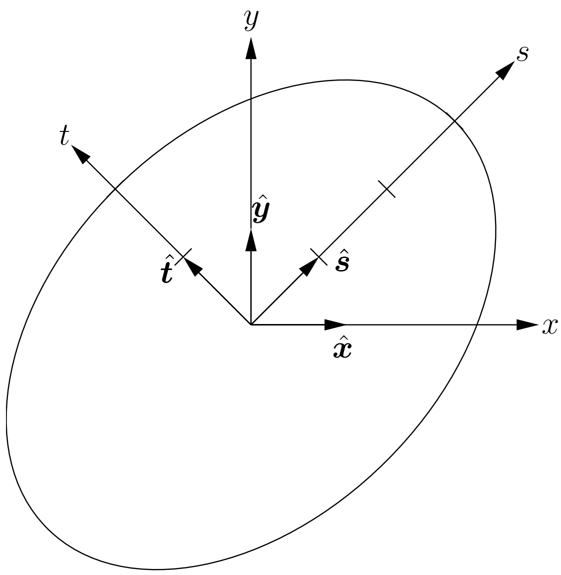


Linjär Algebra

Del II – Matriser

Johan Wild

2019–03–07

johan.wild@europaskolan.se

2019–03–07

Innehåll

1 Inledning **5**

2 Matriser som algebra **5**
2.1 Definitioner och arimetik . . . 5
2.2 Diverse . . . 7

3 Matriser som ekvationssystem **7**
3.1 Notation . . . 7
3.2 Gauss-elemination . . . 8
3.3 Över- och underbestämda ekvationssystem . . . 8
3.4 Determinanter . . . 9
3.5 Övningar . . . 11

4 Matriser som geometriska avbildningar **11**
4.1 Linjära avbildningar . . . 11
4.2 Skalningar, speglingar och rotationer . . . 11
4.3 Projektioner . . . 13
4.3.1 Projektion på en vektor, Q . . . 14
4.3.2 Projektion på ett plan, P . . . 14
4.4 Delrum . . . 14
4.5 Linjärt beroende . . . 15
4.6 Invarianta delrum . . . 16
4.7 Övningar . . . 16

5 Basvektorer, basbyten och matriser **17**
5.1 Baser och komponenter . . . 17
5.2 Basbytesmatris . . . 18
5.3 Övningar . . . 20

6 Kvadratiska former och egenvärden **20**
6.1 Kvadratisk form som matris . . . 20
6.2 Egenvektorer och egenvärden . . . 21
6.3 Egenvärden och delrum . . . 24
6.4 Övningar . . . 27

7 Exponenter och Markovkedjor **27**

8 Förväntansvärden **28**
8.1 Förväntansvärden av en matris . . . 28

9 Facit **28**

1 Inledning

Denna text syftar till att vara en mycket kondenserad framställning av matrisbegreppet och hur man kan förstå det. Här tas matriser upp ur ett algebraiskt perspektiv, som ett sätt att hantera ekvationssystem och som ett sätt att uttrycka geometriska transformationer.

Alla läromedel i linjär algebra tar upp matriser på dessa tre sätt, men framställningarna varierar lite beroende på författarens smak. Denna text är skriven så att de tre sätten att tolka matriser nästan kan läsas fristående.

Texten är del två i en serie om linjär algebra, skriven för kursen Linjär Cirkel vid Europaskolan.

Del ett i serien tar upp vektorer samt hur linjer, cirklar, plan och klot kan uttryckas på vektorform. Del tre tar upp abstrakta vektorrum och funktionsrum.

Stort fokus ligger i denna text på den geometriska förståelsen av matriser, och generellt på att förstå vad begreppen som tas upp betyder. I motsvarande texter på universitetsnivå ägnas mycket möda åt att bevisa satser om matriser i n dimsnesioner. Då kan förståelsen i viss mån gå förlorad. Här håller vi oss till $\mathbb{R}^2$ så länge det räcker för att belysa begreppens betyderlse.

2 Matriser som algebra

2.1 Definitioner och arimetik

En textbfmatris är en samling av $m \times n$ tal som brukar samlas i m st rader och n st kolumner. I denna text ges matriserna namn med versaler (vilket är vanligt). Exempelvis är

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

en 2×3-matris. Det är mycket vanligt att benämna elementen i en matris med samma bokstav som matrisen själv, men då med två index för vilken rad och kolumn som avses. Här skulle till exempel $A_{23} = 6$ eftersom A_{23} står för elementet på rad två och kolumn 3 i A.

En matris med lika många rader och kolumner benämns **kvadratisk**.

En **diagonalmatris** är en kvadratisk matris där alla element som inte ligger på den diagonal som går från första raden och första kolumnen, till sista raden och sista kolumnen, är noll. Formellt

$$A \text{ är diagonal } \Leftrightarrow A_{rk} = 0 \text{ om } r \neq k$$

Exempel 2.1.1. Matrisen

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

är en diagonalmatris ▲

En **enhetsmatris** är en diagonalmatris där alla diagonalelement är 1.

Exempel 2.1.2. Matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

är en enhetsmatris. ▲

Matriser kan multipliceras med en skalär, och matriser av samma typ (samma antal rader och kolumner) kan adderas. Detta definieras enligt

$$\begin{aligned} A + B = C \quad &\Leftrightarrow \quad A_{jk} + B_{jk} = C_{jk} \\ k\,A = B \quad &\Leftrightarrow \quad k\,A_{jk} = B_{jk} \end{aligned}$$

Exempel 2.1.3. Om

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

och

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

gäller

$$2\,A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

och

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}.$$

▲

En $(m \times n)$-matris kan multipliceras med en $(n \times s)$-matris så att resultatet blir en $(m \times s)$-matris enligt följande definition:

$$A\,B = C \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{l=1}^{n} A_{kl}\,B_{lr} = C_{kr}.$$

Exempel 2.1.4. Med matriserna A och B i förra exemplet fås

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 9 \\ -1 \cdot 2 + 3 \cdot 7 & -1 \cdot (-3) + 3 \cdot 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 15 \\ 19 & 30 \end{bmatrix}.$$

▲

Om två kvadratiska matriser multipliceras fås en ny kvadratisk matris av samma typ. Multiplikationen är dock inte kommutativ!

Exempel 2.1.5. Med matriserna A och B i förra exemplet fås

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) & 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 3 \\ 7 \cdot 1 + 9 \cdot (-1) & 7 \cdot 2 + 9 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -2 & 41 \end{bmatrix}.$$

▲

Kvadratiska matriser utgör en icke-kommutativ ring. Multiplikativt enhetselement är enhetsmatrisen.

2.2 Diverse

En matris av typ $n \times 1$ används för att representera en textbfvektor. Det är i själva verket det vanliga sättet att uttrycka vektorer på, som användes i hela del I av denna serie.

Ibland pratar man om **radvektorer** och **kolumnvektorer**. En radvektorer är en matris med en rad och en kolumnvektor är en matris med en kolumn. En vanlig vektor är alltså en kolumnvektor.

En matris kan **transponeras**. Det betyder att rader och kolumner byter plats. Vi skriver A^T då vi menar **transponatet** av A.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

En praktisk liten konsekvens av detta är att vi kan skriva vektorer som $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ istället för $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Fördelen är att transponatet av vektorn blir snyggare i skriven text eftersom det bara tar upp en rad.

