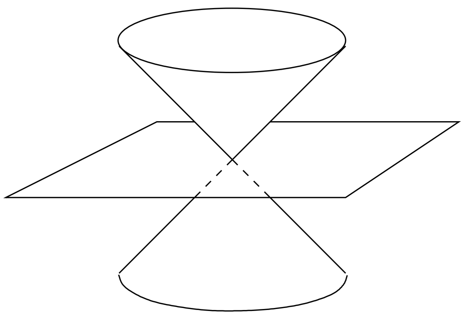


Speciella relativitetsteorin

Johan Wild

2019–03–08

johan.wild@europaskolan.se

2019–03–08

Innehåll

1 Inleding

Denna lilla text om den speciella relativitetsteorin (SR) är skriven för kursen Linjär Cirkel vid Europaskolan. Den kan ses som den fristående fjärde delen i trilogin om linjär algebra.

Det finns gott om populärvetenskapliga texter om SR och teorins historia. Många läromedel har också skrivits för gymnasiet genom åren, där författarna har försökt förklara teorin så enkelt som möjligt.

Den historiska bakgrunden till teorin tas därför upp mycket sparsamt i denna text.

De viktigaste delarna i SR (tidsdilatationen och längdkontraktionen) tas upp ungefär som man brukar i motsvarande texter.

Syftet med denna text är dock inte att presentera teorin så enkelt som möjligt. Texten skall belysa den matematiska skönheten i teorin.

Texten kräver inte kunskaper i linjär algebra, men helt klart blir teorin vackrare om den formuleras på matrisform. Den är skriven så att det skall vara uppenbart vilka avsnitt som man kan hoppa över om man inte vet vad en matris är.

Med eller utan linjär algebra tränar i alla fall texten till att tolka rumtid-diagram och annat abstrakt. Begreppet metrik kommer att vara centralt. Texten är därmed också en slags uppvärmning inför den allmänna relativitetsteorin.

2 Historia

Under 1800-talet hade vi två fantastiska teorier som förklarade väldigt många av de fenomen som man kunde iakta. Newtons mekanik inklussive gravitationsteori var den ena, och den andra rörde elektromagnetiska fenomen.

Maxwell sammanfattade alla elektromagnetiska teorier i fyra differentialekvationer ur vikla alla elektromagnetiska fenomen kunde härledas.

Man hade mätt upp ljusets hastighet och man var på det klara med att ljuset var en vågrörlse.

Man trodde att vågen måste utbreda sig i någon slags medium som man kallade **etern**. Då var det naturligt att försöka mäta upp jordens hastiget genom denna eter. Michelson och Morley genomförde år 1887 en serie experiment som försökte göra detta. De misslyckades! Åt vilket håll man än mätte ljusets fart fick man samma resultat.

Loretsz visade att Maxwells ekvationer inte betedde sig riktigt som man kunde förvänta sig när man byter hastighet.

Einstein konstruerade tankeexperiment som visade att det var något skumt med teorin om elektromagnetismen som också skulle visa sig bero på just vilken hastihet olika betraktare av samma experiment har relativt varandra.

Allt detta mynnade ut i att Einstein formulerade den speciella relativitetteorin som publicerades år 1905. Det mest spektakulära med denna teori är postulatet att **ljusets fart är lika för alla observatörer**.

Det kan vara bra att känna till att ljusets hastighet är **exakt** $c = 299792458\,\mathrm{m/s}$. Detta är i själva verket en definition av längenheten meter.

För att kunna reda ut konsekvenerna av detta måste vi precisera vad som menas med en observatör.

3 Observatörer

Med en **observatör** menas någon som rör sig likformig. Det betyder att en observatör inte accelererar och inte befinner sig i ett gravitationsfält.

Alla observatörer har en klocka som visar observatörens egen tid som benämns observatörens **egentid**. När man stöter på detta begrepp första gången blir man förvånad, men det skall visa sig att alla inte mäter samma tid, så det är ett bra begrepp att ha.

När något händer, händer det vid en viss tidpunkt och vid en viss plats. En **händelse** är en punkt i rumtiden.

Alla observatörer beskriver rumtiden med ett koordinatsystem. Genomgående skall vi tänka oss att **vi** använder t och x för kooridnater i rumtiden, och att vi betraktar någon annan observatör som rör sig med hastiheten v relativt oss i x-led.

Eftersom den relativa rörelsen är i x-led kommer vi aldrig att intressera oss för koordinaterna y och z, vi kan betrakta rumtiden som tvådimensionell.

Relativitetsprincipen innebär att alla fysikens lagar är lika för alla observatörer. Exempelvis kan inte resultatet av en kemisk reaktion i en bägare bero på om man sitter still och tittar på sin bägare, eller om man springer förbi den.

Vi tar relativitetsprincipen som ett postulat i SR.

Matematiskt innebär relativitetsprincipen att de (differential-)ekvationer som beskriver hur saker förändras måste se lika ut i alla koordinatsystem. Detta skall strax förtydligas.

4 Gallileotransformationerna

4.1 Olika observatörer och invarians

Vi beskriver som sagt händelser i rumtiden med koorinaterna (t, x). Den andre observatören (som nämndes ovan) använder istället kooridnaterna (t', x') för samma händelser.

Detta är en traditionell namngivning inom SR. Vi kommer ofta referera till systemen som det **oprimade** respektive det **primade**. Koordinaterna i respektive system är relaterade till varandra enligt

$$\begin{aligned} t &= t' \\ x &= x' + vt'. \end{aligned}$$

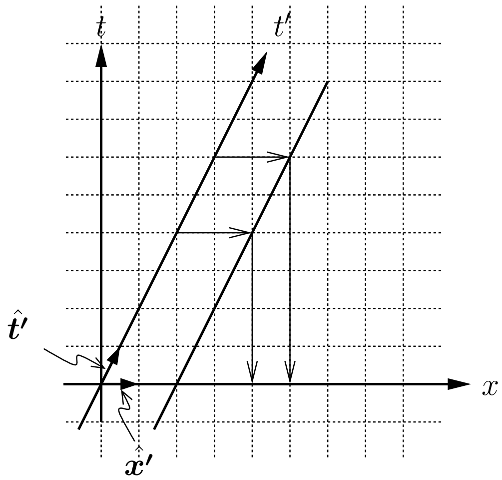
Detta är **gallileotransformationerna**.

Figurerna nedan visar två exempel på grafer som är vanliga inom SR. Egentligen är de vanliga sträcka-tid-diagram, men inom SR är det vanligt att tidsaxeln ritas uppåt.

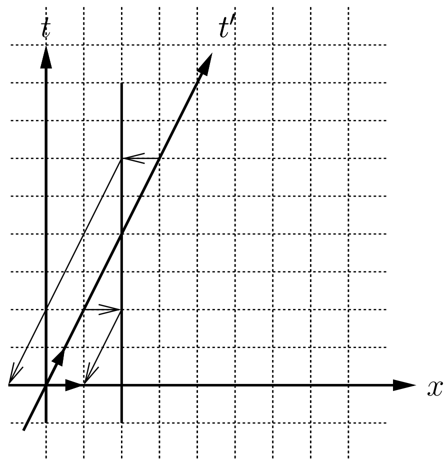
I båda bilderna visas hur det primade systemet rör sig med hastigeheten v. Den punkt som har konstant $x' = 0$ ger en tidsaxel i det primade systemet. Om något har kooridnaten $x' = 2$ i det primade systemet kommer denna punkt röra sig i vårt system. Detta visas i den vänstra bilden.

De båda linjerna som uppkommer i det oprimade systemet benämns **världslinjer** (på engelska *world lines*) för observatörer som sitter i origo respektive i $x' = 2$.

I den högra bilden visas en världslinje för något som sitter still vid koordinaten $x = 2$ i det oprimade systemet.



