

Fermi-yltor

Förldjupningsarbete

Redaktör: Anders Rehult

Version 0.2

Status

Granskad	DOK	18-04-27
Godkänd		

PROJEKTIDENTITET

2018/VT,
Linköpings Tekniska Högskola, IFM

Gruppdeltagare

Namn	Ansvar	Telefon	E-post
Anders Rehult	Projektledare (PL)	076-3161206	andre449@student.liu.se
Marian Brännvall	Dokumentansvarig (DOK)	070-7280044	marbr639@student.liu.se

Kund: IFM, Linköpings universitet, 581 83 Linköping

Kontaktperson hos kund: Rickard Armiento, 013-281249, rickard.armiento@liu.se

Kursansvarig: Per Sandström, 013-282902, persa@ifm.liu.se

Handledare: Johan Jönsson, 013-281176, johan.jonsson@liu.se

Innehåll

Dokumenthistorik	iv
1 Inledning	1
2 Syfte	1
3 Förberedande teori	1
3.1 Bakgrund	1
3.2 Kristallstruktur	2
3.2.1 Terminologi	2
3.2.2 Olika typer av Bravais-gitter med kubisk symmetri	3
3.3 Fermi-energi	7
3.4 Bandstruktur	7
3.5 Fermi-yta	9
3.6 Brillouin-zon	9
4 Numeriska metoder för beräkning av Fermi-ylor (utkast)	10
4.1 Approximativ lösning av Schrödingerekvationen	10
4.2 Bandstrukturberäkning	11
4.3 Tillståndstäthet	11
4.4 Fermi-yta	11

Dokumenthistorik

Version	Datum	Utförda förändringar	Utförda av	Granskad
0.1	2018-03-20	Första utkast.	PL, DOK	DOK

1 Inledning

De stora upptäckterna inom fysik under 1800-talet skedde inom de makroskopiska disciplinerna så som termodynamik och elektromagnetism. Under 1900-talet kom förståelsen för de mikroskopiska disciplinerna att revolutioneras bland annat tack vare upptäcken av röntgenstrålar och radioaktivitet. [6] Under detta århundrade började även den teoretiska grunden till kvantmekaniken att utvecklas av bland annat Erwin Schrödinger och Werner Heisenberg, som en fortsättning på arbete utfört av bland annat Max Planck, Albert Einstein, Niels Bohr och Louis de Broglie.

Frågor kring hur temperatur påverkar elektrisk och termisk konduktivitet hos metaller och legeringar, typiska ingenjörspådrag, kom att bli intressanta även inom den akademiska fysiken eftersom de blev viktiga för teorier kring elektroner. [6]

Det som kom att bli det fasta tillståndets fysik var till en början ett splittrat forskningsområde. Först med kvantmekaniken kunde beskrivningar av olika egenskaper hos fasta ämnen förenas, men även efter detta dröjde det innan det fasta tillståndets fysik blev en självständig disciplin. [6]

Bandstrukturteorin var en av de tidiga framgångarna från insikten under 1920-talet att man, med kvantmekanikens hjälp, kunde förstå elektroners beteende i fasta ämnen. Teorin pionjerades av Felix Bloch, som också är namnet till flera koncept inom bandstrukturteorin såsom Bloch-vågor. Förståelsen av elektronernas beteenden bidrog till förståelsen av skillnaden mellan metaller och isolatorer. Båda innehåller elektroner som nästan är fria men i isolatorer är elektronernas energinivåer grupperade i helt fyllda band (se kapitel 3.4), och material med denna egenskap leder inte ström. Ett fast ämne med delvis fyllda band leder däremot ström och dessa har en Fermi-yta. Fermi-ytor är viktiga för att förstå metaller och deras elektriska egenskaper. Vikten av Fermi-ytor blir särskilt tydlig med fysikern Allan Mackintoshs påstående att definitionen av metaller som "fasta material med en Fermi-yta" kan vara den mest meningsfulla definitionen av metaller som kan ges. [5]

2 Syfte

Syftet med detta arbete är att svara på dessa frågor: Vad är Fermi-ytor och hur kan dessa beräknas numeriskt?