Det följer trivialt ur arimetiken för matriser att $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{v}$ och därmed $||\boldsymbol{v}||^2 = \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{v}$.

Eftersom man kan addera matriser av en viss typ med varandra och multiplicera dem med en skalär utgör mängden av alla matriser av denna typ i sig ett vektorrum.

3 Matriser som ekvationssystem

3.1 Notation

Ekvationssystemet

$$\begin{cases} x & + & y & = & 3 \\ 2x & - & y & = & 2 \end{cases}$$

kan betraktas som bestående av ekvationer för två linjer. Lösningen är linjernas skärningspunkt.

Man kan också skriva om det på vektorform som

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Tolkningen av x och y är med detta synsätt komponenterna för högerledet i en bas som ges av vektorerna i vänsterledet.

Ett sätt att finna x och y är att göra en geometrisk konstruktion som vi gjorde i första delen av denna bokserie.

Ett tredje sätt att skriva ekvationssystemet är att skriva det med med matriser:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Lite slarvigt säger vi att matrisen in VL är ”matrisen för ekvationssystemet” och vektorn i HL som ”vektorn för högerledet” (i ekvationssystemet).

Detta är i någon mening endast *en* ekvation. Om vi kan hitta inversen till matrisen kan vi multiplicera båda led med den och få lösningen. Det råkar vara så att denna matris nästan är sin egen invers, så när som på en faktor $\frac{1}{3}$. Vi får

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix}5\\ 4\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Problemet är att det inte älltid är så lätt att hitta inversen till en matris. En metod att lösa ett ekvationssystem där man också kan få inversen till en matris på köpet är Gauss-elemnination.

3.2 Gauss-elemination

Gauss-elemination är beskriven bra i andra källor. Det kommer infogas i denna text någon gång.

3.3 Över- och underbestämda ekvationssystem

Ett ekvationssystem met tre obekanta och tre ekvationer tolkas som att man söker skärningspunkten mellan tre plan. Ett sådant system kan sakna lösnignar om minst två plan är parallella, eller om de tre normalerna ligger i samma plan.

Det kan också finnas oändligt många lösnigar om de tre planen skär varandra längs samma linje.

Har man bara två ekvationer skär de varandra längs en linje.

Denna linje kan man finna genom att använda substitutionsmetoden ”så långt man kan” till dess man inte har någon variabel kvar och sätta denna till någon parameter.

Ett ekvationssystem med färre ekvationer än obekanta benämns **underbestämt**.

Exempel 3.3.1. Att lösa ekvationssystemet

$$\begin{aligned}
3x + y + z &= 1\\
x + y - z &= 3
\end{aligned}$$

kan tolkas som att bestämma de gemensamma punkterna för två plan. Det blir en linje, vars parametrisering fås ganska enkelt. Vi löser ut

$$z = x + y - 3$$

ur den andra ekvationen och sätter in den i den första och löser ut y. Vi får

$$\begin{aligned}
3x + y + (x + y - 3) &= 1\\
4x + 2y &= 4\\
y &= 2 - 2x.
\end{aligned}$$

Sätter vi nu $x = t$ fås $y = 2 - 2t$ och $z = t + (2 - 2t) - 3 = -1 - t$. Ur dessa uttryck identifierar vi lösningen

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{bmatrix}0\\ 2\\ -1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}1\\ -2\\ -1\end{bmatrix}.$$

Vi kan kolla om vi räknat rätt i två avseenden. Dels skall punkten $(0, 2, -1)$ tillhöra *båda* planen, dels skall riktningsvektorn vara ortogonal mot *båda* planens normaler. Vi får

$$\begin{aligned}
3 \cdot 0 + 2 - 1 &= 1 \text{ OK!} \\
0 + 2 - (-1) &= 3 \text{ OK!} \\
\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} &= 0 \text{ OK!} \\
\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} &= 0 \text{ OK!}
\end{aligned}$$

▲

Ett ekvationssystem med fler ekvationer än obekanta **överbestämt**. Sådana har sällan någon lösning.

Exempel 3.3.2. Om man har tre ekvationer i $\mathbb{R}^2$ som representerar linjer finns generellt inte en unik skärningspunkt för alla tre linjerna. Så kan vara fallet, och då finns naturligtvis en lösning. Om två av linjerna är parallella finns inte heller någon lösning. ▲

3.4 Determinanter

Ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ 4x - 6y = 3 \end{cases}$$

saknar lösning. Om man tänker sig ekvationerna som två linjer, ser man att de är parallella och därmed inte skär varandra.

På matrisform blir detta ekvationssystem

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Att ekvationssystemet saknar lösning betyder att matrisen

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

saknar invers.

Definition 3.4.1. *Determinanten* för en 2×2-matris

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

är ett tal som ges av $ad - bc$. Vi skriver $\det(A)$ för determinanten till A. ▲

Som namnet antyder bestämmer determinanten något om matrisen. Det råkar vara så att inversen till en matris

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

är

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Kontrollera att

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi ser att om determinanten är noll är inte inversen definierad.

Vi formulerar denna viktiga iaktagelse som en sats som rör ekvationssystem.

Sats 3.4.2. *Om determinanten till ett ekvationssystem är noll, saknar ekvationssystemet lösning.*

Determinanten till ekvationssystemet i exemplet ovan är

$$2\cdot(-6)-4\cdot(-3)=0.$$

Determinanten har också geometriska egenskaper som är ganska väl studerat i Skelnes text.

För matriser av typen $n\times n$ gör vi följande definition.

Definition 3.4.3. *Determinanten* för en $n\times n$-matris där $n>2$ gäller

$$\det(A)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}A_{jk}\det(A^*_{jk})$$

där A^*_{jk} är den $(n-1)\times(n-1)$-matris som fås om rad j och kolumn k stryks från A och j är någon rad i A. ▲

Detta är alltså en rekursiv definition av determinanten där determinanten beräknas för allt mindre och mindre matriser till dess vi beräknar determinanten för en 2×2-matris.

Vi kan fritt välja rad att använda då vi beräknar determinanten. Med lite erfarenhet lär man sig välja en rad så att beräkningarna inte blir så arbetskrävande.

Exempel 3.4.4. Bestäm determinanten för

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Vi väljer rad 1 och får då

$$\begin{aligned}\det(A) &= 1\cdot\det\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\right)-3\cdot\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\right)+2\cdot\det\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\right)\\ &= 1\cdot((-1)\cdot 3-(-2)\cdot 1)-3\cdot(2\cdot 3-1\cdot 4)+2\cdot(2\cdot(-2)-(-1)\cdot 4)\\ &= 1\cdot(-1)-3\cdot 2+2\cdot 0=-7.\end{aligned}$$

▲

Man kan använda en kolumn istället för en rad då man beräknar determinanten.

Sats 3.4.5. *För alla $1\le k\le n$ gäller*

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}A_{kj}\det(A^*_{jk}).$$

4 Matriser som geometriska avbildningar

4.1 Linjära avbildningar

I detta kapitel tänker vi oss att vi har ett vektorrum $\mathcal{V}$ över $\mathbb{R}$ med dimensionen n. I de konkreta exemplen gäller $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ eller $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$, men definitionerna är skrivna så att de gäller för alla vektorrum.

