

DIMENSIONER OCH FRAKTAL GEOMETRI

JOHAN WILD

2018-11-27

©Johan Wild 2009

johan.wild@europaskolan.se

Får gärna användas i undervisning, kontakta i så fall författaren.

2018–11–27

1 Inledning och repetition

1.1 Syfte

Denna text tjänar tjänar följande syften:

1. Att motivera en definition av begreppet dimension.
2. Att visa på några punktmängder vars dimension ej är ett heltalet och diskutera vad de har gemensamt. Detta resonemang avslutats med motiveringar till definitionen av en fraktal punktmängd.
3. Att visa på ett sätt att beräkna en variant av den fraktala dimensionen.
4. Tjäna som instruktion till en uppgift där den fraktala dimensionen av en kurva skall beräknas. Lämplig programvara används för att rita diagram och till beräkningar.

1.2 Skala

Vi har tidigare berört begreppet skala och några varianter därav under arbetet med momentet Geometri.

Begreppet skala rör fall där ett objekt är tänkt som en avbildning av ett annat objekt. Det är alltså relevant att tala om den ena som original eller verkligt objekt, och den andra som dess avbildning.

Dessutom måste avbildningen resultera i likformiga figurer för att det skall vara relevant att prata om begreppet skala. En godtycklig avbildning behöver inte resultera i likformiga figurer. Till exempel kan avbildningen tänja ut objektet mer i en led än en annan.

Definition 1.2.1. (Längd-) *Skalan* för en likformig avbildning är kvoten mellan längden av en sträcka på avbildningen och längden av motsvarande sträcka på originalobjektet. ▲

Definition 1.2.2. *Areaskalan* för en likformig avbildning är kvoten mellan arean av en yta på avbildningen och arean av motsvarande yta på originalobjektet. ▲

Definition 1.2.3. *Volymskalan* för en likformig avbildning är kvoten mellan volymen av en del av avbildningen och volymen av motsvarande del av originalobjektet. ▲

Sambandet mellan de olika varianterna av skala sammanfattas av följande sats.

Sats 1.2.4. *För en likformig avbildning gäller:*

$$\begin{aligned} \text{areaskalan} &= (\text{skalan})^2 \\ \text{volymskalan} &= (\text{skalan})^3 \end{aligned}$$

Denna sats är relativt svår att bevisa. Vi återkommer till denna problematik senare i denna text.

2 Definition av dimension

2.1 Euklidisk och topologisk dimension

Begreppet *dimension* är något som finns mer eller mindre naturligt i vårt vardagsspråk. Speciellt känner nog många sig bekväma med påståendet ”*en yta är två dimensionell*”. Vi pratar vardagligen också om datorgrafik i två respektive tre dimensioner (2D- och 3D-grafik).

Det som kännetecknar 3D-grafik är att man kan röra sig i tre riktningar, vanligen framåt, åt sidan och i höjdled. Att det finns just tre väsentligt olika riktningar brukar tas som definitionen av att en ”värld” har tre dimensioner. Jämför med en myra som springer omkring på ett stort golv. För myran är rörelser i höjdled inte så relevanta, och därför lever myran på sätt och vis i en värld med endast två dimensioner.

En mask som lever i sin gång under marken kan i princip bara förflytta sig framåt eller bakåt i sin ”värld”, varför vi säger att denna värld bara har en dimension.

När riktningar skiljer sig åt på ett så kvalitativt sätt som ”*i höjdled*” och ”*i sidled*” säger man att dessa riktningar är *linjärt oberoende*. Detta begrepp går naturligtvis att precisera matematiskt, men det är inte så viktigt att göra nu. Ofta gör man följande definition.

Definition 2.1.1. Den *Euklidiska dimensionen* för en punktmängd är antalet oberoende riktningar som behövs för att beskriva en punkt i mängden. ▲

Jämför detta med att vi på ett plan måste införa ett koordinatsystem med två axlar (ofta benämnda x och y). På planet behövs två tal, x - och y -koordinat, för att peka ut en punkt. Man kan använda andra sätt att referera till en punkt. Till exempel kan en radie och en vinkel användas, men det blir två tal även i det fallet.

