

## Dimostrazioni richieste Analisi II

**Teorema 1** (Formula risolutiva per le EDO del primo ordine lineari). *Date  $a, b : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue in  $I$ , l'integrale generale della EDO*

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t), \quad t \in I$$

*è dato dalla formula:*

$$y(t) = e^{A(t)} [B(t) + C], \quad t \in I$$

*dove  $C \in \mathbb{R}$ ,  $A$  è una primitiva di  $a$ , cioè  $A(t) = \int a(t) dt$ , e  $B$  è una primitiva di  $e^{-A}b$ , cioè  $B(t) = \int b(t)e^{-A(t)} dt$ .*

*Proof.* Svolgiamo la dimostrazione in 3 passi:

**Passo 1:** Porto a sinistra il termine con la funzione  $a$  e moltiplico per  $e^{-A}$ .

$$\underbrace{y'e^{-A} - aye^{-A}}_{(ye^{-A})'} = be^{-A}$$

Infatti, per la regola della derivata del prodotto e della funzione composta:

$$(ye^{-A})' = y'e^{-A} + y(e^{-A})' = y'e^{-A} - aye^{-A}$$

essendo  $(e^{-A})' = e^{-A}(-A)' = -ae^{-A}$ . Quindi, l'EDO del primo ordine lineare è equivalente a:

$$(ye^{-A})' = be^{-A}$$

**Passo 2:** Applico il TFCI (Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale) e trovo la primitiva su entrambi i membri dell'equazione:

$$ye^{-A} = \int (ye^{-A})' dt = \int be^{-A} dt + C$$

dove  $C \in \mathbb{R}$  è la costante generica di integrazione.

**Passo 3:** Moltiplico per  $e^A$  entrambi i membri per isolare  $y(t)$ :

$$y(t) = y(t) \underbrace{e^{-A(t)+A(t)}}_{e^0=1} = e^{A(t)} \left[ \underbrace{\int be^{-A} dt + C}_{B(t)} \right]$$

Otteniamo così la formula finale:  $y(t) = e^{A(t)}[B(t) + C]$ . □

**Teorema 2** (Struttura dell'integrale generale - EDO 2° ordine lineare omogenea). *Siano  $a, b, c : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue in  $I$ , con  $a(t) \neq 0$  per ogni  $t \in I$ . L'integrale generale dell'equazione omogenea:*

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0 \tag{*}$$

*è uno spazio vettoriale di dimensione 2. Ovvvero, le soluzioni sono tutte e sole della forma:*

$$y_0(t) = C_1 y_{0,1}(t) + C_2 y_{0,2}(t)$$

*con  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ , dove  $y_{0,1}$  e  $y_{0,2}$  sono due soluzioni linearmente indipendenti (l.i.).*

*Proof.* Dal principio di sovrapposizione deduciamo che l'insieme di tutte le soluzioni è uno spazio vettoriale (essendo chiuso rispetto alla somma di soluzioni e al prodotto per uno scalare). Per dimostrare che la dimensione di tale spazio è 2, dobbiamo:

- Determinare 2 soluzioni l.i.  $y_{0,1}$  e  $y_{0,2}$ ;
- Verificare che ogni soluzione  $\bar{y}_0(t)$  si possa scrivere come combinazione lineare di  $y_{0,1}$  e  $y_{0,2}$ .

**Parte a):** Fissiamo  $t_0 \in I$  e scegliamo  $y_{0,1}$  e  $y_{0,2}$  come soluzioni di due problemi di Cauchy. Precisamente,  $y_{0,1}$  è soluzione di:

$$\begin{cases} a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0 \\ y(t_0) = 1 \\ y'(t_0) = 0 \end{cases}$$

e  $y_{0,2}$  è soluzione di:

$$\begin{cases} a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0 \\ y(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = 1 \end{cases}$$

Tali soluzioni esistono e sono uniche su tutto  $I$  grazie al teorema di esistenza e unicità globale per il problema di Cauchy. Verifichiamo che siano l.i. procedendo per assurdo: assumiamo che esista  $C \neq 0$  tale che  $y_{0,1}(t) = Cy_{0,2}(t)$  per ogni  $t \in I$ . Per la definizione data sopra avremmo:

$$1 = y_{0,1}(t_0) = Cy_{0,2}(t_0) = C \cdot 0 = 0$$

che è una contraddizione. Quindi  $y_{0,1}$  e  $y_{0,2}$  sono linearmente indipendenti.