Naturligtvis finns funktioner $f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$. Ofta använder man synonymen avbildning till ordet funktion. Det gäller inte bara i $\mathbb{R}^2$, men blir kanske mer relevant där eftersom en punktmängd i $\mathbb{R}^2$ i någon mening är en bild.

Här, precis som överallt annars i matematiken[1] gör vi följande definition.

Definition 4.1.1. En funktion $f : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ är *linjär* om $f(a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{u}) = a \cdot f(\boldsymbol{v}) + b \cdot f(\boldsymbol{u}) \ \forall \ a, b \in \mathbb{R}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$. ▲

Ur axiomen för matrisalgebran följer att funktioner av typen $f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$ där A är en matris är linjära.

4.2 Skalningar, speglingar och rotationer

En *skalning* med en vektor $\boldsymbol{k}$ (en skalfaktor $k_x \in \mathbb{R}$ i x-led och en skalfaktor k_y i y-led) är en avbildning som ges av en matris

$$S_{\boldsymbol{k}} = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}.$$

En *spegling* i x-axeln respektive y-axeln ges av matriserna

$$M_{\hat{\boldsymbol{x}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad M_{\hat{\boldsymbol{y}}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En *rotation* med vinkel $\theta \in \mathbb{R}$ ges av matrisen

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Dessa avbildningar är naturligtvis linjära eftersom de ges av matriser, men övertyga dig om att den intuitiva förståelsen för vad som menas med rotationer, speglingar och skalningar stämmer med att de är linjära avbildningar.

I $\mathbb{R}^3$ ges skalningen och speglingen av liknande matriser, men rotationen är mer komplicerad.

Exempel 4.2.1. En skalning med vektorn $\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^T$ ges av

$$S_{\boldsymbol{k}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

▲

[1] Utom i många läromedel på gymnasiet!

Exempel 4.2.2. Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

är både en skalning och en spegling. ▲

Exempel 4.2.3. En rotation med 30° ges av

$$A_{30^\circ} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}.$$

▲

Man kan motivera[2] att en spegling av en vektor $\boldsymbol{v}$ i en linje genom origo med $\boldsymbol{n}$ som riktningsvektor ($\mathbb{R}^2$) ges av

$$2\frac{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n} \rangle \, \boldsymbol{n}}{||\boldsymbol{n}||^2} - \boldsymbol{v}.$$

På komponentform är det lättare att utgå från

$$2\frac{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n} \rangle \, \boldsymbol{n} - ||\boldsymbol{n}||^2 \boldsymbol{v}}{||\boldsymbol{n}||^2}.$$

På komponentform får vi

$$\begin{aligned} M_{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{n_x^2 + n_y^2} \begin{bmatrix} 2(v_x n_x + v_y n_y) n_x - (n_x^2 + n_y^2) v_x \\ 2(v_x n_x + v_y n_y) n_y - (n_x^2 + n_y^2) v_y \end{bmatrix} &= \\ \frac{1}{n_x^2 + n_y^2} \begin{bmatrix} 2v_x n_x^2 + 2v_y n_x n_y - v_x n_x^2 - v_x n_y^2 \\ 2v_x n_x n_y + 2v_y n_y^2 - v_y n_x^2 - v_y n_y^2 \end{bmatrix} &= \\ \frac{1}{n_x^2 + n_y^2} \begin{bmatrix} v_x n_x^2 + 2v_y n_x n_y - v_x n_y^2 \\ 2v_x n_x n_y + v_y n_y^2 - v_y n_x^2 \end{bmatrix} &= \\ \frac{1}{n_x^2 + n_y^2} \begin{bmatrix} n_x^2 - n_y^2 & 2n_x n_y \\ 2n_x n_y & -n_x^2 + n_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} & \end{aligned}$$

Vi identifierar matrisen

$$M_{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{n_x^2 + n_y^2} \begin{bmatrix} n_x^2 - n_y^2 & 2n_x n_y \\ 2n_x n_y & -n_x^2 + n_y^2 \end{bmatrix}$$

Exempel 4.2.4. Spegling i en linje

Vilka komponenter får vektorn $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix}^T$ då den speglas i linjen som har riktningsvektor $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}^T$?

Lösning

Vi bildar matrisen

$$\begin{aligned} M_{\boldsymbol{n}} &= \frac{1}{3^2 + 2^2} \begin{bmatrix} 3^2 - 2^2 & 2 \cdot 3 \cdot 2 \\ 2 \cdot 3 \cdot 2 & -3^2 + 2^2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 12 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

[2] Liknande saker är gjorda i *Geometriska Vektorer*.

och beräknar komponenterna

$$\begin{aligned} M_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{v} &= \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 12 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 32 \\ 50 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

▲

Sats 4.2.5. *Alla linjära avbildningar kan sättas samman av en skalning, en rotation och en spegling.*

Speciellt intressanta är avbildningar som bevarar någon egenskap.

Definition 4.2.6. En *isometri* är en avbildning som bevarar avstånd, A är en isometri $\Leftrightarrow d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = d(A\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{u}) \;\; \forall \;\; \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$. ▲

Sats 4.2.7. *Om A är en isometri gäller* $\det(A) = \pm 1$.

Sats 4.2.8. *Om A är en spegling gäller* $\det(A) = -1$.

Mängden av alla matriser med determinant 1 är en trevlig delmängd av alla matriser som ofta dyker upp i olika tillämpningar.

4.3 Projektioner

Ett enkelt exempel på en projektion är att projecera en vektor på xy-plantet. Den ges av

$$P_{\hat{\boldsymbol{z}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

En vektor som redan finns på xy-planet blir naturligtvis oförändrad om den projeceras på xy-planet. I själva verket tar vi det som en definition av en projektion.

Definition 4.3.1. En *projektion* är en matris P för vilket

$$P^2\boldsymbol{v} = P\boldsymbol{v} \;\; \forall \;\; \boldsymbol{v} \in \mathcal{V}$$

gäller. ▲

4.3.1 Projektion på en vektor, Q

I texten *Geometriska Vektorer* studerade vi projektionen av en vektor $\boldsymbol{v}$ på en annan vektor $\boldsymbol{n}$. Geometriskt fick vi

$$\frac{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n} \rangle \, \boldsymbol{n}}{||\boldsymbol{n}||^2}.$$

På komponentform får vi

$$\begin{gathered} \frac{1}{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}\left(v_x n_x + v_y n_y + v_z n_z\right) n_x \\ \frac{1}{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}\left(v_x n_y + v_y n_y + v_z n_z\right) n_y \\ \frac{1}{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}\left(v_x n_z + v_y n_y + v_z n_z\right) n_z. \end{gathered}$$

Ur detta identifierar vi att vi kan skriva detta som en matrismultiplikation $Q_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{v}$ där

$$Q_{\boldsymbol{n}} = \frac{1}{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \begin{bmatrix} n_x^2 & n_x n_y & n_x n_z \\ n_x n_y & n_y^2 & n_y n_z \\ n_x n_z & n_y n_z & n_z^2 \end{bmatrix}.$$

4.3.2 Projektion på ett plan, P

Ett annat problem som studerades i *Geometriska Vektorer* var projektionen av en vektor $\boldsymbol{v}$ på ett plan med normal $\boldsymbol{n}$.