Konstant x' ger ökande x för ökande t'.



Konstant x ger minskande x' för ökande t.

Antag att vi betraktar en kropp som rör sig med hastigheten u' relativt det primade systemet (som om den observatören kastat iväg kroppen med hastigheten u' relativt sig själv). Vi skulle då uppleva att kroppens hastighet som

$$u = u' + v.$$

Detta är vår vardagliga erfarenhet, som också är förenlig med Newtons mekanik.

Exempel 4.1.1. En cyklist rör sig med hastigheten 3.6 m/s mot en person som går med hastigheten 1 m/s mot cyklisten.

Cyklisten kastar en boll med hastighet 5 m/s mot den gående.

Den gående tar emot bollen och uppfattar dess fart till

$$3.6 \text{ m/s} + 1 \text{ m/s} + 5 \text{ m/s} = 9.6 \text{ m/s},$$

vilket är en högre fart än den bollen kastades med. ▲

Om en kropp med massan m accelereras av en kraft F fås i x-t-systemet

$$F = m\left(\frac{d}{dt}\right)^2 x.$$

För att se hur detta samband blir i det primade systemet måste vi använda kedjeregeln enligt

$$\begin{aligned} m\left(\frac{d}{dt}\right)^2 x &= m\left(\frac{dt'}{dt}\frac{d}{dt'}\right)^2 (x' + vt') \\ &= m\left(1\,\frac{d}{dt'}\right)^2 x + \left(1\,\frac{d}{dt'}\right)^2 (vt') \\ &= m\left(\frac{d}{dt'}\right)^2 x' = F'. \end{aligned}$$

Vi ser att det som vi upplever som $F = ma$ upplevs i det primade systemet som $F' = ma'$. Att de två uttrycken har samma form är ett exempel på att Newtons lagar är **invarianta** under gallileitransformationerna.

Alla andra differentialekvationer som beskriver alla andra fenomen skall också vara invarianta under gallileitransformationerna enligt relativitetsprincipen.

Detta gällde alltså inte Maxwells ekvationer, vilket nämndes i inledingen. Det blir mer om detta senare.

4.2 Matrisform

På matrisform kan gallileitransformationerna skrivas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -v & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t' \\ x' \end{bmatrix},$$

eller, åt andra hållet,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t' \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

De två matriserna är förstås varandras inverser. Att de endast skiljer sig åt med avseende på hastighetens tecken är naturligt ur ett fysikaliskt perspektiv. Vi ser det primade systemet åka med farten v, medan det systemet ser oss åka åt andra hållet med samma fart.

Basbytesmatrisen som avbildar basvektorerna i den gamla basen på de nya basvektorerna skall ha de nya vektorernas komponenter som kolumner. Vi kan notera att det förstås blir så även här. Vektorn $\hat{\boldsymbol{t}}$ har komponenterna

$$\begin{bmatrix} 1 \\ v \end{bmatrix}$$

i den gamla basen. Detta är första kolumnen i (4.1) precis som det ska vara. Eftersom $\hat{\boldsymbol{x}}$ och $\hat{\boldsymbol{x}'}$ sammanfaller blir andra kolumnen helt enkelt

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi ska senare använda oss av dessa matriser, men i ärlighetens namn har vi dem mest för att jämföra med Lorentztransformationernas matriser.

5 Orientering till texten

I följande tre avsnitt (6-8) kommer tre konsekvenser av att ljusets fart är lika för alla observatörer att härledas, nämnas och/eller förklaras.

Detta kommer att göras som man brukar i gymnasieläromedel och gå igenom några standardexempel.

Därefter (avsnitt 9) kommer begreppet **rumtiddiagram** samt relaterade begrepp att förklaras.

Sen påbörjas den mer matematiska behandlingen av teorin på allvar i och med Lorentztransformationerna och hur de kan illustreras i rumtiddiagram.

Då kommer fenomenen från avsnitt 6 och 7 att få en tydligare förklaring.

6 Tidsdillatationen

Som nämnses i avsnitt 2 är ljusets fart lika för alla observatörer. En konsekvens av detta är **tidsdilatationen** som går att sammanfatta i följande formulering.

En klocka som rör sig går långsammare.

Faktorn som beskriver hur mycket långsammare brukar betecknas med γ, som alltid är större än ett. Det som gäller är att om en klocka som rör sig mäter upp tiden t' så går det en längre tid t för oss som står still. Sambandet ges av

$$t = \gamma\, t'.$$

För att härleda detta tänker vi oss att det i det primade systemet finns en lampa som sänder ut en ljuspuls i y-led. Den träffar en spegel och studsar tillbaka. Tiden ljuspulsen färdas går att mäta, både i det primade systemet och av oss som ser på.

Avståndet mellan sändaren och spegeln är h m.

Figuren nedan visar dels hur rörelsen upplevs i det primade systemet. Ljusstrålen åker fram och tillbaka, men för att underlätta beräkningarna koncentrerar vi oss på halva sträckan, så $\Delta t'$ är den tid det tar för ljuspulsen att färdas sträckan h. Detta ger

$$h = c\,\Delta t'. \tag{6.1}$$

För oss som ser på färdas ljuset längre eftersom hela systemet rör sig i x-led. Detta har tagit tiden Δt, på vilken ljuspulsen har rört sig sträckan $c\,\Delta t$. Pythagoras sats ger

$$(c\,\Delta t)^2 = (v\,\Delta t)^2 + h^2. \tag{6.2}$$

Sätter vi in (6.1) i (6.2) får vi

$$\begin{aligned}
(c\,\Delta t)^2 &= (v\,\Delta t)^2 + (c\,\Delta t')^2 \\
c^2\,\Delta t^2 - v^2\,\Delta t^2 &= c^2\,\Delta t'^2 \\
\left(c^2 - v^2\right)\Delta t^2 &= c^2\,\Delta t'^2 \\
\Delta t^2 &= \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\Delta t'^2 \\
\Delta t &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,\Delta t'.
\end{aligned}$$

Faktorn i det sista högerledet är så viktig så den har fått en egen beteckning

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Det kan noteras att då $v = 0$ är $\gamma = 1$ och då $v \to c$ fås $\gamma \to \infty$.

Det gäller alltså att

$$\Delta t = \gamma \Delta t'$$

så när det gått en sekund i det primade systemet har det gått **längre** tid hoss oss.

Detta kan tyckas märkligt, men är fullt mätbart. Dock inte vid vardagliga farter, först vid $v = 0.87c$ är $\gamma = 2$.

Uttryckt med tidskoordinaterna fås

$$t = \gamma t' \tag{6.3}$$

vilket är det uttryck vi kommer referera tillbaka till senare.

I denna text används prim-beteckningen för tiden i det primade systemet. Det är inte ovanligt att denna istället benämns t_0, eller (inom den allmänna relativitetsteorin) med τ.

Alla observatörer mäter som sagt upp sin egen tid, egentiden. Den tid som förflyter mellan två händelser är alltså olika i olika system. Det är det som menas med att man mäter sin egen tid!

Exempel 6.0.1. Det klassiska exemplet på när detta trots allt får effekt är att det bildas myoner då partiklar i solvinden kolliderar vid atmosfären. Myonerna bildas på höjden 10 000 m och då får farten $0.997c$. Myoner sönderfaller med en halveringstid på $T'_{1/2} = 2.1969811 \cdot 10^{-6}$ s. Observera att detta är halveringstiden i myonens eget system, därav primtecknet.

Även om myonerna färdas fort mot marken lever de så kort tid så att de endast hinner

$$0.997\, c\, T'_{1/2} = 0.997 \cdot 299792458\,\mathrm{m/s}\ \cdot 2.1969811 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s} \approx 656\,\mathrm{m}$$

innan hälften av dem har sönderfallit. På 10 000 m borde antalet ha halverats ca 15.2 ggr så vi borde inte kunna mäta upp dem här nere på jordytan.