3 Förberedande teori

I detta kapitel förklaras några av de termer och koncept som behövs för att förstå de beräkningsmetoder som behandlas i kapitel 4.

3.1 Bakgrund

Fördjupningsarbetet görs som en del av kursen TFYA75, kandidatprojekt i fysik, vid Linköpings universitet. Ett av projekten i denna kurs är ett visualiseringsprojekt. I visualiseringsprojektet för år 2018 ska bland annat Fermi-ytor visualiseras. Denna rapport ämnar bidra till djupare förståelse för dessa ytor.

3.2 Kristallstruktur

En kristall byggs upp av identiska grupper av atomer i tre dimensioner.

3.2.1 Terminologi

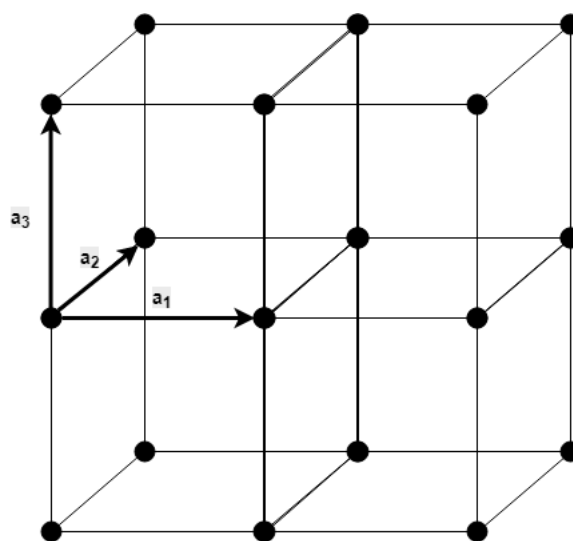
Bas: En ideal kristall är uppbyggd av oändligt upprepade identiska atomgrupper. En sådan atomgrupp kallas bas. Den minsta atomgruppen (dvs. den atomgrupp med minst antal atomer) som kan användas för att fullständigt konstruera kristallen kallas för den primitiva basen. [8, s. 4]

Gitter: Den mängd matematiska punkter som basen är kopplad till. Närmare definition under beskrivningen av translationsvektorer.

Translationsvektorer: De vektorer som gittret kan definieras utifrån. I tre dimensioner kan gittret definieras utifrån translationsvektorerna \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 och \mathbf{a}_3 så att atomernas placering i kristallen ser likadana ut från punkt \mathbf{r} som från varje punkt \mathbf{r}' translaterad med en heltalsmultipl av translationsvektorerna, vilket beskrivs av sambandet (1).

