si consideri la serie* $s = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln(x))^n}{n}$

a) Determinare l'insieme di convergenza della serie

b) Determinare la somma della serie

Soluzione. a) La serie si presenta non esattamente come una serie di potenze ma è facile ricondurla a ciò tramite la sostituzione $t = \ln(x)$. In questo modo si ottiene la serie:

$$s_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}$$

Che ha raggio di convergenza:

$$R = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \to +\infty} e^{\frac{\ln(n)}{n}} = 1$$

Possiamo subito dire che la serie ha insieme di convergenza puntuale $I = [-1, 1)$, infatti per $t = -1$ si ottiene una serie che converge per il criterio di Leibniz mentre per $t = 1$ si ottiene la serie armonica che diverge. Tornando quindi alla variabile originale si ha che s converge per $[\frac{1}{e}, e)$.

b) Partiamo dallo sviluppo di Taylor noto che assomiglia di più alla nostra serie:

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} \quad \forall x \in (-1, 1]$$

Ponendo $x = -t$ abbiamo:

$$\ln(1 - t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(-1)^n \cdot t^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-t^n}{n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} \quad \forall t \in [-1, 1)$$

Con un altro cambio di variabile $t = \ln(x)$ si ottiene:

$$\ln(1 - \ln(x)) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln(x))^n}{n} \quad \forall x \in \left[\frac{1}{e}, e\right)$$

Da cui concludiamo che la somma della nostra serie di partenza è $s(x) = -\ln(1 - \ln(x))$.

Esercizio 3.10. *Sia la serie* $s = \sum_{n=1}^{+\infty} nt^n$

a) Determinare gli insiemi dove la serie converge totalmente e puntualmente

b) Determinare la somma della serie (Suggerimento: raccogliere una t nella serie)

c) Determinare l'insieme di convergenza di $\sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot (\frac{x-1}{x-2})^n$

Soluzione. *a*) Si tratta di una serie di potenze centrata in $x_0 = 0$, calcoliamo il raggio di convergenza:

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e^{\frac{\ln n}{n}}} = 1.$$

Quindi la serie converge assolutamente e puntualmente in $I = (-1, 1)$, non è necessario analizzare la convergenza negli estremi perché è ovvio che in questi punti la serie non converga. La convergenza totale si ha per ogni intervallo $[a, b] \subset I$.

b) Raccogliendo una t otteniamo ciò che segue:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nt^n = \sum_{n=1}^{+\infty} t \cdot nt^{n-1} = t\sum_{n=1}^{+\infty} nt^{n-1} = t\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{dt}(t^n)$$

Siccome è una serie di potenze, all'interno dell'intervallo $(-R, R)$ è possible derivare termine a termine:

$$t\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d}{dt}(t^n) = t \cdot \frac{d}{dt}\left[\sum_{n=1}^{+\infty} t^n\right] = t \cdot \frac{d}{dt}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} t^n - 1\right] = t \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-t} - 1\right) = \frac{t}{(1-t)^2}$$

Si noti che tale somma della serie vale $\forall t \in I$.

c) Una possibile idea è ricondurre la serie data alla serie iniziale ed è possibile fare ciò ponendo $t = \frac{x-1}{x-2}$ e poi risolvendo un sistema di disequazioni fratte per adattare correttamente l'intervallo al cambiamento di variabili. Un'altra idea può essere ricondurre la serie data ad una generica serie di potenze tramite la sostituzione $\frac{1}{t} = x - 2, t \neq 0$ così da ottenere:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot \left(\frac{\frac{1}{t}+1}{\frac{1}{t}}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot (t+1)^n$$

Questa è una semplice serie di potenze centrata in $x_0 = -1$ che ha raggio di convergenza $R = 1$. Quindi converge assolutamente e puntualmente in $E = (-2, 0)$ (per gli estremi si può facilmente verificare che non converge, infatti in nessuno dei due casi il termine generale tende a 0 per $n \to +\infty$). Tornando alla variabile originale quindi abbiamo che la serie data converge $\forall x \in (-\infty, \frac{3}{2})$.

Esercizio 3.11. *Discutere la convergenza e determinare la somma di* $s := \sum_{n=1}^{+\infty} (x-5)^n \frac{(-7)^n}{n!}$.

Soluzione. *a*) Si tratta di una serie di potenze centrata in $x_0 = 5$, calcoliamo il raggio di convergenza:

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(-7)^n}{n!} \cdot \frac{(n+1)!}{(-7)^{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(-7)^n}{n!} \cdot \frac{n! \cdot (n+1)}{(-7)^n \cdot (-7)}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{7} = +\infty$$

Quindi la funzione converge assolutamente e puntualmente $\forall x \in \mathbb{R}$ e totalmente in ogni intervallo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$.

b) Compattando l'espressione della serie si ottiene:

$$s = \sum_{n=1}^{+\infty} (x-5)^n \frac{(-7)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(35-7x)^n}{n!}$$

Che è evidentemente molto simile allo sviluppo di Taylor di e^{35-7x} (lo si vede facilmente imponendo $t = 35 - 7x$), ma differisce da quest'ultimo per il fatto che in questa serie l'indice di partenza è $n = 1$ e non $n = 0$. Ci serve quindi di sottrarre il termine corrispondenete a $n = 0$, che vale 1. Concludiamo che la somma della serie s è $s(x) = e^{35-7x} - 1$.

Esercizio 3.12. *Studiare la convergenza puntuale e totale di* $s = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{5^n}$.

Soluzione. La serie data corrisponde alla serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{5^n} \quad \text{Per } t = x^2$$

Che è una serie di potenze centrata sull'origine, di cui possiamo facilmente calcolare il raggio di convergenza:

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{5^n} = 5$$

Quindi abbiamo convergenza assoluta e puntuale per $t \in (-5, 5)$ (è facile vedere che per gli estremi la serie non converge nè assolutamente nè puntualmente in quanto il termine generale non è infinitesimo). La convergenza assoluta è verificata per $[a, b] \subset (-5, 5)$. Tornando quindi alla variabile iniziale si ha che la serie converge assolutamente e puntualmente $\forall x \in I := (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$ e totalmente $\forall [a, b] \subset I$.

Esercizio 3.13. *Calcolare con un errore inferiore a* 10^{-4} *l'integrale* $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx$.

Soluzione. La funzione integranda è nota per non avere una primitiva esprimibile in termini di funzioni elementari. Notiamo che $\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ quindi possiamo pensare prolunguare per continuità l'integranda, ponendo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Ricordandoci lo sviluppo in serie del seno:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Abbiamo che per $x \neq 0$:

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n+1)!}$$

Mentre per $x = 0$ provando con la stessa serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 0^{2n}}{(2n+1)!} = 1 + 0 + 0 + 0 + ... = 1 = f(0)$$

Ma quindi $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n+1)!}$$

Cioè la convergenza è totale su $[a,b] \subset \mathbb{R}$ e in particolare lo è su $[0,1]$ che è l'intervallo di integrazione che ci interessa. Dunque per il teorema di integrabilità termine a termine abbiamo che:

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left[\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}\right]_0^1$$

$$= 1 \; - \; \frac{1}{3\cdot 3!} \; + \; \frac{1}{5\cdot 5!} \; - \; \frac{1}{7\cdot 7!} \; + \; \frac{1}{9\cdot 9!} \; - \; \cdots$$

Ora si tratta di capire dove arrestarsi a calcolare i termini. Si può pensare di sfruttare il criterio di Leibniz e in particolare il risultato sulla stima del resto per serie alternanti. Il teorema afferma che se anzichè sommare infiniti termini ne vengono sommati $n-1$ allora l'errore rispetto al reale valore di convergenza della serie sarà in modulo minore rispetto al valore del termine n-esimo. Nello specifico calcolando qualche valore si ha che:

$$\frac{1}{5\cdot 5!} = \frac{1}{5\cdot 120} = \frac{1}{600} > 10^{-4}$$

$$\frac{1}{7\cdot 7!} = \frac{1}{49\cdot 6!} = \frac{1}{49\cdot 720} < 10^{-4}$$

Quindi approssimando per eccesso si ha che:

$$I \approx 1 \; - \; \frac{1}{3\cdot 3!} \; + \; \frac{1}{5\cdot 5!} = \frac{1703}{1800} = 0.946\overline{1}$$

4 Serie trigonometriche e serie di Fourier

Esercizio 4.1. *Data la funzione* 2π*-periodica* $f(x) = \frac{1}{4}(x - |x|)^2 \ \forall x \in (-\pi, \pi]$

a) Determinare il grafico su $(-2\pi, 2\pi)$

b) Determinare la serie di Fourier di f

c) Discutere la convergenza puntuale

Soluzione. a) Possiamo riscrivere f come la seguente funzione definita a tratti:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x+x)^2 = x^2 & \text{se } x \in (-\pi, 0) \\ 0 & \text{se } x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Estendendo per periodicità f e rendendola una funzione 2π-periodica, ottieniamo il grafico:

b) Ricordiamo che la serie di Fourier di f è:

$$s(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Iniziamo a calcolare i coefficienti:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} x^2 dx + \int_{0}^{\pi} 0 dx \right) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\pi}^{0} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)dx = \int_{-\pi}^{0} x^2 \cos(nx)dx$$

Calcoliamo una primitiva per parti:

$$\int x^2 \cos(nx)dx = \frac{x^2 \sin(nx)}{n} - \int \frac{2x \sin(nx)}{n} dx = \frac{x^2 \sin(nx)}{n} + \frac{2x \cos(nx)}{n^2} - \frac{2 \sin(nx)}{n^3}$$

Valutando tra gli estremi abbiamo che:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2 \sin(nx)}{n} + \frac{2x \cos(nx)}{n^2} - \frac{2 \sin(nx)}{n^3} \right]_{-\pi}^{0} = \frac{2 \cdot (-1)^n}{n^2}$$

Passiamo a b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} x^2 \sin(nx)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{2x \sin(nx)}{n^2} - \frac{x^2 \cos(nx)}{n} + \frac{2 \cos(nx)}{n^3} \right]_{-\pi}^{0} = \frac{1}{\pi} \left(2 \cdot \frac{1-(-1)^n}{n^3} + \frac{\pi^2 (-1)^n}{n} \right) =$$

$$= 2 \cdot \frac{1-(-1)^n}{\pi n^3} + \frac{\pi (-1)^n}{n}$$

Concludiamo che la serie di Fourier di f è:

$$s(x) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \frac{2(-1)^n}{n^2} \cos(nx) + \left[2 \cdot \frac{1-(-1)^n}{\pi n^3} + \frac{\pi(-1)^n}{n} \right] \sin(nx) \right\}$$

c) Osserviamo che f è regolare a tratti nel suo intervallo di definizione. La teoria dunque garantisce che la serie converga $\forall x \in \mathbb{R}$ e in particolare converga ad f nei punti in cui quest'ultima è continua, cioè per $x \neq \pi + 2k\pi$. Per ognuno di questi punti problematici invece la serie converge alla media tra limite destro e sinistro:

$$s(\pi + 2k\pi) = \frac{1}{2} \lim_{x \to \pi^-} f(x) + \frac{1}{2} \lim_{x \to \pi^+} f(x) = \frac{0 + \pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{2}$$

Che non è uguale al valore che f assume in questi punti (0) per cui la serie converge ad f $\forall x \neq \pi + 2k\pi$.

Esercizio 4.2. *Sia f dispari e 2π-periodica tale che*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \in (0, \pi) \\ 0 & se\ x = 0 \vee x = \pi \end{cases}$$

a) Disegnare il grafico di f e calcolarne la serie di Fourier

b) Discutere la convergenza puntuale, totale e in media quadratica della serie di Fourier

c) Dedurre il valore di $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

d) Dedurre il valore di $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

Soluzione. a) Considerando che f è dispari e 2π-periodica, il grafico di f è:

Stavolta il calcolo dei coefficienti di Fourier è leggermente più leggero per il fatto che la funzione considerata è dispari e quindi integrandola su un intervallo simmetrico si ottiene zero:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$$

Ora ricordiamoci che una funzione dispari moltiplicata per una dispari da una funzione pari, infatti siano f e g funzioni dispari allora:

$$h(-x) = f(-x)g(-x) = [-f(x)][-g(x)] = f(x)g(x) = h(x)$$

E che una funzione dispari moltiplicata per una funzione pari da una funzione dispari infatti sia f pari e g dispari:

$$h(-x) = f(-x)\,g(-x) = [-f(x)]\,[g(x)] = -f(x)\,g(x) = -h(x)$$

Dunque tornando al calcolo dei nostri coefficienti:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} 1 \cdot \sin(nx) = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} = 2 \cdot \frac{1 - (-1)^n}{n\pi}$$

Concludiamo che la serie di Fourier di f è:

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2\sin(nx) \cdot \frac{1 - (-1)^n}{n\pi}$$

b) Osserviamo che f è 2π-periodica e regolare a tratti in $[-\pi, \pi]$ quindi per la teoria converge in norma quadratica. Inoltre siccome f è regolare la serie di Fourier converge

$\forall x \in \mathbb{R}$. Dobbiamo tuttavia analizzare la convergenza della serie per i punti in cui f è discontinua ovvero per $x = k\pi$, per questi punti:

$$s(k\pi) = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^-} f(x) + \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-1+1}{2} = 0 = f(k\pi) \quad \text{Per } k \text{ pari}$$

$$s(k\pi) = \frac{1}{2}\lim_{x\to \pi^-} f(x) + \frac{1}{2}\lim_{x\to \pi^+} f(x) = \frac{1-1}{2} = 0 = f(k\pi) \quad \text{Per } k \text{ dispari}$$

Quindi la serie converge precisamente ad f $\forall x \in \mathbb{R}$. Resta da verificare la convergenza totale della serie:

$$\sum \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| 2\sin(nx) \cdot \frac{1-(-1)^n}{n\pi} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n\pi} = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

Che diverge. Quindi la serie di Fourier di f non converge totalmente.

$c)$ Facendo il cambio di variabile $n = 2m+1$ la nostra serie di fourier diventa:

$$s(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} 2\sin[(2m+1)x] \cdot \frac{1-(-1)^{2m+1}}{(2m+1)\pi} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{4}{(2m+1)\pi} \cdot \sin[(2m+1)x]$$

Adesso notiamo che per $x = \pi/2$ quest'ultima diventa:

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{4}{(2m+1)\pi} \cdot (-1)^m = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1}$$

Che è proprio la serie di cui stavamo cercando il valore di convergenza ma moltiplicata per un fattore $\frac{\pi}{4}$. Ma allora sapendo che la serie di Fourier converge ad f per $x = \frac{\pi}{2}$ possiamo concludere che:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{4} = 1 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$d)$ Siccome f è 2π-periodica e regolare a tratti su $[-\pi, \pi]$ vale l'identità di Bessel-Parseval:

$$2a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

Nel nostro caso:

$$2a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 = \sum_{m=0}^{+\infty} b_{m+1}^2 = \sum_{m=0}^{+\infty} \left[\frac{4}{\pi\cdot(2m+1)}\right]^2 = \frac{16}{\pi^2}\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2$$

Applicando l'identità:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = 2 \cdot \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{8}$$

5 Calcolo differenziale per funzioni in più variabili

Esercizio 5.1. *Stabilire se esiste e in tal caso calcolare* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x^2+y^2}$.

Soluzione. Tentiamo prima di tutto qualche restrizione della funzione. Si può provare la restrizione all'asse y:

$$f(0,y) = \frac{y^2}{0^2+y^2} = 1 \xrightarrow[y\to 0]{} 1 \implies \text{se il limite esiste, vale 1.}$$

Tentiamo ora una restrizione all'asse x:

$$f(x,0) = \frac{0}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \implies \text{se il limite esiste, vale 0.}$$

Abbiamo trovato due valori diversi per due direzioni diverse, quindi il limite non esiste.