Det går dock bra att göra, det kommer ner ca 10 000 st per kvadratmeter varje minut. Anledningen är att myonen färdas så fort så att tiden i dess system gå så långsamt så att de hinner ner till jordytan innan de sönderfaller.

När myonen tycker det ha gått en halveringstid har det förflutit

$$\begin{aligned} T_{1/2} &= \frac{1}{\sqrt{1 - 0.997^2}} T'_{1/2} \\ &\approx 13.76\, T'_{1/2} \end{aligned}$$

för oss.

På så lång tid hinner myonen färdas

$$0.997\, c\, T_{1/2} = 0.997 \cdot 299792458\,\mathrm{m/s} \cdot 13.76 \cdot 2.1969811 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s} \approx\ 9035\,\mathrm{m}$$

vilket är nästan hela vägen ned.

Ungegär hälfen av myonerna hinner alltså till jordytan innan de sönderfallit. ▲

7 Längdkontraktionen

Ett annat mystiskt resultat av att ljusets fart är lika för alla observatörer är **längdkontraktionen**, vilken kan sammanfattas med följande formulering.

En stav som rör sig blir kortare.

Förändringsfaktorn är i detta fall också γ, men stavens längd minskar med denna faktor. Om en stav i vila är l' m lång, mäter vi som ser den röra sig upp längden l, mellan vilka sambandet

$$l = \frac{l'}{\gamma}$$

gäller.

I sitt eget system har en kropp alltså längden l'. Denna kallas ibland **vilolängd** eftersom kroppen är i vila i sitt eget system.

Det är inte ovanligt att använda beteckningen l_0 för vilolängden eftersom kroppen har hastigheten 0 m/s i sitt system, men i denna text använder vi konsekvent primbeteckningen.

En sträcka skall alltså mätas upp. Det kan bara göras genom att en ljuspuls skickas från sträckans ena ände till en spegel som sitter i den andra änden. Där reflekteras ljuset och studsar tillbaka. Tiden det tar för ljuset att komma tillbaka kan mätas och sträckans längd kan beräknas från denna tid.

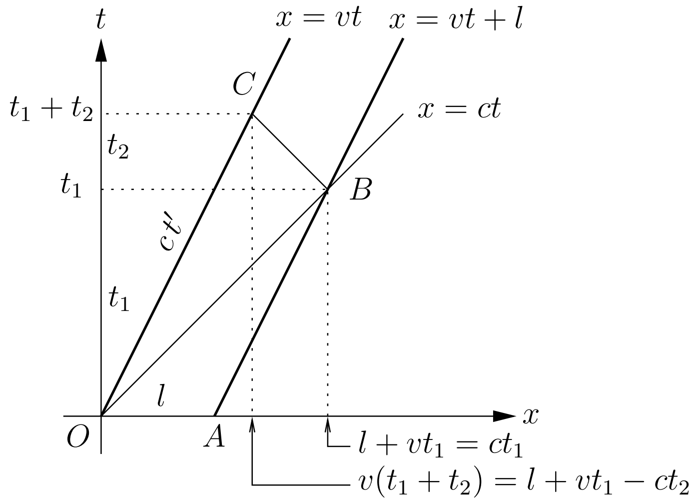
Det går inte att mäta sträckor med till exempel ett måttband, eftersom man inte **samtidigt** kan läsa av måttbandet vid två punkter. Informationen måste färdas med högst ljusets hastighet. Speciellt knepigt blir det om sträckan som skall mätas rör sig, till exempel längden av en stav.

Antag att vi alltså har en stav som rör sig i x-led med hastigheten v. Låt stavens längd i ”vårt” system, x-t-stystemet är l. I det system som följer med staven är längden l'.

Den tid det tar för ljuset att röra sig sträckan $2\,l'$ är t', dvs egentiden för den observatören som följer med staven. Vi har

$$c\,t' \quad = \quad 2l' \tag{7.1}$$

Staven rör sig med hastighet v. De båda ändarnas rörelse i rumtiden visas med två parallella linjer med lutning v. Detta visas i rumtiddiagrammet nedan.



Då $t = 0$ befinner sig staven i origo (händelse O). Dess andra ände befinner sig i händelse A. I det oprimade systemet gäller alltså $OA = l$.

Ljuspulsen som sänds från O mot spegeln längs staven för sig enligt en nollkurva och träffar spegeln i händelse B. Då och där studsar den mot spegeln och når stavens andra ände i händelse C.

För observatören som följer med staven har det då alltså gått tiden t'. För denne är sträckan $OC = c\,t'$.

Tidskoordinaten för B är t_1. Det är den tid "vi" tycker att det tagit ljuset att gå den ena vägen. Om vi låter t_2 vara den tid "vi" tycker det tagit för ljuset att gå den andra vägen gäller att tidskoordinaten för C är $t_1 + t_2$.

Om man följer kurvan i rumtiden för stavens bortre ände från A till B, respektive ljusets väg från O till C får man likheten

$$ct_1 \;=\; l + vt_1. \tag{7.2}$$

Om man på motsvarande sätt går från O till C, respektive från A till B till C fås

$$v(t_1 + t_2) \;=\; l + vt_2 - ct_2. \tag{7.3}$$

Det är meningslöst att blanda in sträckan OB för mellan dessa punkter är avståndet noll eftersom de ligger längs en nollkurva.

Utrycken (7.2) och (7.3) ger

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{l}{c-v} \\ t_2 &= \frac{l}{c+v}. \end{aligned}$$

Detta ger att den tid "vi" upplevar att ljusets resa fram och till baka tar kan skrivas

$$t_1 + t_2 \;=\; \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{(c+v)+(c-v)}{(c-v)(c+v)} l = \frac{2l}{c}\gamma^2.$$

Tidsdilatationen ger också

$$t_1 + t_2 \;=\; \gamma\, t'$$

Detta ger

$$\gamma\, t' \;=\; \frac{2l}{c}\gamma^2.$$

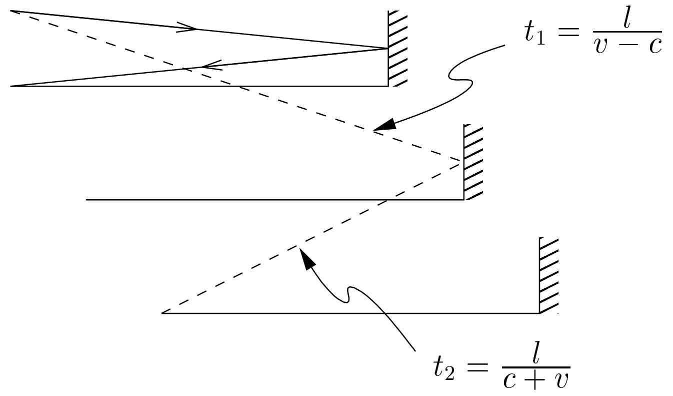
Om vi använder (7.1) i detta uttryck får vi

$$\gamma\frac{2l'}{c} \;=\; \frac{2l}{c}\gamma^2$$

vilket ger

$$l \;=\; \frac{l'}{\gamma}. \tag{7.4}$$

Ibland visar man hur ljusstrålen färdas för de respektive observatörerna med en figur som den nedan. I vilosystemet rör sig ljusstrålen fram och till baka enligt den heldragna linjen. För observatören som ser staven röra sig ser det ut som att ljusstrålen har farten $v - c$ relativt spegeln på ena vägen, och farten $v + c$ efter studsen.



Denna sorts illustration kan på sätt och vis vara lättare att begripa än rumtid-diagrammet, men det är fel att anse att ljuset har olika fart mot respektive från spegeln.

Exempel 7.0.1. Ett tåg med längden 250 m ses åka med farten $0.8c$. Den åker in i en tunnel som är 180 m lång. Kan hela tåget ses vara i tunneln samtidigt?