I tre dimensioner behövs alltså tre koordinataxlar och tre koordinater för att peka ut en enskild punkt.

Detta går att generalisera till högre dimensioner. I matematiken är det inget konstigt med rum med fyra, fem, eller till och med oändligt många dimensioner.

Ytan av ett klot, eller någon annan krökt yta, kan inte alldeles enkelt beskrivas med två koordinataxlar eftersom ytan är krökt. Däremot finns ett mer generellt begrepp som motiveras av följande.

Vi som går omkring här på jorden upplever att varje litet område på jorden ser ut som om det vore platt. Vi alltså tänker på ytan av ett klot som två dimensionellt. För att komma till rätta med detta gör vi följande definition.

Definition 2.1.2. Den *topologiska dimensionen* av en punktmängd är n om (nästan) varje omgivning kring (nästan) varje punkt ser ut som om den hade den Euklidiska dimensionen n . ▲

Ordet nästan är med i definitionen ovan är för att utesluta till exempel punkter som ligger på kanter och hörn. Att punktmängden är ”vikt”

spelar dock ingen större roll, även om ”ser ut som” får tolkas friare i dessa fall. Det går naturligtvis att precisera definitionen så att man slipper formuleringen ”ser ut som”, men att göra det vore att skuta över målet för denna text.

Ytan av en kub blir med denna definition tvådimensionell, medan det inre av kuben blir tredimensionellt. *Topologiskt* är det förresten ingen skillnad mellan en kub och ett klot, man säger att *de har samma topologi*. Om objekten vore gjorda av gummi skulle man kunna omforma dem till varandra.

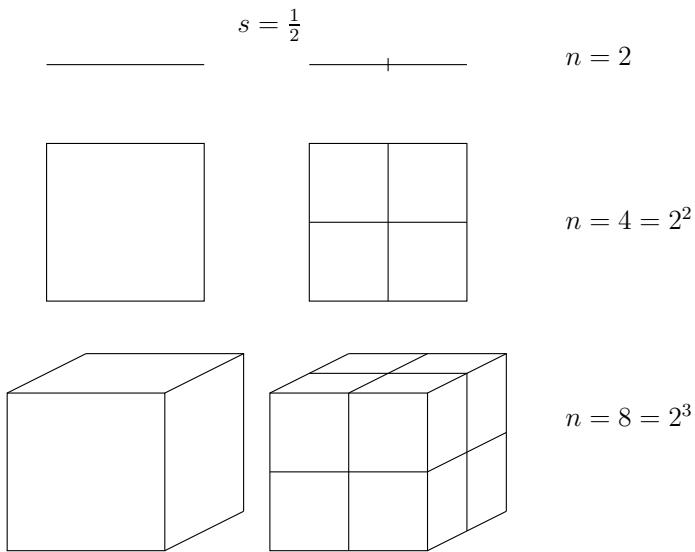
Detta gäller dock inte för till exempel en gummisnodd. Den har ett hål och går därför inte att omforma till ett klot. Däremot går det (teoretiskt i alla fall) att omforma den till att se ut som en kaffekopp (med ett öra).

För objekt som inte är krökta, har hål eller är sammansatta på andra konstiga sätt sammanfaller den Euklidiska och den topologiska dimensionen.

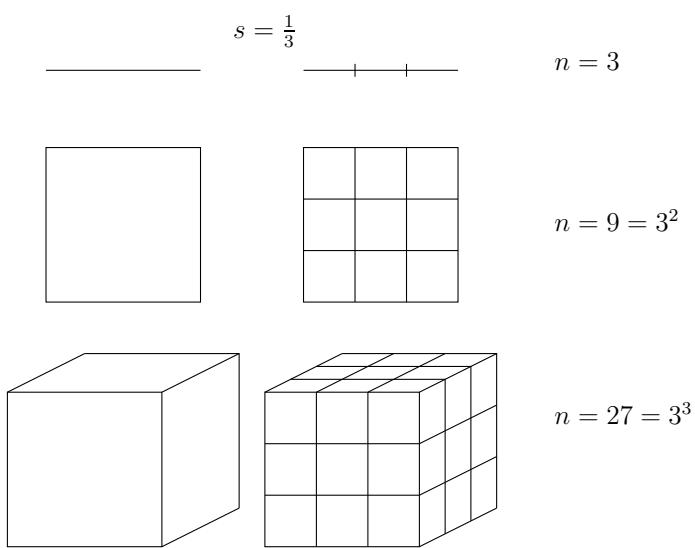
2.2 Dimension och skala

Sats 1.2.4 antyder att det finns ett samband mellan dimensionsbegreppet och begreppet skala. Detta skall nu utredas.

