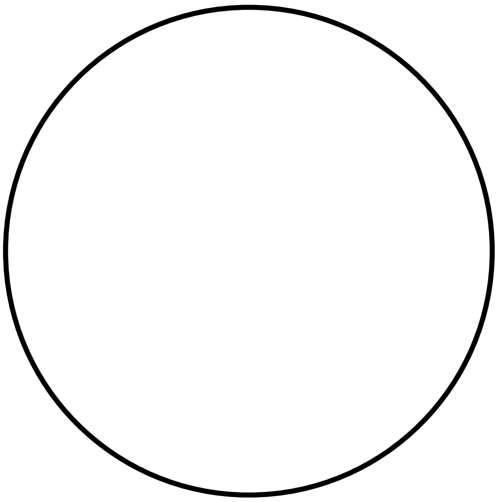


Tal och polynom

Johan Wild

2019–08–08

johan.wild@europaskolan.se

Detta är ett utkast till kommande version. Detta får därför ej användas i undervisning.

2019–08–08

Innehåll

1 Inledning **4**

2 Att gå mellan olika typer av tal **4**

3 De hela talen och polynom **4**

3.1 Polynom 5

3.2 Räkning med polynom 5

3.3 Faktorisering av polynom 8

3.4 Polynomfunktioner och deras graf 9

3.5 Sgd och mgm 13

3.6 Polynomdivision 14

3.7 Sammanfattning över likheterna 15

3.8 Övningar 15

4 De rationella talen och rationella uttryck **17**

4.1 Räkning med rationella tal 17

4.2 Rationella uttryck 18

4.3 Rationella funktioner och deras graf 19

4.4 Övningar 21

5 De reella talen och potensserier **23**

5.1 Decimalform 23

5.2 Konvergensradier och andra problem 26

5.3 Algebraiska tal och funktioner 27

5.4 Övningar 28

6 Avslutning **29**

1 Inledning

Matematiker försöker alltid att vara så generella som möjligt. Om det inte är absolut nödvändigt uttalar man sig ogärna om något enskillt fall. Finns det en struktur som dyker upp på flera ställen försöker man påvisa egenskaper för allt som har denna struktur.

Denna text syftar till att exemplifiera detta. De räkneregler som gäller för heltalen gäller även för polynom. Mycket av det man kan göra med tal kan man även göra med polynom, till exempel hitta den största gemensamma delaren till två polynom.

På samma sätt finns det motsvarigheter till rationella tal och reella tal. Tabellen nedan sammanfattar processen.

Ring		**Kropp**		(Supremumegenskapen)
Heltal	$\rightarrow$	Rationella tal	$\rightarrow$	Reella tal
$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$
Polynom	$\rightarrow$	Rationella funktioner	$\rightarrow$	Potensserier

Förkunskaperna till denna text är begrepp från talteorin som faktor, delare, primtal, minsta gemensamma multipel, största gemensamma delare samt relativt prima.

2 Att gå mellan olika typer av tal

Leopold Kronecker (1823-1891) sade att ”Gud skapade heltalen. Allt annat är människans verk”. Detta uttalande gjordes under den tid då matematikerna hade upptäckt att vår inuition lätt leder oss fel. Till exempel går det att konstruera en kurva som bara består av hörn. Det finns också lika många rationella tal som det finns naturliga tal, trots att det finns oändligt många rationella tal mellan noll och ett.

Under 1800-talet började matematikerna därför försöka bli mer och mer precisa i sina definitioner och utreda de logiska konsekvenserna av dessa definitioner. I den processen skapade, eller upptäckte, man matematikens storskaliga struktur.

Någonting måste man hur som helst utgå ifrån. De naturliga talen och hur man adderar och multiplicerar dessa ansåg man vara givet. Däremot måste de hela talen definieras endast med detta som grund. Därefter måste man precisera exakt vad man menar med addition och multiplikation för dessa.

De rationella talen och räknereglerna för dessa definieras sedan med de hela talen som grund. Sen är det de reella talens tur.

Exakt hur denna utvidgningsprocess går till ligger utanför målet för denna text, men för varje kapitel inleds med vad man vinner och förlorar i varje steg.

3 De hela talen och polynom

De naturliga talen har en egenskap de hela talen inte har, nämligen ett minsta element. Detta är en viktig egenskap som kan utnyttjas vid matematisk bevisföring. Om ett bevis bygger på att man räknar ned något, kan man vara säker på att processen slutar om man kan vara säker på att de naturliga talen räcker för att ange det som räknas ned.

Det vi vinner då vi utvidgar de naturliga talen till hela tal är att varje tal har en additativ invers. Det går att göra addition ogjort, ekvationen $x+3=5$ går att lösa.

3.1 Polynom

Ett **polynom** $p(x)$ är ett uttryck på formen

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

där a_n till a_0 är tal och kallas för **koefficienter** och talet a_0 kallas för den **konstanta termen**. Om talen är heltal säger man att polynomet är **över** de hela talen och vi beteknar mängden av alla såda polynom $\mathbb{Z}[x]$. Vi skall senare behandla polynom över andra talmängder, till exempel $\mathbb{Q}[x]$, polynom över $\mathbb{Q}$.

Talet n skall var ett heltal och anger polynomets **grad**. Talet a_n benämns **ledande koefficient**[1] och får naturligtvis inte vara noll för att begreppet grad skall vara meningsfullt. Talet a_0 benämns **den konstanta termen**.

Med skrivsättet[2] $\partial p(x)$ menar vi graden av $p(x)$.

Om $a_n = 1$ benämns polynomet **moniskt**. Om alla a_i är relativt prima benämns polynomet **primitivt**.

Exempel 3.1.1. Polynomet $3x^2 - 2x + 7$ är ett primitivt polynom av grad två. Koefficienten framför x^2 är 3, koefficienten framför x är -2. Den konstanta termen är 7.

Polynomet x är ett polynom av grad 1.

Talet 4 kan betraktas som ett polynom av grad noll. Alla tal är alltså polynom av grad noll.

Uttrycken $\sqrt{x}$, $\frac{1}{x^2-3}$ och $x^{1,2}$ är inte polynom..

Uttrycket $\frac{1}{2}x^2 - 3x$ är visserligen ett polynom, men inte ett polynom över $\mathbb{Z}$ eftersom koefficienten $\frac{1}{2}$ inte är ett heltal. ▲

Ett polynom är inte en funktion eller en ekvation. Däremot kan en funktion uttryckas med ett polynom, och kallas då ibland **polynomfunktion**. Dessutom kan en ekvation uttryckas med polynom. Ekvationen kallas då **polynomekvation**.

Exempel 3.1.2. Funktionen $f(x) = 3x - 6$ definieras med ett polynom av grad ett. I ekvationen $x^2 - x = \sqrt{x} + 2$ är vänsterledet ett polynom av grad två, men högerledet är inte ett polynom. Därför är ekvationen inte en polynomekvation. ▲

Vid räkning med polynom är man alltså i allmänhet inte intresserad av att beräkna polynomets värde för något värde på x, eller intresserad av att lösa en ekvation! Symbolen x används endast för att underlätta beräkningar.

3.2 Räkning med polynom

Polynom kan betraktas som ett slags generaliserat tal. Jämför definitionen av polynom med hur vi uttrycker tal i basen tio. Det som skiljer är att koefficienterna i

[1] Jag är osäker på om detta är ett vedertaget ord på svenska. På engelska säger man **leading coefficient**.

[2] Tänk på denna symbol som ett stiliserat **d** som i **degree**.

ett polynom får vara vilka tal som helt, inte bara talen 0 till 9. På samma sätt som basen 10 i vårt positionssystem används på ett smart sätt för att bokföra siffror vid beräkningar, används symbolen x i polynom för samma sak.

Egentligen är det inte nödvändigt att skriva ut de olika potenserna av x då man sysslar med polynom. De används bara som en slags bokföringshjälp, vilket blir tydligt i exemplen nedan. I högre matematik definieras polynom över en mängd som en följd element ur mängden där endast ändligt många element i följden är nollskilda. På ren svenska betyder detta att det intressanta bara är polynomets koefficienter

Anledningen till att polynom över $\mathbb{Z}$ tas upp i samma kapitel som $\mathbb{Z}$ själv är att de uppfyller samma algebraiska struktur, de är båda exempel på ringar.

Mer precist är en ring R en mängd där det finns två räkneoperationer definierade, addition (med symbolen $+$) och multiplikation (med symbolen $\cdot$). För dessa räkneoperationer gäller följande.

A1 Slutenhet: $a + b \in R$ för alla $a, b \in R$.

A2 Addition är kommutativ: $a + b = b + a$ för alla $a, b \in R$.

A3 Addition är associativ: $(a + b) + c = a + (b + c)$ för alla $a, b, c \in R$.