Vi motiverade uttrycket

$$\boldsymbol{v} - \frac{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n} \rangle \, \boldsymbol{n}}{||\boldsymbol{n}||^2}$$

för den resulterande vektorn.

Detta går också att skriva på matrisform enligt ovan:

$$P_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{v} - Q_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{v} = (\mathbf{1} - Q_{\boldsymbol{n}})\boldsymbol{v}.$$

Vi inledde detta avsnitt med projektionen av en vektor på xy-planet. Normalen för xy-planet är $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ vilket ger matrisen $P_{\hat{\boldsymbol{z}}}$ i (4.1).

Den som har studerat/vill studera tensorer kan tänka på $P_{\boldsymbol{n}}$ som en tensor av ordning $(0, 2)$ eftersom den vill ha två vektorer för att göra ett tal (som betyder en av komponenterna för den projicerade vektorn).

4.4 Delrum

Vissa geometriska operationer påverkar en vektor så att vissa egenskaper är bevarade. Till exempel håller sig en vektor i ett och samma plan om den roteras runt en given vektor (som kommer vara planets normal). Ofta är det intressant att dela upp vektorer i olika delar som bevaras eller ändras under olika transformationer.

Givet två vektorer i $\mathbb{R}^3$ finns ett plan. Detta plan är ett *delrum* av $\mathbb{R}^3$.

Definition 4.4.1. Ett *delrum* $\mathcal{W}$ av ett vektorrum $\mathcal{V}$ är själv är ett vektorrum. Det skall alltså vara slutet under addition och multiplikation med skalärer. Speciellt måste nollvektorn tillhöra delrummet. ▲

De två vektorer som definierar planet sägs *spänna upp* delrummet. De går att använda som bas i delrummet, även om de inte är ortonormerade.

4.5 Linjärt beroende

Vi skall nu studera följande problem.

Givet tre vektorer, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{c}$, är det säkert att vi kan använda dem som bas i $\mathbb{R}^3$?

Alternativt uttryckt, går det hitta $v_a, v_b, v_c \in \mathbb{R}$ så att en godtycklig vektor $\boldsymbol{v}$ går att skriva

$$\boldsymbol{v} = v_a\boldsymbol{a} + v_b\boldsymbol{b} + v_c\boldsymbol{c}\ ?$$

Om vi väljer

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

är det uppenbart att det *inte* går eftersom ingen av $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ eller $\boldsymbol{c}$ har någon komponent längs $\hat{\boldsymbol{z}}$.

Vektorerna $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{c}$ spänner alltså *inte* upp $\mathbb{R}^3$.

Ett mindre uppenbart val är

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dessa vektorer har i alla fall komponenter åt alla riktningar. Trots det är de i alla fall inget bra val av bas. Det gäller nämligen att

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$$

vilket gör att det så att säga bara blir två basvektorer kvar att beskriva en godtycklig vektor i $\mathbb{R}^3$ med.

Definition 4.5.1. Tre vektorer $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{c}$ är *linjärt oberoende* om ekvationen

$$v_a\boldsymbol{a} + v_b\boldsymbol{b} + v_c\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$$

bara har lösningen $v_a = v_b = v_c = 0$. ▲

I båda exemplen ovan gäller alltså att $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ och $\boldsymbol{c}$ *inte* var linjärt oberoende.

Utskrivet på komponentform fås

$$\begin{aligned} v_a a_x + v_b b_x + v_c c_x &= 0 \\ v_a a_y + v_b b_y + v_c c_y &= 0 \\ v_a a_z + v_b b_z + v_c c_z &= 0 \end{aligned}$$

Detta ekvationssystem skall alltså *sakna* lösning för att vektorerna skall vara linjärt oberoende. Det betyder att

$$\det\left(\begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{bmatrix}\right) = 0$$

måste gälla.

Detta gäller generellt.

Sats 4.5.2. *I $\mathbb{R}^n$ är n st vektorer linjärt oberoende om den matris som har vektorerna som rader (eller kolumner) har determinant noll.*

Detta är relaterat till begreppet dimension enligt följande definition.

Definition 4.5.3. Ett (del-)rum har *dimensionen* k om det behövs k linjärt oberoende vektorer för att spänna upp det. ▲

4.6 Invarianta delrum

Ofta är det intressant att dela upp vektorer i olika delar som ”håller sig i samma delrum” under en viss operation.

Exempel på detta är en spegling i ett plan. De vektorer som redan ligger i planet är oberörda av en sådan operation. Vid en rotation runt en axel är den del av en vektor som pekar längs axeln oberörd av rotationen och den del som är ortogonal mot rotationsaxeln håller sig i samma plan under rotationen.

Definition 4.6.1. Ett delrum $\mathcal{W}$ av $\mathcal{V}$ är *invariant* under A om $A\boldsymbol{v} \in \mathcal{W} \;\; \forall \;\; \boldsymbol{v} \in \mathcal{W}$.

▲

Rent geometriskt förstår vi följande:

- En rotation i $\mathbb{R}^2$ kan inte ha något invariant delrum, men i $\mathbb{R}^3$ utgör vektorer längs rotationsaxeln ett invariant delrum.
- En spegling i en linje lämnar vektorer längs linjen opåverkade. Linjen är det invarianta delrummet. På samma sätt i $\mathbb{R}^3$: Vid en spegling i ett plan utgör planet det invarianta delrummet.
- En skalning längs en riktning lämnar vektorer ortogonala till denna riktning opåverkade. Vektorer längs denna riktning utgör ett invariant delrum. I $\mathbb{R}^3$ blir detta delrum ett plan.

Vi skall knyta ihop denna geometriska insikt med egenskaper för något som heter egenvektorer och egenvärden i avsnitt 6.

4.7 Övningar

1. Är
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$
en isometri?
2. Vikla komponenter får vektorn $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix}^T$ då den speglas i linjen som har riktningsvektor $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}^T$?
3. Utgör ett klot ett delrum till $\mathbb{R}^3$?
4. Är vektorerna $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ och $\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ och $\begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}^T$ linjärt oberonde i $\mathbb{R}^2$?
5. Är vektorerna $\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ linjärt oberonde i $\mathbb{R}^2$?

5 Basvektorer, basbyten och matriser

5.1 Baser och komponenter

Hittills, och framförallt i hela texten *Geometriska vektorer*, har vi inte gjort någon skillnad på en vektor och ett punkt i $\mathbb{R}^n$. I detta avsnitt måste vi tänka på komponentformen som något relativt en viss bas.

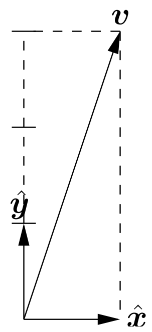
Givet en matris A är det lätt att räkna ut dess verkan på en given vektor $\boldsymbol{v}$. Detta är en *aktiv* operation eftersom vi tänker oss basvektorerna fixa och flyttar/ändrar på vektorn.

Man är ibland intresserad av att byta bas och se vilka komponenter vektorn får i den nya basen. Detta är en *passiv* operation eftersom man tänker sig vektorn fix, det är bara referenssystemet som ändras.