I figuren nedan finns till vänster en linje, en kvadrat och en kub avbildad. Till höger finns samma linje, kvadrat och kub, denna gång *övertäckta av mindre kopior av sig själva*. De mindre kopiorna är gjorda med längdskalan $s = \frac{1}{2}$. Vi ser att det går åt $n = 2$ kopior av linjen för att täcka över linjen, $n = 4 = 2^2$ stycken små kvadrater för att täcka över kvadraten. För att täcka över kuben behövs $n = 8 = 2^3$ små kuber.

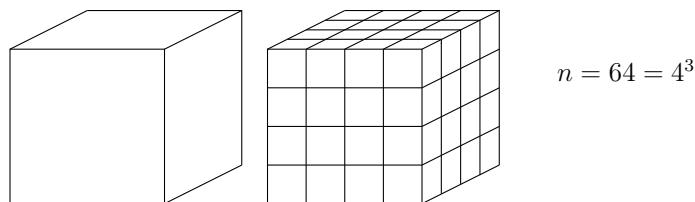
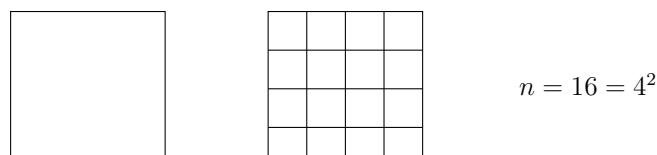


Med $s = \frac{1}{3}$ behövs som synes nedan $n = 3$ kopior för att täcka över orginalobjektet då den är en linje. Kvadraten behöver $n = 9 = 3^2$ mindre kvadrater och kuben behöver hela $n = 27 = 3^3$ mindre kuber för att bli övertäckta.



Om $s = \frac{1}{4}$ ser vi nedan att vi får $n = 4$, $n = 16 = 4^2$ respektive $n = 64 = 4^3$ för de tre fallen.

$$s = \frac{1}{4} \quad \text{---+---+---+---} \quad n = 4$$



Nu ser vi ett mönster. Topologiskt är en kvadrat ett tvådimensionellt objekt. I själva verket är en kvadrat ett så enkelt objekt att det utan tvekan även har Euklidisk dimension två. Kuben har dimension tre och linjen ett. Detta sammanfaller även med hur vi normalt pratar om dessa objekt.

Är det en slump att den topologiska dimensionen dyker upp som exponent i uttrycket för hur många mindre kopior som behövs för att göra en övertäckning av orginalobjektet? Naturligtvis inte i dessa fall. Det passar bra, för vi är ute efter att koppla ihop begreppet skala med begreppet dimension. I följande definition görs detta.

Definition 2.2.1. Den *fraktala dimensionen* för ett objekt är D om det krävs n kopior gjorda i skalan s av objektet för att täcka över objektet, och D är lösningen till ekvationen

$$n \cdot s^D = 1.$$

▲

Varför ordet *fraktal* finns med och vad det betyder förklaras senare.

Vi kan i alla fall kontrollera att den fraktala dimensionen överensstämmer med den topologiska i ett exempel. Väljer vi kuben och fallet då $s = \frac{1}{3}$ behövdes $n = 27$ kopior för att göra övertäckningen. Ekvationen