A4 Det finns ett element $0 \in R$ som uppfyller att $0 + a = a$ för alla $a \in R$.

A5 Till varje $a \in R$ finns ett element $-a$ med egenskapen att $a + (-a) = 0$.

M1 Slutenhet: $a \cdot b \in R$.

M2 Multiplikation är associativ: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ för alla $a, b \in R$.

M3 Det finns ett element $1 \neq 0 \in R$ som uppfyller $1 \cdot a = a$ för alla $a \in R$.

D1 Distributiva lagen: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ för alla $a, b, c \in R$.

Om man lägger till ett axiom till få sen **kommutativ ring**.

M4 Multiplikation är kommutativ: $a \cdot b = b \cdot a$ för alla $a, b \in R$.

Ett på icke-kommutativa ringar är $n \times n$-matriser. De vanliga talmängden $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ och $\mathbb{C}$ är exempel på kommutativa ringar. Polynom över dessa är också kommutativa ringar.

Eftersom icke-kommutativa ringar inte tas upp mer i denna text, skrivs bara ring då endast kommutativa ringar avses för att göra språket mer flytande.

Exempel 3.2.1. Du har säkert räknat med polynom på grundskolan, även om rubriken då säkert var något i stil med addition och multiplikation av parenteser. Låt oss studera några exempel med polynomen $2x^2 - 3x + 1$ och $x + 5$.

$$\left(2x^2 - 3x + 1\right) + (x + 5) = 2x^2 - 2x + 6$$

$$\left(2x^2 - 3x + 1\right) \cdot (x + 5) = 2x^3 + 10x^2 - 3x^2 - 15x + x + 6 = 2x^3 + 7x^2 - 14x + 6$$

▲

$$
\begin{array}{r}
96 \\
+\ 32 \\ \hline
128
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
x^2 - 3x + 5 \\
+\ 3x^2 + 2x - 7 \\ \hline
4x^2 - x - 2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
42 \\
\cdot\ 14 \\ \hline
168 \\
+\ 42 \\ \hline
588
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
x^2 + 3x - 7 \\
\cdot \qquad\qquad x + 2 \\ \hline
2x^2 + 6x - 14 \\
+\ \ x^3 + 3x^2 - 7x\phantom{{}-14} \\ \hline
x^3 + 5x^2 - x - 14
\end{array}
$$

Detta är det normala sätt att ställa upp beräkningar med polynom. Det är dock intressant att notera att algoritmerna för räkning med tal fungerar även för polynom. Jämför följande exempel.

För att visa hur axiomen för räkning med element i ringar kan användas kan vi studera följande satas.

Sats 3.2.2. *Kvadreringsregeln* $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ *gäller i alla ringar.*

Du är van att se detta resultat i tillämpningar av typen $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$. Det som i själva verket står inom parentesen är summan av ett polynom av grad ett och ett polynom av grad noll. Frågan är nu om regeln gäller även i fallet

$$(f(x) + g(x))^2 = (f(x))^2 + 2 \cdot f(x) \cdot g(x) + (g(x))^2$$

där $f(x)$ och $g(x)$ är vilka polynom som helst.

Bevis. Studera

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2.$$

Det som ”gör regeln” är att vi kan skriva de två termerna i mitten som $2ab$. Det som krävs för att vi skall få göra det är att

$$ba = ab.$$

I en ring gäller detta enligt M4 på sida 6. □

På samma sätt kan man visa att konjugatregeln också gäller i alla ringar.

Räkning går alltså till på samma sätt i alla ringar. Därför finns en rad begrepp som du känner igen från talteorn i alla ringar. Tabellen nedan visar vilka begrepp som tas upp i denna text.

Begrepp
addition, (subtraktion)
multiplikation
additativ invers
faktor
delare
primtal / irreducibel
relativt prima
sgd
mgm
kvot
rest

Det finns specialfall av ringar där ett eller flera av begreppen ovan inte finns. Exepelvis uppfyller räkning på en klocka axiomen för en ring, men faktorisering är inte entydig: $2 \cdot 2 = 4 \cdot 4 = 2 \cdot 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.

Denna text handlar i själva verket om **Euklidiska ringar**. Vad som menas med detta tas upp i andra texter.

Vi har redan berört räknesätten. Anledningen till att subtraktion står inom parentes är att det inte är ett eget räknesätt. Skrivättet $a - b$ betyder $a + (-b)$.

Innan vi går vidare kan det vara bra att notera följande.

Sats 3.2.3. *Om ett polynom av grad n multipliceras med ett polynom av grad m, blir produkten ett polynom av grad $n + m$.*

Detta är exemplifierat i exempel 3.2.1 där ett polynom av grad 2 multipliceras med ett polynom av grad 1, och produkten blir ett polynom av grad 3.

3.3 Faktorisering av polynom

Sats 3.2.3 antyder att ett polynom av grad 2 skulle kunna skrivas som en produkt av två polynom av grad 1, att man skulle kunna faktorisera polynom av grad 2. Det är ibland möjligt. Det finns polynom som inte går att faktorisera. Dessa kallas för **irreducibla polynom**. Detta motsvarar naturligtvis begreppet primtal, men man säger alltså inte primpolynom.

Huruvida ett polynom är irreducibelt eller inte beror på vilken talmängd polynom är bildat över. Exempelvis är $x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ irreducibelt, men för $x^2 - 2 \in \mathbb{R}[x]$ gäller $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$.

Exempel 3.3.1. En tillämpning av konjugatregeln

$$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2),$$

och en tillämpning av kvadreringsregeln

$$x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

är två exempel där faktorisering är möjlig. Lägg märke till att det senare fallet gav upphov till en faktor med mulitplicitet två.

Polynomet

$$x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$$

går som synes också att faktorisera till två faktorer av multiplicitet ett. Däremot är polynomet $x^2 + x + 6$ ej möjligt att faktorisera, det är irreducibelt. ▲

Precis som för tal finns det ingen bra algoritm för att faktorisera polynom. Speciellt inte om man håller stenhårt fast vid att betrakta polynom som ett generaliserat tal.

Däremot kan man komma vidare om man byter synvinkel, och betraktar polynomen som funktioner. Antag till exempel att vi vill faktorisera polynomet $x^2 + x - 20$. Om detta skulle vara möjligt skulle det alltså gå att hitta två tal a och b så att

$$x^2 + x - 20 = (x - a)(x - b).$$

Bilda nu polynomfunktionen

$$f(x) = x^2 + x - 20 = (x - a)(x - b).$$

Värdet för funktionen f då $x = a$ måste vara noll eftersom

$$f(a) = a^2 + a - 20 = \underbrace{(a - a)}_{=0}(a - b) = 0.$$

På samma sätt måste $f(b) = 0$ gälla. Om vi kan hitta de värden på x som ger funktionsvärdet noll, om vi kan lösa ekvationen $x^2 + x - 20 = 0$, kan vi alltså få reda på vad a och b skall vara.

Detta är ett mycket bra exempel på hur nyckfull matematiken kan vara. Som tidigare nämnts är polynom ett slags generaliserat tal, och har ingenting alls med ekvationer att göra. Ändå måste man byta synsätt, och betrakta polynomet som en funktion och till sist som en ekvation för att kunna genomföra faktoriseringen, något som egentligen är förknippat med polynomen som generaliserade tal.

Även polynom av högre grad än två kan i princip faktoriseras genom att sätta polynomet lika med noll och lösa denna ekvation. I praktiken är detta inte möjligt utom i vissa specialfall. För polynom av grad tre och fyra finns lösningsformler, men de är långa och tas inte upp på gymnasiet. För polynom av grad fem och högre kan man visa att det inte är möjligt att skapa lösningsformler. Det visade Galois (1811 - 1832).

En sista detalj att ta upp är att faktorisering av polynom inte är helt entydig. En konstant faktor kan flyttas mellan faktorerna utan att polynomet ändras, vilket exemplifieras med

$$2x^2 - 6x + 4 = 2(x - 1)(x - 2) = (2x - 2)(x - 2) = (x - 1)(2x - 4).$$

För att faktoriseringen av polynom skall bli entydig måste man göra ett lämpligt tillägg. I $\mathbb{Z}[x]$ menar man att man faktorierar polynom till primitiva polynom samt ett tal. I exemplet ovan är varken $2x - 2$ eller $2x - 4$ primitiva.

I $\mathbb{Q}[x]$ och $\mathbb{R}[x]$ lägger man till att faktorerna skall vara moniska. I $\mathbb{C}[x]$ finns inga irreducibla polynom.

3.4 Polynomfunktioner och deras graf

Det finns samband mellan faktoriseringen av polynom över $\mathbb{R}$ och grafen till motsvarande funktion. Vi börjar med ett polynom av grad två som går att faktorisera:

$$f_1(x) = x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x - 5).$$

Vid respektive nollställe beter sig grafen som en linje. Ekvationen för denna linje kan fås genom att sätta in roten för det aktuella nollstället i den faktor som inte är noll där.