Esercizio 5.2. *Stabilire se esiste e in tal caso calcolare* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^4}$.

Soluzione. Si noti che questa non è una forma indeterminata in quanto il denominatore è sempre positivo e tende a zero quando $(x,y)\to(0,0)$, quindi semplicemente:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^4} = +\infty.$$

Esercizio 5.3. *Stabilire se esiste e in tal caso calcolare* $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^2\ln(x)}{x^2-2x+1+y^2}$.

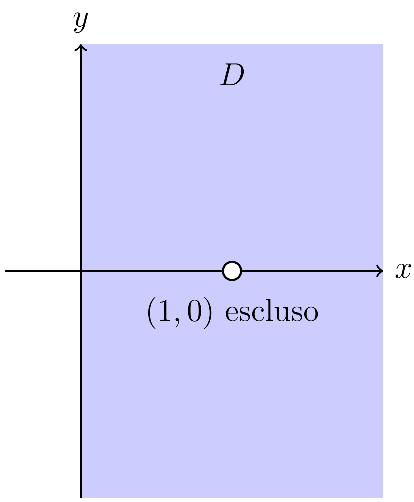
Soluzione. Ha senso innanzitutto chiedersi se ha senso il problema di calcolare il limite indicato. Il dominio della funzione è

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0\} \setminus \{(1,0)\}$$

Infatti alla condizione che l'argomento del logaritmo sia strettamente maggiore di 0 bisogna aggiungere la condizione che il denominatore non si annulli.

$$x^2-2x+1+y^2 \neq 0 \leftrightarrow (x-1)^2+y^2 = 0 \leftrightarrow x\neq 1 \wedge y\neq 0$$

Il punto (1,0) è quindi di accumulazione per il dominio della nostra funzione e quindi ha senso voler calcolare il limite, che si presenta in forma indeterminata $\frac{0}{0}$.



Dominio della funzione: $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0\} \setminus \{(1,0)\}$

Proviamo a fissare $x = 1$ e lasciare variare la y.

$$f(1, y) = \frac{y^2 \ln(1)}{y^2} = 0 \xrightarrow[(x,y)\to(1,0)]{} 0 \implies \text{se il limite esiste, vale 0.}$$

Si può anche provare a fissare la y a 0 e lasciar variare la x:

$$f(x, 0) = \frac{0 \ln(x)}{(x-1)^2} = 0 \xrightarrow[(x,y)\to(1,0)]{} 0 \implies \text{se il limite esiste, vale 0.}$$

Tentando anche percorsi alternativi si arriva sempre alla stessa conclusione. Questo significa che abbiamo trovato un candidato limite. Per verificare che $l = 0$ sia effettivamente il limite della funzione, applichiamo il teorema del confronto. L'idea in generale è che se vogliamo mostrare:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0.$$

Basta trovare una funzione $g(x, y) \geq 0$ tale che:

$$|f(x, y)| \leq g(x, y), \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y) = 0$$

Allora possiamo scrivere immediatamente:

$$-g(x, y) \leq f(x, y) \leq g(x, y)$$

E quindi per il teorema del confronto:

$$0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} -g(x, y) \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y) = 0 \implies \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$$

In questo caso si può pensare di scegliere $g(x, y) = |f(x, y)|$ e quindi se si riuscisse a dimostrare che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x, y)| = 0$ sarebbe dimostrato che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$. Iterando questo ragionamento si ha che:

$$0 \leq |f(x, y)| = \frac{y^2 |\ln(x)|}{(x-1)^2 + y^2} \leq \frac{y^2 |\ln(x)|}{y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(1,0)]{} 0$$

E quindi per confronto:

$$|f(x, y)| \xrightarrow[(x,y)\to(1,0)]{} 0$$

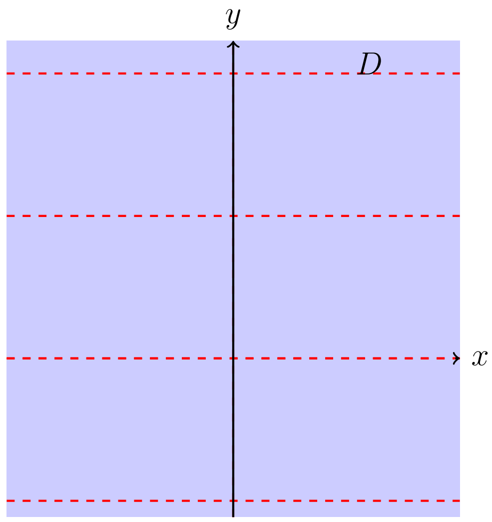
Da cui si conclude:

$$f(x, y) \xrightarrow[(x,y)\to(1,0)]{} 0$$

Esercizio 5.4. *Stabilire se esiste e in tal caso calcolare* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x| + y^2}{x^2 \sin(|y|)}$. *Precisare il dominio della funzione, verificando che il problema di stabilire il limite abbia senso.*

Soluzione. L'unica condizione da imporre per il dominio è che il denominatore non si annulli, così facendo otteniamo:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0,\ y \neq k\pi \ \ \forall k \in \mathbb{Z}\}$$



Dominio della funzione: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0,\ y \neq k\pi\ \ \forall k \in \mathbb{Z}\}$

Il dominio D in particolare è aperto, non è chiuso, non è limitato e non è connesso per archi. L'origine è un punto di accumulazione per D per cui ha perfettamente senso il problema del calcolo del limite. Proviamo a restringere la funzione alla bisettrice $y = x$:

$$f(x, x) = \frac{|x| + x^2}{x^2 \sin(|x|)} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\sim} \frac{|x|}{x^2|x|} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} +\infty \implies \text{se il limite esiste, vale} + \infty$$

Per verificare che questo candidato sia l'effettivo limite, possiamo procedere applicando il teorema del confronto tramite una minorazione ad esempio così:

$$f(x, y) = \frac{|x| + y^2}{x^2 \sin(|y|)} \geq \frac{|x|}{x^2 \sin(|y|)} = \frac{1}{|x| \sin |y|} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} +\infty$$

Quindi per confronto possiamo concludere che $f(x, y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} +\infty$

Esercizio 5.5. *Calcolare se possibile* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin(\frac{1}{x} + y)$

Soluzione. Il dominio della funzione è $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ quindi $(0, 0)$ è punto di accumulazione, approcciando questo punto dall'asse x si ha:

$$f(x, 0) = \sin \frac{1}{x}$$

Che non ammette limite per $(x, y) \to (0, 0)$, ma allora possiamo già concludere che il limite non esiste, in quanto se esistesse dovrebbe essere lo stesso per ogni direzione ma ne abbiamo trovata una per cui non esiste.

Esercizio 5.6. *Sia:*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2+y^2} & \textit{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \textit{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Stabilire se f è continua sul suo dominio.
b) Stabilire se f è derivabile sul suo dominio ed eventualmente calcolare le derivate.
c) Stabilire se f è differenziabile sul dominio.
d) Determinare le derivate direzionali massima e minima e l'equazione del piano tangente relative al punto $(1, 1)$.

Soluzione. *a*) Il dominio della funzione è $D = \mathbb{R}^2$. Per $(x, y) \neq (0, 0)$, f è continua in quanto rapporto di funzioni continue. Studiamo la continuità nell'origine verficiando se $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0)$:

$$0 \leq |f(x, y)| = \frac{y^4}{x^2 + y^2} \leq \frac{y^4}{y^2} = y^2 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

Il limite è 0, dunque f è continua su tutto il dominio.

b) Per $(x, y) \neq (0, 0)$, f è derivabile e le derivate parziali sono:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2xy^4}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4y^3(x^2 + y^2) - 2y^5}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2y^5 + 4x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

Nell'origine applichiamo la definizione:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h\to0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{k\to0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k\to0} \frac{k^4/k^2}{k} = \lim_{k\to0} k = 0$$

La funzione è quindi derivabile in tutto $\mathbb{R}^2$.

c) Per il teorema del differenziale totale, f è differenziabile se le derivate parziali sono continue. Studiamole in $(0, 0)$:

- $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| = \frac{2|x|y^4}{(x^2+y^2)^2} \leq \frac{2|x|y^4}{y^4} = 2|x| \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$. Continua in $(0, 0)$.
- Per $\frac{\partial f}{\partial y}$, passiamo in coordinate polari: $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$.

$$\frac{|2\rho^5 \sin^5 \theta + 4\rho^5 \cos^2 \theta \sin^3 \theta|}{\rho^4} = \rho|2 \sin^5 \theta + 4 \cos^2 \theta \sin^3 \theta| \leq 6\rho \xrightarrow{\rho\to0} 0$$

Poiché le derivate parziali sono continue, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ed è quindi differenziabile.

d) In $(1, 1)$, abbiamo $f(1, 1) = 1/2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = -1/2$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 3/2$. L'equazione del piano tangente è:

$$z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x - 1) + \frac{3}{2}(y - 1)$$

Il gradiente è $\nabla f(1, 1) = (-1/2, 3/2)$ con norma $\|\nabla f\| = \sqrt{10}/2$.

- La derivata direzionale **massima** è $\|\nabla f(1, 1)\| = \frac{\sqrt{10}}{2}$.
- La derivata direzionale **minima** è $-\|\nabla f(1, 1)\| = -\frac{\sqrt{10}}{2}$.

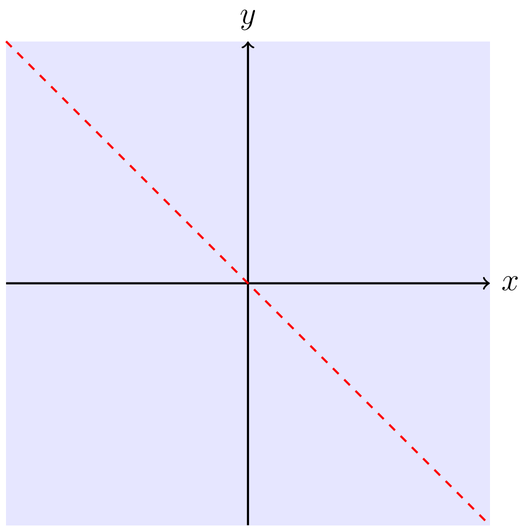
Esercizio 5.7. *Se possibile calcolare i limiti nell'origine di:*

a)$f(x, y) = \frac{xy}{(x+y)^2}$

b)$g(x, y) = \frac{xy}{x+y}$

Soluzione. Per entrambe le funzioni il dominio è:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq -x\}$$



Dominio delle funzioni

Si vede subito che $(0,0)$ è punto di accumulazione per il dominio quindi ha senso porsi il problema del limite nell'origine.

a) Provando ad avvicinarsi al punto da una generica retta $y = mx$ si ha che:

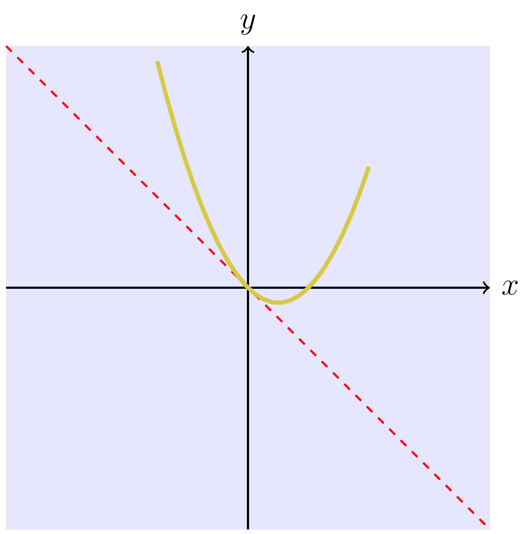
$$f(x,mx) = \frac{mx^2}{(x+mx)^2} = \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2+2mx^2} = \frac{1}{1+m^2+2m} = \frac{1}{(1+m)^2}$$

Ma quindi variando il coefficiente angolare ho un valore del limite diverso ogni volta. Si conclude che il limite nell'origine di $f(x,y)$ non esiste.

b) Tentando di avvicinarsi all'origine dalla bisettrice $y = x$ si ha che:

$$g(x,x) = \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2} \xrightarrow[(x,y)\to 0]{} 0 \implies \text{se il limite esiste, vale } 0$$

Provando con altri cammini classici si arriva sempre alla stessa conclusione. Un'idea è notare che siccome la funzione ha un problema sulla bisettrice potrebbe essere utile provare con qualche curva tangente alla bisettrice come ad esempio $y = -x + x^2$:



Così facendo si ha:

$$g(x,-x+x^2)=\frac{-x^2+x^3}{x^2}=-1+x\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}-1 \implies \text{se il limite esiste, vale -1}$$

Quindi possiamo concludere che il limite non esiste.

Esercizio 5.8. *Sia:*

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2+y^4} & \textit{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \textit{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Studiare nell'origine continuità, derivabilità con continuità e differenziabilità
b) Calcolare tutte le derivate direzionali esistenti in (0,0)

Soluzione. a) Come prima, verifichiamo la continuità nell'origine (altrove è automaticamente verificata) applicando la definizione. Tramite una maggiorazione possiamo subito dire che:

$$0\leq|f(x,y)|=f(x,y)\leq\frac{x^2y^2}{x^2}=y^2\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0=f(0,0)$$

Quindi f è continua in $(0,0)$. Verifichiamo ora che sia derivabile controllando se esistono le due derivate parziali nell'origine:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\frac{0}{h}=0\xrightarrow[h\to0]{}0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\frac{0}{h}=0\xrightarrow[h\to0]{}0$$

Quindi f è derivabile nell'origine. Vediamo se lo è con continuità verificando la continuità nell'origine delle derivate parziali:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|_{(x,y)\neq(0,0)}=\frac{2xy^6}{(x^2+y^4)^2}$$

Con la restrizione $x=y^2$ vediamo subito che:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}(y^2,y)\right|_{(x,y)\neq(0,0)}=\frac{2y^8}{4y^8}=\frac{1}{2}\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}\frac{1}{2}\neq0=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

Quindi non è neanche necessario controllare la continuità dell'altra derivata nell'origine, possiamo già concludere che f non è derivabile con continuità siccome una delle due derivate non è continua. Per stabilire se f è differeziabile nell'origine calcoliamo il limite:

$$c(x,y)=\frac{f(x,y)-[f(0,0)+f_x(0,0)(x-0)+f_y(0,0)(y-0)]}{||(x-y)-(0,0)||}=\frac{f(x,y)-0}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x^2y^2}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}$$

Se questa funzione tendesse a 0 per $(x,y)\to0$ allora f sarebbe differenziabile nell'origine.

$$0\leq c(x,y)\leq\frac{x^2y^2}{x^2\sqrt{y^2}}=\frac{y^2}{\sqrt{y^2}}=|y|\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$$

Quindi f è differenziabile nell'origine.

b) Siccome f è differenziabile possiamo dire che esistono tutte le derivate direzionali nell'origine, che al variare del versore $\vec{v}$ saranno date da:

$$D_{\vec{v}}f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \vec{v} = (0,0) \cdot \vec{v} = 0$$

Cioè tutte le derivate direzionali sono nulle nell'origine.