$$n \cdot s^D = 1$$

har lösningen $D = 3$ eftersom

$$27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 1.$$

3 Fraktal geometri

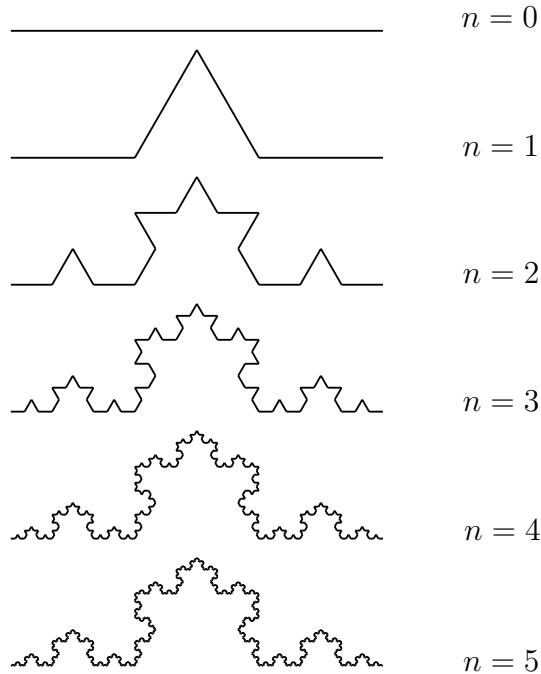
3.1 Koch-kurvan

Vi skall nu konstruera ett objekt som motiverar att man gör skillnad på fraktal och topologisk dimension. Detta objekt kallas Helge von Kochs kurva, eller Koch-kurvan. Helge von Koch var en svensk matematiker som levde 1870 - 1924. Kurvan konstruerades 1906 och har flera intressanta egenskaper, men vi skall här uppehålla oss vid dess fraktala dimension.

Konstruktionen går till så att man börjar, $n = 0$, med en given linje. Därefter, i steg $n = 1$, byts den mittersta tredjedelen av linjen ut mot två linjer som vardera är lika lång som det man tog bort.

Nu har vi fyra linjer som vardera är en tredjedel så lång som den ursprungliga linjen.

Processen skall nu upprepas för vardera av de fyra linjerna. Därefter upprepas den på nytt om och om igen, låt $n \rightarrow \infty$. Figuren nedan visar de sex första stegen.



Definition 3.1.1. *Koch-kurvan* är den punktmängd som erhålls efter att ha upprepat ovan beskriva process oändligt många gånger, då $n \rightarrow \infty$.



Nu skall vi beräkna den fraktala dimensionen för Koch-kurvan. Lämpligt är då att använda skalan $s = \frac{1}{3}$. Då krävs $n = 4$ kopior för att göra överläckningen. Dimensionen D ges som lösning till ekvationen

$$4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^D = 1.$$

Vi får

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3}\right)^D &= \frac{1}{4} \\ D &= \frac{\log \frac{1}{4}}{\log \frac{1}{3}} \approx 1,26. \end{aligned}$$

Den fraktala dimensionen för Koch-kurvan är alltså inte ett heltal. Den topologiska dimensionen är däremot 1. I varje punkt liknar kurvan en linje. I själva verket är linjen bruten i varje punkt, men det spelade ju ingen roll i definition 2.1.2.

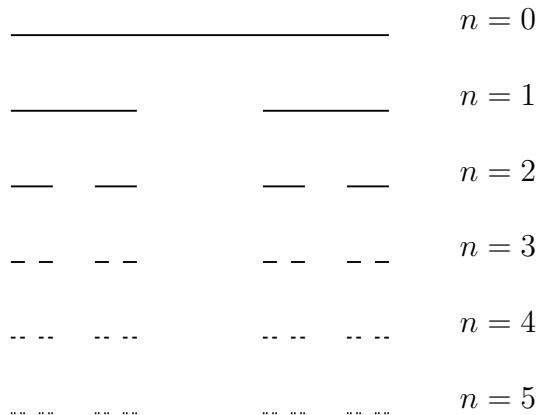
Ett objekt med icke-heltalig dimension kan tyckas märkligt, och det är det också. Det finns ett synsätt som kan göra det lite mer begripligt. Koch-kurvans dimension är mellan ett och två. På sätt och vis betyder det att kurvan fyller ut mer än en linje, men mindre än ett plan.

Omslaget till denna text pryds av en kurva som brukar kallas Kochs snöflinga. Den får man om man börjar med en liksidig triangel istället för en linje, och från dessa tre sidor konstruerar tre Koch-kurvor.

3.2 Cantormängden

En annan intressant punktmängd av intresse är Cantormängden. Cantor var en tysk matematiker som levde 1845 - 1918 och han konstruerade denna mängd 1883.