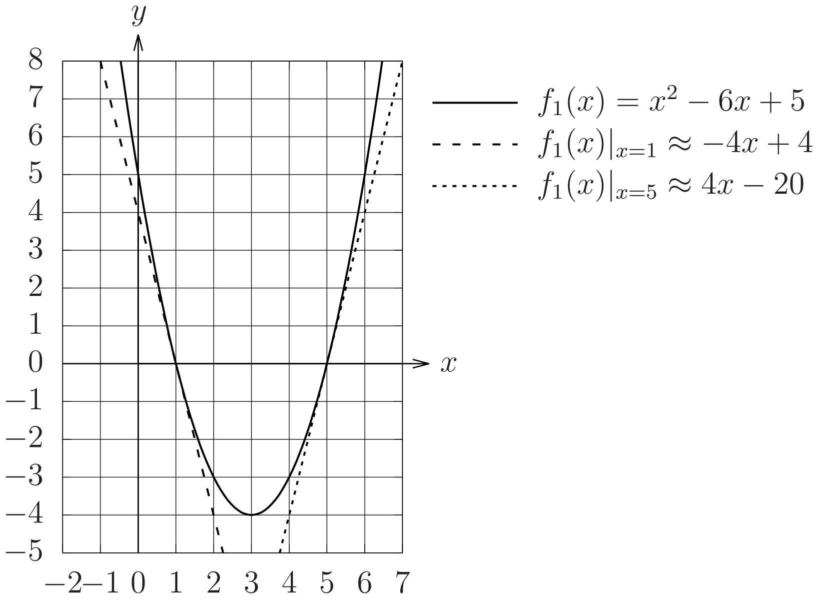
Vid nollstället $x = 1$ sätter vi in $x = 1$ i faktorn $x - 5$ och får

$$f_1(x) \underset{\text{Runt } x=1}{\approx} (x - 1)(1 - 5) = -4x + 4$$

Vid nollstället $x = 5$ sätter vi in $x = 5$ i faktorn $x - 1$ och får

$$f_1(x) \underset{\text{Runt } x=5}{\approx} (5 - 1)(x - 5) = 4x - 20$$

Resultatet visas i figuren nedan.



Nollställen som dessa benämns **linjära nollställen** eftersom funktionen kan approximeras med en linje vid dessa.

Man kan visa[3] att det uttryck man får för tangenten med denna metod faktiskt blir tangenten till kurvan i nollstället. Man kan motivera att metoden fungerar med att den faktor som förändras mest kring ett nollställe är den som har att göra med nollstället. Exempelvis förändras faktorn $x-1$ med 200% mellan $x = 0,9$ och $x = 1,1$ (från $-0,1$ till $0,1$), medan faktorn $x - 5$ bara förändras ca $4,9\,\%$ (från $-4,1$ till $-3,9$).

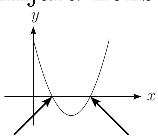
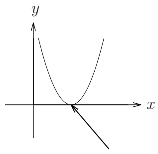
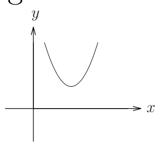
Därför får man en bra approximation till funktionen om man låter denna faktor vara $1 - 5 = -4$ hela tiden runt $x = 1$.

För en polynomfunktion av grad två som har en faktor av grad ett med multiplicitet två fås ett **kvadratiskt nollställe**. Motsvarande ekvation får då en dubbelrot.

Finns inga nollställen till funktionen har ekvationen inga lösningar och polynomet går inte att faktorisera.

Tabellen nedan sammanfattar sambanden mellan polynom av grad två och motsvarande funktion och ekvation.

[3] För att göra detta krävs teori från Matematik 3c

Funktion Hitta nollställen $f(x) = ax^2 + bx + c$	**Ekvation** Lös ekvationen $ax^2 + bx + c = 0$	**Polynom** Faktorisera $ax^2 + bx + c$
Två linjära nollställen 	Två enkelrötter $\begin{cases} x_1 = \ldots \\ x_2 = \ldots \end{cases}$	Två faktorer av multiplicitet ett $k(x - x_1)(x - x_2)$
Kvadratiskt nollställe 	Dubbelrot $x_1 = x_2 = \ldots$	Multiplicitet två $k(x - x_1)^2$
Inget nollställe 	Lösning saknas	Irreducibelt polynom av grad två.

För att sätta kvadratiska nollställen i ett intressantare sammanhang kan vi som exempel studera tredjegradspolynomet

$$f(x) = \frac{1}{5}(x+2)(x-3)^2$$

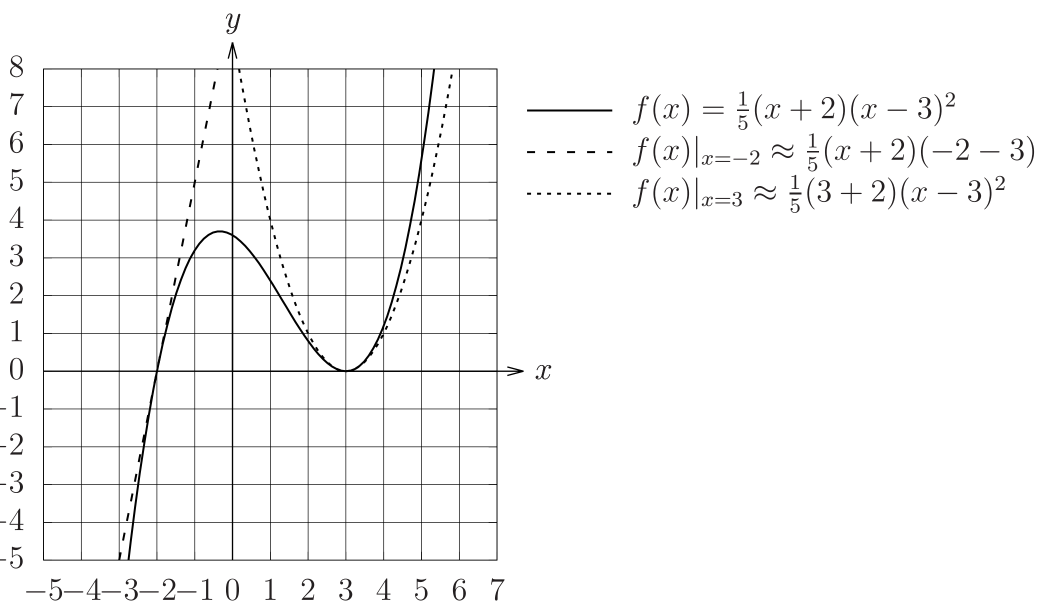
som alltså har en faktor med multiplicitet ett och en med multiplicitet två. De representerar alltså ett linjärt respektive ett kvadratiskt nollställe. Grafen till h är avbildad i figuren nedan, där även linjen