Med den nämnda farten blir $\gamma = \frac{5}{3}$.

Vi som ser på tycker att tåget är

$$\frac{250\,\mathrm{m}}{\gamma} = 150\,\mathrm{m}$$

långt, så hela tåget får plats i tunneln.

De som åker på tåget tycker dock att tunneln är

$$\frac{180\,\mathrm{m}}{\gamma} = 108\,\mathrm{m}$$

lång så de upplever inte att tåget får plats.

Denna motsägelse får sin förklaring i att vi och tågresenärerna inte har samma uppfattning av vad som menas med samtidigt.

Detta skall förklaras senare. ▲

Exempel 7.0.2. Tillbaka till myonen. I dess referenssystem närmar sig jordytan med hastigheten $0.997c$. Det gör att avståndet ned till jordytan bara blir

$$\frac{10000\,\mathrm{m}}{\gamma} \approx 656\,\mathrm{m}$$

vilket förklarar att de hinner ned innan hälften av dem har hunnit falla sönder. ▲

8 Massa och energi

Det mest berömda resultatet från relativitetsteorin är sambandet mellan energi och massa

$$E = m\,c^2.$$

Vi måste dock vara lite mer noga med notationen. I sitt eget system har en kropp massan m' med våra beteckningar, men vi skall i detta fall göra ett undantag och ändå benämna **vilomassan** för kroppen med m_0.

Det som uttrycket säger med våra beteckningar är att den totala energin i sitt eget system (viloenergin) är

$$E' = m_0\, c^2$$

I vårt system gäller att relationen mellan total energi E, röreselemängd p och vilomassa m_0 är

$$E^2 = m_0^2\, c^4 + c^2\, p^2. \tag{8.1}$$

Detta uttryck skall vi inte härleda nu, det får vänta till dess vi har en djupare matematisk förståelse för teorin.

Den totala energin E är summan av viloenergin och röreseenergin E_k. Rörelseenergin upplevs som en ökning av kroppens massa. Man kan komma ihåg detta med följande formulering.

En kropp som rör sig får större massa.

I vårt system blir massan

$$m = \gamma\, m_0.$$

Det går att skriva om detta uttrycket (8.1) på flera sätt.

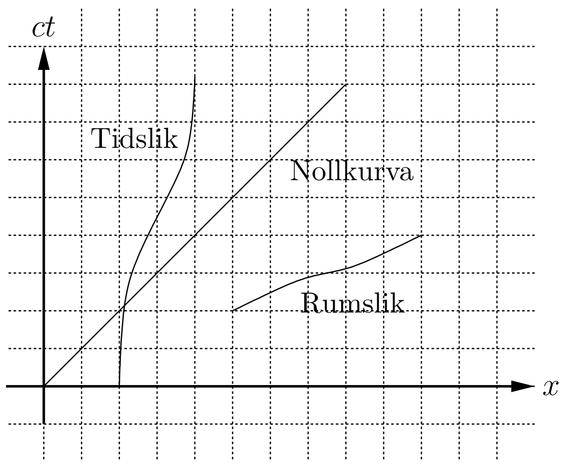
$$\begin{aligned}
E_k &= \text{Total energi} - \text{Viloenergi} \\
E_k &= m\, c^2 - m_0\, c^2 \\
E_k &= \gamma\, m_0\, c^2 - m_0\, c^2 \\
E_k &= (\gamma - 1)\, m_0\, c^2
\end{aligned}$$

Beroende på vad som skall räknas ut är de olika sätten olika bra, men inget av dem är intressant just nu.

9 Rumtiddiagram

Rumtiden består av mängden av alla händelser. Olika obervatörer har olika koordinatsystem för att beskriva händelser, men innan vi går in på hur byten av koordinatsystem går till måste en rad begrepp förklaras.

Av tradition ritas kurvor i rumtiden med tidsaxeln uppåt. Figuren nedan visas tre sorters kurvor.



Med ct på tidsaxeln blir storheterna längd på båda axlarna och det blir lätt att relatera till ljusstrålar.

Kurvor med $\left|\frac{dx}{dt}\right| < c \Leftrightarrow \left|\frac{dx}{d(ct)}\right| < 1$ benämns **tidslika** kurvor.

Massiva partiklar (och observatörer) följer tidslika kurvor och bär med sig en klocka som visar dess egentid t'. Världlinjen som visar en observatör som följer den tidslika kurvan i figuren ovan börjar i vila relativt oss vid $x = 2$. Därefter accelererar den iväg och färdas som fortast i ca $0.5c$ innan den saktar ned och stannar vid $x = 4$.

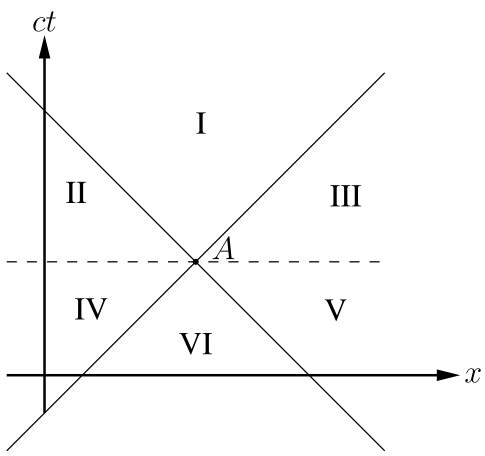
Kurvor med $\left|\frac{dx}{dt}\right| = c \Leftrightarrow \left|\frac{dx}{d(ct)}\right| = 1$ benämns **nollkurvor**.

Masslösa partiklar, dit fotoner hör, följer nollkurvor. Anledningen till namnet nollkurva förklaras i avsnitt 10.2.

Kurvor med $\left|\frac{dx}{dt}\right| > c \Leftrightarrow \left|\frac{dx}{d(ct)}\right| > 1$ benämns **rumslika** kurvor.

Ingenting kan färdas fortare än ljuset. Man kan alltså inte färdas längs rumslika kurvor.

Gränsen för det område i rumtiden (de händelser) som kan påverka en händelse och det område en händelse kan påverka utgör händelsens **ljuskon**. Figuren nedan visar ljuskonen för en händelse A.



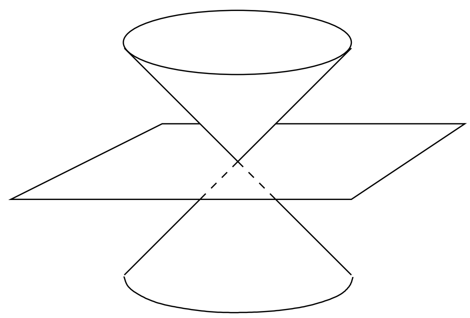
De händelser som ligger i område I, dvs innanför (den framtida) ljuskonen, är de händelser som A kan ha någon påverkan på, dvs något som händer i A kan påverka vad som händer i dessa händelser.

Område II och III ligger utanför ljuskonen, så vad som än händer i A kan detta inte påverka vad som händer i dessa händelser.

På samma sätt kan inte något som händer i område IV eller V påverka något som händer i A.

Område IV däremot består av händelser som kan påverka det som händer i A eftersom dessa ligger innanför konen.

Att man säger ljuskon beror på att man ibland tänker sig rummet som ett tvådimensionellt plan och tiden som den tredje dimensionen. Detta är också kanske anledningen till att man normalt ritar tidsaxeln uppåt. Figuren nedan visar hur ljuskonen blir i detta fall.



I det verkliga universum är utgörs konen av sfärer vars radie ökar då tiden går, men det är svårt att visualisera.

10 Lorentztransformationerna och rumtidens metrik

10.1 Inledning

Som nämndes i avsnitt 2 hade man vid slutet av 1800-talet en uppsättning differentialekvationer som beskrev väldigt många, kanske rent av alla vid den tiden kända, elektromagnetiska fenomen. De går idag under namnet Maxwells ekvationer. Problemet med dessa är att de inte är invariant under gallileitransformationerna.