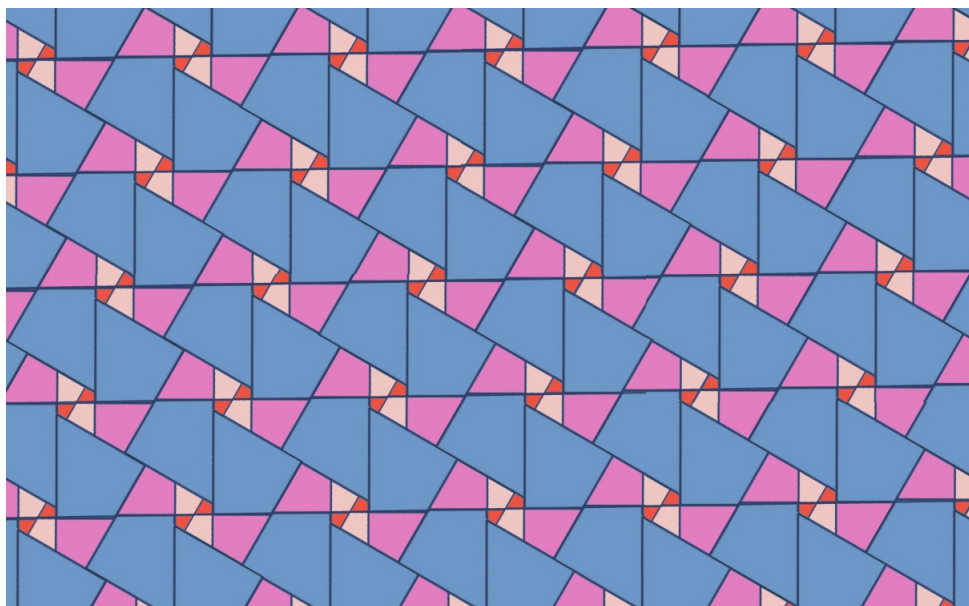
$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + u_1\mathbf{a}_1 + u_2\mathbf{a}_2 + u_3\mathbf{a}_3 \quad (1)$$

Där u_1 , u_2 och u_3 alltså är heltal. Mängden av punkter \mathbf{r}' som definieras av (1) för alla u_1 , u_2 , u_3 definierar gittret [**Bas**]. I figur 1 ses ett exempel på translationsvektorer i ett gitter.



Figur 1: Translationsvektorer i ett rymdgitter

Enhetscell: En enhetscell är en volymsdel av en kristall som genom upprepade duplicering och translation kan fylla hela rummet. Se figur 2 för ett exempel på en enhetscell i två dimensioner som vid upprepning fyller hela rummet.



Figur 2: Representation av en enhetscell (en “rektangel” i bilden) som upprepas för att fylla ut hela bilden. [1]

Primitiv cell: Den primitiva cellen är den cell som besittande minsta möjliga volym omsluter den primitiva basen. Den primitiva cellen innehåller endast en gitterpunkt och är en enhetscell.

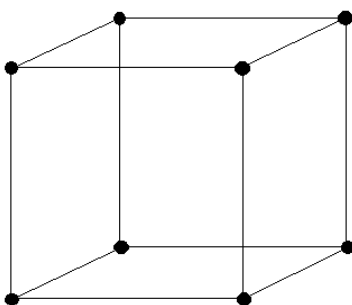
Bravais-gitter: Ett Bravais-gitter är en oändlig mängd diskreta punkter som ser exakt likadan ut oberoende av vilken gitterpunkt den betraktas från [4, s. 64]. När hela rummet fylls av upprepning av en enhetscell fås ett Bravais-gitter. Om mönstret i figur 2 hade upprepats oändligt i alla riktningar så hade alla mängder av punkter i bilden stora nog för att täcka in minst en rektangel varit Bravais-gitter.

Reciproka gitter: Varje Bravais-gitter har en motsvarighet i det reciproka rummet vars form beror av Bravais-gittrets periodicitet. Ett Bravais-gitters reciproka gitter är även det ett reciprokt gitter [4, s. 86].

3.2.2 Olika typer av Bravais-gitter med kubisk symmetri

Det finns tre typer av Bravais-gitter med kubisk symmetri: enkel (eng. simple cubic), ytcentrerad (eng. face-centered cubic) och rymdcentrerad (eng. body-centered cubic).

Enkelt (sc): Detta Bravais-gitter har gitterpunkter i varje hörn av kubens, se figur 3.