Esercizio 5.9. *Stabilire se la funzione $f(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}$ è differenziabile sul suo dominio naturale e in tal caso calcolare l'equazione del piano tangente all'origine.*

Soluzione. Il dominio naturale di f è senza dubbio $\mathbb{R}^2$ infatti non abbiamo nessun problema di definizione. Cerchiamo di stabilire dove questa funzione è derivabile, calcolando le derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4x}{3(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}} \text{ per } (x,y) \neq (0,0)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4y}{3(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}} \text{ per } (x,y) \neq (0,0)$$

Adesso cerchiamo di stabilire con la definizione se f è derivabile nell'origine o meno:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{\frac{4}{3}}}{h} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{\frac{4}{3}}}{h} = 0$$

Quindi la funzione è derivabile nell'origine e la sua derivata vale 0. Se riuscissimo a verificare che le derivate sono continue nell'origine avremmo verificato che $f \in C^1$ e quindi potremmo concludere che f è differenziabile. Cerchiamo di farlo applicando la definizione di continuità alle derivate. Si tratta quindi di valutare i limiti:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x}{3(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}} \quad , \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4y}{3(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}}$$

Prendendo ad esempio il primo possiamo passare in coordinate polari e poi effettuare una maggiorazione rispetto al modulo come segue:

$$\begin{aligned}
|f(\rho,\theta)| &= \left| \frac{4\rho\cos(\theta)}{3[\rho^2(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta))]^{\frac{1}{3}}} \right| \\
&= \left| \frac{4\rho\cos(\theta)}{3\rho^{\frac{2}{3}}} \right| \\
&= \frac{4|\rho| \cdot |\cos(\theta)|}{3|\rho|^{\frac{2}{3}}} \\
&= \frac{4}{3}|\cos(\theta)| \frac{\rho}{\rho^{\frac{2}{3}}} \\
&= \frac{4}{3}|\cos(\theta)|\rho^{1-\frac{2}{3}} \\
&= \frac{4}{3}|\cos(\theta)|\rho^{\frac{1}{3}} \leq \frac{4}{3}\rho^{\frac{1}{3}} \xrightarrow[\rho\to 0]{} 0
\end{aligned}$$

Per cui i due limiti sopra esistono e sono entrambi pari a 0 (per il secondo può essere applicato lo stesso esatto procedimento che per il primo). Questo dimostra che la funzione è derivabile con continuità e quindi differenziabile sul proprio dominio. L'equazione del piano tangente nell'origine è data da:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Che nel nostro caso si riduce semplicemente a $z = 0$.

Esercizio 5.10. *Sia* $f(x, y) = e^x \cos(y)$*:*

a) Verificare che f è differenziabile e in particolare di classe C^2 in un intorno di (0,0)

b) Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 2 centrato in $(0, 0)$

Soluzione. a) La funzione è una composizioni di funzioni elementari di classe C^∞ su $\mathbb{R}$ quindi f stessa è di classe C^∞ e in particolare di classe C^2 in ogni punto compresa l'origine.

b) Iniziamo calcolando tutte le derivate parziali prime:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos(y) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -e^x \sin(y)$$

Poi le derivate seconde:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x \cos(y) \quad \frac{\partial f}{\partial y \partial x} = -e^x \sin(y) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^x \cos(y) \quad \frac{\partial f}{\partial x \partial y} = -e^x \sin(y)$$

A questo possiamo calcolare il polinomio di Taylor centrato nell'origine tramite l'espressione:

$$\begin{aligned} T_2(x, y) = f(x_0, y_0) &+ \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right) \end{aligned}$$

Che nel nostro caso corrisponde a:

$$T_2(x, y) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$$

Esercizio 5.11. *Sia:*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{y} & se\ y \neq 0 \\ 0 & se\ y = 0 \end{cases}$$

a)Stabilire se f è continua, derivabile, differenziabile nell'origine.

b) Precisare se f ammette altre derivate direzionali nell'origine oltre a f_x ed f_y

c) Si supponga di non sapere che f è discontinua nell'origine, cosa si potrebbe dedurre dai valori delle derivate direzionali?

Soluzione. Il dominio della funzione è $\mathbb{R}^2$, affinchè f sia continua nell'origine occorrerebbe dimostrare che $f \xrightarrow[(x,y)\to 0]{} 0$ ma si verifica facilmente che non è così tramite ad esempio la restrizione:

$$f(x, x^2) = \frac{x^2}{x^2} = 1 \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 1$$

Quindi il limite non esiste e se ne deduce che f non è continua nell'origine. Siccome f non è continua nell'origine non può essere differenziabile nell'origine. Cerchiamo di calcolare le derivate nell'origine:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

Entrambe le derivate parziali esistono finite nel punto quindi f è derivabile nell'origine.

b) Sia $\vec{v} = (a,b)$ un generico vettore tale che $||\vec{v}|| = \sqrt{a^2+b^2} = 1$ con $a, b \neq 0$. Calcoliamo la generica derivata direzionale nel punto come:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+ta, y_0+tb)-f(x_0,y_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(ta,tb)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2a^2}{t^2b} = \lim_{t\to 0} \frac{a^2}{b} = \frac{a^2}{b}$$

Quindi esiste la generica derivata direzionale relativa al versore $\vec{v}$ e vale $\frac{a^2}{b}$.

c) Anche senza sapere che f è discontinua avremmo potuto concludere che f non è differenziabile nell'origine, infatti se lo fosse varrebbe la formula del gradiente:

$$D_{\vec{v}} = \nabla f(0,0)\cdot\vec{v} = (0,0)\cdot\vec{v} = 0$$

Ma in realtà noi sappiamo che per $\vec{v}$ generico la derivata direzionale vale sempre $\frac{a^2}{b}$. Da questo assurdo avremmo potuto dedurre che f non è differenziabile nell'origine.

Esercizio 5.12. *Sia:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y}\cdot e^{-\frac{y^2}{x^4}} & \textit{se } x \neq 0 \\ 0 & \textit{se } x = 0 \end{cases}$$

Stabilire se nell'origine se:

a) f è continua
b) f ammette derivate direzionali precisando eventualmente in quali direzioni
c) Vale la formula del gradiente
d) f è differenziabile

Soluzione. a) Verifichiamo la continuità tramite la definizione applicando una maggiorazione al modulo della funzione per $x \neq 0$:

$$|f(x,y)| = |y|^{\frac{1}{3}}\cdot e^{-\frac{y^2}{x^4}} \leq |y|^{\frac{1}{3}} \xrightarrow[(x,y)\to 0]{} 0$$

Quindi la funzione è continua nell'origine.

b) Sia $\vec{v} = (a,b)$ un generico vettore tale che $||\vec{v}|| = \sqrt{a^2+b^2} = 1$ con $a, b \neq 0$. Calcoliamo la generica derivata direzionale nel punto come:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+ta,\, y_0+tb)-f(x_0,y_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(ta,tb)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{tb}\, e^{-\frac{t^2b^2}{t^4a^4}}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \sqrt[3]{b}\, \frac{e^{-\frac{t^2 b}{t^4 a^4}}}{t^{2/3}} \quad \text{Per } a \neq 0$$

Adesso se $b = 0$ (che equivale ad imporre di calcolare la derivata parziale rispetto a x) allora l'intera espressione va a 0, da cui si deduce $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Mentre se $b \neq 0$:

$$\lim_{t\to 0} \sqrt[3]{b}\, \frac{e^{-\frac{t^2 b^2}{t^4 a^4}}}{t^{2/3}} \underset{u=1/t^2}{=} \lim_{u\to +\infty} \sqrt[3]{b}\, \frac{u^{1/3}}{e^{\frac{b^2}{a^4}u}} = 0$$

Quindi $D_{\vec{v}} f(0,0) = 0$ se $a, b \neq 0$. Mentre se $a = 0$ e di conseguenza $b = \pm 1$ per rispettare la condizione di versore di $\vec{v}$:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + ta,\, y_0 + tb) - f(x_0, y_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0, \pm t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

Possiamo quindi concludere che $D_{\vec{v}} f(0,0) = 0 \ \forall \vec{v}$.

c) La formula del gradiente è valida infatti:

$$\nabla f(0,0) \cdot \vec{v} = (0,0) \cdot \vec{v} = 0 = D_{\vec{v}} f(0,0) \quad \forall \vec{v}$$

d) Verifichiamo che f sia differenziabile nell'origine con la definizione. Consideriamo:

$$c(x,y) = \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0) \cdot (x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Considerando la restrizione $y = x^2$ si ottiene:

$$\frac{f(x,x^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{e \cdot \sqrt{x^2 + x^4}} = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{e \cdot \sqrt{x^2 + x^4}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{e \cdot |x|} = \frac{1}{e \cdot |x|^{\frac{1}{3}}} \xrightarrow[(x,y)\to 0]{} +\infty$$

Per cui non è vero che $c(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to 0]{} 0$ e quindi si conclude che f non è differenziabile nell'origine.

Esercizio 5.13. *Sia* $f(x,y) = e^{\sin(x^2+y^4)}$

a) Calcolare la derivata direzionale di f *in* $(\sqrt{\pi}, 0)$ *nella direzione parallela alla retta* $y = 3x + 1$ *nel verso delle ascisse crescenti.*

b) Calcolare il valore della derivata direzionale massima in $(\sqrt{\pi}, 0)$

c) Calcolare il piano tangente in $(\sqrt{\pi}, 0)$

d) Se possibile, scrivere l'equazione della tangente alla linea di livello di f *passante dal punto*

Soluzione. a) Possiamo trovare la direzione della retta (a,b) risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} m = 3 = \tan(\theta) = \frac{b}{a} \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

Risolvendo si ottiene che la direzione della retta è data dal versore $(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}})$. A questo punto prima di calcolare la derivata direzionale occorre verificare che f sia differenziabile nel punto, ma questo è automaticamente verificato dal fatto che f è di classe C^∞ (e in particolare C^1) in quanto composizione di funzioni C^∞. Calcoliamo quindi la derivata nel punto relativa alla direzione trovata con la formula del gradiente:

$$f_x(x,y) = 2x\cos(x^2+y^4)\cdot e^{\sin(x^2+y^4)} \implies f_x(\sqrt{\pi},0) = -2\sqrt{\pi}$$

$$f_y(x,y) = 4y^3\cos(x^2+y^4)\cdot e^{\sin(x^2+y^4)} \implies f_y(\sqrt{\pi},0) = 0$$

$$D_{\vec{v}}f(\sqrt{\pi},0) = (-2\sqrt{\pi},0)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = -2\sqrt{\frac{\pi}{10}}$$

b Il valore della derivata direzionale massima in $(\sqrt{\pi},0)$ vale $||\nabla f(\sqrt{\pi},0)|| = \sqrt{4\pi} = 2\sqrt{\pi}$

c) Siccome f è differenziabile, troviamo l'equazione del piano tangente semplicemente come:

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) = 1 - 2\sqrt{\pi}(x-\sqrt{\pi})$$

d) Questo ultimo punto è sicuramente più complesso. Partiamo dal definire l'insieme di livello relativo al punto $(\sqrt{\pi},0)$. Possiamo trovare la sua equazione per definizione di insieme di livello come $f(x,y) = f(x_0,y_0)$ ovvero nel nostro caso $e^{\sin(x^2+y^4)} = 1$. L'obiettivo è calcolare la derivata di questa curva di livello nel punto $(\sqrt{\pi},0)$ in modo da poter ricavare l'espressione della retta tangente. Tuttavia questa non è una funzione nel piano xy e non è possibile esplicitare y. Siccome però questa funzione è di classe C^1 cioè differenziabile e il gradiente valutato nel punto di nostro interesse è diverso dal vettore nullo, per il teorema del Dini (teorema delle funzioni implicite) possiamo calcolare la derivata implicita della funzione nel punto come:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}(\sqrt{\pi},0) = -\frac{2\sqrt{\pi}}{0}$$

Questo suggerisce che la pendenza sia infinita cioè la retta tangente al punto sia verticale. Ma allora stiamo cercando una retta verticale che passi per il punto $(\sqrt{\pi},0)$ che quindi sarà $x = \sqrt{\pi}$.

Esercizio 5.14. *Sia f la funzione di due variabili definita da*

$$f(x,y) = -x^2 + \log(xy-1)$$

3.1 Determinare e disegnare il dominio D di f e poi specificare se D è aperto/chiuso e se è limitato/illimitato.

3.2 Determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(2,1,f(2,1))$.

3.3 Scrivere la formula di Taylor al secondo ordine relativa al punto $(2,1)$ per la funzione f.

3.4 Stabilire se localmente in un intorno del punto $(2,1)$ il grafico di f si trovi tutto al di sopra o al di sotto del piano tangente calcolato precedentemente.

Esercizio 5.15. *Sia f la funzione di due variabili definita da*

$$f(x, y) = -x^2 + \log(xy - 1)$$

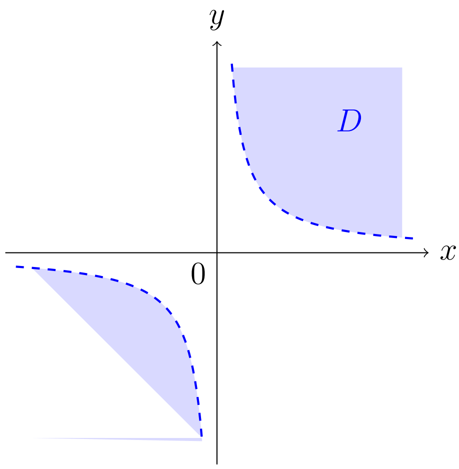
a) Determinare e disegnare il dominio D di f e specificare se D è aperto/chiuso e se è limitato/illimitato.

b) Determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(2, 1, f(2, 1))$.

c) Scrivere la formula di Taylor al secondo ordine relativa al punto $(2, 1)$ per la funzione f.

d) Stabilire se localmente in un intorno del punto $(2, 1)$ il grafico di f si trovi tutto al di sopra o al di sotto del piano tangente.

Soluzione. $a)$ Il dominio D è definito dalla condizione di esistenza del logaritmo $xy-1 > 0$, ovvero $xy > 1$. Geometricamente, rappresenta le regioni interne ai due rami dell'iperbole $y = 1/x$ nel primo e terzo quadrante. Poiché la disuguaglianza è stretta, l'insieme è **aperto** e, non essendo contenuto in alcuna palla di raggio finito, è **illimitato**.



$b)$ Calcoliamo il valore della funzione e del gradiente nel punto $(2, 1)$:

- $f(2, 1) = -2^2 + \log(2 \cdot 1 - 1) = -4 + 0 = -4$.
- $f_x(x, y) = -2x + \frac{y}{xy-1} \implies f_x(2, 1) = -4 + 1 = -3$.
- $f_y(x, y) = \frac{x}{xy-1} \implies f_y(2, 1) = 2$.

L'equazione del piano tangente è $z = f(2, 1) + f_x(2, 1)(x - 2) + f_y(2, 1)(y - 1)$:

$$z = -4 - 3(x - 2) + 2(y - 1) \implies z = -3x + 2y$$

$c)$ La formula di Taylor al secondo ordine centrata in (x_0, y_0) è data da:

$$\begin{aligned} f(x, y) \approx & f(2, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(2, 1)(x - 2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1)(y - 1) \\ & + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, 1)(x - 2)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2, 1)(x - 2)(y - 1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2, 1)(y - 1)^2\right] \end{aligned}$$

Calcoliamo le derivate seconde nel punto $(2, 1)$:

- $f_{xx} = -2 - \frac{y^2}{(xy-1)^2} \implies f_{xx}(2,1) = -2 - 1 = -3.$
- $f_{yy} = -\frac{x^2}{(xy-1)^2} \implies f_{yy}(2,1) = -4.$
- $f_{xy} = f_{yx} = -\frac{1}{(xy-1)^2} \implies f_{xy}(2,1) = -1.$

Sostituendo i valori otteniamo la formula esplicita:

$$f(x,y) \approx -4 - 3(x-2) + 2(y-1) + \frac{1}{2}\left[-3(x-2)^2 - 4(y-1)^2 - 2(x-2)(y-1)\right]$$

d) Per stabilire la posizione relativa del grafico rispetto al piano tangente, studiamo la natura della matrice Hessiana nel punto $(2,1)$:

$$H_f(2,1) = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$\det(H) = (-3)(-4) - (-1)^2 = 11 > 0$ e $f_{xx} = -3 < 0$. La matrice è **definita negativa**, il che indica che la funzione è localmente concava verso il basso. Pertanto, in un intorno del punto $(2,1)$, il grafico della funzione si trova tutto al di sotto del piano tangente.