Lorentz m fl visade stegvis 1887-1905 att de är invarianta under (de idag kallade) Lorentztransformationerna

$$\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - x\frac{v}{c^2}\right) \\ x' &= \gamma\left(x - vt\right) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

där

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Tidsdilatationen (6.3) och längdkontraktionen (7.4) följder av dessa. Det är dock sällan man använder transformationerna i sig på gymnasiet. Dels är de ganska knöliga att räkna med, dels räcker uttrycken för tidsdilatationen och längdkontraktionen ofta för att föra de resonemang man vill.

10.2 Rumtidens metrik

Vi såg i exempel 7.0.1 att alla observatörer inte är överens om vad som menas med samtidigt, eller hur långa sträckor är.

Vi gör definitionen att **rumtidens metrik** är sådan att (det kvadratiska) avståndet mellan händelserna A och B är

$$\begin{aligned} d^2(A,B) &= -(A_t - B_t)^2 + (A_x - B_x)^2 && (10.1) \\ &= -c^2\Delta t^2 + \Delta x^2. && (10.2) \end{aligned}$$

Detta uttryck liknar den Euklidiska metriken, men den första termen är som synes negativ. Rent tekniskt är egentligen inte uttryckt en metrik eftersom kvadraten av avstånd kan vara negativa. En matematiker skulle säga att uttrycket är en pseudometrik, men man slarvar ofta och säger metrik.

Avståndet kan också vara noll mellan två skilda händelser. Alla händelser som ligger på samma nollkurva befinner sig på avståndet noll från varandra, därav namnet nollkurva.

Det viktiga är följande.

Alla observatörer upplever samma avstånd mellan två händeler.

En enkel och vacker tillämpning av detta är avsåndet mellan rumtidens origo (det blir enkelt eftersom systemen har samma tids- och rumskoordinater i denna händelse: $(0,0)$) och den händelse att det primade systemet befinner sig i sitt origo.

Den senare händelsen upplever vi har kooridnaterna (ct, vt) eftersom det rör sig likformigt bort från oss.

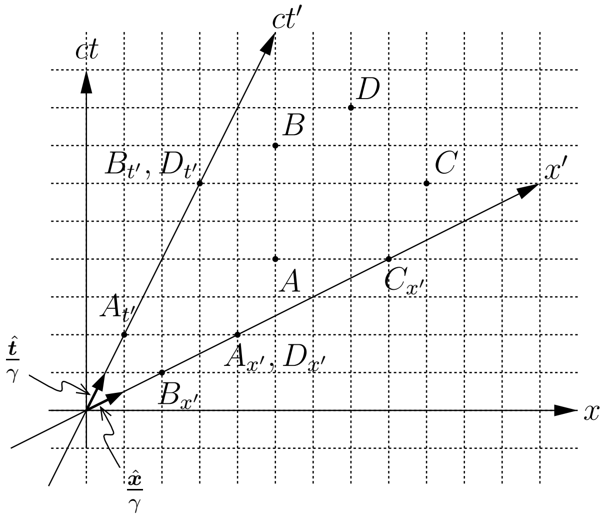
I det primade systemet sitter observatören still i sitt origo och upplever bara att tiden går, så händelsen har koordinaterna $(ct', 0)$.

Avståndet mellan händelserna är alltså lika, vilket ger

$$
\begin{aligned}
-(ct)^2 + v^2t^2 &= -c^2t'^2 + 0^2 \\
-t^2 + \frac{v^2}{c^2}t^2 &= -t'^2 \\
t^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) &= t'^2 \\
t &= \gamma t'
\end{aligned}
$$

vilket som synes är samma uttryck som (6.3). Tidsdialatationen följer alltså av metriken!

Figuren nedan visar ett exempel där $v = 0.5c$ vilket ger $\beta = 0.5$.



Observera också den lilla pedagogska finess det innebär att rita basvektorerna i det primade systemet **förminskade** med faktorn γ. Det gör att det är lättare att läsa av diagrammet genom att räkna rutor.

Tidsdialatationen

Vi upplever att $\Delta t = 3$ mellan händelserna A och B, medan $\Delta t' = \frac{4}{\gamma}$ mellan samma händelser.

Vidare gäller $\Delta x = 0$ respektive $\Delta x' = \frac{-2}{\gamma}$ mellan händelerna.

De kvatratiska avstånden skall dock vara lika, vilket vi kollar nu. Först måste vi dock konstatera att

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - 0.5^2} = \frac{4}{3}$$

I respektive system fås

$$\begin{aligned} -\Delta t^2 + \Delta x^2 &= -3^2 \\ -\Delta t'^2 + \Delta x'^2 &= -\left(\frac{4}{\gamma}\right)^2 + \left(\frac{-2}{\gamma}\right)^2 \\ &= \frac{-12}{\gamma^2} = -3^2. \end{aligned}$$

De kvadratiska avstånden är alltså lika, och att de är negativa betyder att det är frågan om ett tidslikt avstånd.

Att

$$\Delta t' = \frac{4}{\gamma} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} > 3 = \Delta t$$

stämmer med tidsdillatationen. Vi är vana med att $\Delta t > \Delta t'$, men i något som åker från A till B rör sig (bakåt) i det primade systemet medan det står sitll (i rummet) i det oprimade systemet.

Längdkontraktionen

Jämför vi händelserna A och C fås

$$\Delta x' = \frac{4}{\gamma} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} < 4 = \Delta x$$

vilket stämmer med längdkontraktionen. Den följer alltså också av metriken.

10.3 Lorentztransformationerna

På matrisform blir Lorentztransformationerna

$$\gamma \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix}$$

där

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{v}{c} \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned}$$

Det är vanligt att matrisen ges namnet Λ. Observera att faktorn γ tillhör transformationen, så

$$\Lambda = \gamma \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{bmatrix}.$$

Detta gäller för komponenterna. För basvektorerna, som transformeras som inversen till Λ, gäller

$$\gamma \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ct' \\ x' \end{bmatrix} \tag{10.3}$$

Om vi bildar en vektor $\boldsymbol{X}$ mellan A och B i exemplet ovan fås natruligtvis olika komponenter i de olika baserna. Vi måste inför en notation som skiljer komponenterna åt men som ändå uttrycker samma vektor. I avsnitt 11.1 förklaras notationen som används nedan.

$$\begin{aligned} \text{Komponenter i oprimade systemet} \quad X^{\mu} &= \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \text{Komponenter i primad systemet} \quad X^{\mu'} &= \frac{1}{\gamma} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vi bekräftar att detta stämmer med avbildningen. Vänsterledet av (10.3) blir

$$\gamma \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \cdot 0.5 \end{bmatrix} = 3\,\gamma \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix} = \sqrt{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

och högerledet blir

$$\frac{1}{\gamma} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

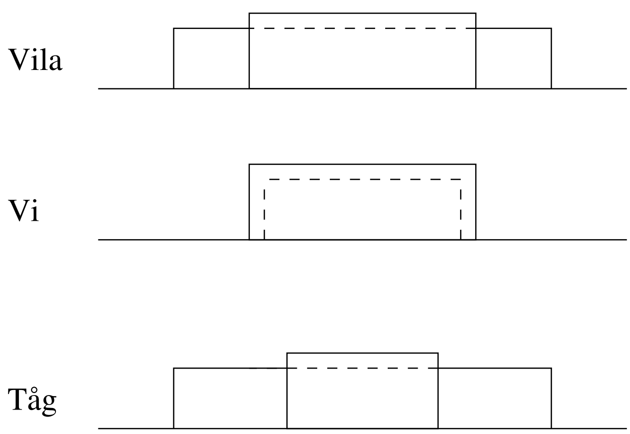
Dessa är lika.