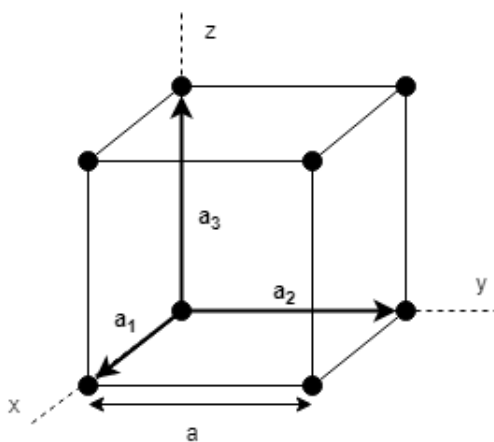


Figur 3: Det kubiska Bravais-gittret, simple-cubic

Ett enkelt kubiskt Bravais-gitter innehåller en gitterpunkt per cell. [8, s. 9-11] I kartesiska koordinater är ett möjligt val av translationsvektorer för gittret följande:

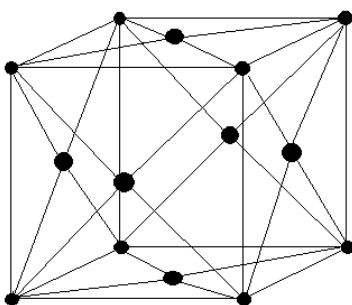
$$\mathbf{a}_1 = a\hat{x}; \mathbf{a}_2 = a\hat{y}; \mathbf{a}_3 = a\hat{z}$$

där a är kubens sidolängd. Detta illustreras i Figur 4.



Figur 4: Det kubiska Bravais-gittret, simple-cubic, med translationsvektorer

Ytcentrerad (fcc): Detta Bravais-gitter har, förutom gitterpunkter i varje hörn, även gitterpunkter i mitten av varje sida på kuben, se figur 5.

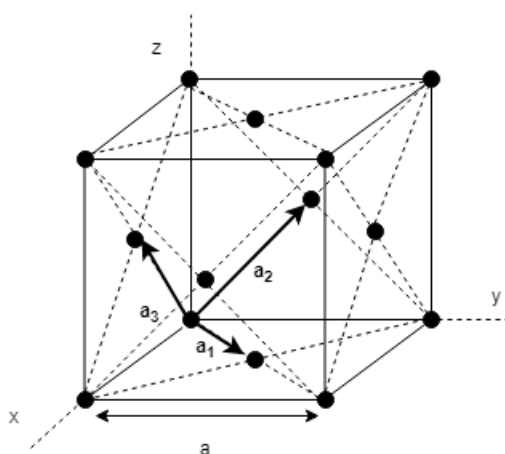


Figur 5: Det kubiska Bravais-gittret, face-centered-cubic

Det ytcentrerade kubiska Bravais-gittret innehåller fyra gitterpunkter per cell. I kartesiska koordinater är ett möjligt val av translationsvektorer för gittret följande:

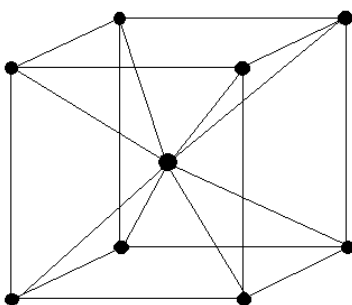
$$\mathbf{a}_1 = 0.5a(\hat{x} + \hat{y}); \mathbf{a}_2 = 0.5a(\hat{y} + \hat{z}); \mathbf{a}_3 = 0.5a(\hat{z} + \hat{x})$$

där a är kubens sidolängd.[8]. Detta illustreras i Figur 6.



Figur 6: Det kubiska Bravais-gittret, face-centered-cubic, med translationsvektorer

Rymdcentrerad (bcc): Detta Bravais-gitter har, förutom gitterpunkter i varje hörn, även en gitterpunkt i mitten av kuben, se figur 7.