Vi repeterar ett gammalt exempel från Geometriska vektorer.

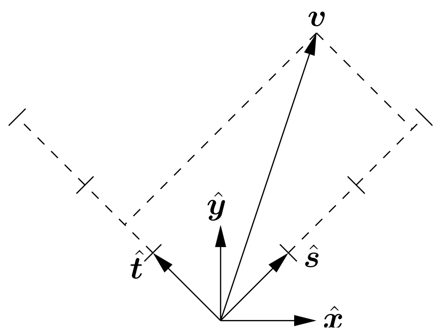
Låt $\boldsymbol{v}$ vara en vektor som med basvektorerna $\hat{\boldsymbol{x}}$ och $\hat{\boldsymbol{y}}$ får komponenterna

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}_{\hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{y}}} \Leftrightarrow \boldsymbol{v} = 1 \cdot \hat{\boldsymbol{x}} + 3 \cdot \hat{\boldsymbol{y}}.$$



Man kan välja andra basvektorer $\hat{\boldsymbol{s}}$ och $\hat{\boldsymbol{t}}$ där $\boldsymbol{v}$ får komponenterna (mät i figuren nedana!)

$$\boldsymbol{v} \approx \begin{bmatrix} 2.8 \\ 1.4 \end{bmatrix}_{\hat{\boldsymbol{s}}\hat{\boldsymbol{t}}}.$$



Figuren skall tolkas så att alla basvektorer skall ha längden 1 och att $\hat{\boldsymbol{s}}$ och $\hat{\boldsymbol{t}}$ är vridna ett 45° moturs relativt $\hat{\boldsymbol{x}}$ och $\hat{\boldsymbol{y}}$.

Komponenterna ges av

$$\hat{\boldsymbol{s}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{y}}} \hat{\boldsymbol{t}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{y}}} \hat{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}_{\hat{\boldsymbol{s}}\hat{\boldsymbol{t}}} \hat{\boldsymbol{y}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\hat{\boldsymbol{s}}\hat{\boldsymbol{t}}}$$

Faktorn $\frac{1}{\sqrt{2}}$ finns för att alla dessa vektorer skall ha längden 1.

5.2 Basbytesmatris

En mycket bra fråga är om det finns en matris som avbildar $\hat{\boldsymbol{x}}$ på $\hat{\boldsymbol{s}}$ och $\hat{\boldsymbol{y}}$ på $\hat{\boldsymbol{t}}$. Så är det naturligtvis, och det finns en mycket enkel teknik för att ta fram den. Låt oss benämna denna matris A.

Basvektorern $\hat{\boldsymbol{x}}$ får ett mycket enkelt uttryck i ”sin egen bas”,

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{y}}} .$$

Om A verkar på denna vektor skall vi alltså få $\hat{\boldsymbol{s}}$,

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{s}} &= A\hat{\boldsymbol{x}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{y}}} &= A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{y}}} . \end{aligned}$$

Tack vare det enkla uttrycket för $\hat{\boldsymbol{x}}$ kan identifiera den första kolumnen i A. Vi får

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{y}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & ? \\ 1 & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{y}}} .$$

Notera att den andra kolumnen inte är inblandad i multiplikationen eftersom den andra raden i $\hat{\boldsymbol{x}}$ är noll.

På samma sätt får vi

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{t}} &= A\hat{\boldsymbol{y}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{y}}} &= A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{y}}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{y}}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{y}}} . \end{aligned}$$

Slutsatsen är

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

i detta fall.

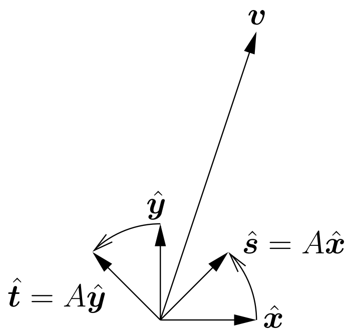
De nya basvektorerna uttryckta i den gamla basen, blir kolumner i basbytesmatrisen.

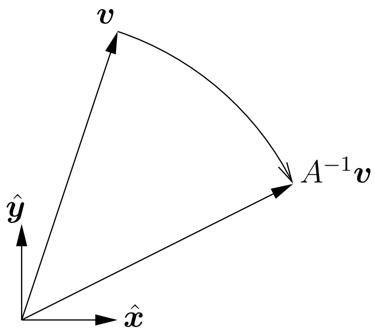
Vi repeterar att A alltså avbildar en *basvektor* i den ena basen till sin motsvarighet i den andra. Matrisen A^{-1} avbildar alltså $\hat{\boldsymbol{s}}$ på $\hat{\boldsymbol{x}}$ och $\hat{\boldsymbol{t}}$ på $\hat{\boldsymbol{y}}$. Eftersom den behövs strax skriver vi upp

$$A^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Eftersom A ändrar på basvektorerna, inte på $\boldsymbol{v}$, kallas detta alltså för ett *passivt* koordinatbyte. Motsatsen är det *aktivta* koordinatbytet där man tänker sig koorinatsystemet fixt och istället ändrar på vektorn. Denna transformation ges av A^{-1}.

I just det exempel vi studerar är det passiva koordinatbytet en rotation med 45° moturs. Dess invers måste vara en rotation med 45° medurs, vilket syns i figuren nedan.





Vi beräknar komponenterna i vårt exempel. Den bas vi använder skrivs ut för övertydlighetens skull.

$$\begin{aligned} A^{-1}\boldsymbol{v} &= A^{-1}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}_{\hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{y}}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}_{\hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{y}}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}_{\hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{y}}} = \begin{bmatrix}2\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{bmatrix}_{\hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{y}}} \approx \begin{bmatrix}2.8\\1.4\end{bmatrix}_{\hat{\boldsymbol{x}}\hat{\boldsymbol{y}}} \end{aligned}$$

Jämför dessa komponenter med de komponenter i $\hat{\boldsymbol{s}}\hat{\boldsymbol{t}}$-systemet som vi avläste i den första figuren i detta avsnitt.

Ett annat sätt att se detta är följande kedja av samband.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= v_s\hat{\boldsymbol{s}} + v_t\hat{\boldsymbol{t}} \\ \boldsymbol{v} &= v_sA\hat{\boldsymbol{x}} + v_tA\hat{\boldsymbol{y}} \\ A^{-1}\boldsymbol{v} &= v_s\hat{\boldsymbol{x}} + v_t\hat{\boldsymbol{y}} \end{aligned}$$

I avsnitt texten *Abstrakta vektorrum* ges en annan, mer matematisk, motivering till att det är A^{-1} som avbildar komponenterna för en vektor, medan det är A som avbildar basvektorerna.

Exempel 5.2.1. Bestämning av komponenter under basbyte

Vilka komponenter får vektorn $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}2 & 2\end{bmatrix}^T$ under basbytet

$$A = \begin{bmatrix}1 & -1\\2 & 3\end{bmatrix}?$$

Lösning

Komponenterna kommer ges av $A^{-1}\boldsymbol{v}$. För att beräkna inversen beräknar vi först determinanten $\det(A) = 1\cdot 3 - (-1)\cdot 2 = 5$. Vi får

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & 1\\-2 & 1\end{bmatrix}.$$

Komponenterna vi söker ges av

$$A^{-1}\boldsymbol{v} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & 1\\-2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8/5\\-2/5\end{bmatrix}.$$

▲

5.3 Övningar

1. Vilka komponenter får vektorn $\begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}^T$ under basbytet $A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$?