10.4 Är hela tåget i tunneln? – Samtidighet

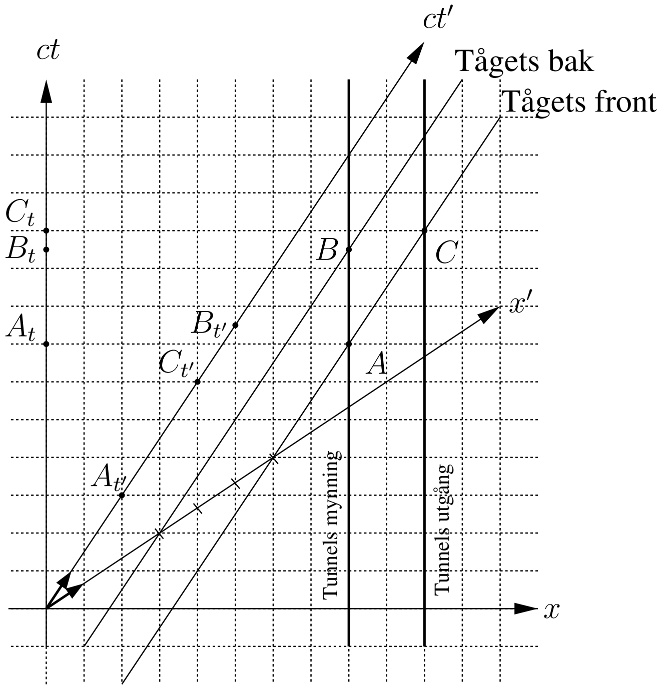
Nu skall vi återkomma till exempel 7.0.1, men göra det med den matematiska formalism vi nu tagit oss igenom.

Problemet är alltså att vi som ser tåget anser att längdkontraktionen har tryckt ihop det så att de får plats i tunneln, medan de som sitter i tåget tycker att längdkontraktionen tryckt ihop tunneln.

Schematiskt illustreras hur detta upplevs i respektive system.



Ett rumtiddiagram som visar händelserna visas nedan.



I figuren är $\beta = \frac{2}{3}$, vilket ger $\gamma = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

Tågets vilolängd är $\frac{3}{\gamma} = \sqrt{5}$, vilket är markerat på den primade x-axeln. Tunnelns vilolängd är 2. Naturligvis är detta i valfria enheter. Du kan tänka dig en stav som åker genom ett rör, så att längdenheten är meter, men Einstein själv tyckte om att göra tankeexperiment med tåg så vi fortsätter hans tradition. Att han valde tåg var kanske för att det var dåtidens snabbaste färdmedel.

Eftersom $\sqrt{5} \geq 2$ får tåget alltså inte plats i tunneln om det står still. Observera att vi inte kan se detta direkt i figuren. Längdskalan på den primade x-axeln är, om man räknar rutor, inte 1 utan $\frac{1}{\gamma} \approx 0.75$. Avståndet mellan två streck som markerar tågets längd är alltså bara ca 0.75.

Viktiga händleser:

- A Tågets front kör in i tunneln.
- B Tågets bak kör in i tunneln.
- C Tågets front kör ut ur tunneln.

I det primade systemet gäller

$$A_{t'} < C_{t'} < B_{t'}$$

vilket betyder att tågets front kör ut ur tunneln innan dess bak kör in i den.

Hela tåget är alltså inte i tunneln samtidigt i detta system.

Vi upplever

$$A_t < B_t < C_t$$

vilket betyder att tåkets bak kör in i tunneln innan dess fron kör ut. Hela tåget är alltså i tunneln samtidigt.

Det finns alltså ingen universell samtidighet i SR.

En fortsättning på detta tankeexperiment är att man på något vis stänger två dörrar vid tunnelns mynningar då tåget befinner sig i tunneln. När tåget krockar med dörren vid ugången, som vi tänker oss faktiskt håller, kommer tågets hastighet att minskas drastiskt. Det längdkontraherade tåget kommer då så att säga att växa och till slut bli inklämt mellan dörrarna.

De som sitter på tåget ser alltså en längdkontraherad tunnel, som de åker in i och efter ett tag kolliderar de med dörren vid utgången. För tågresenärerna kombineras nu olika effekter.

Dels stannar inte hela tåget samtidigt eftersom informationen om krocken i fören inte kan färdas till tågets bakre delar fortare än ljuset. De finns alltså inge stela kroppar i SR. Tågets bakdel kan mycket väl hinna in i tunneln innan bakdelen stannar.

Dels upplever de att tunneln blir längre i och med att tågets fart minskar, den blir mindre längdkontraherad.

Viktigast av allt är att de upplever en acceleration så de kan inte tillämpa SR alls. De måste använda den allmänna relativitetsteorin för att förstå situationen.

Allt detta summerar till att det inte finnns något pradoxalt i denna situation.

10.5 Addition av hastigheter

Här kommer det finnas text om hur man adderar hastigheter.

10.6 Determinanten

När determinanten av Λ beräknas måste man tänka på att faktorn γ finns i alla komponenter så

$$\det(\Lambda) = \gamma^2(1 - (-\beta)^2) = 1.$$

Detta säger oss två saker. Dels är determinanten större än noll, så en det blir inte en spegling. Dels är storleken 1, så storleken av en vektor bevaras. Detta kommer visa sig vara väldigt viktigt i avsnitt 11.

10.7 Egenvektorer och invarianta delrum

Här kommer det finnas text om egenvektorer för Lorentztransformationerna på matrisform och om Dopplereffekten.

11 Fyrvektorernas underbara värld

I detta avsnitt introduceras grunden för den lite mer avancerade matematik som krävs för att fullständigt uppskatta skönheten med SR, eller i alla fall dess matematiska framställning.

11.1 Händelser och fyrvektorer

Ett viktigt delsyfte med denna text är att visa på den matematiska skönheten som uppstår då den formuleras på matrisform. Detta inleds nu.

Händelser är **punkter** i rumtiden som har fyra koordinater. Ordningsföljden är (t, x, y, z).

En händelse A kan alltså ha $A_t = 7$ och $A_x = 4$. Om man numrerar kooridnaterna börjar man med 0 för tiden, så samma händslse skulle ha $A_0 = 7$ och $A_1 = 4$ om kooridnaterna numrerades istället.

En **fyrvektor** är en vektor i rumtiden. Dessa fungerar på samma sätt som vektorer och vektorfält i tre dimensioner, men har förstås fyra komponenter.

Fyrvektorer skrivs i denna text med fet stil och versaler, exepelvis $\boldsymbol{X}$. Då komponenterna för en fyrvektor anges skrivs komponenten som ett **övre index**, exempelvis X^t.

Anledinngen till att indexet skrivs i den övre positionen får sin förklaring då **tensorer** introduceras. Det kommer att ske senare i denna text, eller i texten om den allmänna relativitetsteorin.

Det är även vanligt att benämna en vektor med en ospecificerad komponent, vars index anges med en grekisk gemens bokstav. Exempelvis står då X^μ för vektorn $\boldsymbol{X}$, eller snarare för alla komponenter av $\boldsymbol{X}$ i det oprimade systemet

$$X^\mu = \begin{bmatrix} X^0 & X^1 & X^2 & X^3 \end{bmatrix}^T.$$

I det primade systemet har **samma vektor** komponenterna

$$X^{\mu'} = \begin{bmatrix} X^{0'} & X^{1'} & X^{2'} & X^{3'} \end{bmatrix}^T.$$

Primet sätts på indexet för att ange vilken bas som används.

Det är inte viktigt vilken grekisk bokstav som används för indexet, X^ν och X^μ är samma vektor. Poängen med detta kommer framgår tydligare då vi börjar multiplicera vektorer med matriser.