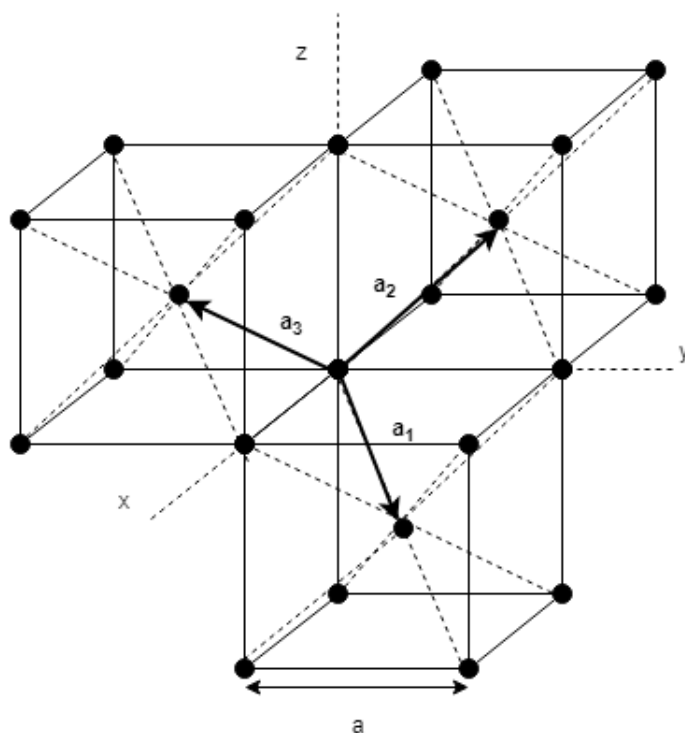


Figur 7: Det kubiska Bravais-gittret, body-centered-cubic

Det rymdcentrerade kubiska Bravais-gittret innehåller två gitterpunkter per cell. I kartesiska koordinater är ett möjligt val av translationsvektorer för gittret följande:

$$\mathbf{a}_1 = 0.5a(\hat{x} + \hat{y} - \hat{z}); \mathbf{a}_2 = 0.5a(-\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}); \mathbf{a}_3 = 0.5a(\hat{x} - \hat{y} + \hat{z})$$

där a är kubens sidolängd. [Rymdgitter]. Detta illustreras i Figur 8.



Figur 8: Det kubiska Bravais-gittret, body-centered-cubic, med translationsvektorer