**Parte b):** Sia  $\bar{y}_0$  una qualunque soluzione particolare di (\*) e cerchiamo costanti  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$  per le quali  $\bar{y}_0$  coincida con la funzione  $z(t) := C_1 y_{0,1}(t) + C_2 y_{0,2}(t)$  per ogni  $t \in I$ . Scegliamo  $C_1$  e  $C_2$  in maniera tale che:

$$\bar{y}_0(t_0) = z(t_0) \quad \text{e} \quad \bar{y}'_0(t_0) = z'(t_0)$$

Ovvero poniamo il sistema:

$$\begin{cases} \bar{y}_0(t_0) = z(t_0) := C_1 \underbrace{y_{0,1}(t_0)}_1 + C_2 \underbrace{y_{0,2}(t_0)}_0 = C_1 \\ \bar{y}'_0(t_0) = z'(t_0) := C_1 \underbrace{y'_{0,1}(t_0)}_0 + C_2 \underbrace{y'_{0,2}(t_0)}_1 = C_2 \end{cases}$$

Otteniamo quindi  $C_1 = \bar{y}_0(t_0)$  e  $C_2 = \bar{y}'_0(t_0)$ . La combinazione lineare candidata è:

$$\bar{z}(t) = \bar{y}_0(t_0)y_{0,1}(t) + \bar{y}'_0(t_0)y_{0,2}(t)$$

Concludiamo osservando che sia  $\bar{z}(t)$  che  $\bar{y}_0(t)$  sono soluzioni dello stesso problema di Cauchy:

$$\begin{cases} a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0 \\ y(t_0) = \bar{y}_0(t_0) \\ y'(t_0) = \bar{y}'_0(t_0) \end{cases}$$

Per il teorema di esistenza e unicità globale, deve essere  $\bar{y}_0(t) = \bar{z}(t)$  per ogni  $t \in I$ . Questo conclude la dimostrazione.  $\square$

**Teorema 3** (Calcolo del raggio di convergenza). *Data la serie di potenze  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ , abbiamo che se uno dei seguenti limiti esiste:*

$$(i) \quad R := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

$$(ii) \quad R := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

con  $R \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ , allora la serie ha raggio di convergenza  $R$ .

*Proof.* Grazie al teorema "Raggio di convergenza" è sufficiente verificare che la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-x_0)^n|$ :

- a) converga per  $|x-x_0| < R$ ;
- b) non converga per  $|x-x_0| > R$ .

**Caso (ii):** Assumiamo che il limite (ii) esista e verifichiamo (a) e (b). Osserviamo che  $\forall x \in \mathbb{R}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = |x-x_0| \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}_{\frac{1}{R} \text{ (ii)}} = \frac{|x-x_0|}{R}$$

Quindi (a) e (b) sono diretta conseguenza del criterio della radice per la serie numerica  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-x_0)^n|$ .

**Caso (i):** Assumiamo che il limite (i) esista e verifichiamo (a) e (b). Osserviamo che tutte le serie di potenze convergono per  $x = x_0$  e che per  $x \neq x_0$  abbiamo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}|}{|a_n(x-x_0)^n|} = |x-x_0| \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}_{\frac{1}{R} \text{ (i)}} = \frac{|x-x_0|}{R}$$

Quindi (a) e (b) sono diretta conseguenza del criterio del rapporto per la serie numerica  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-x_0)^n|$ .  $\square$

**Teorema 4** (Calcolo dei coefficienti di Fourier). *Se una funzione  $2\pi$ -periodica  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è la funzione somma di una serie trigonometrica, cioè:*

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

con  $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$ , con convergenza totale su  $[-\pi, \pi]$ , allora necessariamente  $a_0, a_n, b_n$  sono i coefficienti di Fourier di  $f$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

*Proof.* Assumiamo che esistano  $a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$  tali che  $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$  con convergenza totale su  $[-\pi, \pi]$ .

**Calcolo di  $a_0$ :** Integriamo termine a termine grazie alla convergenza totale:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right] dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} a_0 dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx \\ &= \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} a_0 dx}_{a_0 2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot 0 = a_0 2\pi \end{aligned}$$

Da cui otteniamo:  $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$ .