6 Ottimizzazione libera e vincolata

Esercizio 6.1. *Sia $f(x,y) = 2xy - x^2 - 4\ln(1+y^2)$. Determinare tutti gli eventuale punti critici di f sul suo dominio e classificarli. Nel caso di massimi e minimi specificare se sono relativi o assoluti.*

Soluzione. Il dominio della funzione è $\mathbb{R}^2$ e i punti critici o stazionari sono i punti in cui la funzione f è derivabile e il gradiente si annulla. Nel nostro caso f è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Calcoliamo le derivate parziali:

$$f_x(x,y) = 2y - 2x = 2(y-x) \quad f_y(x,y) = 2x - \frac{8y}{1+y^2}$$

Imponiamo che il gradiente si annulli:

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} y - x = 0 \\ x - \dfrac{4y}{1+y^2} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Dunque i tre punti critici sono $(0,0), (\sqrt{3}, \sqrt{3}), (-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$. Calcoliamo le derivate parziali seconde pure e miste:

$$f_{xx}(x,y) = -2 \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 2 \quad f_{yy}(x,y) = \frac{8y^2 - 8}{(1+y^2)^2}$$

Abbiamo la garanzia che le derivate seconde miste siano uguali dal teorema di Schwarz. Per classificare ogni punto critico proviamo ad usare il criterio della matrice hessiana, iniziamo a calcolarla per $(0,0)$:

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$$

$\det(H_f(0,0)) = 12 > 0$, ci resta da controllare il segno di una delle due derivate seconde pure calcolate nel punto critico (il segno sarà lo stesso per entrambe siccome il determinnate è positivo). In questo caso il segno è negativo, se ne conclude che $(0,0)$ è un punto di massimo relativo. Gli altri due punti critici possono essere analizzati contemporaneamente, infatti producono la stessa matrice hessiana:

$$H_f(\pm 1\sqrt{3}, \pm 1\sqrt{3}) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(H_f(\pm 1\sqrt{3}, \pm 1\sqrt{3})) = -6 < 0$ dunque concludiamo subito che $(\sqrt{3}, \sqrt{3}), (-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ sono punti di sella. Ci manca da stabilire se $(0,0)$ sia un massimo assoluto oltre che relativo ma se analizziamo ad esempio la restrizione:

$$f(x,x) = 2x^2 - x^2 - 4\ln(1+x^2) = x^2 - 4\ln(1+x^2) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

Questo dimostra che f non è superiormente limitata e quindi il punto non può essere si massimo assoluto, in quanto non esiste un massimo assoluto.

Esercizio 6.2. *Sia $f(x,y) = x^2 + (1-x)^3 \cdot y^2$. Determinare tutti gli eventuali estremanti di f, specificando se relativi o assoluti.*

Soluzione. Il dominio di f è $\mathbb{R}^{\nvDash}$ e in più $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Essendo f derivabile sul suo dominio che è un insieme aperto, per il teorema di Fermat eventuali estremanti devono essre punti critici. Questo è fondamentale perché permette di trovare massimi e minimi senza dover analizzare qualsiasi punto del dominio, ma solo quelli in cui il gradiente si annulla. Risolviamo dunque:

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} f_x(x,y) = 2x - 3(1-x)^2 \cdot y^2 = 0 \\ f_y(x,y) = 2(1-x)^3 \cdot y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 \\ 2 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Da cui vediamo che l'unico punto critico è $(0,0)$. Proviamo a stabilirne la natura col criterio della matrice hessiana:

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det(H_f(0,0)) = 4 > 0$ e $f_x(0,0) > 0$ bastano queste due informazioni per concludere che l'origine è un punto di minimo relativo. Come nell'esercizio precedente si mostra facilmente che non è un minimo assoluto in quanto prendendo la restrizione:

$$f(2,y) = 4 - y^2 \xrightarrow[y \to \pm\infty]{} -\infty$$

Ciò dimostra che f non è inferiormente limitata per cui il punto di minimo non è assoluto ma solo relativo.

Esercizio 6.3. *Sia $f(x,y) = \alpha x - \beta y - 2 + 2xy + \gamma x^2 - y^2$ con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Stabilire per quali α, β, γ f ha un massimo nell'origine.*

Soluzione. Notiamo che f a prescindere dai parametri è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Imponiamo che il gradiente nell'origine sia pari al vettore nullo:

$$\nabla f(0,0) = 0 \iff \begin{cases} f_x(0,0) = \alpha = 0 \\ f_y(0,0) = -\beta = 0 \end{cases}$$

Le due condizioni sono ovviamente soddisfatte solo se $\alpha = 0 \wedge \beta = 0$. Dal calcolo delle derivate seconde pure e miste che è molto semplice scopriamo che l'hessiana nell'origine è:

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2\gamma & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Imponendo che il determinante dell'hessiana sia maggiore di 0, otteniamo $-4\gamma - 4 > 0$ che si risolve in $\gamma < -1$, questo intervallo di valori di γ soddisfa anche il requisito che le derivate seconde pure abbiano segno negativo nell'origine (e ovunque in realtà). Quindi f ha massimo nell'origine per $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma < -1$.

Esercizio 6.4. *Trovare e classificare eventuali estremanti di:*

a) $f(x,y) = x^4 - y^4$

b) $g(x,y) = x^4 + y^4$

Soluzione. Notiamo che $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ per cui per il teorema di Fermat eventuali estremanti sono punti stazionari.

a) Imponiamo che il gradiente si annulli:

$$\nabla f(0,0) = 0 \iff \begin{cases} f_x(x,y) = 4x^3 = 0 \\ f_y(0,0) = -4y^3 = 0 \end{cases}$$

Ne deduciamo che l'unico punto stazionario di f è l'origine in cui la matrice hessiana è nulla. Il determinante dell'hessiana è quindi nullo anch'esso, per cui il criterio della matrice hessiana non fornisce informazioni. Cerchiamo di capire come si comporta la funzione avvicinandosi da direzioni diverse, proviamo le restrizioni più semplici:

$$f(x,0) = x^4 \quad f(0,y) = -y^4$$

Notiamo che quindi in una direzione avvicinandosi a 0 troviamo valori sempre positivi e maggiori di 0, mentre nell'altra direzione valori sempre negativi e minori di 0. Questo indica che l'origine non è nè un punto di massimo nè di minimo, ma di sella.

b) Imponendo che il gradiente si annulli per g porta evidentemente allo stesso risultato che per f, ovvero l'unico punto stazionario è l'origine. Per g è evidente che l'origine sia un punto di minimo locale (e assoluto) in quanto la funzione è costituita da una somma di quadrati che è non-negativa e che nel caso peggiore.

Esercizio 6.5. *Siano* $f(x,y) = x^2+3y^2-xy-y$ *e* $\{Q = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$

a) Determinare se possibile gli estremi assoluti di f su Q

b) Stabilire se f ammette massimo o minimo assoluti sul suo dominio naturale

Soluzione. a) La funzione è un polinomio e quindi è continua su $\mathbb{R}^2$ e in particolare su Q. L'insieme Q è compatto, cioè chiuso e limitato quindi per il teorema di Weierstrass f ammette massimo e minimo assoluti su Q. Gli estremi assoluti potrebbero trovarsi sul bordo o essere interni a Q. In questo secondo caso per il teorema di Fermat dovrebbero essere punti stazionari. Iniziamo ad imporre che il gradiente sia nullo:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x - y = 0 \\ f_y(x,y) = 6y - x - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{11} \\ y = \frac{2}{11} \end{cases}$$

Quindi c'è un solo punto stazionario intero a Q ed è $P = \left(\frac{1}{11}, \frac{2}{11}\right)$. Notiamo che il vincolo è un quadrato, studiamo le derivate parziali sul bordo tramite delle restrizioni, considerando un lato alla volta:

$$f_y(0,y) = 6y - 1 \ge 0 \iff y \ge \frac{1}{6}$$

$$f_x(x,1) = 2x - 1 \ge 0 \iff x \ge \frac{1}{2}$$

$$f_y(1,y) = 6y - 2 \ge 0 \iff y \ge \frac{1}{3}$$

$$f_x(x,0) = 2x \geq 0 \iff x \geq 0$$

Seguendo quindi le direzioni di crescita sul quadrato ne deduciamo che per f vincolata a ∂Q $(0, \frac{1}{6}), (1, \frac{1}{3}), (\frac{1}{2}, 1)$ sono sicuamente punti di minimo locale mentre $(1,0), (1,1), (0,1)$ sono sicuramente punti di massimo locale. Per vedere quali tra questi sono estremi assoluti è sufficiente confrontare le immagini:

$$f(1,0) = 1 \quad f(1,1) = 2 \quad f(0,1) = 2$$

$$f\left(0, \frac{1}{6}\right) = 3 \cdot \frac{1}{36} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{12} \quad f\left(1, \frac{1}{3}\right) = 1 + 3 \cdot \frac{1}{9} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$
$$f\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{1}{4} + 3 - \frac{1}{2} - 1 = \frac{7}{4}$$

Quindi per f ristretta al bordo abbiamo $\max\limits_{\partial Q} f = f(1,1) = f(0,1) = 2$ e $\min\limits_{\partial Q} f = f\left(0, \frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{12}$. Vediamo invece l'immagine del punto stazionario interno che abbiamo trovato:

$$f(P) = \frac{1}{11^2} + \frac{12}{11^2} - \frac{2}{11^2} - \frac{22}{11^2} = -\frac{11}{11^2} = -\frac{1}{11} < -\frac{1}{12}$$

Ne segue che il punto di minimo assoluto di f su Q è P mentre il punto di massimo assoluto vale 2 ed è in $(1,1)$ e in $(0,1)$.

b) Il dominio naturale di f è $\mathbb{R}^2$ che non è limitato per cui non potendo applicare il teorema di Weierstrass non possiamo dire se ci sono massimi o minimi assoluti. Tuttavia continua a valere Fermat per cui se ci sono punti di massimo assoluto allora sono anche punti di massimo relativo e quindi lì il gradiente è nullo. Per cui l'unico candidato è proprio P. Calcoliamo le derivate seconde nel punto per calcolare convessità e concavità:

$$f_{xy}(x,y) = -1 = f_{yx}(x,y)$$

$$f_{yy}(x,y) = \partial_y(6y - x - 1) = 6$$

L'hessiana quindi risulta per ogni punto:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \det H_f = 11 > 0 \\ f_{xx}(x,y) = 2 > 0 \end{cases}$$

Concludiamo che f è convessa su tutto il dominio e che quindi P è punto di minimo assoluto e unico punto estremale assoluto sul dominio naturale di f.

Esercizio 6.6. *Sia* $f(x,y) = y^2 + (e^{x^2} - 1)y + 1$

a) Determinare tutti gli eventuali estremanti di f

b) Determinare gli estremi assoluti di f *sul triangolo* T *di vertici* $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$.

Soluzione. a)Per Fermat eventuali punti di estremi sono stazionari, imponiamo quindi che il gradiente si annulli:

$$\begin{cases} f_x = 2xye^{x^2} = 0 \\ f_y = 2y + e^{x^2} - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

L'origine è quindi l'unico punto stazionario. Calcoliamo le derivate seconde e l'hessiana nell'origine:

$$f_{xx} = 2ye^{x^2}(1+2x^2) \qquad f_{yy} = 2 \qquad f_{xy} = f_{yx} = 2xe^{x^2}$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det(H_f(0,0)) = 0$$

Siccome il determinante dell'Hessiana è nullo, non riusciamo a stabilire immediatamente la convessità o concavità nel punto, ci serve un'analisi più approfondita. Possiamo analizzare la differenza tra la funzione e il punto in prossimità del punto stesso. In tal caso se $\Delta f > 0$ ovunque intorno al punto,il punto è certamente un minimo locale in quanto per "spostarci" dobbiamo salire, rispettivamente è un minimo locale se $\Delta f < 0$ ovunque. Se invece non c'è un segno univoco il punto sarà un punto di sella.

$$\Delta f(x,y) = f(x,y) - f(0,0) = y^2 + (e^{x^2}-1)y + 1 - 1 = y(y + e^{x^2} - 1)$$

Quindi $y > 0 \wedge y > 1 - e^{x^2} \implies \Delta(x,y) > 0$ mentre $y < 0 \wedge y > 1 - e^{x^2} \implies \Delta(x,y) < 0$. Questo dimostra che l'origine è un punto di sella. Si conclude quindi che f non ha estremanti.

b) T è un insieme chiuso e limitato su cui f è continua. Per il teorema di Weierstrass esistono massimo e minimo assoluti. Tuttavia abbiamo appena verificato che non ci sono punti stazionari interni quindi per Fermat gli estremi sono necessariamente sul bordo. Studiamo il segno delle derivate parziali lungo i lati del triangolo per individuare le direzioni di crescita, iniziamo dal lato verticale e da quello orizzontale:

$$f_y(0,y) = 2y > 0 \quad \forall y > 0$$

$$f_x(x,1) = 2xe^{x^2} \quad \forall x > 0$$

Notiamo poi che il lato obliquo è lungo la bisettrice $y = x$ quindi restringiamo la funzione a questa retta e calcoliamone la derivata:

$$g(x) := f(x,x) = x^2 + x(e^{x^2}-1) + 1 \qquad g'(x) = 2x + 2x^2e^{x^2} + e^{x^2} - 1$$

Si verifica facilmente che $g'(x) > 0 \ \forall x \in (0,1]$. A questo punto unendo le informazioni sulle direzioni di crescita concludiamo che $\min_T f = f(0,0) = 1$ e $\max_T f = f(1,1) = e + 1$.

Esercizio 6.7. *Sia* $f(x,y) = 2\sqrt{x^2+y^2} + x^4 - y^4$*:*

a) Determinare tutti gli eventuali punti critici di f sul dominio e classificarli

b) Determinare gli eventuali estremi assoluti di f su $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$

c) Determinare tutti gli eventuali punti di estremo libero di f sia relativi che assoluti.