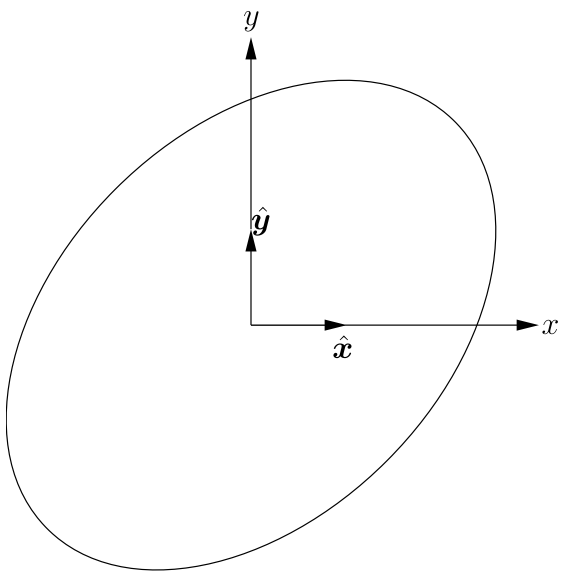
6 Kvadratiska former och egenvärden

6.1 Kvadratisk form som matris

Lösningsmängden till ekvationen

$$\frac{13}{72}x^2 - \frac{10}{72}xy + \frac{13}{72}y^2 = 1 \tag{6.1}$$

är en (sned) ellips.



Vi kan uttrycka denna ekvation på matrisform som

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \frac{1}{72} \begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1$$

Om vi inför en vektor $\boldsymbol{v}$ som med basvektorerna $\hat{\boldsymbol{x}}$ och $\hat{\boldsymbol{y}}$ får komponenterna

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

kan vi uttrycka oss

$$\boldsymbol{v}^T B \boldsymbol{v} = 1 \tag{6.2}$$

där B är matrisen

$$B = \frac{1}{72} \begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{bmatrix}.$$

Observera skillnaden mellan *koordinatsystemet* där en *punkt* har *koordinaterna* (x, y) och *basvektorerna* $\hat{\boldsymbol{x}}$ och $\hat{\boldsymbol{y}}$ där en *vektor* har *komponenterna* x och y.

Lösningsmängden till (6.1) är en mängd punkter, medan lösningsmängden till (6.2) är en mängd vektorer.

Beroende på hur den axiomatiska framställningen av $\mathbb{R}^2$ som ett vektorrum är gjord, kan det vara viktigt att poängtera skillnaden och att använda rätt ord om respektive situation.

6.2 Egenvektorer och egenvärden

Frågan är nu om det går att göra ett basbyte där matrisen B blir diagonal.

Vi skall snart *räkna* ut hur basbytesmatrisen skall se ut, men innan dess *prövar* vi med A från förra avsnittet, uttrycket (5.1). Exemplet är konstruerat så att matrisen A är precis den matris som söks. Det kan vara illustrativt att se hur resultatet blir innan vi gör själva beräkningen.

Komponenterna för $\boldsymbol{v}$ i denna bas ges av $A^{-1}\boldsymbol{v}$. Låt oss beteckna ”denna vektor” $\boldsymbol{u}$ (det är ju i själva verket samma vektor som bara uttrycks med andra komponenter). Det gäller alltså att $\boldsymbol{u} = A^{-1}\boldsymbol{v}$, och därmed

$$\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{u}.$$

Detta skall vi nu utnyttja. Vidare gäller

$$\boldsymbol{v}^T = \boldsymbol{u}^T A^T.$$

Detta sätter vi nu in i (6.2) och får då

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}^T B\boldsymbol{v} &= 1 \\ \boldsymbol{u}^T A^T BA\boldsymbol{u} &= 1. \end{aligned}$$

Låt oss undersöka vad $A^T BA$ är för matris.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{72}\begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/9 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Om vi byter bas med A kommer alltså B bli diagonal.

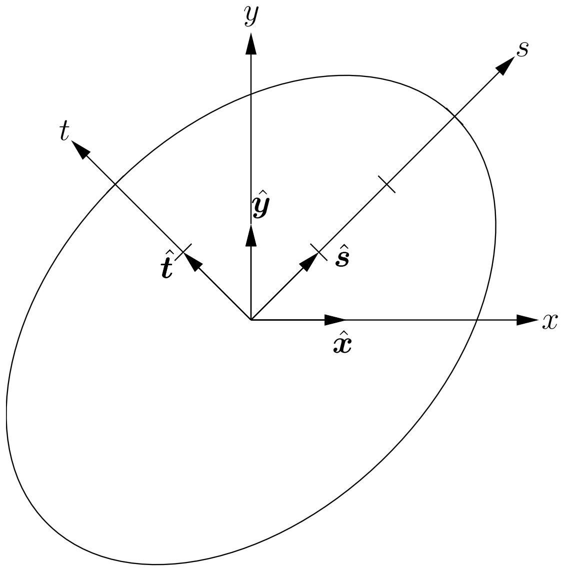
Om vi inför

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$$

och skriver ut $\boldsymbol{u}^T A^T BA\boldsymbol{u} = 1$ på komponentform får vi

$$\begin{bmatrix} s & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/9 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \left(\frac{s}{3}\right)^2 + \left(\frac{t}{2}\right)^2 = 1.$$

Om vi inför st-systemet i figuren ser vi att detta är precis den ellips vi förväntar oss.



Generellt vet man naturligtvis inte i vilken bas som en matris blir diagonal. Nu skall vi *räkna fram A*!

Det finns en geometrisk tolkning av matrisen B. Man kan säga att B ”blåser upp” enhetscirkeln till den sneda ellips som är lösningsmängd till (6.1). Detta betyder att B blandar x och y så att det finns xy-termer i (6.1).

I den sökta basen skall B bara ”blåsa upp” enhetscirkeln längs (de nya) axlarna. Det är den geometriska tolkningen av att B är diagonal i denna bas. Det betyder också att en multiplikation med B skall vara en mulitplikation med ett tal.

Vi låter

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

vara komponenterna för de nya basvektorerna i den nya basen i $\hat{\boldsymbol{x}}$-$\hat{\boldsymbol{y}}$ (pluralis eftersom vi vet att vi behöver två, och det kommer visa sig att vi får två lösningar till en ekvation senare).

Vi får då

$$\frac{1}{72}\begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Om vi flyttar högerledet till vänsterledet får vi

$$\frac{1}{72}\begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0$$

och

$$\frac{1}{72}\begin{bmatrix} 13-72\lambda & -5 \\ -5 & 13-72\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0.$$

Detta betyder att $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ skall avbildas på nollvektorn, vilket ger att

$$\begin{bmatrix} 13-72\lambda & -5 \\ -5 & 13-72\lambda \end{bmatrix}$$

måste sakna invers, vilket i sin tur betyder att dess determinant måste vara noll.