**Calcolo degli  $a_k$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ :** Moltiplichiamo per  $\cos(kx)$  ed integriamo termine a termine (lecito per la conv. totale poiché  $|\cos(kx)| \leq 1$ ):

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right] \cos(kx) dx \\ &= a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(kx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(kx) dx \\ &= a_0 \cdot 0 + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq k}}^{\infty} a_n \cdot 0 + a_k \cdot \pi + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot 0 = a_k \cdot \pi \end{aligned}$$

Dove abbiamo usato le formule di ortogonalità:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(kx) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq k \\ \pi & \text{se } n = k \end{cases}$$

Quindi:  $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$ . Si procede analogamente per i coefficienti  $b_k, k \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Teorema 5** (Invarianza della lunghezza di una curva per riparametrizzazioni). *Sia  $\underline{r} : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva regolare con sostegno  $\gamma$ . Sia  $\underline{v} : [c, d] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una riparametrizzazione di  $\gamma$  relativa al cambiamento di variabili  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ , cioè  $\underline{v}(s) = \underline{r} \circ \varphi(s)$  per ogni  $s \in [c, d]$ . Allora:*

$$\text{lunghezza}(\underline{r}([a, b])) = \int_c^d \|\underline{v}'(s)\| ds$$

dove  $\text{lunghezza}(\underline{r}([a, b])) = \int_a^b \|\underline{r}'(t)\| dt$ .

*Proof.* Ricordiamo che, siccome  $\underline{r}$  è regolare, la sua lunghezza è definita come:

$$\text{lunghezza}(\underline{r}([a, b])) = \int_a^b \|\underline{r}'(t)\| dt \tag{*}$$

Usando la formula di derivazione delle funzioni composte componente per componente, otteniamo che:

$$\underline{v}'(s) = \begin{pmatrix} v'_1(s) \\ v'_2(s) \\ \vdots \\ v'_n(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (r_1(\varphi(s)))' \\ (r_2(\varphi(s)))' \\ \vdots \\ (r_n(\varphi(s)))' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r'_1(\varphi(s))\varphi'(s) \\ r'_2(\varphi(s))\varphi'(s) \\ \vdots \\ r'_n(\varphi(s))\varphi'(s) \end{pmatrix} = \varphi'(s) \underbrace{\begin{pmatrix} r'_1(\varphi(s)) \\ r'_2(\varphi(s)) \\ \vdots \\ r'_n(\varphi(s)) \end{pmatrix}}_{\underline{r}'(\varphi(s))}$$

Quindi  $\underline{v}'(s) = \varphi'(s)\underline{r}'(\varphi(s))$ . Calcolando la norma per ogni  $s \in [c, d]$  si ha:

$$\|\underline{v}'(s)\| = \|\varphi'(s)\underline{r}'(\varphi(s))\| = |\varphi'(s)| \cdot \|\underline{r}'(\varphi(s))\|$$

Vogliamo effettuare il cambio di variabile  $t = \varphi(s)$  nell'integrale (\*), il che implica  $dt = \varphi'(s) ds$ . Per gli estremi di integrazione abbiamo due possibilità:

1. **Se  $\varphi$  è crescente:** allora  $\varphi(c) = a$  e  $\varphi(d) = b$ . In questo caso  $\varphi'(s) \geq 0$ , quindi  $\|\underline{v}'(s)\| = \varphi'(s)\|\underline{r}'(\varphi(s))\|$ . L'integrale diventa:

$$\int_a^b \|\underline{r}'(t)\| dt = \int_c^d \|\underline{r}'(\varphi(s))\| \varphi'(s) ds = \int_c^d \|\underline{v}'(s)\| ds$$

2. **Se  $\varphi$  è decrescente:** allora  $\varphi(c) = b$  e  $\varphi(d) = a$ . In questo caso  $\varphi'(s) \leq 0$ , quindi  $\|\underline{v}'(s)\| = -\varphi'(s)\|\underline{r}'(\varphi(s))\|$ . L'integrale diventa:

$$\int_a^b \|\underline{r}'(t)\| dt = \int_d^c \|\underline{r}'(\varphi(s))\| \varphi'(s) ds = - \int_c^d \|\underline{r}'(\varphi(s))\| \varphi'(s) ds$$

Poiché in questo caso  $-\varphi'(s) = |\varphi'(s)|$ , otteniamo:

$$\int_c^d \|\underline{r}'(\varphi(s))\| (-\varphi'(s)) ds = \int_c^d \|\underline{v}'(s)\| ds$$

In entrambi i casi, il valore dell'integrale è identico, il che conclude la dimostrazione.  $\square$

**Teorema 6** (Condizione necessaria alla differenziabilità). *Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  un insieme aperto e sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile nel punto  $\underline{x}_0 \in A$ . Allora  $f$  è continua in  $\underline{x}_0$ .*

*Proof.* Dobbiamo dimostrare che  $\exists \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0)$ . Siccome  $f$  è differenziabile in  $\underline{x}_0$ , per definizione abbiamo che:

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle + o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|) \quad (*)$$

per  $\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0$ . Di conseguenza, possiamo scrivere la catena di diseguaglianze:

$$\begin{aligned} 0 \leq |f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)| &\stackrel{(*)}{=} |\langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle + o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|)| \\ &\leq |\langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle| + |o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|)| \quad (\text{Dis. triangolare}) \\ &= |\langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle| + o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|) \\ &\leq \|\nabla f(\underline{x}_0)\| \cdot \|\underline{x} - \underline{x}_0\| + o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|) \quad (\text{Dis. di Cauchy-Schwarz}) \end{aligned}$$

Prendendo il limite per  $\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0$ , otteniamo:

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} |f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)| &\leq \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} [\|\nabla f(\underline{x}_0)\| \cdot \|\underline{x} - \underline{x}_0\|] + \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|) \\ &= \|\nabla f(\underline{x}_0)\| \cdot \underbrace{\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} \|\underline{x} - \underline{x}_0\|}_0 + \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} \left( \frac{o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|)}{\|\underline{x} - \underline{x}_0\|} \cdot \|\underline{x} - \underline{x}_0\| \right) \\ &= \|\nabla f(\underline{x}_0)\| \cdot 0 + \underbrace{0 \cdot 0}_0 \quad (\text{per la def. di } o\text{-piccolo}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Per il teorema del confronto, concludiamo che:

$$\exists \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} |f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)| = 0 \implies \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0)$$

La funzione è dunque continua in  $\underline{x}_0$ .  $\square$

**Teorema 7** (Formula del Gradiente). *Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto e sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile in  $\underline{x}_0 \in A$ . Allora per ogni  $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$  con  $\|\underline{v}\| = 1$  esiste la derivata direzionale di  $f$  in  $\underline{x}_0$  lungo la direzione  $\underline{v}$  e vale la formula:*

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) = \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{v} \rangle$$

*Proof.* Siccome  $f$  è differenziabile in  $\underline{x}_0$ , sappiamo che:

$$f(\underline{x}_0 + \underline{h}) = f(\underline{x}_0) + \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{h} \rangle + o(\|\underline{h}\|) \quad \text{per } \underline{h} \rightarrow 0$$

Possiamo applicare tale equazione ponendo  $\underline{h} = t\underline{v}$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$  abbastanza piccolo:

$$\begin{aligned} f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) &= f(\underline{x}_0) + \langle \nabla f(\underline{x}_0), t\underline{v} \rangle + o(\|t\underline{v}\|) \\ &= f(\underline{x}_0) + t\langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{v} \rangle + o(t) \end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che  $o(\|t\underline{v}\|) = o(|t| \cdot \|\underline{v}\|) = o(|t|) = o(t)$ , dato che per ipotesi  $\|\underline{v}\| = 1$ .

Sottraendo  $f(\underline{x}_0)$  e dividendo per  $t$ , otteniamo l'espressione per il rapporto incrementale:

$$\frac{f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{t} = \frac{t\langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{v} \rangle}{t} + \frac{o(t)}{t} \quad (*)$$

Concludiamo osservando che, per la definizione di derivata direzionale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) &:= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{t} \\ &\stackrel{(*)}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t\langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{v} \rangle}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t)}{t} \\ &= \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{v} \rangle + \underbrace{0}_{\text{per def. di } o\text{-piccolo}} \\ &= \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{v} \rangle \end{aligned}$$

La dimostrazione è così conclusa.  $\square$

**Teorema 8** (Ortogonalità del gradiente agli insiemi di livello). *Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto e sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile in  $A$ . Supponiamo che l'insieme di livello  $k \in \mathbb{R}$  di  $f$ , cioè:*

$$I_k := \{\underline{x} \in A : f(\underline{x}) = k\},$$

*sia il sostegno di una curva regolare  $\underline{r} : I \rightarrow A$  dove  $I \subseteq \mathbb{R}$  è un intervallo. Allora abbiamo che:*

$$\langle \nabla f(\underline{r}(t)), \underline{r}'(t) \rangle = 0, \quad \forall t \in I$$

*Proof.* Consideriamo la funzione composta  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  definita da:

$$F(t) := (f \circ \underline{r})(t) = f(\underline{r}(t)), \quad \text{per } t \in I$$

Osserviamo che per ipotesi l'immagine della curva (il suo sostegno) coincide con l'insieme di livello  $I_k$ :

$$\{\underline{r}(t) : t \in I\} = I_k := \{\underline{x} \in A : f(\underline{x}) = k\}$$

e quindi, sostituendo la curva nella funzione  $f$ , si ottiene sempre il valore costante  $k$ :

$$F(t) := f(\underline{r}(t)) = k$$

Poiché  $F$  è una funzione costante su  $I$ , la sua derivata è nulla ovunque:

$$F'(t) = 0, \quad \forall t \in I \quad (\text{D1})$$

Per il teorema di derivazione delle funzioni composte (regola della catena), abbiamo che:

$$F'(t) = \langle \nabla f(\underline{r}(t)), \underline{r}'(t) \rangle \quad (\text{D2})$$