Soluzione. a) Iniziamo a calcolare le derivate parziali imponendo che il gradiente di annulli:

$$\begin{cases} f_x = \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 4x^3 = 0 \\ f_y = \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}} - 4y^3 = 0 \end{cases} \quad \text{Per } (x,y) \neq (0,0) \iff \begin{cases} x = 0 \\ \frac{2y}{|y|} - 4y^3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Verifichiamo anche la derivabilità sull'origine con la definizione:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2|h| + h^4}{h} \xrightarrow[x \to 0^\pm]{} \pm 2$$

Per cui f non è derivabile rispetto a x nell'origine e ciò è sufficiente a dire che f non è derivabile nell'origine. Gli unici punti critici di f sono dunque $\left(0, \pm\frac{1}{2}\right)$. Per classificarli ci servono le derivate seconde:

$$f_{xx} = \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + 12x^2 \qquad f_{yy} = \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - 12y^2$$

Adesso, prima di calcolare le derivate miste, calcoliamo il valore delle derivate parziali nei punti critici $P_1 = \left(0, \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$ e $P_2 = \left(0, -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$:

$$f_{xx}(0, y) = \frac{2}{|y|} \implies f_{xx}(P_1) > 0 \wedge f_{xx}(P_2) > 0$$

$$f_{yy}(0, y) = -12y^2 \implies f_{yy}(P_1) < 0 \wedge f_{yy}(P_2) < 0$$

Ma allora non serve neanche calcolare le derivate miste, infatti si può ragionare così: analizzando il determinante dell'hessiana abbiamo scoperto che il prodotto sulla diagonale è negativo, a questo prodotto andrà sottratto il prodotto sull'antidiagonale che però sarà sicuramente positivo in quanto per il teorema di Schwarz le derivate miste sono uguali (la funzione è C^2 ovunque tranne che nell'origine), il determinante sarà quindi sicuramente negativo. Senza ulteriori calcoli concludiamo che $f(P1)$ e $f(P2)$ sono punti di sella.

b) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ è un insieme chiuso e limitato ed f è continua su $\mathbb{R}^2$ e in particolare su E. Quindi per il teorema di Weierstrass esistono gli estremi assoluti di f su E. Se i punti di estremo sono interni ad E o sono punti stazionari o sono punti di non derivabilità. Se invece i punti sono sul bordo di E, possiamo trovarli con i moltiplicatori di Lagrange o per parametrizzazione. In questo caso in vincolo è una cinconferenza quindi è più facile procedere per parametrizzazione:

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases} \qquad \text{Per } t \in [0, 2\pi]$$

Otteniamo:

$$z(t) = 2 + \cos^4(t) - \sin^4(t) = 2 + (\cos^2(t) - \sin^2(t)) \cdot (\cos^2(t) + \sin^2(t)) =$$

$$= 2 + \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2 + \cos(2t)$$

Per cui la curva che rappresenta l'immagine dei punti sul bordo del vincolo in f è:

$$r(t) = \begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \\ z = 2 + \cos(2t) \end{cases}$$

Per trovare i punti di massimo e minimo sul bordo non ci interesas derivare l'intero vettore posizione $r(t)$ perché in questo modo otterremmo la velocità di percorrenza e porre $r'(t) = 0$ significherebbe cercare punti in cui ci fermiamo nel percorrere la curva (punti singolari o cuspidi). Noi stiamo cercando i punti in cui $z'(t) = 0$ cioè i punti in cui durante la percorrenza della curva nè si sale nè si scende. Anche senza calcolare esplicitamente $z'(t)$ si vede ad occhio che per $t \in [0, 2\pi]$ avremo un massimo quando $\cos(2t) = 1 \iff t = 0 \vee t = \pi$ e un minimo quando $\cos(2t) = -1 \iff t = \frac{\pi}{2} \vee t = \frac{3\pi}{2}$.

Tornando alle variabili originali si ottengono i punti $(1,0),(-1,0)$ in corrispondenza dei quali c'è un massimo sul bordo e $(0,1),(0,-1)$ in corrispondenza dei quali c'è un minimo. A questo punto valutiamo le immagini di f su tutti i candidati che abbiamo trovato: punti sul bordo, punti interni e punti di non derivabilità:

$$f(0,0)=0 \qquad f(0,\pm 1)=2-1=1 \qquad f(\pm 1,0)=3 \qquad f\left(0,\pm\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)=\frac{3}{2^{\frac{4}{3}}}<3$$

Dai valori e dal fatto che esistono massimi e minimi assoluti si deduce che $\max\limits_E f = f(\pm 1,0)=3$ e $\min\limits_E f = f(0,0)=0$.

c) Questa ultima richiesta non coincide con la prima, infatti gli eventuali punti di estremo libero potrebbero essere punti stazionari o di non derivabilità. L'origine è punto di non derivabilità e minimo per f vincolata ad E, quindi è anche punto di minimo locale per f sul suo dominio. Possiamo chiederci se sia anche di minimo assoluto.

$$f(0,y)=2|y|-y^4 \underset{y\to\pm\infty}{\sim} -y^4 \xrightarrow[y\to\pm\infty]{} -\infty$$

Questo dimostra che f non è inferiormente limitata, per cui l'origine non è punto di minimo assoluto. Al contempo non ci possono essere altri punti di estremo perché gli unici punti stazionari sono di sella.

Esercizio 6.8. *Sia $g(x,y)=x^2-y^2$ e sia $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+2y^2\leq 1\}$. Determinare massimo e minimo assoluto di g in D.*

Soluzione. Siccome g è continua su D che è chiuso e limitato, massimo e minimo assoluto esistono per il teorema di Weierstrass. Iniziamo trovando i punti critici di g, che è di classe C^1 imponendo che il gradiente si annulli:

$$\nabla g(x,y)=0 \iff \begin{cases} g_x(x,y)=2x=0 \\ g_y(x,y)=-2y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

L'unico punto critico di f è l'origine che si trova dentro il vincolo. Notiamo che il bordo dell'insieme D è costituito da:

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : h(x,y)=x^2+2y^2-1=0\}$$

Siccome $g,h\in C^1$ e $\nabla h(x,y)\neq 0$ per $(x,y)\neq(0,0)$ che non è sul bordo del vincolo, possiamo usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per trovare i candidati massimi e minimi assoluti sul bordo. Impostiamo il sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\lambda\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=\lambda\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) \\ h(x,y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x-2\lambda x=0 \\ -2y-4\lambda y=0 \\ x^2+2y^2-1=0 \end{cases}$$

Da cui si ottiene:

$$x=0, y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \lambda=-1/2$$

$$x=\pm 1, y=0, \lambda=1$$

Non ci resta che controllare l'immagine della funzione g in ognuno dei punti trovati:

$$g(0, 1/\sqrt{2}) = -1/2 \quad g(0, -1/\sqrt{2}) = -1/2$$

$$g(1, 0) = 1 \quad g(-1, 0) = 1 \quad g(0, 0) = 0$$

Possiamo concludere che $\max_D g = g(1, 0) = g(-1, 0) = 1$ e $\min_D g = g(0, \pm 1/\sqrt{2}) = -1/2$

Esercizio 6.9. *Trovare i punti stazionari della funzione $f(x, y) = x - y$ vincolati alla regione $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \arctan(x^2 + y^2 - 2) = 2 - x + y\}$.*

Soluzione. Si vede subito che non ci sono punti stazionari liberi; infatti, imporre che il gradiente di f sia nullo risulta in due equazioni impossibili $(1 = 0, -1 = 0)$. Trovare i punti stazionari vincolati significa trovare i candidati per essere minimi o massimi assoluti sul bordo. Definendo il vincolo come:

$$h(x, y) = \arctan(x^2 + y^2 - 2) - 2 + x - y = 0$$

Notiamo che $f, h \in C^1$. Calcoliamo le derivate parziali di $h(x, y)$. Poniamo per comodità $D = 1 + (x^2 + y^2 - 2)^2$, che è strettamente positivo $(D \geq 1)$:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{2x}{D} + 1, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{2y}{D} - 1$$

1. Regolarità del vincolo Verifichiamo che non ci siano punti singolari sul vincolo $(\nabla h = 0$ con $h = 0)$.

$$\nabla h(x, y) = 0 \iff \begin{cases} \frac{2x}{D} = -1 \\ \frac{2y}{D} = 1 \end{cases}$$

Sommando le due equazioni si ottiene $\frac{2(x+y)}{D} = 0 \implies y = -x$. Sostituendo $y = -x$ nella prima equazione del gradiente, avremmo $2x = -D = -[1 + (2x^2 - 2)^2]$. Se sostituiamo queste condizioni nell'equazione del vincolo $h(x, y) = 0$ (con $y = -x$):

$$\arctan(2x^2 - 2) = 2 - 2x$$

Sostituendo il valore di $2x$ trovato dal gradiente:

$$\arctan(2x^2 - 2) = 2 - (-[1 + (2x^2 - 2)^2]) = 3 + (2x^2 - 2)^2$$

Questa è una contraddizione: l'arcotangente è limitata superiormente da $\pi/2 \approx 1.57$, mentre il membro destro è ≥ 3. Il gradiente non si annulla mai sul vincolo.

2. Moltiplicatori di Lagrange Impostiamo il sistema $\nabla f = \lambda \nabla h$:

$$\begin{cases} 1 = \lambda \left(\frac{2x}{D} + 1\right) \\ -1 = \lambda \left(\frac{2y}{D} - 1\right) \\ h(x, y) = 0 \end{cases}$$

Sommiamo le prime due equazioni membro a membro:

$$0 = \lambda \left(\frac{2x}{D} + 1 + \frac{2y}{D} - 1\right) \implies \lambda \frac{2(x + y)}{D} = 0$$

Poiché $\lambda \neq 0$ (altrimenti la prima equazione sarebbe $1 = 0$), deve essere $x + y = 0 \implies y = -x$.

Sostituendo nel vincolo otteniamo l'equazione trascendente:

$$\arctan(2y^2 - 2) = 2 + 2y$$

Si verifica per ispezione che $y = -1$ è una soluzione (infatti $\arctan(0) = 0$). Per confermare l'unicità, studiamo la funzione ausiliaria $g(y) = \arctan(2y^2-2)-(2+2y)$. La sua derivata è:

$$g'(y) = \frac{4y}{1 + (2y^2 - 2)^2} - 2$$

Poiché per soddisfare l'equazione deve essere $y < 0$ (altrimenti il membro destro $2+2y \geq 2$ supera il massimo dell'arcotangente), analizziamo la derivata per $y < 0$. Il termine $\frac{4y}{1+(\dots)}$ è negativo, quindi $g'(y) < -2$. Essendo la funzione strettamente decrescente, interseca l'asse zero al massimo una volta.

L'unico punto stazionario vincolato è $P(1, -1)$.

Esercizio 6.10. *Calcolare massimo e minimo assoluti di* $f(x, y) = x^2y$ *nell'insieme* $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, 2x^2 + y^2 \leq 4\}$

Soluzione. La funzione f è continua ovunque e in particolare sull'insieme A che è chiuso e limitato. Per Weierstrass esistono massimo e minimo assoluti. Calcoliamo le derivate parziali e imponiamole pari a 0:

$$\nabla f(x, y) = 0 \iff \begin{cases} f_x = 2xy = 0 \\ f_y = x^2 = 0 \end{cases}$$

Non c'è nessun punto stazionario all'interno di A, quindi concentriamoci direttamente sul bordo. Il bordo è l'unione di un segmento orizzontale, uno verticale e un arco di ellisse. In particolare partendo da quest'ultimo abbiamo che la sua equazione è:

$$2x^2 + y^2 = 4 \iff y = \pm\sqrt{4 - 2x^2}$$

Ma siccome siamo nel primo quadrante prendiamo solo l'arco superiore ignorando quello inferiore che è fuori dal vincolo quindi $y = +\sqrt{4 - 2x^2}$. Studiamo la restrizione di f lungo questo arco:

$$h(x) = f(x, \sqrt{4 - 2x^2}) = x^2\sqrt{4 - 2x^2}$$
$$h'(x) = -\frac{4x^3}{2\sqrt{4 - 2x^2}} + 2x\sqrt{4 - 2x^2}$$

Mettiamo l'espressione a denominatore comune:

$$\frac{-2x^3 + 2x(4 - 2x^2)}{\sqrt{4 - 2x^2}} = \frac{8x - 6x^3}{\sqrt{4 - 2x^2}} = \frac{x(8 - 6x^2)}{\sqrt{4 - 2x^2}}$$

Il denominatore è sempre non negativo. Analizzando il numeratore si scopre quindi che questa derivata è positiva (e quindi la funzione cresce sull'arco di ellisse) per $0 < x < 2/\sqrt{3}$ mentre è negativa per $2/\sqrt{3} < x < \sqrt{2}$. $\sqrt{2}$ è infatti il massimo valore che x assume nel nostro vincolo. Abbiamo quindi un massimo relativo in $(2/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3})$ che ha immagine corrispondente $f(2/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3}) = \frac{8}{3\sqrt{3}}$. Analizziamo la monotonia nelle restrizioni di f sugli altri due lati:

$$f_y(0, y) = 0 \qquad f_x(x, 0) = 0$$

Quindi sul lato orizzontale e su quello verticale del vincolo f è identicamente nulla. Non possiamo che concludere che:

$$\max_A f = \frac{8}{3\sqrt{3}} \qquad \min_A f = 0$$

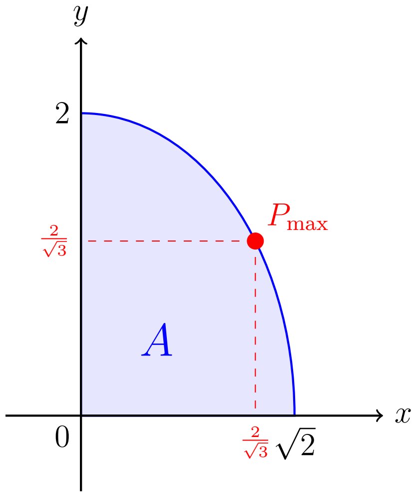


Figure 2: Il dominio A con il punto di massimo assoluto evidenziato.

Esercizio 6.11. *Determinare l'insieme di definizione e i masssimi e minimi assoluti di* $f(x, y) = \cos(\sqrt{xy})$.

Soluzione. L'insieme di definizione è dato da:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$$

Il coseno è una funzione limitata che oscilla tra -1 e 1. Questo significa che siccome l'insieme di definizione non è limitato avremo infiniti massimi assoluti che valgono 1 e infiniti minimi assoluti che valgono -1. Dobbiamo solo trovare i punti nel dominio che corrispondono a massimi e minimi:

$$\cos(\sqrt{xy}) = 1 \iff x_M y_M = (2k\pi)^2 \quad \text{Per } k \in \mathbb{N} \cup 0$$

Abbiamo quindi infiniti punti nel dominio la cui immagine è un massimo assoluto per f che corrispondono ad una famiglia di iperboli. Per i punti di minimo facciamo lo stesso ragionamento:

$$\cos(\sqrt{xy}) = -1 \iff y_m x_m = [\pi(2k+1)]^2 \quad \text{Per } k \in \mathbb{N} \cup 0$$

Che costituiscono un'altra famiglia di iperboli.

Esercizio 6.12. *Siano f e g le funzioni $f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(x, y) = e^{x^2} + e^{y^2} - 4$ $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calcolare il gradiente di ciascuna funzione e spiegare perché sono differenziabili in $\mathbb{R}^2$. Trovare il massimo di $f(x, y)$ soggetta al vincolo $g(x, y) = 0$ utilizzando i moltiplicatori di Lagrange.*

Soluzione. I gradienti di f e di g sono:

$$\nabla f(x, y) = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}, \qquad \nabla g(x, y) = \begin{bmatrix} 2xe^{x^2} \\ 2ye^{y^2} \end{bmatrix}$$

Le funzioni f e g sono differenziabili in tutto $\mathbb{R}^2$ in quanto composizione e somma di funzioni elementari di classe C^∞ (polinomi ed esponenziali).

Per applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange verifichiamo la regolarità del vincolo. Il gradiente ∇g si annulla solo in $(0,0)$, ma l'origine non appartiene al vincolo (infatti $e^0 + e^0 - 4 = -2 \neq 0$). Dunque il vincolo è regolare ovunque. Essendo il vincolo un insieme chiuso e limitato (gli esponenziali crescono all'infinito, quindi x e y devono essere limitati), per Weierstrass esistono massimo e minimo assoluti.

Impostiamo il sistema $\nabla f = \lambda \nabla g$:

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda x e^{x^2} = 0 \\ 2y - 2\lambda y e^{y^2} = 0 \\ e^{x^2} + e^{y^2} = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x(1 - \lambda e^{x^2}) = 0 \\ 2y(1 - \lambda e^{y^2}) = 0 \\ e^{x^2} + e^{y^2} = 4 \end{cases}$$

Analizziamo i casi:

1. Caso $x = 0$ Sostituendo nella terza equazione troviamo $1 + e^{y^2} = 4 \implies e^{y^2} = 3 \implies y = \pm\sqrt{\log(3)}$. Otteniamo i punti $P_{1,2} = (0, \pm\sqrt{\log(3)})$.

