Конспект по УМФ

1 Метод характеристик

Имеем уравнение вида

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{uu} + \dots = F(x,y)$$

Можем выразить двумя способами:

$y = y(x)$ (обязательно $a \neq 0$):

$$a(x,y)y_x'^2 - 2b(x,y)y_x' + c(x,y) = 0$$

Или $x = x(y)$ (обязательно $c \neq 0$):

$$a(x,y) - 2b(x,y)x_y' + c(x,y)x_y'^2 = 0$$

Внимание в обоих случаях на знак $-$ перед $2b(x,y)$

В любом случае решаем и получаем систему вида

$$\begin{cases} f_1(x) + g_1(y) = c_1 \\ f_2(x) + g_2(y) = c_2 \end{cases}$$

Переходим к $\xi = f_1(x) + g_1(y), \eta = f_2(x) + g_2(y)$

$$\begin{array}{c|l} k(x,y) & u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \\ l(x,y) & u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y \\ a(x,y) & u_{xx} = u_{\xi\xi}(\xi_x)^2 + u_{\eta\eta}(\eta_x)^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} \\ b(x,y) & u_{yy} = u_{\xi\xi}(\xi_y)^2 + u_{\eta\eta}(\eta_y)^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy} \\ c(x,y) & u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}\xi_x\eta_y + u_{\xi\eta}\xi_y\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy} \end{array}$$

В нижней строчке $u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy} = u_\xi \xi_{yx} + u_\eta \eta_{yx}$, то есть можем дифференцировать второй раз то, что удобнее. Но здесь я не уверен

Слева $k(x,y), l(x,y)$ и остальные - коэффициенты в исходном уравнении

Далее собираем всё это и подставляем в исходное уравнение (для наглядности выписали коэффициенты слева). Должно многое сократиться и получиться что-то хорошее (если это не так, то, скорее всего, где-то ошибка).

Хотим в результате получить $u = f(\xi) + g(\eta)$. Покажем на примере.

Пусть после подстановки и сокращения получилось

$$4u_\eta + u_{\xi\eta} = 0$$

$$v = u_\eta : \quad 4v + v_\xi = 0$$

$$4 + \lambda = 0$$

$$\lambda = -4$$

$$u_\eta = v = c(\eta)e^{-4\xi}$$

$$u(\xi, \eta) = \int c(\eta)e^{-4\xi}d\eta + c_1(\xi) = e^{-4\xi}f(\eta) + g(\xi)$$

где f, g - произвольные гладкие функции.

Далее переходим к $u(x, y)$ просто подстановкой явных выражений вместо ξ, η. Задача решена (но обычно метод - это часть какой-то более сложной задачи, и дальше придется найти явный вид f и g)

2 Задача Коши

То же условие, что и в методе характеристик, а также дополнительные условия (условия Коши):

$u|_{y=a} = m(x),\ u_y|_{y=a} = n(x), \quad x \in I$

Здесь I – какой-то (возможно, бесконечный) промежуток, a может (вроде бы) зависеть от x, а также мы не ограничеваем общности x и y (то есть может быть зависимость от y при фиксированном x). Главное, что мы получаем зависимость u от одной переменной.

Решается легко: подставим эти условия в полученное методом характеристик выражение для $u(x, y)$. Получим систему из 2 уравнений на f и g и их производные, как-то зависящие от x (или y). Так как мы искали функции от характеристик, зависимость может получиться произвольная. Пример того, что может быть на этом шаге:

$$u(x, y) = e^{3x+y^3}f(x) + g(3x + y^3)$$

$$\begin{cases} u|_{y=1} = e^{3x+1}f(x) + g(3x + 1) = 1 + 3x \\ u_y|_{y=1} = 3e^{3x+1}f(x) + 3g'(3x + 1) = 3(4 + 3x) \end{cases}$$

Это нормально, что во вторую строчку входят и производные, и сами функции, это возникает из-за дифференцирования произведения функций

Вычитаем из второго уравнения с коэффициентом $\frac{1}{3}$ первое (иногда будет удобно взять производную первого, а потом вычесть):

$$g'(3x + 1) - g(3x + 1) = 3$$

Делаем замену $3x+1 = p$, решаем, получаем явный вид $g(p)$. Обычно $g(p)$ зависит от какой-то константы, но это не страшно, так как f будет зависеть от этой же константы и при подстановке в исходное уравнение они сократятся.

В нашем случае $g(p) = Ce^p - 3$.

Подставляем $g(p)$ в **первое** уравнение (где нет производных, иначе появится вторая константа, от которой мы уже не избавимся!), заменяя p обратно на функцию от x. В этом примере

$$e^{3x+1}f(x) = 1 + 3x - g(3x+1)$$

$$\Rightarrow f(x) = (4+3x)e^{-(3x+1)} - C$$

Подставляем в исходное уравнение:

$$u(x,y) = e^{3x+y^3}f(x)+g(3x+y^3) = e^{3x+y^3}[(4+3x)e^{-(3x+1)}-C]+[Ce^{3x+y^3}-3] = (4+3x)e^{y^3-1}-3$$

Всё отлично, константа сократилась. Задача решена.