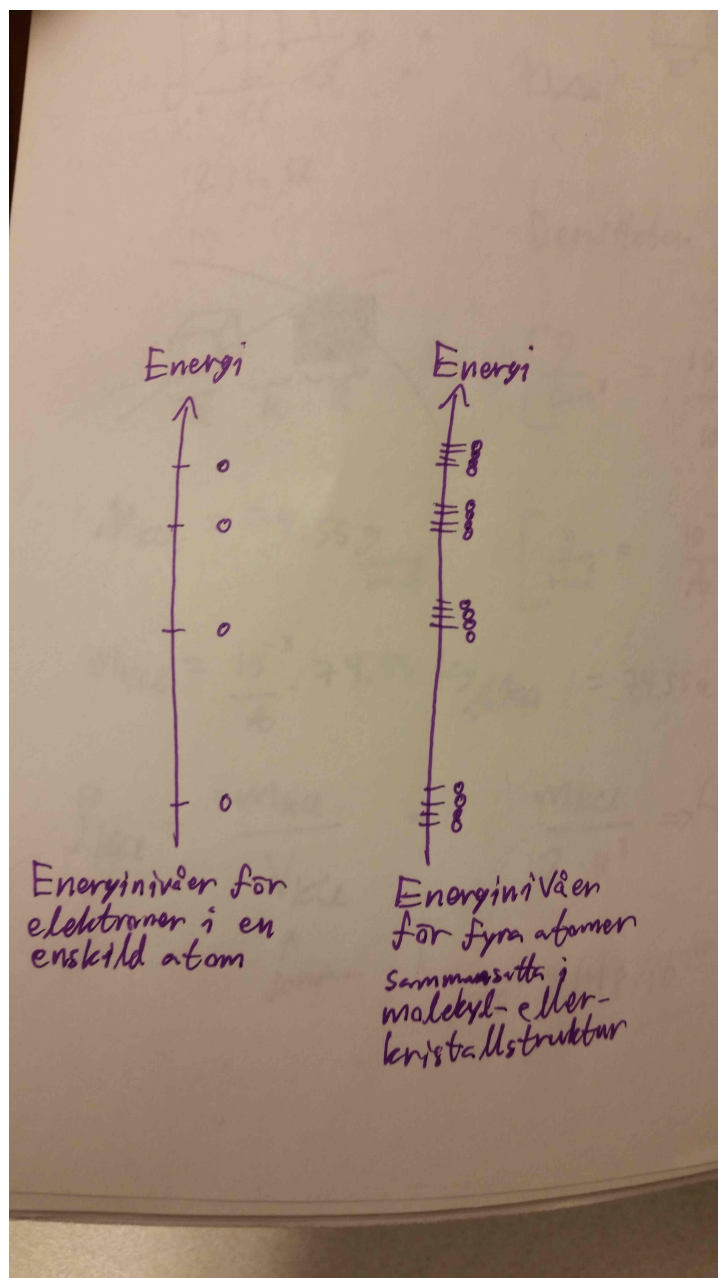
3.3 Fermi-energi

Fermi-energin är en speciell energi för ett flerelektronsystem och kan definieras på flera sätt. Den mest relevanta definitionen för numeriska beräkningar är denna: Fermi-energin är en energi där antalet enelektronstillstånd med energi lägre än Fermi-energin vid temperaturen 0 K är lika med det totala antalet elektroner i systemet [4, s. 141].

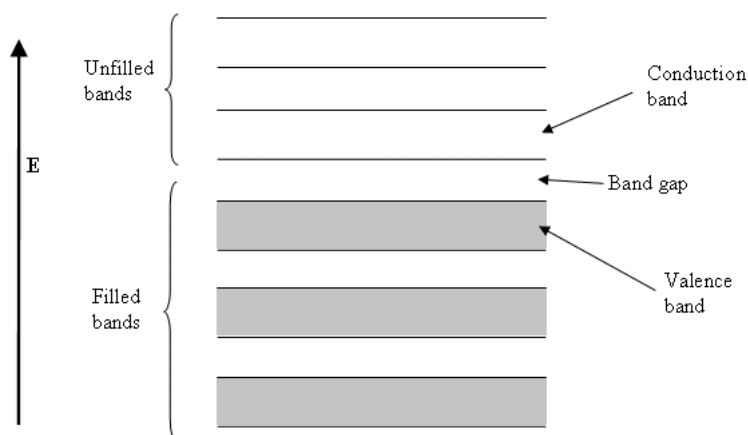
3.4 Bandstruktur

Elektroner i en atom ordnas enligt Pauliprincipen - inga två elektroner kan dela samma kvanttal och därmed ha samma energi. När atomer sätts ihop till molekyler eller kristaller gäller fortfarande principen, så av elektroner som ockuperade samma orbital i de separata atomerna byter alla förutom en av dem orbital så att elektronernas kvanttal inte är identiska i molekylen eller kristallen [8, s. 56-57]. Detta gör att energin av elektronerna som bytte orbital ändras något, se figur 9. Dessa energiändringar är mycket små, vilket orsakar att elektronernas energinivåer i en kristall packas mycket tätt i band i en kristallstruktur, se figur 10 [7, s. 178].

I en kristall beror elektronernas energi av vågtalet, k . Se kapitel 4.2 för hur detta används.



Figur 9: Elektroners energinivåer i en molekyl eller kristall samlas tätt kring energinivåerna hos de enskilda atomerna som utgör kristallen. TODO: Bättre bild.