2. Caso $y = 0$ Sostituendo nella terza equazione troviamo $e^{x^2} + 1 = 4 \implies x = \pm\sqrt{\log(3)}$. Otteniamo i punti $P_{3,4} = (\pm\sqrt{\log(3)}, 0)$.

3. Caso $x \neq 0 \land y \neq 0$ Dalle prime due equazioni ricaviamo $e^{x^2} = 1/\lambda$ e $e^{y^2} = 1/\lambda$, il che implica $x^2 = y^2$. Sostituendo nel vincolo:

$$2e^{x^2} = 4 \implies e^{x^2} = 2 \implies x = \pm\sqrt{\log(2)}$$

Poiché $y^2 = x^2$, anche $y = \pm\sqrt{\log(2)}$. Otteniamo 4 punti: $(\sqrt{\log(2)}, \sqrt{\log(2)})$, $(\sqrt{\log(2)}, -\sqrt{\log(2)})$, $(-\sqrt{\log(2)}, -\sqrt{\log(2)})$, $(-\sqrt{\log(2)}, \sqrt{\log(2)})$.

Conclusione Calcoliamo il valore di $f(x,y) = x^2 + y^2$ nei punti trovati:

- Nei casi 1 e 2 ($P_{1..4}$): $f = 0 + \log(3) = \log(3)$.
- Nel caso 3: $f = \log(2) + \log(2) = 2\log(2) = \log(4)$.

Poiché $\log(4) > \log(3)$, concludiamo che:

$$\max_{g(x,y)=0} f = \log(4)$$

Esercizio 6.13. *Sia f la funzione di due variabili definita da*

$$f(x,y) = \frac{y}{x^4 + y^4}.$$

1. *Determinare il dominio di f e dire se si tratta di un insieme aperto/chiuso - limitato/illimitato.*

2. *Determinare la derivata direzionale di f in direzione $(3/5, 4/5)$ nel punto $(1, -1)$. Determinare il piano tangente al grafico di f nel punto $(1, -1, f(1, -1))$.*

3. *Stabilire se esistono il massimo assoluto e il minimo assoluto di f sul quadrato chiuso Q di vertici $(0,1),(1,1),(1,2),(0,2)$ e, in caso affermativo, determinarli.*

Soluzione. **1. Studio del Dominio**
La funzione è definita quando il denominatore è diverso da zero: $x^4 + y^4 \neq 0$. Poiché x^4 e y^4 sono quantità non negative, la loro somma è nulla solo se $x = 0$ e $y = 0$. Pertanto:

$$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

L'insieme D è un **aperto** (essendo il complementare di un punto, che è un insieme chiuso). Non è chiuso. È inoltre un insieme **illimitato**, poiché contiene punti arbitrariamente lontani dall'origine.

2. Derivata Direzionale e Piano Tangente
Calcoliamo il gradiente di f in un punto generico (x,y):

$$\nabla f(x,y) = \left(-\frac{4x^3y}{(x^4+y^4)^2}, \frac{1(x^4+y^4)-y(4y^3)}{(x^4+y^4)^2}\right) = \left(-\frac{4x^3y}{(x^4+y^4)^2}, \frac{x^4-3y^4}{(x^4+y^4)^2}\right).$$

Valutiamo il gradiente nel punto $P_0 = (1,-1)$:

$$f_x(1,-1) = -\frac{4(1)^3(-1)}{(1+1)^2} = \frac{4}{4} = 1, \quad f_y(1,-1) = \frac{1-3(1)^4}{(1+1)^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

La direzione $\vec{v} = (3/5, 4/5)$ è già normalizzata ($|\vec{v}| = 1$). La **derivata direzionale** è:

$$D_{\vec{v}}f(1,-1) = \nabla f(1,-1) \cdot \vec{v} = 1 \cdot \frac{3}{5} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5}.$$

Per il **piano tangente**, calcoliamo $f(1,-1) = \frac{-1}{1+1} = -1/2$. L'equazione è:

$$z = f(1,-1) + f_x(1,-1)(x-1) + f_y(1,-1)(y+1) \implies z = -\frac{1}{2} + 1(x-1) - \frac{1}{2}(y+1)$$

Semplificando: $z = x - \frac{1}{2}y - 2$ o $2x - y - 2z - 4 = 0$.

3. Massimi e Minimi Assoluti su Q
Il quadrato $Q = [0,1] \times [1,2]$ è un insieme compatto e f è continua su Q (poiché l'origine non appartiene a Q). Per il teorema di Weierstrass, **esistono** massimo e minimo assoluti. Cerchiamo punti critici interni ($\nabla f = 0$): $f_x = 0 \implies x = 0$ o $y = 0$. Poiché in Q si ha $y \geq 1$, deve essere $x = 0$. Tuttavia, se $x = 0$, $f_y(0,y) = -3y^4/y^8 = -3/y^4$, che non è mai nullo. Non ci sono punti critici interni. Analizziamo il bordo ∂Q:

- Lato $x = 0, y \in [1,2]$: $f(0,y) = 1/y^3$. Decrescente: max $= f(0,1) = 1$, min $= f(0,2) = 1/8$.
- Lato $x = 1, y \in [1,2]$: $f(1,y) = y/(1+y^4)$. La derivata $g'(y) = (1-3y^4)/(1+y^4)^2$ è negativa per $y \geq 1$. Decrescente: max $= f(1,1) = 1/2$, min $= f(1,2) = 2/17$.
- Lato $y = 1, x \in [0,1]$: $f(x,1) = 1/(x^4+1)$. Decrescente: max $= f(0,1) = 1$, min $= f(1,1) = 1/2$.
- Lato $y = 2, x \in [0,1]$: $f(x,2) = 2/(x^4+16)$. Decrescente: max $= f(0,2) = 1/8$, min $= f(1,2) = 2/17$.

Confrontando i valori:

$$\text{Massimo assoluto: } 1 \text{ in } (0,1), \quad \text{Minimo assoluto: } \frac{2}{17} \text{ in } (1,2).$$

7 Calcolo integrale per funzioni di più variabili

Esercizio 7.1. *Sia* $f(x, y) = e^{y^2} + e^x$ *e sia* T *il triangolo di vertici* $(0, 0), (0, 1), (2, 1)$. *Per* f *su* T *calcolare il valore massimo, minimo e medio.*

Soluzione. T è un insieme chiuso e limitato su cui f è continua, quindi per Weierstrass esistono massimi e minimi assoluti. Imponendo nullo il gradiente di f otteniamo:

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \begin{cases} f_x(x, y) = e^x = 0 \\ f_y(x, y) = 2ye^{y^2} = 0 \end{cases}$$

Che è impossibile. Procediamo con lo studio delle derivate della funzione ristretta a ciascun lato del bordo:

$$f_y(0, y) = 2ye^{y^2} \geq 0 \iff y \geq 0$$

$$f_x(x, 1) = e^x \geq 0 \quad \forall x \in [0, 2]$$

$$h(x) = f\left(x, \frac{x}{2}\right) = e^{\frac{x^2}{4}} + e^x \implies h'(x) = \frac{1}{2}x \cdot e^{\frac{x^2}{4}} + e^x \geq 0 \quad \forall x \in [0, 2]$$

Ma allora avremo per forza che $\min_T f = f(0, 0) = 2$ e $\max_T f = f(2, 1) = e + e^2$.

Il valor medio M è definito come l'integrale della funzione diviso la misura dell'insieme:

$$M = \frac{\int\int_T f(x, y)\, dxdy}{Area(T)} = \int\int_T f(x, y)\, dxdy$$

Infatti in questo caso si trova facilmente che l'area del triangolo è unitaria. Svolgiamo l'integrale doppio, avendo riconosciuto T come insieme xy-semplice, in quanto intersecando l'insieme con rette orizzontali o verticali si ottengono dei segmenti, uno per ogni retta. Identificandolo come y-semplice otteniamo:

$$T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, \frac{x}{2} \leq y \leq 1\right\}$$

$$\int\int_T f(x, y)\, dxdy = \int_0^2 \int_{\frac{x}{2}}^1 f(x, y)\, dydx = \int_0^2 \int_{\frac{x}{2}}^1 e^{y^2} + e^x\, dydx$$

Questo integrale non è risolvibile in quanto e^{y^2} non ammette primitiva in termini di funzioni elementari. Proviamo allora a trattare l'insieme come x-semplice:

$$T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 2y\right\}$$

$$\int\int_T f(x, y)\, dxdy = \int_0^1 \int_0^{2y} f(x, y)\, dxdy = \int_0^1 \int_0^{2y} e^{y^2} + e^x\, dxdy =$$

$$= \int_0^1 \left[xe^{y^2} + e^x\right]_{x=0}^{x=2y} dxdy = \int_0^1 2ye^{y^2} + e^{2y} - 1\, dy =$$

$$= \left[e^{y^2} + \frac{e^{2y}}{2} - y\right]_0^1 = e + \frac{e^2}{2} - 1 - 1 - \frac{1}{2} = e + \frac{e^2}{2} - \frac{5}{2}$$

Quindi concludiamo che il valor medio è $e + \frac{e^2}{2} - \frac{5}{2}$ che infatti sta proprio tra il massimo e il minimo.

Esercizio 7.2. *Calcolare le coordinate del baricentro di una lamina piana di densità* $\delta(x,y) = 3 - x$ *che occupa la regione* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 \leq y \leq x^2 + 1\}$.

Soluzione. L'insieme D è la regione compresa tra due parabole. Per determinare l'intervallo di variazione della x (proiezione sull'asse orizzontale), intersechiamo le curve:

$$2x^2 \leq x^2 + 1 \iff x^2 \leq 1 \iff -1 \leq x \leq 1$$

L'insieme è y-semplice (normale rispetto all'asse x):

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, \quad 2x^2 \leq y \leq x^2 + 1\Big\}$$

Le coordinate del baricentro (x_b, y_b) sono date da:

$$x_b = \frac{1}{M} \iint_D x\delta(x,y)\,dxdy, \quad y_b = \frac{1}{M} \iint_D y\delta(x,y)\,dxdy$$

dove $M = \iint_D \delta(x,y)\,dxdy$ è la massa totale.

1. Calcolo della Massa M

$$M = \int_{-1}^{1} \left(\int_{2x^2}^{x^2+1} (3-x)\,dy \right) dx = \int_{-1}^{1} \int_{2x^2}^{x^2+1} 3\,dydx - \int_{-1}^{1} \int_{2x^2}^{x^2+1} x\,dydx$$

Il secondo integrale è nullo per simmetria: il dominio D è simmetrico rispetto all'asse y (invariante per $x \to -x$) e l'integranda $g(x,y) = x$ è dispari rispetto a x. Resta solo il primo termine:

$$M = 3 \int_{-1}^{1} (x^2 + 1 - 2x^2)\,dx = 3 \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\,dx$$

Sfruttando la parità dell'integranda rimanente:

$$M = 3 \cdot 2 \int_{0}^{1} (1 - x^2)\,dx = 6 \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 6 \left(1 - \frac{1}{3} \right) = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$$

2. Calcolo di x_b

$$x_b = \frac{1}{4} \iint_D x(3-x)\,dxdy = \frac{1}{4} \left(\iint_D 3x\,dxdy - \iint_D x^2\,dxdy \right)$$

Il primo termine è nullo per lo stesso motivo di simmetria visto prima (integranda $3x$ dispari su dominio simmetrico).

$$x_b = -\frac{1}{4} \int_{-1}^{1} \int_{2x^2}^{x^2+1} x^2\,dydx = -\frac{1}{4} \int_{-1}^{1} x^2(1 - x^2)\,dx$$

Essendo l'integranda pari:

$$x_b = -\frac{1}{4} \cdot 2 \int_{0}^{1} (x^2 - x^4)\,dx = -\frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{15} = -\frac{1}{15}$$

3. Calcolo di y_b

$$y_b = \frac{1}{4} \iint_D y(3-x)\,dxdy = \frac{1}{4} \left(\iint_D 3y\,dxdy - \iint_D xy\,dxdy \right)$$

Il termine $\iint xy\,dxdy$ è nullo per simmetria (dispari in x).

$$y_b = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{2x^2}^{x^2+1} dx = \frac{3}{8}\int_{-1}^{1}\left((x^2+1)^2-(2x^2)^2\right)dx$$

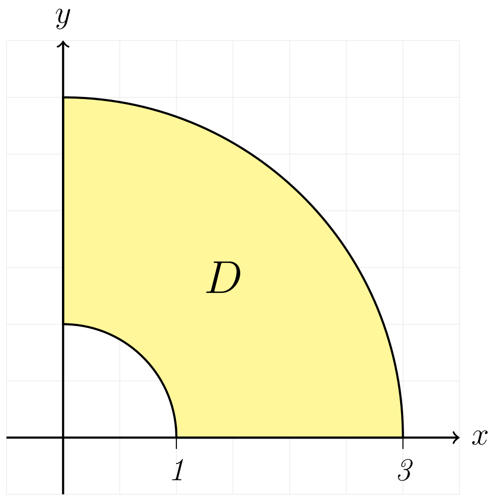
Sviluppiamo i quadrati ($x^4+2x^2+1-4x^4 = 1+2x^2-3x^4$) e usiamo la simmetria sull'intervallo $[-1,1]$:

$$y_b = \frac{3}{8}\cdot 2\int_{0}^{1}(1+2x^2-3x^4)\,dx = \frac{3}{4}\left[x+\frac{2x^3}{3}-\frac{3x^5}{5}\right]_0^1$$

$$y_b = \frac{3}{4}\left(1+\frac{2}{3}-\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{15+10-9}{15}\right) = \frac{3}{4}\cdot\frac{16}{15} = \frac{4}{5}$$

Concludiamo che il baricentro è $G = \left(-\frac{1}{15}, \frac{4}{5}\right)$.

Esercizio 7.3. *Determinare le coordinate del baricentro della lamina omogenea rappresentata in figura:*



Soluzione. Poiché la lamina è omogenea, la densità è costante ($\delta(x,y) = c > 0$). Le coordinate del baricentro dipendono solo dalla geometria dell'insieme D.

Le formule per il baricentro si semplificano eliminando la costante c:

$$x_b = \frac{1}{\text{Area}(D)}\iint_D x\,dxdy, \quad y_b = \frac{1}{\text{Area}(D)}\iint_D y\,dxdy$$

1. Calcolo dell'Area

Il dominio D è un quarto di corona circolare (differenza tra un quarto di cerchio di raggio 3 e uno di raggio 1):

$$\text{Area}(D) = \frac{1}{4}\pi(3^2) - \frac{1}{4}\pi(1^2) = \frac{9\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} = 2\pi$$

2. Calcolo di x_b

Passiamo in **coordinate polari** per risolvere l'integrale.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}, \quad |J| = \rho$$

L'insieme D in coordinate polari corrisponde al rettangolo:

$$D' = \left\{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \rho \leq 3, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

Sostituendo nell'integrale:

$$\iint_D x\, dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^3 (\rho \cos\theta) \cdot \rho\, d\rho d\theta = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta\right) \cdot \left(\int_1^3 \rho^2\, d\rho\right)$$

Calcoliamo i due integrali separatamente:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta = [\sin\theta]_0^{\pi/2} = 1$$

$$\int_1^3 \rho^2\, d\rho = \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_1^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

Quindi il momento statico rispetto all'asse y è $1 \cdot \frac{26}{3} = \frac{26}{3}$.