$$f(x)|_{x=-2} \approx \frac{1}{5}(x+2)(-2-3)^2$$

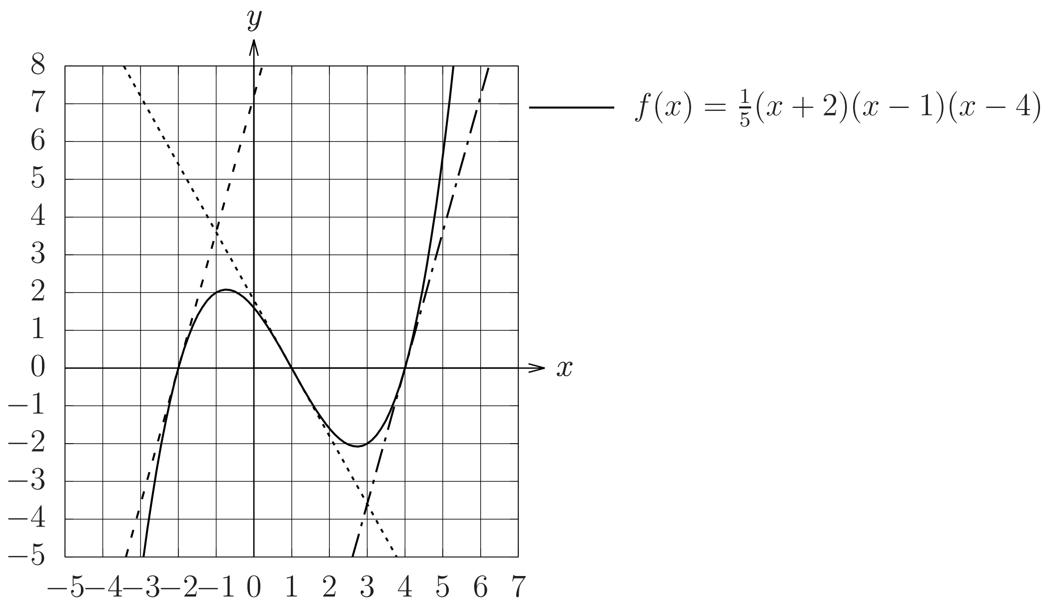
och parabeln

$$f(x)|_{x=3} \approx \frac{1}{5}(3+2)(x-3)^2$$

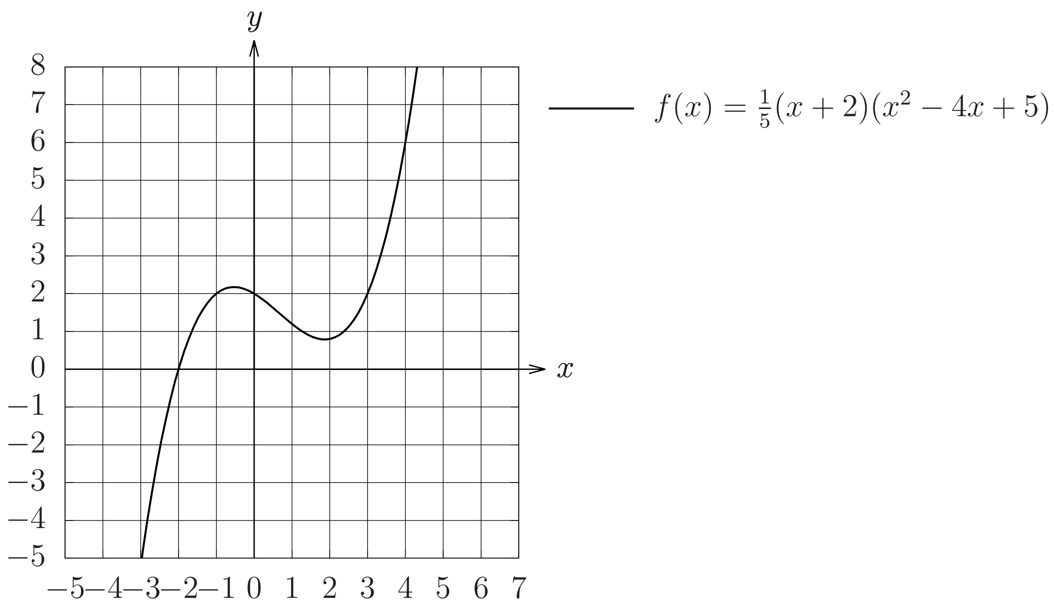
finns med.



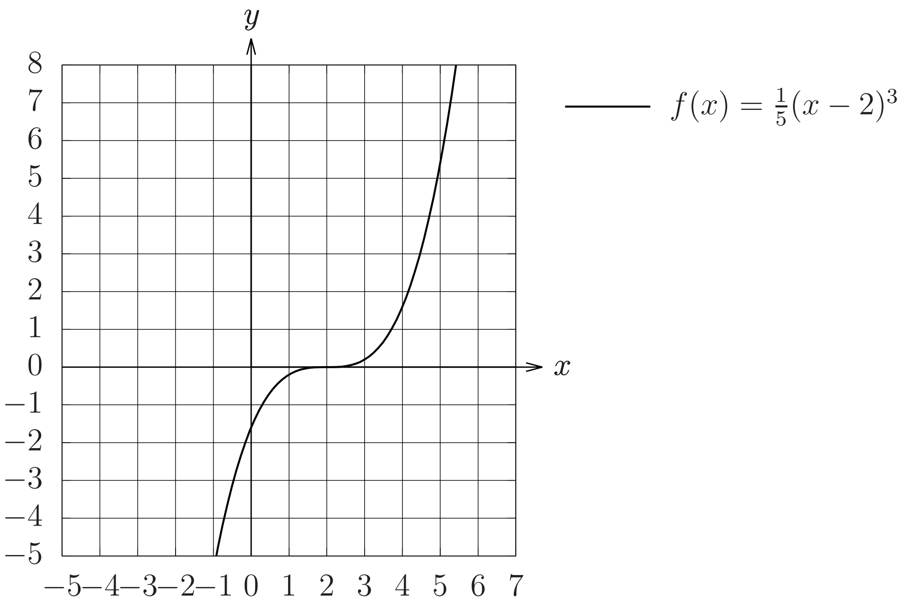
Polynom av grad tre kan också ha tre linjära nollställen, vilket visas i figuren nedan.



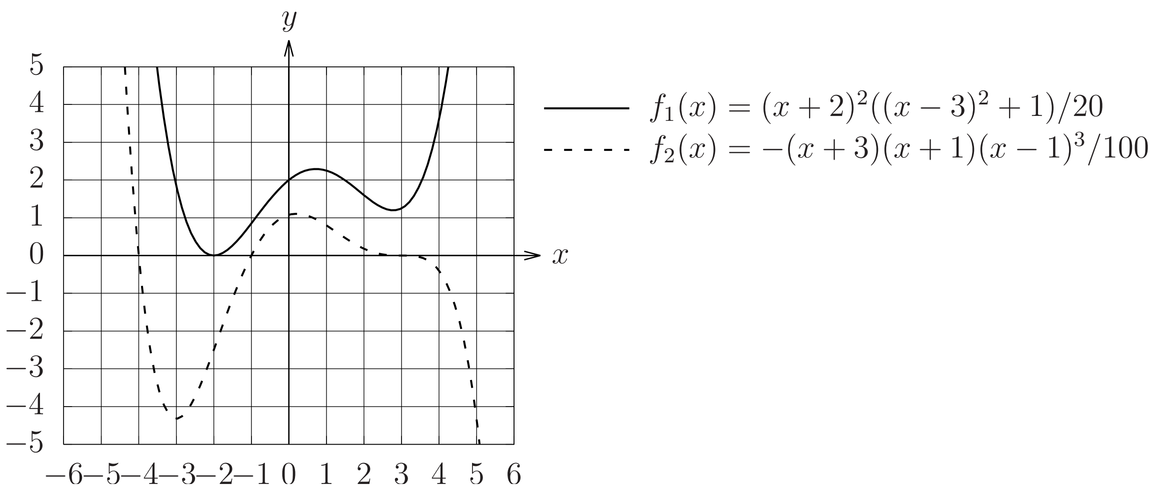
Det kan också finnas en irreducibel faktor av grad två, som inte ger några nollställen, samt en faktor av grad ett som ger ett linjärt nollställe. Detta visas nedan.



Slutligen kan det finnas en faktor av grad ett med multiplicitet tre, som då ger upphov till ett **kubiskt nollställe**.



Detta tema kan varieras ännu mer för polynom av högre grad. Nedan visas grafen till två polynom. Det ena är av grad fyra med ett kvadratiskt nollställe. Polynomet har också en irreducibel faktor. Det andra av grad fem med två linjära nollställen och ett kubiskt.



3.5 Sgd och mgm

Begreppen största gemensamma delare och minsta gemensamma multipel har sin naturliga motsvarighet bland polynomen, vilket följande exempel visar.

Exempel 3.5.1. Bestäm den största gemensamma delaren och den största gemensamma multipeln till polynomen

$$p_1 = x^4 - x^3 - 12x^2 + 28x - 16$$

och

$$p_2 = x^4 - 4x^3 - 9x^2 + 70x - 88.$$

Lösning

Polynomen måste först faktoriseras. Hur detta görs låter vi inte bekymra oss nu, det är inte viktigt för att belysa det viktiga just nu.

$$p_1 = x^4 - x^3 - 12x^2 + 28x - 16 = (x-2)^2\,(x-1)\,(x+4)$$

$$p_2 = x^4 - 4x^3 - 9x^2 + 70x - 88 = (x-2)(x+4)\left(x^2 - 6x + 11\right)$$

För att repetera noterar vi att det första polynomet har tre faktorer av grad ett, varav en har multiplicitet två. Det andra polynomet har två faktorer av grad ett och en faktor (irreducibel naturligtvis) av grad två.

Även för polynom att den största gemensamma delaren för dessa polynom är den största gemensamma faktorn. Vi ser att $x-2$ och $x+4$ finns i båda polynomen. Därför fås

$$\operatorname{sgd}(p_1, p_2) = (x-2)(x+4) = x^2 + 2x - 8.$$

Den minsta gemensamma multipeln är produkten av alla faktorer som finns i någon av polynomen. Därför fås

$$\begin{aligned}\operatorname{mgm}(p_1, p_2) &= (x-2)^2 (x-1)(x+4)\left(x^2 - 6x + 11\right) = \\ &= x^6 - 7x^5 + 5x^4 + 89x^3 - 316x^2 + 404x - 176.\end{aligned}$$

▲

3.6 Polynomdivision

Begreppen kvot och rest finns också bland polynomen och fungerar på precis samma sätt här som för heltal. Även algoritmen för division fungerar för polynom.