Confrontando le espressioni (D1) e (D2), otteniamo infine:

$$0 = F'(t) = \langle \nabla f(\underline{r}(t)), \underline{r}'(t) \rangle, \quad \forall t \in I$$

Questo dimostra che in ogni punto il gradiente di  $f$  è ortogonale al vettore tangente della curva che descrive l'insieme di livello.  $\square$

**Teorema 9** (Criterio della matrice Hessiana). *Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto, sia  $f \in C^2(A)$  e sia  $\underline{x}_0 \in A$  un punto critico di  $f$ . Sia  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  la forma quadratica indotta dalla matrice Hessiana  $H_f(\underline{x}_0)$ . Abbiamo che:*

- (i) *Se  $q$  è definita positiva, allora  $\underline{x}_0$  è un punto di minimo locale;*
- (ii) *Se  $q$  è definita negativa, allora  $\underline{x}_0$  è un punto di massimo locale;*
- (iii) *Se  $q$  è indefinita, allora  $\underline{x}_0$  è un punto di sella.*

*Proof.* Verifichiamo l'asserzione (i) (la dimostrazione di (ii) è analoga). Osserviamo che la matrice Hessiana  $H_f(\underline{x}_0)$  è:

- A. simmetrica grazie al teorema di Schwarz siccome  $f \in C^2(A)$ ;
- B. ha tutti gli autovalori reali e positivi, siccome  $q$  è definita positiva.

Quindi da A. e B. ne deduciamo che:

$$\langle \underline{h}, H_f(\underline{x}_0) \underline{h} \rangle = q(\underline{h}) \geq \lambda_{\min} \|\underline{h}\|^2 \quad (\text{D1})$$

$\forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n$ , dove  $\lambda_{\min}$  denota il minimo degli autovalori di  $H_f(\underline{x}_0)$ . Inoltre, dato che  $\underline{x}_0$  è un punto critico di  $f$ , dalla formula di Taylor al secondo ordine otteniamo che:

$$\begin{aligned} f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0) &= \underbrace{\langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{h} \rangle}_{0} + \frac{1}{2} \underbrace{\langle \underline{h}, H_f(\underline{x}_0) \underline{h} \rangle}_{q(\underline{h})} + o(\|\underline{h}\|^2) \\ &= \frac{1}{2} q(\underline{h}) + o(\|\underline{h}\|^2) \\ &\stackrel{(D1)}{\geq} \frac{\lambda_{\min}}{2} \|\underline{h}\|^2 + o(\|\underline{h}\|^2) \end{aligned} \quad (\text{D2})$$

per  $\|\underline{h}\| \rightarrow 0$ , dove nella diseguaglianza abbiamo usato (D1). Per la definizione di  $o$ -piccolo abbiamo che:

$$\lim_{\underline{h} \rightarrow 0} \frac{o(\|\underline{h}\|^2)}{\|\underline{h}\|^2} = 0,$$

e quindi  $\exists \delta > 0$  tale che se  $\|\underline{h}\| < \delta$  e  $\underline{h} \neq \underline{0}$ , allora:

$$\frac{|o(\|\underline{h}\|^2)|}{\|\underline{h}\|^2} < \frac{1}{4} \lambda_{\min}$$

dove usiamo che  $\lambda_{\min} > 0$  grazie a B. Quindi, in particolare  $\exists \delta > 0$  tale che  $\forall \underline{h} \in B_\delta(\underline{0})$  abbiamo che:

$$o(\|\underline{h}\|^2) \geq -\frac{1}{4}\lambda_{\min}\|\underline{h}\|^2 \quad (\text{D3})$$

Pertanto, da (D2) e (D3) possiamo concludere che:

$$\begin{aligned} f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0) &\stackrel{(D2)}{\geq} \frac{1}{2}\lambda_{\min}\|\underline{h}\|^2 + o(\|\underline{h}\|^2) \\ &\stackrel{(D3)}{\geq} \frac{1}{2}\lambda_{\min}\|\underline{h}\|^2 - \frac{1}{4}\lambda_{\min}\|\underline{h}\|^2 \\ &= \frac{1}{4}\underbrace{\lambda_{\min}}_{>0}\|\underline{h}\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\forall \underline{h} \in B_\delta(\underline{0})$  tale che  $\underline{x}_0 + \underline{h} \in A$ , che implica che  $\underline{x}_0$  è un punto di minimo locale di  $f$ .  $\square$