La coordinata x_b è:

$$x_b = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{26}{3} = \frac{13}{3\pi}$$

3. Considerazioni di Simmetria

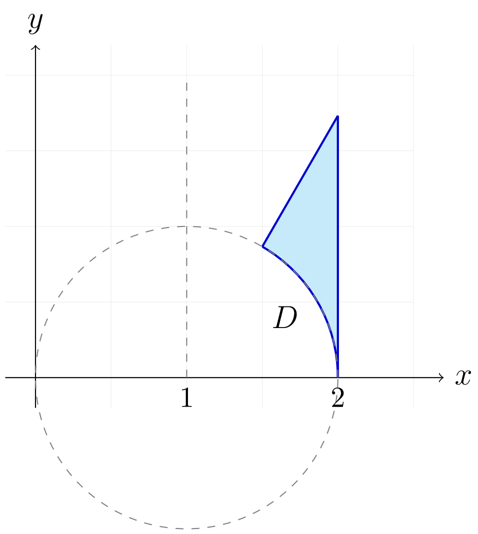
Notiamo che l'insieme D è simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante ($y = x$). Poiché anche la densità è uniforme, il baricentro deve giacere sull'asse di simmetria.

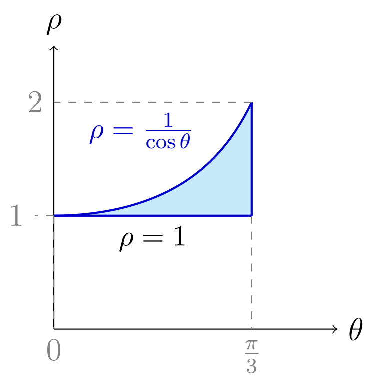
$$y_b = x_b = \frac{13}{3\pi}$$

Concludiamo che il baricentro è il punto $G = \left(\frac{13}{3\pi}, \frac{13}{3\pi}\right)$.

Esercizio 7.4. *Calcolare l'integrale di* $f(x, y) = \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}$ *sull'insieme* $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \geq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{3}(x-1), 1 \leq x \leq 2\right\}$.

Soluzione. L'insieme D nel piano cartesiano (x, y) è rappresentato nella figura a sinistra. Passando in coordinate polari traslate, trasformiamo il dominio nel piano (θ, ρ) mostrato a destra.





Analizzando il grafico a destra (piano dei parametri):

- L'asse orizzontale rappresenta l'angolo θ.
- L'asse verticale rappresenta il raggio ρ.
- La base del dominio è piatta ($\rho = 1$) perché il limite sinistro in x, y è un arco di cerchio.
- Il "tetto" del dominio è curvo ($\rho = \sec\theta$) perché il limite destro in x, y è una retta verticale (la distanza dall'origine aumenta man mano che l'angolo sale).

Ora procediamo al calcolo analitico.

In coordinate polari traslate ($x - 1 = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$), la funzione integranda si semplifica notevolmente:

$$f(x,y) = \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} \implies f(\rho,\theta) = \frac{\rho\cos\theta}{\rho^2} = \frac{\cos\theta}{\rho}$$

L'integrale doppio su D diventa (ricordando di moltiplicare per lo Jacobiano $|J| = \rho$):

$$I = \iint_D f(x,y)\, dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[\int_1^{\frac{1}{\cos\theta}} \frac{\cos\theta}{\rho} \cdot \rho\, d\rho \right] d\theta$$

Semplificando ρ al denominatore con lo Jacobiano:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[\int_1^{\frac{1}{\cos\theta}} \cos\theta\, d\rho \right] d\theta$$

Poiché $\cos\theta$ non dipende da ρ, lo portiamo fuori dall'integrale interno:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\theta \cdot \Big[\rho\Big]_1^{\frac{1}{\cos\theta}} d\theta$$

Sostituiamo gli estremi di integrazione per ρ:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\theta \left(\frac{1}{\cos\theta} - 1 \right) d\theta$$

Svolgiamo la moltiplicazione ($\cos\theta \cdot \frac{1}{\cos\theta} = 1$):

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \cos\theta)\, d\theta$$

Calcoliamo le primitive elementari:

$$I = \Big[\theta - \sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$I = \left(\frac{\pi}{3} - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) - (0 - \sin 0)$$

$$I = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Esercizio 7.5. *Si consideri la curva* $\vec{r}(t) = (e^t\cos t, e^t\sin t)$ *con* $t \in [0, \pi/2]$*:*

a) Disegnare la curva $\vec{r}(t)$, stabilire se è semplice e regolare e calcolarne la lunghezza.

b) Calcolare l'area compresa tra la curva e gli assi coordinati.

Soluzione. **a) Studio della curva e lunghezza**
La curva è composta da funzioni di classe C^∞, quindi $\vec{r} \in C^1([0, \pi/2])$. Calcoliamo il vettore derivato (vettore velocità) $\vec{v}(t)$:

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \left(e^t \cos t - e^t \sin t,\ e^t \sin t + e^t \cos t\right)$$

Calcoliamo la norma $||\vec{v}(t)||$ per verificarne la regolarità:

$$||\vec{v}(t)|| = \sqrt{e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2}$$

Sviluppando i quadrati:

$$||\vec{v}(t)|| = \sqrt{e^{2t}(\cos^2 t + \sin^2 t - 2\sin t \cos t + \sin^2 t + \cos^2 t + 2\sin t \cos t)}$$

$$||\vec{v}(t)|| = \sqrt{e^{2t}(1+1)} = \sqrt{2}e^t$$

Poiché $||\vec{v}(t)|| = \sqrt{2}e^t > 0$ per ogni $t \in [0, \pi/2]$, la curva è regolare. Inoltre è semplice perché l'applicazione $t \mapsto \vec{r}(t)$ è iniettiva (infatti la norma $||\vec{r}(t)|| = e^t$ è una funzione strettamente crescente).

Calcoliamo la lunghezza L:

$$L = \int_0^{\pi/2} ||\vec{v}(t)||\, dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{2}e^t\, dt = \sqrt{2}\left[e^t\right]_0^{\pi/2} = \sqrt{2}(e^{\pi/2} - 1)$$

b) Calcolo dell'area
La curva in coordinate polari è descritta dalla relazione $\rho(\theta) = e^\theta$, con $\theta \in [0, \pi/2]$. L'area del settore piano compreso tra la curva e gli assi (che corrispondono alle semirette $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$) può essere calcolata con l'integrale in coordinate polari:

$$A = \iint_D 1\ dxdy = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{e^\theta} \rho\ d\rho\right) d\theta$$

$$A = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{e^\theta} d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{e^{2\theta}}{2} d\theta$$

$$A = \left[\frac{e^{2\theta}}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{e^{2(\pi/2)} - e^0}{4} = \frac{e^\pi - 1}{4}$$

Esercizio 7.6. *Calcolare $I = \iint_D \frac{x-y}{x+2y}\ dxdy$ con:*

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x - y \le 4, 1 \le x + 2y \le 2\right\}$$

Soluzione. Il dominio D è delimitato da quattro rette. Risolvere l'integrale nelle coordinate originali risulta complesso, pertanto procediamo con un cambio di variabili suggerito dalla forma del dominio e della funzione integranda:

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + 2y \end{cases}$$

Per ricavare le coordinate originali (x, y) in funzione di (u, v), risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x = \frac{2u+v}{3} \\ y = \frac{v-u}{3} \end{cases}$$

Calcoliamo il modulo dello Jacobiano della trasformazione. Possiamo calcolare lo Jacobiano di (u, v) rispetto a (x, y) e poi invertirlo:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 - (-1) = 3 \implies |J| = \left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$$

Nelle nuove coordinate, il dominio diventa un rettangolo:

$$\tilde{D} = \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq u \leq 4, 1 \leq v \leq 2\right\}$$

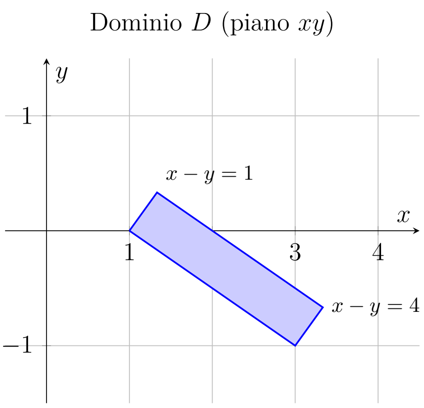
Sostituendo nell'integrale:

$$I = \iint_{\tilde{D}} \frac{u}{v} \cdot \frac{1}{3}\, dudv = \frac{1}{3} \int_1^4 u\, du \cdot \int_1^2 \frac{1}{v}\, dv$$

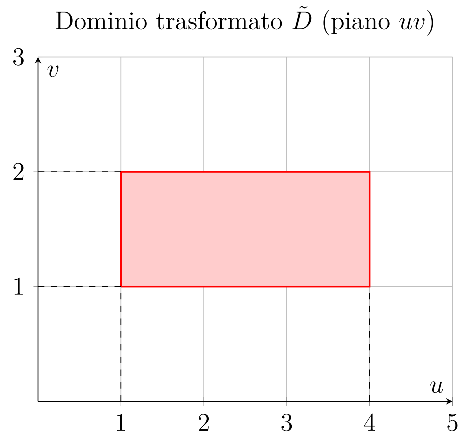
Calcolando gli integrali definiti:

$$I = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{u^2}{2}\right]_1^4 \cdot [\ln |v|]_1^2 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{16 - 1}{2}\right) \cdot (\ln 2 - \ln 1)$$

$$I = \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{2} \cdot \ln 2 = \frac{5}{2} \ln 2$$



Il parallelogramma D delimitato da $1 \leq x - y \leq 4$ e $1 \leq x + 2y \leq 2$.



Il rettangolo $\tilde{D}$ definito da $1 \leq u \leq 4$ e $1 \leq v \leq 2$.

Esercizio 7.7. *Calcolare* $I{=}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$

Soluzione. Si tratta del celebre **Integrale di Gauss**. La funzione $f(x) = e^{-x^2}$ non ammette una primitiva esprimibile in termini di funzioni elementari, pertanto non è possibile usare il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale direttamente.

L'idea vincente (attribuita a Poisson) è calcolare il quadrato dell'integrale:

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\, dy\right)$$

Possiamo riscrivere il prodotto di integrali come un integrale doppio su tutto il piano $\mathbb{R}^2$:

$$I^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2}\, dxdy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy$$

Geometricamente, questo integrale doppio rappresenta il volume sotteso dalla superficie a "campana" $z = e^{-(x^2+y^2)}$ su tutto il piano xy.

Per risolvere questo integrale doppio, sfruttiamo la simmetria radiale evidente dal grafico e passiamo in coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad , \quad |J| = \rho$$

La funzione integranda diventa $e^{-(\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta)} = e^{-\rho^2}$. Il dominio $\mathbb{R}^2$ in coordinate polari è dato da $\rho \in [0, +\infty)$ e $\theta \in [0, 2\pi)$.

Sostituendo nell'integrale (e ricordando lo Jacobiano!):

$$I^2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} \cdot \rho\, d\rho$$

L'integrale si separa facilmente nel prodotto di due integrali unidimensionali:

$$I^2 = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) \cdot \left(\int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2}\, d\rho\right)$$

Il primo integrale vale semplicemente 2π. Per il secondo, notiamo che la derivata di $e^{-\rho^2}$ è $-2\rho e^{-\rho^2}$, quindi l'integranda è quasi una derivata immediata:

$$\int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2}\, d\rho = \left[-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right]_0^{+\infty}$$

Valutando agli estremi:

$$= \lim_{M\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-M^2}\right) - \left(-\frac{1}{2}e^0\right) = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Mettendo tutto insieme:

$$I^2 = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$$

Infine, estraendo la radice quadrata:

$$I = \sqrt{\pi}$$

Abbiamo scelto la radice positiva poiché l'integranda e^{-x^2} è sempre positiva, dunque l'area sottesa deve essere necessariamente positiva.

Esercizio 7.8. *Sia* $f(x, y, z) = y^2x$ *e sia* $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 2, 0 \le y \le z, 0 \le x \le yz\}$. *Calcolare* $I = \iiint_D f(x, y, z)\, dxdydz$.

Soluzione. Analizziamo il dominio D. Notiamo la catena di dipendenze:

- z varia tra due costanti: $0 \leq z \leq 2$.
- y dipende da z: $0 \leq y \leq z$.
- x dipende da y e z: $0 \leq x \leq yz$.

Per il Teorema di Fubini (integrazione per strati rispetto a z), impostiamo l'integrale risolvendo dall'interno (variabile più vincolata) verso l'esterno (variabile libera):

$$I = \int_0^2 \left[\int_0^z \left(\int_0^{yz} y^2 x \, dx \right) dy \right] dz$$

1. Integrale interno (in dx):

$$\int_0^{yz} y^2 x \, dx = y^2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=yz} = y^2 \cdot \frac{(yz)^2}{2} = \frac{1}{2} y^4 z^2$$

2. Integrale intermedio (in dy): Sostituiamo il risultato e integriamo rispetto a y:

$$\int_0^z \frac{1}{2} y^4 z^2 \, dy = \frac{z^2}{2} \left[\frac{y^5}{5} \right]_{y=0}^{y=z} = \frac{z^2}{2} \cdot \frac{z^5}{5} = \frac{z^7}{10}$$

3. Integrale esterno (in dz): Infine, integriamo rispetto a z:

$$I = \int_0^2 \frac{z^7}{10} \, dz = \frac{1}{10} \left[\frac{z^8}{8} \right]_0^2 = \frac{1}{80}(2^8 - 0)$$

Semplificando:

$$I = \frac{256}{80} = \frac{32}{10} = \frac{16}{5}$$

Esercizio 7.9. *Siano $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2$, $g(x, y) = x^2 + y^2 + 1$. Determinare il volume del solido Ω limitato superiormente dal grafico di g e inferiormente da quello di f.*

Soluzione. Il volume da calcolare è dato dall'integrale triplo della funzione costante 1 sull'insieme Ω:

$$Vol(\Omega) = \iiint_\Omega 1 \, dxdydz$$

Definiamo l'insieme Ω come regione compresa tra i due paraboloidi:

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 2y^2 \leq z \leq x^2 + y^2 + 1 \right\}$$

Troviamo l'intersezione (l'ombra sul piano xy) confrontando le quote z:

$$2(x^2 + y^2) \leq (x^2 + y^2) + 1 \iff x^2 + y^2 \leq 1$$

L'intersezione è il cerchio unitario $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Impostare l'integrale in cartesiane porterebbe a calcoli complessi a causa delle radici negli estremi:

$$Vol(\Omega) = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{2(x^2+y^2)}^{x^2+y^2+1} 1 \, dzdydx$$

Conviene passare in coordinate cilindriche.

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad , \quad |J| = \rho$$

I nuovi estremi di integrazione sono:

- Base circolare: $0 \le \theta \le 2\pi$ e $0 \le \rho \le 1$.
- Altezza (fili verticali): $2\rho^2 \le z \le \rho^2 + 1$.

L'integrale diventa:

$$Vol(\Omega) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \left(\int_{2\rho^2}^{\rho^2+1} 1 \; dz \right) \rho \; d\rho$$

1. Integrale interno (in dz):

$$\int_{2\rho^2}^{\rho^2+1} 1 \; dz = [z]_{2\rho^2}^{\rho^2+1} = (\rho^2+1) - 2\rho^2 = 1 - \rho^2$$

2. Integrale intermedio (in $d\rho$): Sostituiamo il risultato e ricordiamo di moltiplicare per lo Jacobiano ρ:

$$\int_0^1 (1-\rho^2) \cdot \rho \; d\rho = \int_0^1 (\rho - \rho^3) \; d\rho$$

$$= \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

3. Integrale esterno (in $d\theta$):

$$Vol(\Omega) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \; d\theta = \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$$

Il volume del solido è $\frac{\pi}{2}$.