Exempel 3.6.1. Då polynomet $x^3 + 5x^2 - 2x - 24$ delas med polynomet $x+7$ fås kvoten $x^2 - 2x + 12$ och resten -108,

$$x^3 + 5x^2 - 2x - 24 = \left(x^2 - 2x + 12\right)(x+7) - 108.$$

▲

Jämför med motsvarande situation för tal, till exempel gäller att man får resten 3 då 15 delas med 6 eftersom $15 = 2 \cdot 6 + 3$.

Algoritmen för division av tal är tillämpbar även för polynom, vilket exemplen nedan visar.

$$\begin{array}{rl}
172 & \\
\hline
1035 & \big| \; 6 \\
-6 & \\
\hline
43 & \\
-42 & \\
\hline
15 & \\
-12 & \\
\hline
3 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rl}
x^2 - 2x + 12 & \\
\hline
x^3 + 5x^2 - 2x - 24 & \big| \; x+7 \\
-(x^3 + 7x^2) & \\
\hline
-2x^2 - 2x & \\
-(-2x^2 - 14x) & \\
\hline
12x - 24 & \\
-(12x - 84) & \\
\hline
-108 &
\end{array}$$

Sats 3.6.2. *Då ett polynom av grad n delas med ett polynom av grad m, blir resten ett polynom av grad högst $n-m$.*

Ur argumentationen för att ett polynom har en faktor $x-a$ om motsvarande funktion har ett nollställe för $x=a$ fås att man kan kontrollera om en division med $x-a$ kommer att gå jämnt upp genom att man sätter in $x=a$ i polynomet och kontrollerar om man får värdet noll. Föregående sats kan användas för att få ännu mer information av ett dylikt test.

Sats 3.6.3. *Om ett polynom delas med $x - a$ blir resten lika med polynomets värde för $x = a$.*

Bevis. Om divisionen inte går jämnt upp skall resten enligt sats 3.2.3 bli ett polynom av grad noll (ett mindre än graden för det man delar med, som i detta fall är ett). Ett polynom av grad noll är en konstant. Låt f vara det polynom som delas med $x - a$ och låt resten vara konstanten C. Då fås alltså

$$f(x) = (x - a)(\text{kvot}) + C.$$

Om $x = a$ sätts in i f fås

$$f(a) = \underbrace{(a - a)}_{=0}(\text{kvotens värde för } x = a) + C = C.$$

□

3.7 Sammanfattning över likheterna

Vi ser alltså att det finns en rad likheter mellan mängderna $\mathbb{Z}$ och mängden av alla polynom över $\mathbb{Z}$. Dessa sammanfattas här.

- De uppfyller samma algebraiska struktur.
- Man kan tillämpa samma algoritmer vid beräkningar.
- Både tal och polynom kan faktoriseras eller inte faktoriseras. Tal som inte kan faktoriseras kallas primtal, polynom som inte kan faktoriseras kallas irreducibla.
- Det gånger en faktor förekommer i en faktorisering kallas faktorns multiplicitet.
- Begreppen största gemensamma delare och minsta gemensamma multipel gäller båda mängderna.
- Begreppen kvot och rest gäller båda mängderna. För polynom gäller dessutom att resten kan beräknas genom sats 3.6.3.

3.8 Övningar

1. Skriv polynomen på faktorform. Betrakta dem som tillhörande $\mathbb{R}[x]$. Är någon av dem ej faktoriserbara i $\mathbb{Z}[x]$ eller $\mathbb{Q}[x]$?
   a) $4x^2 + 8x$
   b) $36 - 48x + 16x^2$
   c) $9x^2 - 16$
   d) $x^2 - 5x + 6$
   e) $x^2 - 7$

2. Det gäller att

   $$(x^7 + 3x^5 + 8x)p(x) = x^{10} + 4x^9 + 3x^8 + 4x^7 - 24x^5 + 8x^4 + 32x^3 - 64x.$$

   Vad är $\partial p(x)$?

3. Bilda en polynomfunktion av grad tre som vars enda nollställen är i $x = 2$ och $x = 7$.

4. Bilda ett irreducibelt polynom i $\mathbb{R}[x]$ av grad två.

5. Finns det irreducibla polynom av grad tre över $\mathbb{R}$? Över $\mathbb{Z}$?

6. Bilda ett polynom av grad två som är irreducibelt över $\mathbb{Z}$ men inte över $\mathbb{R}$.

7. Bestäm sgd och mgm för polynomen $x^5 - 5x^4 + 6x^3$ och $x^4 + 3x^3 - 10x^2$

8. Är $x = 4$ en faktor i $x^4 - 6x^3 - 13x^2 + 42x$?

9. Bestäm kvot och rest då $x^4 - 8x^3 + 7x^2 + 36x - 36$ delas med $x - 2$.

10. Du kan träna på polynomdivision genom att väja en kvot och en divisor, multiplicera ihop dessa och lägg till en rest. Exempelvis kan du bilda $(2x^2 + 4x - 5)(x + 3) + 8 = ...$ Dela därefter ditt resultat med din divisor. Då skall du naturligtvis få den kvot och rest du valde.

Facit

1.
   a) $4x(x + 2)$
   b) $(4x - 6)^2$
   c) $(3x + 4)(3x - 4)$
   d) $(x - 2)(x - 3)$
   e) $(x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})$ irreducibelt i $\mathbb{Z}[x]$ och $\mathbb{Q}[x]$.

2. $\partial p(x) = 3$

3. Det måste ha faktorerna $(x - 2)$ och $(x - 7)$, varav en skall ha multiplicietet ett och den andra två.

4. Enklast är att utgå från ett uttryck på formen $k(x - x_0)^2 + a$ där $ka > 0$, exempelvis $-2(x - 3)^2 - 8$.

5. I $\mathbb{R}[x]$ finns inga irreducibla polynom av grad tre, men i $\mathbb{Z}[X]$ finns till exempel $(x^2 - 2)$, som har faktoriseringen $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ över $\mathbb{R}$.

6. Enklast är att använda till exempel konjugatregeln och väja ett tal som inte är en jämn kvadrat, till exempel $x^2 - 6$.

7. Sgd blir $x^3 - 2x^2$ och mgm blir $x^6 - 19x^4 + 30x^3$.

8. Nej. Enklaste sättet att ta reda på det är att undersöka om värdet av uttrycket blir noll då $x = 4$. Delar man polynomet med $x - 4$ fås inte resten noll, utan värdet -168.

9. Kvoten blir $x^3 - 6x^2 - 5x + 26$ och resten blir 16.

10. -

4 De rationella talen och rationella uttryck

De rationella talen betecknas med symbolen $\mathbb{Q}$, som i engelskans ord för kvot, quotient.

Det man vinner i och med utvidgningen från $\mathbb{Z}$ är existensen av den multiplikativa inversen till varje element (utom noll). Vi kan då göra mulitplikation ogjort, vi kan lösa ekvationen $3x = 1$.

Det vi förlorar är att de rationella talen inte går att räkna upp i storleksordning.

De rationella talen utgör en **kropp**[4]. Mer precist är en kropp K en kommutativ[5] ring där alla element utom det additativa enhetselementet har en multiplikativ invers. Man lägger till ett axiom till.

M5 Till varje $a \neq 0 \in K$ finns ett element a^{-1} med egenskapen att $a \cdot a^{-1} = 1$.

De begrepp som är gemensamma för alla kroppar sammanfattas i tabellen nedan.

Begrepp
multiplikariv invers
förlänga
förkorta
minsta gemensamma nämnare
heltalsdel

4.1 Räkning med rationella tal

Precis som för de hela talen är $a - b$ bara ett kortare skrivsätt för $a + (-b)$. På samma sätt är $\frac{a}{b}$ bara ett kortare skrivsätt för $a \cdot b^{-1}$. Detta känner du igen från räkning med rationella tal. Istället för att egentligen utföra division, ”vänder man upp och ned” på nämnaren och multiplicerar med detta. Att ”vända upp och ned” på ett rationellt tal är just att bilda den multiplikativa inversen.

Exempel 4.1.1. Beräkna

$$\frac{2}{3}\Big/\frac{7}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}.$$

▲

Här används att den multiplikativa inversen till $\frac{5}{7}$ är $\frac{7}{5}$ eftersom $\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{5} = 1$.

Den formella definitionen av räkning med rationella tal följer nu.

Definition 4.1.2. Om $\frac{a}{b}$ och $\frac{c}{d}$ är rationella tal, låter vi symbolerna $+$ och $\cdot$ betyda

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

[4] På engelska säger man **field**.