Konstruktionen liknar Koch-kurvans, men är något enklare. Man börjar med en linje och tar i varje steg bort den mittersta tredjedelen av det som är kvar. Bilden nedan visar de sex första stegen.



Definition 3.2.1. Då $n \rightarrow \infty$ för processen beskriven ovan erhålls *Cantormängden*. ▲

Den fraktala dimensionen för Cantormängden shall nu bestämmas. Här använder vi också kopior i skalan $s = \frac{1}{3}$, men det krävs bara $n = 2$ kopior för att göra överläckningen. Dimensionen D ges som lösning till ekvationen

$$2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^D = 1.$$

Vi får

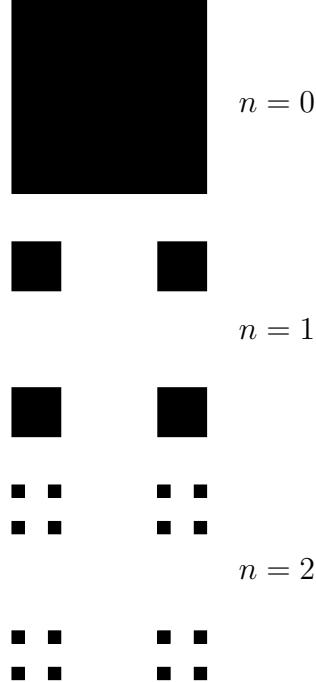
$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{3}\right)^D &= \frac{1}{2} \\ D &= \frac{\log \frac{1}{2}}{\log \frac{1}{3}} \approx 0,63.\end{aligned}$$

Vi kan konstatera att den fraktala dimensionen för Cantormängden är mindre än ett, men inte noll. Den är alltså på sätt och vis mer än en punkt, men mindre än en linje.

En av Cantors poänger med att konstruera denna mängd var att visa att den innehåller lika många element som det finns reella tal. Det kan tyckas märkligt eftersom vi tagit bort och tagit bort och tagit bort från ett givet interval, men det går att bevisa att så är fallet.

3.3 Heltalig fraktal dimension

Nu har vi sett två exempel på mängder där den fraktala dimensionen blev ett icke-heltal. Det finns exempel på punktmängder som har en fraktal dimension som är ett heltal. Figuren nedan visar hur en sådan konstrueras.



Börja med en kvadrat och tag bort allt utom de fyra kvadraterna i hörnen som har sidolängd $\frac{1}{4}$ av den ursprungliga kvadraten. Då $n \rightarrow \infty$ fås en punktmängd med fraktal dimension 1. Det beräknas genom att täcka över mängden med kopior av den själv gjorda i skalan $\frac{1}{4}$. Den fraktala dimensionen blir 1 eftersom det behövs 4 stycken kopior för att göra övertäckningen.

3.4 Definition av fraktal

De objekt vi hittills diskuterat har några gemensamma egenskaper. Till exempel liknar en liten del av figuren hela figuren. Detta brukar kallas för att objekten är *självlikformiga*.

En annan gemensam egenskap de har är att det går att ”zooma in” oändligt långt utan att man når någon gräns för när det inte längre finns ny struktur att titta på.