Normen (i kvadrat) av en fyrvektor definieras nu till

$$\|\boldsymbol{X}\|^2 = -(X^0)^2 + (X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2.$$

Hur denna definition hänger ihop med definitionen av metriken, och senare av skalärproduken mellan två fyrvektorer, kommer att framgå i senare avsnitt.

Precis som alla observatörer är överens om avståndet mellan två händelser, är de också överens om storleken, normen, av alla fyrvektorer. Med ett finare ord är normen är **Lorentzinvariant**.

Detta faktum kommer nu att ge oss väldigt vackra samband mellan fysikaliska storheter.

Att normen är Lorentzinvariant betyder som sagt att alla observatörer får samma värde, så normen kan lika gärna beräknas som

$$\|\boldsymbol{X}\|^2 = -(X^{0'})^2 + (X^{1'})^2 + (X^{2'})^2 + (X^{3'})^2.$$

För att visa vilket system som normen beräknas i, måste vi införa en annan notation för normen. Den enklaste notationen just nu är

$$\|X^\mu\|^2$$

respektive

$$\|X^{\mu'}\|^2.$$

Denna notation fyller våra behov.

11.2 Rum och tid

I sitt eget koordinatsystem sitter alla still i origo. För vår primade observatör gäller att den tycker att des position i rumtiden är

$$X^{\mu'} = \begin{bmatrix} c\,t' & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

I vårt koordinatsystem gäller

$$X^{\mu} = \begin{bmatrix} ct & v\,t & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Normen för denna vektor i respektive system är

$$\begin{aligned} \|X^{\mu'}\|^2 &= -c^2\,t'^2 \\ \|X^{\mu}\|^2 &= -(c\,t)^2 + (v\,t)^2 \end{aligned}$$

Dessa är alltså lika, så vi får

$$\begin{aligned} -c^2\,t'^2 &= -(ct)^2 + v^2 t^2 \\ -t'^2 &= -t^2 + \frac{v^2}{c^2} t^2 \\ t'^2 &= t^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \\ \gamma t' &= t \end{aligned}$$

Detta är förstås samma resultat som vi fick då vi konstaterade att tidsdilatationen följde av metriken. I själva verket är är metriken definirad via normen enligt

$$d^2(A, B) = \|A - B\|^2,$$

så det är inte konstigt att vi fick samma resultat en gång till.

11.3 Hastighet, energi och röreselemängd

Alla rör sig i rumtiden. Om man sitter still går tiden, så man förflyttar sig i alla fall. En observatör **fyrhastigheten $\boldsymbol{U}$**. En hastighet är en förändringshastiget av ett läge. Eftersom alla observatörer mäter olika hastighet på tiden, om de har olika hastighet relativt varandra, är det enda vettiga att definiera fyrhastigeten i relation till egentiden för den som har hastigheten. Då blir alla överens. Vi får

$$U^{\mu} = \frac{dX^{\mu}}{dt'}.$$

Detta uttryck ser lite konstigt ut eftersom det blandar storheter från olika observatörer. Vi måse använda kedjeregeln för att få ett uttryck i vårt system.

$$U^{\mu} = \frac{dX^{\mu}}{dt'} = \frac{dX^{\mu}}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{dX^{\mu}}{dt}\gamma$$

I sitt eget koordinatsystem gäller

$$U^{\mu'} = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

och i vårt koordinatsystem gäller

$$U^\mu = \gamma \begin{bmatrix} c & v & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Återigen skall normerna av dessa vektorer vara lika. Vi får

$$\begin{aligned} \|U^{\mu'}\|^2 &= -c^2 \\ \|U^\mu\|^2 &= \gamma^2 \left(-c^2 + v^2\right) \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} -c^2 &= \gamma^2 \left(-c^2 + v^2\right) \\ 1 &= \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \\ \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} &= \gamma^2 \end{aligned}$$

Det får erkännas att detta kanske inte är så intressant i sig, det är mer processen att sätta normerna lika som det viktiga.

Beräkningen ovan gäller hur vi upplever att det primade systemet rör sig i rumtiden, samt hur en observatör där upplever sin egen rörelse.

Antag att vi tittar på en tredje kropp som vi upplever har trehastigheten $\boldsymbol{u}$. Kroppens fyrhastiget blir

$$U^\mu = \gamma_u \begin{bmatrix} c & u_x & u_y & u_z \end{bmatrix}^T$$

där γ_u fås från $\boldsymbol{u}$ enligt

$$\gamma_u^2 = \frac{1}{1 - \frac{u^2}{c^2}}.$$

Observera notationen att farten u är storleken av $\boldsymbol{u}$, där storleken beräknas på det helt vanliga tredimensionella sättet eftersom bmu är en trevektor.

En observatör i det primade systemet upplever att kroppen har trehastigeten $\boldsymbol{u'}$ och fyrhastigheten

$$U^{\mu'} = \gamma_{u'} \begin{bmatrix} c & u'_x & u'_y & u'_z \end{bmatrix}^T.$$

På samma sätt som röreselsemängden för en kropp $\boldsymbol{p}$ fås från dess hastighet $\boldsymbol{v}$ fås **fyrrörelsemängden $\boldsymbol{P}$** för från $\boldsymbol{U}$ från

$$P^\mu = mU^\mu.$$

Nollkomponentens tolkning är att den är $\frac{E}{c}$ där E är den totala energin för det som rör sig. Observera att enheten för $\frac{E}{c}$ är densamma som för röreselemängd, $\frac{\text{kg m}}{\text{s}}$.

Generellt fås

$$P^\mu = \begin{bmatrix} E/c & p_x & p_y & p_z \end{bmatrix}^T = m\gamma \begin{bmatrix} c & v_x & v_y & v_z \end{bmatrix}^T.$$

Observatören i det primade systemet sitter som sagt still i sitt system, så komponenterna där ges av

$$P^{\mu'} = \begin{bmatrix} E'/c & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = m_0 \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

där m_0 är vilomassan för det som finns i det primade systmet.

Fyrrörelsemängden för det primade systemet beskriver vi som

$$P^{\mu} = \begin{bmatrix} E/c & p & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = m\gamma \begin{bmatrix} c & v & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Normerna ges av

$$\begin{aligned} \|P^{\mu'}\|^2 &= -(E'/c)^2 = -m_0^2\, c^2 \\ \|P^{\mu}\|^2 &= -\frac{E^2}{c^2} + p^2. \end{aligned}$$

Dessa är alltså lika, vilket ger

$$\begin{aligned} -m_0^2\, c^2 &= -\frac{E^2}{c^2} + p^2 \\ -m_0\, c^4 &= -E^2 + c^2 p^2 \\ m_0\, c^4 &= E^2 - c^2 p^2 \\ E^2 &= m_0^2 c^4 + c^2\, p^2. \end{aligned}$$

Detta ger en relation mellan den totala energin E för något som har (tre-)rörelsemängden $\boldsymbol{p}$.

För en partikel i vila gäller ($p = 0$) gäller alltså

$$E = m_0\, c^2.$$

På sätt och vis kan man alltså betrakta detta uttryck som en slags "rörelseenergi" som fås från rörelsen i tiden. Lite mer "rätt" är kanske att skriva uttrycket som

$$\frac{E}{c} = m_0\, c$$

och betrakta detta som rörelesemängden en kropp med massan m_0 har som en följd av röreselen i tiden.

11.4 Effekt och kraft

Tisderivatan av en rörelsemänd är en kraft. Detta generaliseras nu till fyrvektorer och vi inför **fyrkraften $\boldsymbol{F}$** som tidsderivatan av fyrhastigheten.

Nu måste vi dock tänka på en sak. Om vi reserverar det primade systemet till att vara en annan observatör så kan vi förvisso utsätta denna för en kraft och se den accelerera iväg. Men vi kan inte jämföra våra komponenter av fyrkraften och observatörens fyrhastighet med dennes uppfattning om dessa komponenter.