[5] Det finns inga icke-kommutativa kroppar i enkel mening, men matematiker har naturligtvis hittat på en utvidgning av koncepten som täcker även detta. Det heter skeva kroppar (skew fields) eller divisionsringar. Vanliga kroppar utgör en delmängd ur dessa.

och
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$
där addition och mulitplikation i täljare och nämnare i högerleden är de som gäller för heltal. ▲

Poängen med ovanstående definition är att multiplikationen i täljare och nämnare är den som gäller i $\mathbb{Z}$, medan den som definieras alltås är den i $\mathbb{Q}$.

Ett mycket viktig begrepp som finns bland de rationella talen, som av naturliga skäl inte finns bland de hela talen, är minsta gemensamma nämnare. Däremot är detta på sätt och vis ändå inte ett nytt begrepp. Den minsta gemensamma nämnaren är två rationella tal är helt enkelt den minsta genensamma multipeln för nämnarna!

Andra viktiga begrepp som du känner igen är förlängning och förkortning.

4.2 Rationella uttryck

På samma sätt som polynomen liknar de hela talen på många sätt och vis, finns det en motsvarighet till de rationella talen. De kallas rationella uttryck.

Definition 4.2.1. Ett **rationellt uttryck** är ett uttryck på formen $\frac{t(x)}{n(x)}$. Ett rationellt uttryck har grad[6] $(\partial t(x), \partial n(x))$. ▲

För att begreppet grad skall vara entydigt måste gemensamma faktorer i $t(x)$ och $n(x)$ förkortas bort.

Polynomen utgör en delmängd av de rationella uttrycken, nämligen de som har grad $(t, 0)$.

Exempel 4.2.2. Uttrycken
$$\frac{x-2}{x^2},$$
$$\frac{1}{x}$$
och
$$\frac{x^2-3x+1}{x^{30}-x}$$
är rationella uttryck av grad $(1, 2)$, $(0, 1)$ repsektive $(2, 30)$. ▲

Precis som hos de rationella talen, finns även här begreppen minsta gemensamma nämnare, förlängning och förkortning.

Exempel 4.2.3. Beräkna
$$\frac{x+2}{x^3-9} + \frac{x-5}{x^3+3x}.$$
Precis som för rationella tal måste man först bestämma den minsta gemensamma nämnaren. Det gör man genom att faktorisera nämnarna och förlänga varje term

[6]Detta är inte en allmänt vedertagen notation, men passar denna text.

med de faktorer som saknas.

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{x^3-9x}+\frac{x-5}{4x+12} &= \frac{x+2}{x(x-3)(x+3)}+\frac{x-5}{4(x+3)} = \\ &= \frac{(x+2)\cdot 4}{x(x-3)(x+3)\cdot 4}+\frac{(x-5)\cdot x(x-3)}{4(x+3)\cdot x(x-3)} = \\ &= \frac{(x+2)\cdot 4+(x-5)\cdot x(x-3)}{x(x-3)(x+3)\cdot 4} \\ &= \frac{4x+8+x^3-3x^2-5x^2+15x}{x(x-3)(x+3)\cdot 4} \\ &= \frac{x^3-8x^2+19x+8}{4x^3-36x}\end{aligned}$$

▲

Exempel 4.2.4. Beräkna

$$\frac{x^2-9}{4x^2+12x+9}\Big/\frac{x^2+6x+9}{2x+3}.$$

Division är alltså definierad så att man skall multiplicera med den multiplikativa inversen istället.

$$\begin{aligned}\frac{x^2-9}{4x^2+12x+9}\Big/\frac{x^2+6x+9}{2x+3} &= \frac{x^2-9}{4x^2+12x+9}\cdot\frac{2x+3}{x^2+6x+9} = \\ &= \frac{(x-3)(x+3)}{(2x+3)^2}\cdot\frac{2x+3}{(x+3)^2} = \\ &= \frac{x-3}{(2x+3)(x+3)}\end{aligned}$$

▲

4.3 Rationella funktioner och deras graf

Om en funktion definieras med ett rationellt uttryck kallar man det rationell funktion. Precis som för polynom skiljer vi på det algebraiska konceptet rationellt uttryck och en rationell funktion. Det finns naturligtvis också rationella ekvationer.

Om man har en rationell funktion måste man däremot se upp med att denna inte nödvändigtvis är definierad i alla punkter. Om nämnaren blir noll för något värde på x är inte funktionen definierad där.

Exempel 4.3.1. Funktionen

$$f(x)=\frac{x-2}{x^2-4}$$

är inte definierad för $x=\pm 2$. ▲

Grafen till rationella funktioner brukar ha asymptoter. Det finns vertikala asymptoter där nämnaren har sina nollställen. Övriga asymptorer är funktioner som grafen närmar sig då $x\to\pm\infty$.

Följande sats är ett viktigt steg för att förstå detta.

Sats 4.3.2. *Om* $f(x) = \dfrac{t(x)}{n(x)}$ *är en rationell funktion där* $\partial f(x) = (t, n)$ *finns en kurva* $y = q(x)$ *som kurvan* $y = f(x)$ *närmar sig asymtotiskt då* $x \to \pm\infty$.

Om $\partial t(x) \geq \partial n(x)$ *är* $q(x)$ *ett polynom där* $\partial q(x) = t - n$*, om* $\partial t(x) < \partial n(x)$ *är* $q(x)$ *en rationell funktion där* $\partial q(x) = (0, n - t)$.

Vid en division mellan två heltal fås en kvot och en rest. Använder man rationella tal fås en heltalsdel och en ”decimaldel”[7] (i väntan på bättre ord). Decimaldelen bildas som kvoten mellan resten och det man delar med. Om 23 delas med 4 fås

$$23 = 5 \cdot 4 + 3.$$

Jämför vi den kvot och rest vi får med

$$\frac{23}{4} = 5 + \frac{3}{4}$$

ser vi att kvoten är heltalsdelen och att ”decimaldelen” utgörs av kvoten mellan resten och det vi delade med.

Jämför vi med ett rationellt uttryck får vi samma resultat. Som exempel kan vi studera

$$f(x) = \frac{x^4 - x^3 - 11\,x^2 + 8\,x + 19}{x^2 + x - 6}.$$

Om vi utför polynomdivisionen fås kvoten

$$q(x) = x^2 - 2\,x - 3$$

och resten

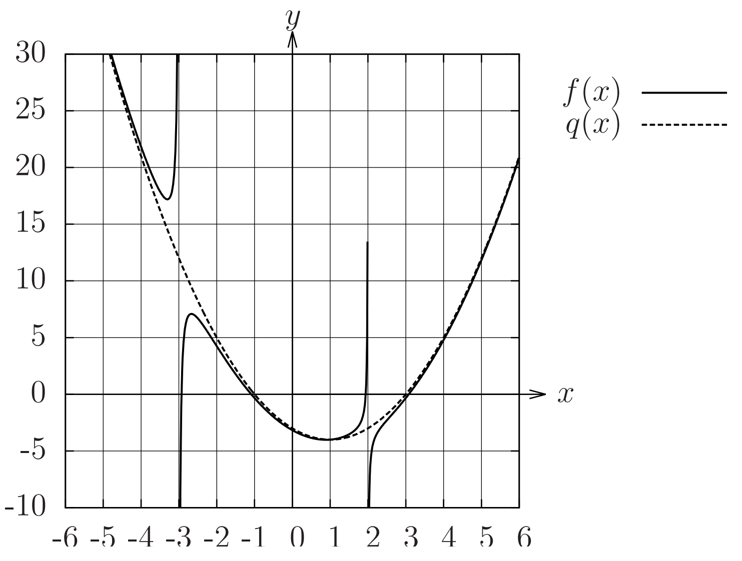
$$r(x) = 1 - x.$$

Därför gäller

$$f(x) = x^2 - 2\,x - 3 + \frac{1 - x}{x^2 + x - 6}.$$

Då $x \to \pm\infty$ går den sista termen mot noll eftersom polynomet i nämnaren har högre grad än det i täljaren. Därmed gäller $f(x) \to q(x)$.

Nedan visas $f(x)$ och $q(x)$.



[7] På engelska *fractional part*.