Figur 10: Bandstruktur i en halvledare. [2]

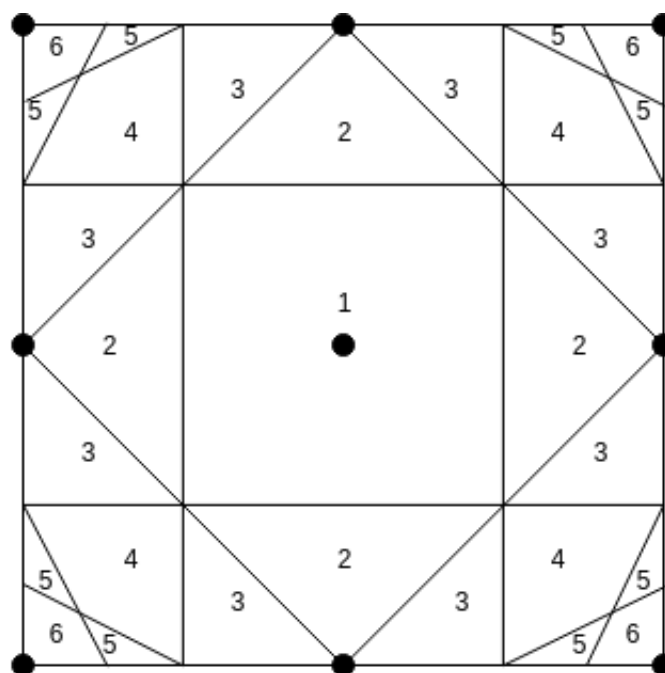
3.5 Fermi-yta

Om ett antal band inte är helt fyllda finns det för varje band en yta i reciproka rummet som separerar fyllda från ofyllda nivåer. Mängden av alla sådana ytor i en kristall är känd som kristallens Fermi-yta, medan delarna av ytan som kommer från de individuella banden kallas för grenar till Fermi-ytan [4, s. 142]. Fermiytan är alltså i det reciproka rummet en sammansättning av ytor med konstant energi, en isoyta.

3.6 Brillouin-zon

Den 1:a Brillouin-zonen är Wigner-Seitz-cellen av det reciproka gittret, det vill säga mängden av punkter i k -rummet som ligger närmre origo än någon annan reciprokt gitterpunkt [4, s. 73]. Ett Bragg-plan är ett plan som vinkelrätt bisekterar vektorerna mellan origo och andra reciproka gitterpunkter [4, s. 99], så en ekvivalent definition är denna: Den 1:a Brillouin-zonen är mängden av punkter i k -space som kan nås från origo utan att korsa något Bragg-plan. På samma sätt fortsätter man: Den 2:a Brillouin-zonen är mängden av punkter i k -space som nås när exakt ett Bragg-plan korsas (utan att korsa tillbaka till en redan passerad zon), och så vidare. Se figur 11 för en illustration av detta.

Alla Brillouin-zoner är primitiva celler till det reciproka gittret [4, s. 163]. Eftersom Brillouin-zonerna beror av geometrin hos det gitter som finns så ser samtliga Brillouin-zoner olika ut för olika kristallstrukturer.



Figur 11: Illustration av definitionen av Brillouin-zoner för ett tvådimensionellt Bravais-gitter. Figuren visar gitterpunkter i form av prickar och Bragg-plan som linjer. Siffrorna indikerar de olika Brillouin-zonerna (1:a, 2:a, och så vidare).

4 Numeriska metoder för beräkning av Fermi-ytor (utkast)

För att beräkna Fermi-ytan hos ett material behövs två saker:

- Förhållandet mellan elektroners energi och vågtal k .
- Fermi-energin.