Vi får då ekvationen, som benämns *sekulärekvationen*,

$$(13-72\lambda)^2 - (-5)^2 = 0. \tag{6.3}$$

Polynomet i vänsterledet kallas det *karakteristiska polynomet* till matrisen. Sekulärekvationen har lösningarna[3]

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{4} = \frac{18}{72} \\
\lambda_2 &= \frac{1}{9} = \frac{8}{72}.
\end{aligned}
$$

Dessa värden benämns *egenvärden* till B.

Nu kan vi lösa ekvationen (ekvationssystemet)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{72}\begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &= \frac{18}{72}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\
\frac{1}{72}\begin{bmatrix} 13-18 & -5 \\ -5 & 13-18 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\frac{1}{72}\begin{bmatrix} -5 & -5 \\ -5 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Detta går inte att lösa (det var ju det vi önskade!), men vi får ett förhållande mellan a och b, nämligen $a = -b$.

Det är praktiskt med normerade basvektorer, så vi väljer $a = -b = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Denna vektor benämns den *egenvektor* till B som hör till egenvärdet $\lambda_1 = \frac{1}{4}$. Detta är ju precis

$$
\hat{\boldsymbol{t}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.
$$

På precis samma sätt får vi

$$
\hat{\boldsymbol{s}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

som egenvektor till egenvärdet λ_2.

Vi kan notera att B får komponenterna

$$
\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.
$$

i $\hat{\boldsymbol{s}}\hat{\boldsymbol{t}}$-systemet. Det är ingen slump, utan gäller generellt.

I en bas av egenvektorer till sig själv, blir alla matriser diagonala med egenvärdena på diagonalen.

Har man *två* kvadratiska former kan man inte alltid hitta en bas där *båda* representeras av diagonala matriser.

En motsvarighet till detta visar sig vara mycket viktigt i kvantmekaniken. Heisenbergs obestämbarhetsrelation säger på sätt och vis hur nära man kan komma en samtidig diagonalisering.

[3] Det blir lite enklare beräkningar senare om vi uttrycker dem i 72:a-delar.

Exempel 6.2.1. Bestämning av egenvärden och egenvektorer

Bestäm egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lösning

Vi bildar sekulärekvationen och löser den.

$$\begin{aligned} (-3-\lambda)(2-\lambda) - 2 &= \\ -6 + 3\lambda - 2\lambda + \lambda^2 &= 0 \\ \lambda_1 &= \frac{-1+\sqrt{33}}{2} \\ \lambda_2 &= \frac{-1-\sqrt{33}}{2} \end{aligned}$$

Vi sätter upp ett ekvationssystem på matrisform

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

En av raderna blir

$$-3a - b = \lambda_1 a$$

vilket ger

$$b = -3a - \lambda_1 a = (-3 - \lambda_1)a$$

Eftersom ekvationssystemet *ska* vara underbestämt räcker detta. Vi kan välja a som vi vill. I vissa sammanhang vill man ha normerade egenvektorer, men det är inte viktigt här. Vi väljer därför $a = 1$ och får $b = -3 - \lambda_1$.

Det andra paret blir $a = 1$ och $b = -3 - \lambda_2$.

Vi får alltså egenvärdena

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-1+\sqrt{33}}{2} \approx 2.4 \quad \text{med egenvektorn} \begin{bmatrix} 1 & -3 - \frac{-1+\sqrt{33}}{2} \end{bmatrix}^T \approx \begin{bmatrix} 1 & -5.4 \end{bmatrix}^T \\ \lambda_2 &= \frac{-1-\sqrt{33}}{2} \approx -3.4 \quad \text{med egenvektorn} \begin{bmatrix} 1 & -3 - \frac{-1-\sqrt{33}}{2} \end{bmatrix}^T \approx \begin{bmatrix} 1 & -0.4 \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

▲

6.3 Egenvärden och delrum

Geometriskt förstår vi att en rotation i $\mathbb{R}^2$ inte kan ha reella egenvärden. Anledningen är att det inte finns någon vektor som pekar åt samma håll efter en rotation, ekvationen $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ måste sakna lösningar för reella λ.

I $\mathbb{R}^3$ blir det karakteristiska polynomet av grad tre, och har alltså minst en reell rot. Den egenvektor som svarar mot detta egenvärde måste vara rotationsaxeln.

En spegling i en linje eller ett plan måste ha ett egenvärde som är -1 vars egenvektor är linjens eller planets normal. I $\mathbb{R}^2$ borde den andra egenvektorn vara linjens riktningsvektor och det andra egenvärdet borde vara 1.

I $\mathbb{R}^3$ får man bara ett annat egenvärde, nämligen 1, men det har multiplicitet två. Det invarianta delrummet är ett plan (som alltså har dimension två).

En projektion ”förstör information”. Projicerar vi en vektor på en linje, utgör linjen ett invariant delrum, men om en vektor har komponenter ortogonala mot denna linje försvinner. Minst ett egenvärde är därför noll.

> Till varje egenvärde finns ett delrum med dimension mindre än eller lika med multipliciteten för egenvärdet.

> Ortogonala matriser har reella egenvärden och ortogonala egenvektorer. Ortogonala matriser är isometrier och har determinant +1, men alla isometrier är inte ortogonala. Kolumnerna för en ortogonal matris är parvis ortogonala. Dess transponat är lika med dess invers.

Speciellt gäller att en egenvektor $\boldsymbol{v}$ till en matris A är invariant under den verkan av den matrisen: $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$.

Vi kan notera följande. Antag att en matris A har två egenvärden som är lika, alternativt uttryckt att multipliciteten för en rot λ till dess karakteristiska polynom är två. Antag också att man kan hitta två egenvektorer $\boldsymbol{v}_1$ och $\boldsymbol{v}_2$ till detta egenvärde. Det betyder alltså att

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{v}_1 &= \lambda\boldsymbol{v}_1, \\ A\boldsymbol{v}_2 &= \lambda\boldsymbol{v}_2. \end{aligned}$$

Vi ser att summan av egenvektorerna också är en egenvektor:

$$A(a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2) = \lambda(a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2).$$

Det är dock inte säkert att det går att hitta lika många egenvektorer till en matris som multipliciteten för egenvärdet. I så fall går det inte att diagonalisera matrisen, se exemplen nedan.

En viktig tillämpning av detta är kvantmekaniska tillstånd med samma energi. För väteatomens energinivåer gäller att det finns flera tillstånd med samma energi, samma n-kvanttal. Det finns ett annat kvanttal l som anger storleken av rörelsemängdsmomentet för elektronen. Detta kvanttal antar värden $0, \ldots, n-1$. Vidare finns ett tredje kvanttal m som anger åt vilket håll rörelsemängdsmomentetet är riktat. Detta kvanttal antar värden $-l, \ldots, l$.

Alla tillstånd med samma n utgör ett invariant delrum, och detta delrum kan i sin tur delas upp i delar med samma l.

> Det går inte överskatta hur viktigt detta är inom kvantmekaniken, och därmed för all vår förståelse av naturen. En variant på att hitta olika invarianta delrum är förknippat med att det existerar olika sorters elementarpartiklar.
>
> Till exempel finns det fermioner och bosoner därför att det finns två egenvärden, -1 och $+1$ till en abstrakt operation som byter plats på partiklar.