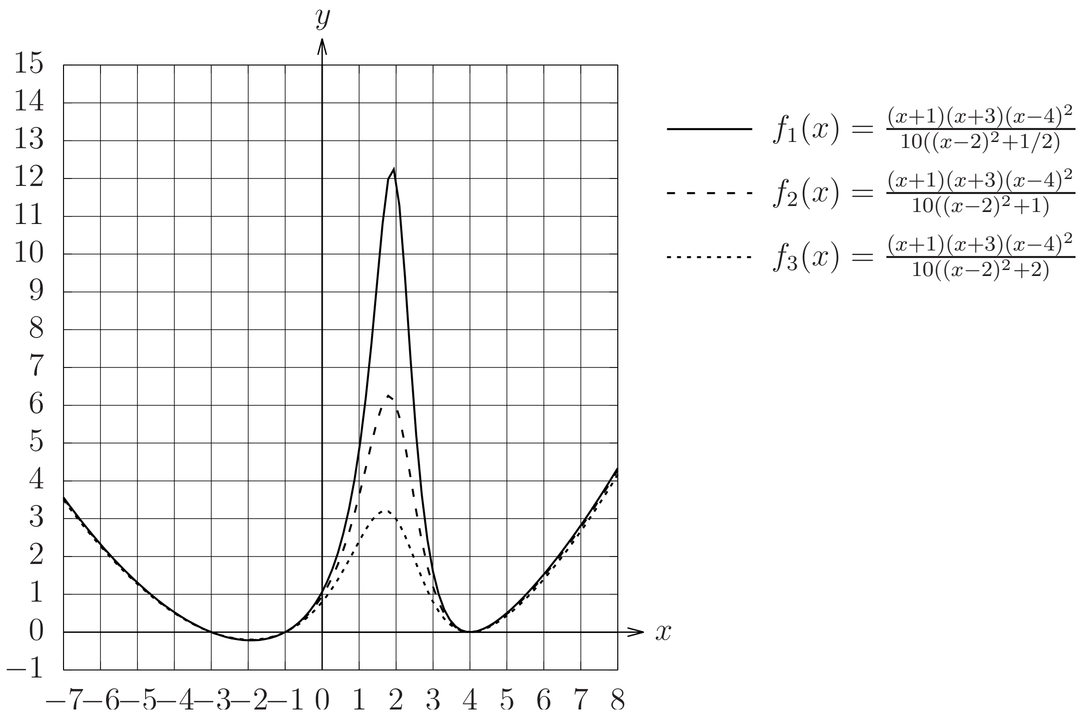
Om det finns en irreducibel faktorer i nämnaren blir det aldrig någon division med noll, ett lokalt maximum eller minimum bildas istället. För att kunna beskriva detta införs här en något märklig definition.

Alla polynom av grad två går att kvadratkomplettera till formen

$$(x - x_0)^2 + a.$$

Om $a > 0$ är polynomet irreducibelt. Vi definierar nu för polynom av grad två att ett irreducibelt polynom $f_1(x)$ är **mer irreducibelt** än ett annat irreducibelt polynom $f_2(x)$ om motsvarande $a_1 > a_2$. Exempelvis är $(x-1)^2+3$ mer irredcibelt än $(x+4)^2+1$.

Nedan visas hur grafen till en rationell funktion påverkas av att det finns faktorer i nämnaren som är olika mycket irreducibla.



Lägg märke till att faktorerna i täljaren får samma geometriska innebörd som för polynom. I exemplet ovan finns två linjära nollställen och ett kvadratiskt.

Skillnaden i grad mellan täljaren och nämnaren är två, så kurvorna närmar sig asymtotiskt en parabel.

När en faktor i nämnaren "övergår" från att vara irreducibel till att inte vara det, då $a \to 0$, bildas en dubbelrot i nämnaren och det lokala maximumet (eller minimumet) "spricker upp" i en vertikal asymptot.

4.4 Övningar

1. Vilken grad har uttrycket $\dfrac{(x^2+2)(x-1)(x+5)}{(x-4)^2(x+1)}$?

2. Förenkla

   a) $\dfrac{2x^2-4x}{x-2}$

   b) $\dfrac{x^2-81}{2x^2-18x}$

c) $\dfrac{20x-60x^2+45x^3}{14x-21x^2}$

3. Beräkna

   a) $\dfrac{4}{x}-\dfrac{2}{x+7}$

   b) $\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{2}{x+1}$

   c) $\dfrac{x-1}{x}-\dfrac{x}{x-1}$

4. Beräkna

   a) $x-\dfrac{x^2-36}{x+6}$

   b) $\dfrac{x^2+3}{3x^2}+\dfrac{2}{3}-\dfrac{3x-1}{3x}$

   c) $x+3-\dfrac{x^2+9}{x+3}$

5. Beräkna

   a) $\dfrac{2x^2+5x-3}{x+3}+\dfrac{9x-1}{x-1}$

   b) $\dfrac{3x^3+5x-34}{x-2}+\dfrac{-6x^2-23x-17}{x+1}$

   c) $\dfrac{2x^2+3x-14}{2(x-2)(x+1)}+\dfrac{8x-21}{2(x+3)}$

6. Bestäm asymptoterna till

$$f(x)=\frac{(x-5)\ (x-2)\ (x+1)^2}{(x-3)\ (x^2+3)}.$$

Facit

1. $(4,3)$

2. a) $2x$

   b) $\dfrac{x+9}{2x}$

   c) $\dfrac{5(2-3x)}{7}$

3. a) $\dfrac{2x+28}{x^2+7x}$

   b) $\dfrac{5x+1}{x^2-1}$

   c) $\dfrac{1-2x}{x^2-x}$

4. a) 6

   b) $\dfrac{3+x}{3x^2}$

   c) $\dfrac{6x}{x+3}$

5. a) $\dfrac{2x(x+3)}{x-1}$

   b) $3x^2$

   c) $\dfrac{5x^2}{(x+1)(x+3)}$

6. En vertikal asymptot är $x=3$. Då $x\to\pm\infty$ går $f(x)$ mot $x-2$ (utför polynomdivisionen för att finna kvoten).

5 De reella talen och potensserier

Nästa steg i utvidgningen av talen är att gå från de rationella talen till de reella talen. Symbolen som används för dessa är $\mathbb{R}$.

Poängen med att konstruera dessa är att det till exempel inte finns något rationellt tal vars kvadrat är två, det finns med andra ord ingen lösning till ekvationen $x^2 = 2$ bland de rationella talen. Rent tekniskt så har de reella talen något som kallas **supremumegenskapen**. Att visa vad det är och hur man då kan definiera vad som menas med $\sqrt{2}$ är en aning tekniskt och utelämnas därför. Det är också anledningen att denna egenskapen är satt inom parentes i tabellen på sida 4.

Det man förlorar då man går från de rationella talen till de reella talen är att de reella talen inte går att räkna upp.

De reella talen utgör, precis som de rationella, en kropp. Det finns alltså inga nya algebraiska axiom för dessa.

Motsvarigheten bland uttrycken heter **potensserier** och är uttryck på formen

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots.$$

Detta uttryck innehåller alltså oändligt många termer, och är därför inte ett polynom.

De begrepp som är gemensamma för reella tal och potensserier sammanfattas i tabellen nedan.

Begrepp
decimalform
algebraisk
transcendent

5.1 Decimalform

Rationella tal kan uttryckas på decimalform. Då gäller att decimalutvecklingen förr eller senare blir periodisk. För att visa vilka decimaler som skall upprepas skriver man ibland ett streck ovanför dessa.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} &= 0.\overline{3} = 0.3333333\dots \\
\frac{1}{4} &= 0.25\overline{0} = 0.2500000\dots \\
\frac{1}{7} &= 0.\overline{142857} = 0.142857142857142857\dots \\
\frac{1}{2} &= 0.4\overline{9} = 0.49999999\dots
\end{aligned}$$

Givet ett tal på decimalform som har en periodisk decimalutveckling kan man alltid hitta motsvarande rationella tal. Följande exempel visar hur.

Exempel 5.1.1. Finn det rationella tal som motsvarar $x = 0,\overline{158}$.

Tekniken går ut på att multiplicera x med en potens av 10 så att lämpligt antal decimaler "skiftas upp". I detta fall multiplicerar vi med 1000 eftersom det decimalerna upprepas med perioden tre.

$$\begin{array}{rrcl} & 1000x & = & 158{,}158158158\ldots \\ - & x & = & 0{,}158158158\ldots \\ \hline & (1000-1)x & = & 158{,}0 \end{array}$$

Vi får

$$x = \frac{158}{1000-1} = \frac{158}{999}.$$

▲

Alla rationella uttryck kan skrivas som en potensserie.

Exempelvis gäller

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \tag{5.1}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \tag{5.2}$$

$$\frac{1}{x^2+1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots \tag{5.3}$$

$$\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \ldots \tag{5.4}$$

I de två första exemplen gäller att följden av koefficient är periodisk. Det gäller att alla potensserier där följden av koefficienter är periodisk motsvarar ett rationellt uttryck. Ett exempel på detta ges nedan. Tekniken är densamma som den som gällde för tal.