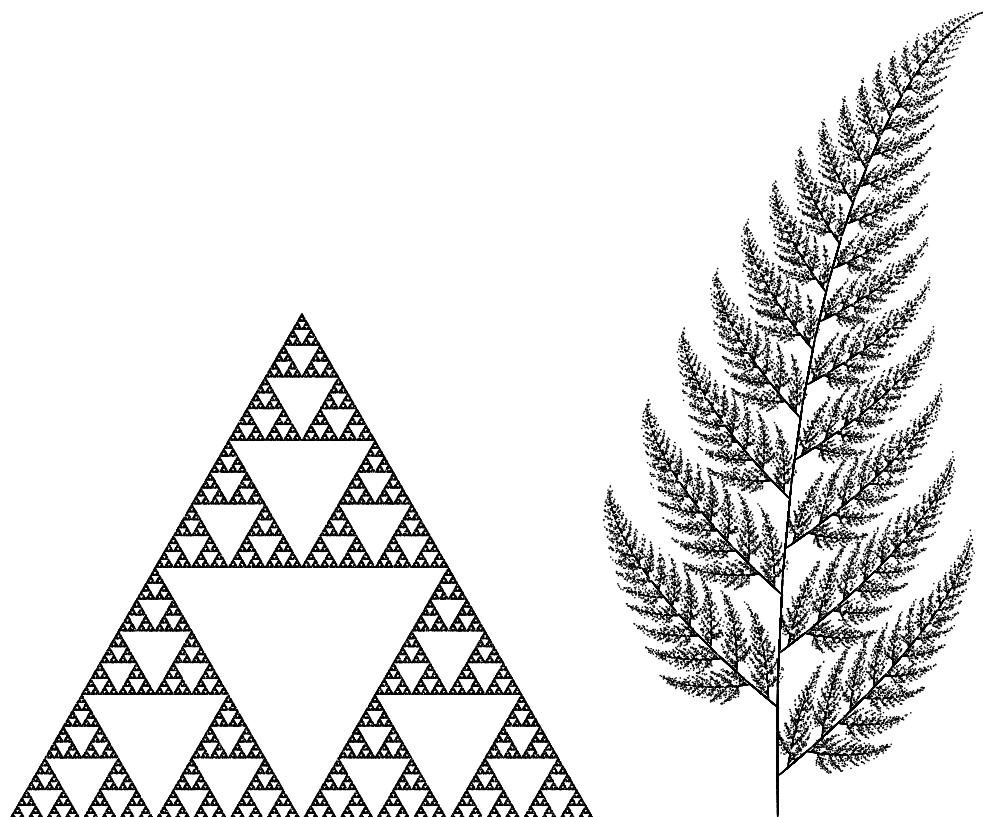
Till sist har de följande gemensamt, vilket vi upphöjer till definition.

Definition 3.4.1. En *fraktal* är en punktmängd där den topologiska dimensionen skiljer sig från den euklidiska. ▲

Ordet *fraktal* kommer från latnets *fractus*, vilket betyder *bruten*.

Vi kan nu återkomma till problemet med sats 1.2.4. Ordet area används för mått på ytor (dimension 2) och ordet volym används för mått på kroppar (dimension 3). Vi ser att sats 1.2.4 nu egentligen bara är en definition av orden areaskala och volymskala. Med detta synsätt måste däremot definition 1.2.2 och 1.2.3 omformuleras som påståenden och bevisas. Vi löser alltså egentligen inte problemet, men byter perspektiv på det.

Två andra kända fractaler är Sierpinskitriangeln (nedan till vänster) från 1915 efter den polske matematikern Waclaw Sierpinski 1882 - 1969, och ormbunken (nedan till höger) av P E Oppenheimer från 1986.



Sierpinskitriangeln bildas genom att man utgår från en liksidig triangel och tar bort ”den inre frjärdedelen”. Detta upprepas på de fyra kvarvarande trianglarna i all oändlighet.

Ormbunken bildas på ett lite annorlunda sätt, som inte enkelt går att förklara i denna text.

4 Beräkning av fraktal dimension

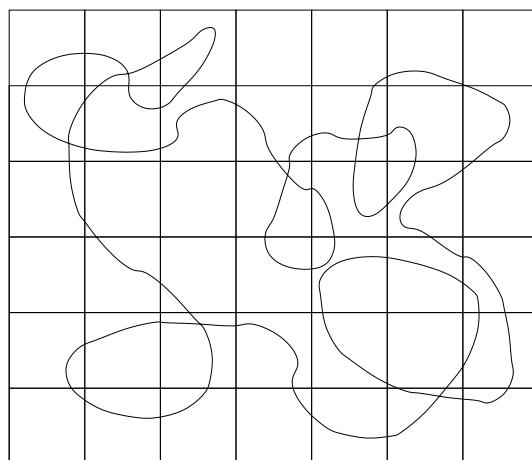
Det finns flera sätt att definiera fraktal dimension. Man kan till exempel förändra övertäckningen på så sätt att man släpper på kravet att alla kopiorna skall vara lika stora. Då blir både det matematiska uttrycket för dimensionen och dess värde lite annorlunda. Principen är dock den samma.