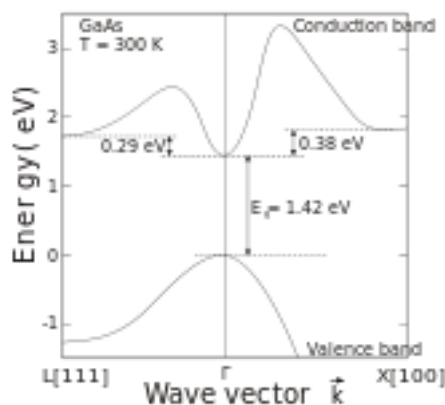
Den första fås genom att gå från Schrödingerekvationen till energiekvationer för de olika banden i bandstrukturen via Density Functional Theory, se kap. 4.1. Den andra fås genom att börja på samma sätt och sedan sätta in ett antal k -punkter i energiekvationerna för att få ut bandstrukturen (se kap. 4.2), beräkna tillståndstätheten (se kap. 4.3), och till slut integrera tillståndstätheten från negativa oändligheten till Fermi-energin, sätta integralen lika med antalet elektroner i systemet och lösa ut Fermi-energin.

4.1 Approximativ lösning av Schrödingerekvationen

Schrödingerekvationen som beskriver en partikels position och energi är omöjlig att lösa för komplicerade system. För komplicerade system används därför metoden Density Functional Theory (DFT) för att gå från Schrödingerekvationen till energiekvationerna för de olika banden i bandstrukturen.

4.2 Bandstrukturberäkning

Från energiekvationerna för varje band fås energin för k -punkterna längs en slinga som täcker viktiga symmetripunkter i 1:a Brillouin-zonen, vilket ger ett förhållande mellan vågtal och energi. Figur 12 beskriver bandstrukturen för Galliumarsenid (GaAs) som är en halvledare och därmed en icke-metall. Icke-metaller har ett bandgap mellan valensband och ledningsband och det är i detta band som Fermi-energin ligger.



Figur 12: Bandstrukturen för GaAs [3]

Att Fermi-energin ligger mitt i bandgapet innebär att inga k -punkter har den energin och en Fermi-yta kan inte fås ut. I metaller kommer konduktionsbandet och valensbandet att överlappa och Fermi-energin kommer vara någonstans i överlappet vilket alltså kommer ge en Fermi-yta.

4.3 Tillståndstäthet

Rita bild! Utgå från bandstrukturen (ref. till bandstrukturbild ovan), börja vid den lägsta energin och gå uppåt ett litet steg i taget. Beräkna hur många gånger ett band korsas av en viss energi, det vill säga hur många tillstånd som finns för den energin. I praktiken utgår man inte från en bandstrukturplott, utan istället från den tredimensionella "bandstruktur" som fås då man beräknar energier för ett stort antal k -punkter utspridda i den 1:a Brillouin-zonen.

Tillståndstätheten beskriver hur många tillstånd som finns för olika energier. Integreras denna från negativa oändligheten till Fermi-energin så fås antalet elektroner i systemet.

4.4 Fermi-yta

När allt detta är gjort, beräkna en energiisoyta i reciproka rummet med energi lika med Fermi-energin. Denna yta är Fermi-ytan. Mål!

Referenser

- [1] Bild av Assaf Shtilman [Public domain], från Wikimedia Commons.
Hämtad från <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/35/4sizetile.jpg>.

- [2] Bild av Tim Starling, via Wikimedia Commons.
Hämtad från https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a3/Semiconductor_band_structure_%28lots_of_bands%29.png.
- [3] Bild av Cephedian, via Wikimedia Commons.
Hämtad från https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/67/Bandstruktur_GaAs_en.svg.
- [4] Neil Ashcroft och David Mermin. *Solid State Physics*. 1976.
- [5] Stephen Dugdale. "Life on the edge: a beginner's guide to the Fermi surface". I: *Physica Scripta* 91.053009 ().
- [6] Lillian Hoddeson m. fl. *Out of the Crystal Maze: Chapters from the History of Solid-State Physics*. 1992, s. 3–5.
- [7] Sharon Ann Holgate. *Understanding Solid State Physics*. 2009, s. 178.
- [8] Charles Kittel. *Introduction to Solid State Physics, eight edition*. 2005.