Det beror på att SR inte gäller vid acceleration. Vi måste därför inför en tredje kropp (som inte är en observatör enligt SR). Vi låter τ stå för egentiden i det accelererande systemet eftersom man brukar använda τ för detta i den allmänna relativitetteorin (GR).

Vår beskrivning av den tredje kroppens kraft och acceleration blir

$$F^{\mu} = \frac{dP^{\mu}}{d\tau} = m\frac{d^2X^{\mu}}{d\tau^2} \tag{11.1}$$

vars komponenter är

$$F^\mu = \gamma_u \begin{bmatrix} P/c & F_x & F_y & F_z \end{bmatrix}^T$$

där γ_u beräknas enligt vår uppfattning av den tredje kroppens trehastighet $\bar{u}$.

Nollkomponenten $\frac{P}{c}$ är väsentligen tidsderivatan av en energi, vilket är en effekt. Om vi ser att kraften $\bar{F}$ verkar på en kropp med hastigheten $\bar{u}$, upplever vi att effekten P blir skalärproduken (i tre dimensioner) $\bar{F} \cdot \bar{u}$ (fysiker använder denna notation för skalärprodukt).

I det primade systemet blir komponenterna

$$F^{\mu'} = \gamma_{u'} \begin{bmatrix} P'/c & F'_x & F'_y & F'_z \end{bmatrix}^T.$$

Det är inte så ofta som man använder uttrycket (11.1) vid beräkningar. Det klassiska gymnasieexemplet där en kropp utsätts för en kraft på grund av att någon exempelvis drar i den fungerar inte så bra om man skall dra upp något i en ganska stor andel av ljusets hastighet.

Den kraft som däremot kan påverka en (laddad) kropp är elektriska och magnetiska krafter. Vi skall återkomma till dessa senare i denna text.

När två kroppar kolliderar i Newtons mekanik skall energi och rörelsemängd bevaras. Detta ger ett ekvationssystem som man kan lösa.

I SR fås istället att (vektor-)summan av fyrrörelsemängden skall vara bevarad, vilken inkluderar både energi och röreselmängd. Vi får

$$P^\mu_{1\,\text{före}} + P^\mu_{2\,\text{före}} = P^\mu_{1\,\text{efter}} + P^\mu_{2\,\text{efter}}.$$

I det primade systemet fås

$$P^{\mu'}_{1\,\text{före}} + P^{\mu'}_{2\,\text{före}} = P^{\mu'}_{1\,\text{efter}} + P^{\mu'}_{2\,\text{efter}}$$

vilket skulle ge andra komponenter.

11.5 Sammanfattning

- Det som en observatör upplever som tid kan en annan uppleva som avstånd.
  - Båda är överens om fyr-avståndet (avståndet i rumtiden).
- Det som en observatör upplever som energi kan en annan uppleva som rörelsemängd.
  - Båda är överens om fyr-rörelsemängden.
- Det som en observatör upplever som effekt kan en annan uppleva som kraft.
  - Båda är överens om fyr-kraften.
- Det som en observatör upplever som elektriskt fält kan en annan uppleva som magnetiskt fält.
  - Båda är överens om Faraday-tensorn.
- För att härleda allt detta användes bara normen!

12 Transponat och matrismultiplikation

12.1 Transponat

Om man vill bevara notationen att skalärprodukten mellan två vektorer skall gå att uttrycka som

$$\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle = \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{Y}. \tag{12.1}$$

och att normen definieras från skalärprodukten enligt

$$\|\boldsymbol{X}\|^2 = \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X} \rangle$$

måste vi göra ett litet tilläggsregel till begreppet **transponat**.

Då en vektor transponeras byter noll-komponenten byta tecken. Då går allt ihop som förr.

12.2 Matrismultiplikation på komponentform

Här kommer det om upprepade index, Einsteins summationskonvention

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{X} &= \boldsymbol{Y} \\ A^{\mu}{}_{\nu} X^{\nu} &= Y^{\mu} \end{aligned}$$

12.3 Tidigare text som kanske inte behövs

Texten i detta avsnitt är rätt, men den blev kanske lite mer avancerad än nödvändigt. Efter att den skrevs kom jag på att det räcker med att definiera transponat som i tidigare avsnitt. Men det här med metrik som en matris är ändå bra för den allmänna relativitetsteorin, så jag vill inte ta bort avsnittet helt.

Skalärprodukten mellan två fyrvektorer beräknas på ett lite krångligare sätt jämfört med vanliga vektorer i $\mathbb{R}^n$. Det hänger ihop med minustecknet i den första komponenten i metriken 10.1). För att få till minustecknet måste vi definiera skalärproduken med en matris. Definitionen är

$$\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle = \boldsymbol{X}^T g \, \boldsymbol{Y}. \tag{12.2}$$

där

$$g = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{12.3}$$

Normen definieras genom skalärproduken på vanligt sätt, men då kommer förstås matrisen g in även här,

$$\|\boldsymbol{X}\|^2 \equiv \langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{X} \rangle = \boldsymbol{X}^T \, g \, \boldsymbol{X}. \tag{12.4}$$

Metriken (10.1) fås om $\boldsymbol{X}$ i (12.4) är fyrvektorn mellan händelserna A och B.

Av denna anledning refererar man ofta till matrisen g som **metriken**. I allmänna relativitetsteorin kommer det visa sig att g inte alltid är en diagonalmatris, och dess komponenter kan till och med vara koordinatberoende. Då blir det mer naturligt att tänka på g som en metrik, nu får språkbruket accepteras.

Transponatet av en fyrvektor skrivs med nedre index. Förklaringen till detta hänger ihop med tensorbegreppet, vilket vi som sagt återkommer till. Inom SR räcker det att acceptera notationen.

En **kolumnvektor** har som sagt **övre** index eftersom de är helt vanliga fyrvektorer. Ett övre index är alltså ett **radindex**.

Radvektorer skrivs med **undre** index, som då alltså blir **kolumnindex**.

Matriser har både ett radindex och ett kolumnindex och skrivs så med ett index av varje typ. Matrisen g skulle på komponentform bli $g^{\mu}{}_{\nu}$ där alltså

$$
\begin{aligned}
g^{0}{}_{0} &= -1 \\
g^{\mu}{}_{\nu} &= 1 \quad \mu = \nu \quad \mu, \nu \geq 1 \\
g^{\mu}{}_{\nu} &= 0 \quad \mu \neq \nu
\end{aligned}
$$

På komponentform ges alltså skalärprodukten av

$$
\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle &= \begin{bmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & X_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^0 \\ X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{bmatrix} \\
&= \sum_{\nu=0}^{4} \sum_{\mu=0}^{4} X_{\mu}\, g^{\mu}{}_{\nu}\, Y^{\mu}.
\end{aligned}
$$

Här syns fördelen med att numrera indexen istället för att benämna dem med t,x,y och z.

Då multiplikationer mellan vektorer och matriser kommer förekomma så ofta, skall vi nu införa en konvention vars upphovsman är Einstein själv.

Om ett index förekommer två gånger i samma term, en gång som ett radindex och en gång som kolumnindex, är det underförstått att man skall summera över detta index.

Detta ger

$$
\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \rangle = X_{\mu}\, g^{\mu}{}_{\nu}\, Y^{\mu}.
$$

Precis som för vektorer i $\mathbb{R}^n$ ger skalärprodukten en norm. Denna beräknas

13 Elektromagnetiska fält – Faradaytensorn

Här kommer Faradaytensorn att presenteras. Det klassiska exemplet med hur en observatör upplever ett elektriskt fält och en annan som upplever både ett elektriskt och ett magnetiskt fält skall gås igenom i detalj. Den intresserade hänvisas till de handskrifter som finns som komplement till texten och som presenteras på lektionerna.