Man behöver inte heller täcka över objektet med kopior av sig själv. Vanligtvis övertecker man objektet med så få kvadrater, cirklar, kuber eller klot som möjligt. Dimensionen kan sedan räknas ut som ett gränsvärde då storleken på dessa går mot noll. Den dimension som då fås kallas Hausdorfdimensionen.

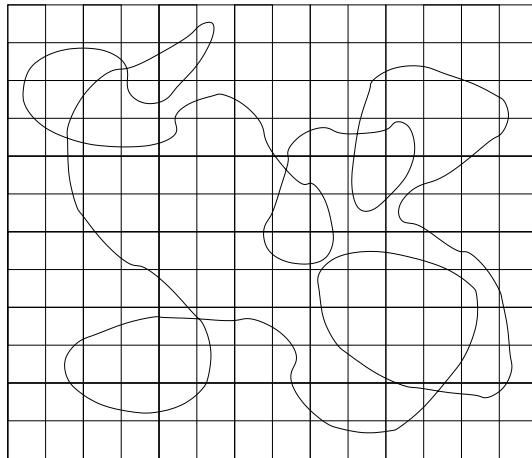
4.1 Nätdimension

Hausdorfdimensionen är lite bölig att använda i praktiken. En annan variant är att täcka över objektet med ett nät.

Figuren nedan visar en kurva som är övertäckt med ett nät av kvadrater med sidan 0,71 cm. Vi noterar att kurvan går genom 38 rutor.



Om man använder ett mer finmaskigt nät går kurvan genom fler rutor. Figuren nedan visar detta. Vi noterar att kurvan går genom 90 rutor då sidlängden på rutorna är 0,35 cm.



Det finns ett samband mellan antalet kvadrater kurvan passerar i nätet och kvadraternas sidlängd. Detta samband får bli en del av följande definition.

Definition 4.1.1. Om en punktmängd täcks med ett nät av kvadrater med sidlängd ϵ , och det finns punkter i N av nätets rutor ges punktmängdens *nätdimension* av konstanten D i funktionen

$$N(\epsilon) = \frac{k}{\epsilon^D}$$

där k är en konstant. ▲

Om objektet har topologisk dimension tre måste man byta ut kvadrater mot kuber.

Med de data som finns i exemplet ovan fås tabellen

ϵ	$N(\epsilon)$
0,71	38
0,35	90

ur vilken man kan bestämma

$$N(\epsilon) = \frac{24,838}{\epsilon^{1,226}}.$$

Nätdimensionen för kurvan är alltså 1,226.

Med bara två punkter, som i detta exempel, kan man räkna ut D analytiskt. Har man flera punkter (vilket man bör ha för att få bättre nogräns!) kan man göra en kurvanpassning med lämplig programvara för att bestämma D .

5 Uppgift

Du skall nu rita en kurva och besämma denna fraktala dimension. Utför följande.

1. Tag ett vanligt rutat papper (5 mm sidlängd på rutor) och rita en kurva på detta. Kurvan bör fylla ut ett område på ca $15 \text{ cm} \times 15 \text{ cm}$. Ju fler veck och skarpare krökar den har, desto högre kommer dimensionen att bli.
2. Rita ett nät av kvadrater över kurvan där sidlängden på kvadraterna är 2 cm. Räkna antalet rutor som kurvan går genom.
3. Gör nätet mer finmaskigt och räkna antalet rutor då nätets maskor har sidlängderna 1,5 cm, 1 cm och 0,5 cm.
4. Använd lämplig programvara (exempelvis Google Kalkylark eller Geogebra) för att anpassa en kurva av typen $f(x) = Cx^a$ till din data.
5. Bestäm kurvans dimension från exponenten som programmet räknar ut.

6 Redovisning

Du skall redovisa följande.

- Det papper där du ritat kurvan och nätet.
- En redovisning av hur du bestämt kurvans dimension, inklusive tabell, graf och uttryck som programmet bestämt.

Ett exempel på hur en graf skulle kunna se ut visas nedan. Observera att det är genererat från de data som finns i exemplet ovan. Du kommer att ha fler punkter och därmed högre noggrannhet.