Esercizio 7.10. *Calcolare* $I = \iiint_E \frac{2z}{(x^2+y^2)^2} \; dxdydz$ *dove:*

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4x, |y| \le \sqrt{3}x, 0 \le z \le \sqrt{|y|}\}$$

Soluzione. Passando in coordinate cilindriche si ha:

$$x^2 + y^2 \ge 1 \iff \rho^2 \ge 1 \iff \rho \ge 1$$

$$x^2 + y^2 \le 4x \iff \rho^2 \le 4\rho\cos\theta \iff \rho \le 4$$

Mettendo insieme le due condizioni otteniamo $1 \le \rho \le 4$, per θ invece osservando la seconda condizione:

$$|y| \le \sqrt{3}x \iff -\sqrt{3}x \le y \le \sqrt{3}x \iff -\sqrt{3}\rho\cos\theta \le \rho\sin\theta \le \sqrt{3}\rho\cos\theta$$

Analizzandole una per volta:

$$\rho\sin\theta \ge -\sqrt{3}\rho\cos\theta \iff \tan\theta \ge -\sqrt{3} \iff \theta \ge -\frac{\pi}{3}$$

$$\rho\sin\theta \le \sqrt{3}\rho\cos\theta \iff \tan\theta \le \sqrt{3} \iff \theta \le \frac{\pi}{3}$$

Unendole otteniamo $-\frac{\pi}{3} \le \rho\theta\frac{\pi}{3}$ per z invece vale:

$$0 \le z \le \sqrt{\rho|\sin\theta|}$$

Impostiamo l'integrale:

$$I = \iiint_E \frac{2z}{(x^2+y^2)^2}\, dxdydz = \int_{-\pi/3}^{\pi/3}\int_1^{4\cos\theta}\int_0^{\sqrt{\rho|\sin\theta|}} \frac{2z}{\rho^4}\cdot\rho\; dzd\rho d\theta =$$

$$\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\int_1^{4\cos\theta} \frac{1}{\rho^3}\left[z^2\right]_0^{\sqrt{\rho|\sin\theta|}}\, dzd\rho d\theta = \int_{-\pi/3}^{\pi/3}\int_1^{4\cos\theta}\frac{|\sin\theta|}{\rho^2}\, d\rho d\theta =$$

$$\int_{-\pi/3}^{\pi/3}|\sin\theta|\left[-\frac{1}{\rho}\right]_1^{4\cos\theta} d\theta = \int_{-\pi/3}^{\pi/3}|\sin\theta|\cdot\left(-\frac{1}{4\cos\theta}+1\right)\, d\theta =$$

$$= \int_{-\pi/3}^{\pi/3}|\sin\theta|\; d\theta + \int_{-\pi/3}^{\pi/3} -\frac{|\sin\theta|}{4\cos\theta}\, d\theta$$

Notiamo che entrambe le integrande sono pari, quindi possiamo sfruttare cioò per togliere il modulo:

$$= 2\int_0^{\pi/3}\sin\theta\; d\theta + 2\int_0^{\pi/3} -\frac{\sin\theta}{4\cos\theta}\, d\theta$$

$$= -2\cos\frac{\pi}{3} + 2 + \left[\frac{1}{2}\ln|\cos\theta|\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 1 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

Esercizio 7.11. *Calcolare il volume del solido Ω ottenuto tramite rotazione compiuta attorno all'asse y di:*

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le e^{-y^2}, 0\le y\le 1\right\}$$

Esercizio 7.12. *Calcolare l'integrale triplo della funzione $f(x,y,z)=z$ su un insieme Ω dato da:*

$$\Omega = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z\ge 0, x^2+y^2+z^2\le 1, 3(x^2+y^2)\le z^2\right\}$$

Soluzione. Siccome il dominio comprende una sfera, tentiamo con le coordinate sferiche, imponiamo:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\phi \\ y = \rho\sin\theta\sin\phi & \phi\in[0,\pi], \quad \theta\in[0,2\pi] \\ z = \rho\cos\phi \end{cases}$$

Otteniamo:

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2\le 1 &\iff \rho^2\sin^2\phi\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\phi\sin^2\theta + \rho^2\cos^2\phi \le 1 \\ &\iff \rho^2\sin^2\phi + \rho^2\cos^2\phi\le 1 \\ &\iff p^2\le 1 \\ &\iff 0\le\rho\le 1 \end{aligned}$$

Analizziamo anche le altre due condizioni:

$$\begin{aligned} z\ge 0 &\iff \rho\cos\phi\ge 0 \\ &\iff \cos\phi\ge 0 \\ &\iff 0\le\phi\le\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

E infine:

$$\begin{aligned} 3(x^2+y^2) \le z^2 &\iff 3\rho^2 \sin^2\phi \le \rho^2 \cos^2\phi \\ &\iff 3\sin^2\phi \le \cos^2\phi \\ &\iff \tan^2\phi \le \frac{1}{3} \\ &\iff \tan\phi \le \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &\iff \phi \le \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Dunque l'integrale da risolvere, ricordando che il modulo dello Jacobiano per la trasformazione in coordinate sferiche è $|J| = \rho^2 \sin\phi$ è:

$$\iiint_D z\ dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/6}\int_0^1 \rho\cos\phi \cdot \rho^2 \sin\phi\ d\rho d\phi d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{\pi/6} \cos\phi \sin\phi\ d\phi \cdot \int_0^1 \rho^3\ d\rho$$

$$2\pi \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{16}$$

Esercizio 7.13. *Determinare le coordinate del baricentro del solido di densità* $\delta(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *che occupa la regione dello spazio* Ω *dato da:*

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x^2+y^2 \le e^{2z}, z \le 1\right\}$$

Soluzione. Passando in coordinate cilindriche abbiamo che:

$$1 \le x^2+y^2 \le e^{2z} \implies 1 \le e^{2z} \iff 2z \ge 0 \iff z \ge 0$$

Quindi da questa condizione implicita trovata e dalla terza:

$$0 \le z \le 1$$

In più:

$$\begin{cases} x^2+y^2 \le e^{2z} \iff \rho^2 \le e^{2z} \iff 0 \le \rho \le e^z \\ x^2+y^2 \ge 1 \iff \rho^2 \ge 1 \iff \rho \ge 1 \end{cases} \implies 1 \le \rho \le e^z$$

Calcoliamo quindi la massa come:

$$M = \iiint_\Omega \delta(x,y,z)\ dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_1^{e^z} 1\ d\rho dz d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^z - 1\ dzd\theta = \int_0^{2\pi} e-2\ d\theta = 2\pi(e-2)$$

Ora per la posizione del baricentro:

$$x_b = \frac{1}{M}\iiint_\Omega x \cdot \delta(x,y,z)\ dxdydz = \frac{1}{M}\iiint_\Omega \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dxdydz$$

$$y_b = \frac{1}{M}\iiint_\Omega y \cdot \delta(x,y,z)\ dxdydz = \frac{1}{M}\iiint_\Omega \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dxdydz$$

Notiamo che la funzione integranda è dispari sia rispetto a x che rispetto a y e anche il dominio d'integrazione è simmetrico rispetto ad entrambe le variabili, se ne deduce che:

$$x_b = y_b = 0$$

Calcoliamo la coordinata z_b:

$$z_b = \frac{1}{M}\iiint_\Omega z \cdot \delta(x,y,z)\,dV = \frac{1}{M}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dz \int_1^{e^z} z\,d\rho$$

$$z_b = \frac{2\pi}{M}\int_0^1 z(e^z - 1)\,dz = \frac{2\pi}{M}\left(\int_0^1 ze^z\,dz - \int_0^1 z\,dz\right)$$

Risolvendo per parti $\int ze^z\,dz = (z-1)e^z$:

$$z_b = \frac{2\pi}{M}\left[(z-1)e^z - \frac{z^2}{2}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{M}\left(-\frac{1}{2} - (-1)\right) = \frac{2\pi}{M}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{M}$$

Sostituendo il valore di M:

$$z_b = \frac{\pi}{2\pi(e-2)} = \frac{1}{2(e-2)}$$

Risultato: Il baricentro è $G = \left(0, 0, \frac{1}{2(e-2)}\right)$.

Esercizio 7.14. *Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}$. Calcolare l'integrale doppio $\iint_D xy^2\,dxdy$.*

Si consideri inoltre la curva regolare a tratti avente parametrizzazione

$$\mathbf{r} : [0, 1+\pi] \to \mathbb{R}^2 \quad \mathbf{r}(t) = \begin{cases} (1-t, -2t) & \text{se } 0 \le t \le 1, \\ (2\sin(t-1), -2\cos(t-1)) & \text{se } 1 \le t \le 1+\pi. \end{cases}$$

Si indichi con γ il sostegno di tale curva.

a. *Determinare il versore tangente a γ nei punti dove è ben definito.*

b. *Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma xy^2\,ds$.*

Soluzione. Il dominio D è normale rispetto all'asse x. Calcoliamo l'integrale iterato:

$$\iint_D xy^2\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^x xy^2\,dy\right)dx = \int_0^1 x\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^x dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^4}{3}\,dx = \left[\frac{x^5}{15}\right]_0^1 = \frac{1}{15}$$

Il versore tangente è definito come $\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$. Calcoliamo le derivate nei due tratti:

- **Tratto 1 ($0 < t < 1$):** $\mathbf{r}_1'(t) = (-1, -2)$, $\|\mathbf{r}_1'(t)\| = \sqrt{5} \implies \mathbf{T}_1(t) = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.
- **Tratto 2 ($1 < t < 1+\pi$):** $\mathbf{r}_2'(t) = (2\cos(t-1), 2\sin(t-1))$, $\|\mathbf{r}_2'(t)\| = 2$.

$$\mathbf{T}_2(t) = (\cos(t-1), \sin(t-1))$$

Il versore è ben definito per $t \in (0,1) \cup (1, 1+\pi)$. In $t = 1$ non è definito poiché $\mathbf{r}'(t)$ è discontinua (punto angoloso).

L'integrale è dato dalla somma dei contributi sui due tratti γ_1 e γ_2:

$$\int_\gamma xy^2\,ds = \int_0^1 (1-t)(-2t)^2\sqrt{5}\,dt + \int_1^{1+\pi} (2\sin(t-1))(-2\cos(t-1))^2 \cdot 2\,dt$$

$$= 4\sqrt{5}\int_0^1 (t^2 - t^3)\,dt + 16\int_0^\pi \sin u \cos^2 u\,du \quad (\text{ponendo } u = t-1)$$

$$= 4\sqrt{5}\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4}\right]_0^1 + 16\left[-\frac{\cos^3 u}{3}\right]_0^\pi = \frac{\sqrt{5}}{3} + \frac{32}{3} = \frac{\sqrt{5}+32}{3}$$

Risultato: $\iint_D xy^2\,dxdy = \frac{1}{15}$ e $\int_\gamma xy^2\,ds = \frac{\sqrt{5}+32}{3}$.

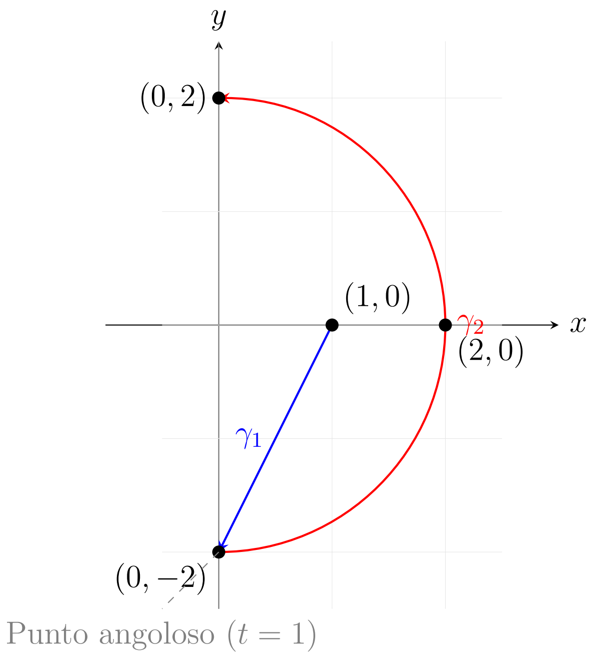


Figure 3: Rappresentazione del sostegno γ della curva $\mathbf{r}(t)$.

Esercizio 7.15. *Calcolare l'integrale triplo*

$$\iiint_\Sigma xz\,dxdydz,$$

dove

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le z \le 4 - (x^2+y^2), x \ge 0\}.$$

Soluzione. Dalla disuguaglianza $x^2+y^2 \le 4-(x^2+y^2)$ deduciamo che deve essere $2(x^2+y^2) \le 4$, cioè $x^2+y^2 \le 2$. Il dominio di integrazione Σ può pertanto essere scritto come dominio z-semplice:

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \le 2, x^2+y^2 \le z \le 4-(x^2+y^2), x \ge 0\}.$$

Posto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2, x \geq 0\}$, integriamo per fili paralleli ad z:

$$\begin{aligned}
\iiint_\Sigma xz\,dxdydz &= \iint_D \left(\int_{x^2+y^2}^{4-(x^2+y^2)} xz\,dz \right) dxdy \\
&= \iint_D x \left[\frac{z^2}{2} \right]_{x^2+y^2}^{4-(x^2+y^2)} dxdy \\
&= \iint_D x \left(\frac{(4 - x^2 - y^2)^2}{2} - \frac{(x^2 + y^2)^2}{2} \right) dxdy.
\end{aligned}$$

Passando a coordinate polari $x = \rho \cos\theta, y = \rho \sin\theta$, l'integranda assume la forma $\rho \cos\theta\,[(4 - \rho^2)^2/2 - \rho^4/2]$. Semplificando l'espressione in parentesi:

$$\frac{16 - 8\rho^2 + \rho^4 - \rho^4}{2} = \frac{16 - 8\rho^2}{2} = 8 - 4\rho^2.$$

Il dominio D in coordinate polari è descritto da $0 \leq \rho \leq \sqrt{2}$ e $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Ricordando di moltiplicare per il determinante dello jacobiano (ρ), abbiamo:

$$\begin{aligned}
\iiint_\Sigma xz\,dxdydz &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho \cdot (8 - 4\rho^2) \cdot \rho\,d\rho \\
&= [\sin\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{2}} (8\rho^2 - 4\rho^4)\,d\rho \\
&= (1 - (-1)) \left[\frac{8}{3}\rho^3 - \frac{4}{5}\rho^5 \right]_0^{\sqrt{2}} \\
&= 2 \left(\frac{8}{3}(2\sqrt{2}) - \frac{4}{5}(4\sqrt{2}) \right) \\
&= 2 \left(\frac{16\sqrt{2}}{3} - \frac{16\sqrt{2}}{5} \right) = 32\sqrt{2} \left(\frac{5 - 3}{15} \right) = \frac{64}{15}\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Valore finale:

$$\frac{64\sqrt{2}}{15}.$$

8 Studio qualitativo di equazioni differenziali ordinarie

Esercizio 8.1. *Risolvere, al variare di ain$\mathbb{R}$ il sistema:*

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = ay \end{cases}$$

Tracciare le soluzioni al variare di a, ovvero disegnare le immagini delle curve $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ che soddisfano il sistema, indicando anche il verso di percorrenza.

Soluzione. Notiamo che se $a = 0$ allora y è costante mentre $x(t) = ce^t$.