Exempel 6.3.1. Egenvärden, egenvektorer och delrum 1

Bestäm egenvärden och egenvektorer till

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Lösning

Här blir får den karakteristiska ekvationen två rötter. Roten $\lambda_1 = 2$ får multiplicitet 1. Kallar vi egenvektorn $\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T$ får vi

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

vilket ger $c = 0$ samt ett ekvationerna $3a + b = 2a$ och $a + 3b = 2b$. De senare ger $a = 1$ och $b = -1$. Egenvektorn till $\lambda_1 = 2$ är alltså $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$.

För egenvärdet $\lambda_2 = 4$ får vi

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

vilket ger att c kan vara vad som helst. Sätt så länge $c = t$.

Vidare får vi $3a + b = 4a$ och $a + 3b = 4b$ vilket är ett underbestämt system. Vi får $a = b$ och väljer $a = b = s$. Delrummet som spänns upp av dessa vektorer är alltså tvådimensionellt, vi får två oberoende parametrar. I detta tvådimensionella delrum kan vi välja vilka linjärt oberoende basvektorer vi vill. Alla linjärkombinationer av de basvektorer vi väljer kommer att ha egenvärde 4. Ett naturligt val av bas är $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ och $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$. ▲

Exempel 6.3.2. Egenvärden, egenvektorer och delrum 2

Bestäm egenvärden och egenvektorer till

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Lösning

Här blir får den karakteristiska ekvationen också två rötter. Roten $\lambda_1 = 4$ får multiplicitet 1. Vi får

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

vilket ger $c = t$ samt ett ekvationerna $3a + b = 4a$ och $3b = 4b$. De senare ger $b = 0$ och därmed $a = 0$. Vi väljer t så att vi får egenvektorn $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$

För egenvärdet $\lambda_2 = 3$ som har multiplicitet två får vi

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

vilket ger $c = 0$ samt $3a + b = 3a$ och $3b = 3b$ vilket ger $b = 0$ och $a = s$. Trots att multipliciteten för egenvärdet är två får vi bara *en* oberoende parameter, alltså ett endimensionellt delrum. Vi kan välja s så att vi får basvektorn $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ i delrummet.

Matrisen går alltså inte att diagonalisera! ▲

6.4 Övningar

1. Bestäm egenvärden och egenvektorer till
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$
2. Bestäm egenvärden och egenvektorer till
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$
3. Genomför beräkningarna som visar att en spegling i x-axeln har de egenvärden och egenvektorer som omnämns i texten. Gör detta i $\mathbb{R}^2$.
4. Bestäm egenvärden och egenvektorer med skalning med en vektor $\boldsymbol{k}$.
5. Bestäm egenvärden och egenvektorer till
$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 & -4 \\ -6 & 2 & 2 & -5 \\ 4 & 0 & -1 & 4 \\ 6 & 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}.$$
6. Övertyga dig med några exempel i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$ att den konstanta termen i det karakteristiska polynomet är determinanten för matrisen till vilken egenvärden söks.

7 Exponenter och Markovkedjor

Ibland har man nytta av att beräkna vad A^N blir för någon matris A och något tal N. Om A är en stor matris tjänar man på att byta bas till den som ges av egenvektorerna till A. Låt oss kalla denna matris G, och den diagonala matrisen $\tilde{A}$. Begrunda att i metoden som beskrivs nedan behöver N inte vara ett heltal.

Om A skall verka på någon vektor $\boldsymbol{v}$ kan vi byta bas, verka med $\tilde{A}$ istället och sedan byta tillbaka. Vi får

$$A\boldsymbol{v} = G^{-1}\tilde{A}G\boldsymbol{v}.$$

Detta gäller för alla vektorer $\boldsymbol{v}$, så

$$A = G^{-1}\tilde{A}G.$$

Därför blir

$$\begin{aligned} A^N &= (G^{-1}\tilde{A}G) \cdot (G^{-1}\tilde{A}G) \cdot \cdots \cdots (G^{-1}\tilde{A}G) \\ &= G^{-1}\tilde{A}^N G \end{aligned}$$

eftersom alla $G^{-1}G$ är enhetsmatrisen.

Beräkningen förenklas avsevärt eftersom

$$\tilde{A}^N = \begin{bmatrix} \lambda_1^N & 0 \\ 0 & \lambda_2^N \end{bmatrix}$$

i $\mathbb{R}^2$ med en uppenbar generalisering till $\mathbb{R}^n$.

Ett bra exempel där detta är tillämpbart är Markovkedjor, vilket beskrivs här[4].

8 Förväntansvärden

Begreppet *förväntansvärde* är något som är mycket viktigt inom kvantmekaniken. För en matris kan man definiera detta begrepp på olika sätt. Det som ges nedan är inte det vanliga, men liknar det inom kvantmekaniken.

8.1 Förväntansvärden av en matris

Om man verkar med en matris på en vektor fås en ny vektor. Ofta är det intressant att reda ut ”hur mycket som blir kvar” av en given vektor i en sådan situation. Man kan också uttrycka det som ”vad vi kan förvänta oss” av en matris A då den verkar på en vektor $\boldsymbol{v}$.

Definition 8.1.1. *Förväntansvärdet* av en matris A då den verkar på en vektor $\boldsymbol{v}$ är

$$\frac{\langle \boldsymbol{v}, A\boldsymbol{v} \rangle}{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle}.$$

▲

Vi noterar att om $\boldsymbol{v}$ är en egenvektor till A med egenvärdet λ gäller att förväntansvärdet blir just λ.

9 Facit

Övningar i avsnitt 4.7

1. Nej, dess determinant är inte 1 eller -1.

[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Markov_chain

2. Komponenterna blir $\frac{1}{17}\begin{bmatrix}-54\\-29\end{bmatrix}$.

3. Nej, det är till exempel inte invariant under addition (två vektorer på klotet hamnar inte på klotet då de adderas).

4. Nej, tre vektorer i $\mathbb{R}^2$ är alltid linjärt beroende.

5. Nej, ty de är parallella.

Övningar i avsnitt 5.3

1. Komponenterna blir $\begin{bmatrix}-3/4\\5/4\end{bmatrix}$.

Övningar i avsnitt 6.4

1. Egenvärden är $\lambda = 3 \pm \sqrt{10}$ med egenvektorer $\begin{bmatrix}1 & \frac{-1 \pm \sqrt{10}}{3}\end{bmatrix}^T$.

2. Matrisen har bara ett egenvärde, $\lambda = 2$ med multiplicitet 2. Egenvektorn är $\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^T$.

3. Lösning given i texten.

4. Egenvärden blir k_x med egenvektor $\hat{\boldsymbol{x}}$ och k_y med egenvektor $\hat{\boldsymbol{y}}$.

5. Denna övning är jobbig i och med att det är fyra dimensioner, men inget konstigt händer. Vi får

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -1 \quad \text{med egenvektor} \quad \begin{bmatrix}-1 & -1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T \\
\lambda_2 &= 1 \quad \text{med egenvektor} \quad \begin{bmatrix}-1 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T \\
\lambda_3 &= 2 \quad \text{med egenvektor} \quad \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T \\
\lambda_4 &= 3 \quad \text{med egenvektor} \quad \begin{bmatrix}-1 & -2 & 1 & 2\end{bmatrix}^T.
\end{aligned}$$

6. -