Exempel 5.1.2. Finn den rationella funktion som svarar mot potensserien

$$f(x) = 3 + 2x + 5x^2 + 3x^3 + 2x^4 + 5x^5 + \ldots$$

Här får vi multiplicera $f(x)$ med x^3 för att skifta termerna uppåt.

$$\begin{array}{rrcl} & f(x) & = & 3 + 2x + 5x^2 + 3x^3 + 2x^4 + 5x^5 + \ldots \\ - & x^3 f(x) & = & \qquad\qquad\quad +3x^3 + 2x^4 + 5x^5 + \ldots \\ \hline & (1-x^3)f(x) & = & 3 + 2x + 5x^2 + 0 \end{array}$$

Vi får

$$f(x) = \frac{3 + 2x + 5x^2}{1 - x^3}.$$

▲

Det omvända gäller däremot inte!

> Alla rationella funktioner får inte en periodisk koefficientföljd då den skrivs som en potensserie.

Av exempel 5.1.2 framgår att om nämnaren är på formen $x^n \pm 1$ så blir koefficientföljden periodisk, eftersom man då alltid kan skifta koefficienterna ”till önskat läge” genom att multiplicera med x^n.

Det allmänna fallet skall vi reda ut detta i detalj inom kort. Innan vi gör det kan det vara intressant att studera ett exempel på ett fall där metoden ovan ”tillämpas baklänges”.

Exempel 5.1.3. Finn den potensserie som motsvarar

$$\frac{x^2+2}{x+1}.$$

Först noterar vi att nämnaren är på formen $x^n + \pm 1$, så detta kommer också likna exempel 5.1.2. Därefter utför vi polynomdivisionen för att se vilken rest som erhålls. Vi finner

$$x^2+2 = (x+1)(x-1)+3 \Rightarrow \frac{x^2+2}{x+1} = x-1+\frac{3}{x+1}.$$

Antag nu att $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots$ där det finns någon periodicitet i koefficienterna och att

$$f(x) = \frac{3}{x+1}$$

gäller. Detta skrivs om till

$$xf(x) + f(x) = 3. \tag{5.5}$$

Om detta skrivs som i exempel 5.1.2 får vi

$$\begin{array}{rrcl} & xf(x) & = & a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4 + a_4x^5 + + \ldots \\ + & f(x) & = & a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots \\ \hline & (x+1)f(x) & = & 3 + 0\ x + 0\ x^2 + \ldots \end{array}$$

där summan av termerna i högerledet skall bli dem i högerledet av (5.5). Det går bara ihop om

$$\begin{array}{rclcl} 3 & = & a_0 & & \\ 0 & = & a_0 + a_1 & \Rightarrow & a_1 = -3 \\ 0 & = & a_1 + a_2 & \Rightarrow & a_2 = 3 \\ 0 & = & a_2 + a_3 & \Rightarrow & a_3 = -3 \\ \vdots & & & & \end{array}$$

Vi får alltså

$$\frac{x^2+2}{x+1} = x - 1 + 3 - 3x + 3x^2 - 3x^3 + \ldots$$

▲

För att förstå hur koefficienterna är relaterade till varandra generellt studerar vi följande exempel.

Exempel 5.1.4. Vi försöker uttrycka

$$f(x) = \frac{3x+1}{x^2-2x+5} \tag{5.6}$$

som en potensserie.

Vi antar att det går och ansätter en potensserie enligt

$$f(x) = \frac{3x+1}{x^2-2x+5} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots \tag{5.7}$$

Eftersom nämnaren har tre termer måste vi bilda tre rader enligt mönstret från tidigare exempel:

$$
\begin{array}{lrclllll}
 & x^2 f & = & & & a_0 x^2 & +a_1 x^3 & +\cdots \\
 & -2xf & = & & -2a_0 x & -2a_1 x^2 & -2a_2 x^3 & -\cdots \\
+ & 5f & = & 5a_0 & 5a_1 x & 5a_2 x^2 & +5a_3 x^3 & +\cdots \\
\hline
 & (x^2-2x+5)f & = & 1 & +\ 3x & +\ \ 0 & +\ \ 0 & +\cdots
\end{array}
$$

där summans högerled är identifierat ur täljaren i högerledet i (5.6).

För att alla termer skall summera till noll på ett korrekt sätt måste koefficienterna i (5.7) uppfylla

$$5a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 0 \tag{5.8}$$

med villkoren

$$
\begin{aligned}
5a_0 &= 1 \\
5a_1 - 2a_0 &= 3.
\end{aligned}
$$

Ekvation (5.8) är en differensekvation. Hur man löser sådana är en del[8] av Matematik 5.

Det går att hitta ett uttryck för a_n, men koefficienterna kommer att innehålla komplexa tal.

▲

Ur föregående exempel drar vi följande slutsats. Detta är så nära vi kommer likheterna mellan representationen av rationella funktioner som potensserier och representationen av rationella tal på decimalform.

Rationella funktioner får en koefficientföljd som uppfyller en (linjär) differensekvation.

De funktioner som inte får en koefficientföljd som är lösningen till linjära differensekvationer är alltså lika intressanta som tal som irrationella tal. Exempel på detta är

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots .$$

5.2 Konvergensradier och andra problem

Hittills har vi tagit upp potensserier som en slags motsvarighet för till decimalform för rationella uttryck. Om man istället betraktar dem som uttryck för funktioner måste man se upp!

Likheten

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

[8] Beroende på vilken teori som kursansvarig väljer att ta upp.

gäller uppenbart inte för alla x. För $x = 1$ får vi en division med noll, för $x > 1$ blir högerledet oändligt stort, medan vänsterledet ligger mellan -1 och noll.

För vissa potensserier finns ett tal r så att likheten gäller för alla x i intervallet $-r < x < r$. Talet r brukar kallas seriens **konvergensradie**.

Att bestämma konvergensradien för en given rationell funktion är generellt svårt och ligger utanför syftet med denna text.

Vissa rationella funktioner saknar potensserier. Ett exempel är

$$f(x) = \frac{8x + 11}{x^2 + 5x}.$$

Om man försöker bestämma en potensserie i enlighet med tidigare exempel fås

$$\begin{array}{rrclllll} & x^2 f & = & & & a_0x^2 & + \ a_1x^3 & + \cdots \\ + & 5xf & = & & 5a_0x & +5a_1x^2 & +5a_2x^3 & + \cdots \\ \hline & (x^2+5x)f & = & 11 & + \ \ 8x & + \quad 0 & + \quad 0 & + \cdots \end{array}$$

vilket inte ger en ekvation för den konstanta termen.

Detta problem kommer att uppkomma om nämnaren har ett nollställe i $x = 0$

Sammanfattingsvis fås alltså en skillnad mellan decimalform för rationella tal och potensserier för rationella uttryck. Alla rationella tal går att skriva på decimalform (med oändligt antal decimaler) men alla rationella uttryck har inte en motsvarande potensserie.

Dessutom finns som sagt den fundamentala skillnaden mellan algebraiska skapelser som polynom, rationella uttryck och potensserier, och motsvarande begrepp som funktioner. För rationella uttryck och dess eventuella postensserier fås inte ens samma funktionsvärde för alla x.

5.3 Algebraiska tal och funktioner

De reella tal som inte är rationella tal får en decimalutveckling som inte är periodisk. Det gäller till exempel för $\sqrt{2}$ och π.

De reella talen är överuppräkneligt många. På samma sätt är mängden av alla potensserier överuppräknelig.

De reella talen kan delas in i algebraiska tal och transcendenta tal enligt följande definition.

Tal som är lösningar till polynomekvationer med heltalskoefficienter benämns **algebraiska tal**. Tal som inte är algebraiska benämns **transcendenta**.

Exempelvis är $\sqrt{2}$ algebraiskt eftersom det är en av lösningarna till ekvationen $x^2 - 2 = 0$. Däremot är π inte algebraiskt. Man kan visa att de algebraiska talen är uppräkneliga. Därför måste de transcendenta vara överuppräkneliga eftersom hela $\mathbb{R}$ är det. Det finns några exempel till på transcendenta tal, men de flesta tal har alltså människan aldrig någonsin stött på.

Man kan göra en liknande uppdelning av funktionerna.

En **algebraisk funktion** är en funktion som är lösning till en polynomekvation där koefficienterna är polynom. Resterande funktioner benämns **transcendenta funktioner**.

Exempel 5.3.1. Alla rationella funktioner är algebraiska eftersom de är lösningar till ekvationen

$$Q(x)y - P(x) = 0.$$

Här är alltså $P(x)$ och $Q(x)$ polynom i x medan vänsterledet ovan är ett polynom i y där koefficienterna är polynom. Funktionen $\sqrt{x}$ är också algebraisk eftersom den är lösning till

$$y^2 - x = 0.$$

Några transcendenta funktioner är $\sin(x)$, e^x och $\ln(x)$. ▲

De algebraiska funktionerna är uppräkneliga, vilket de transcendenta inte är.

De flesta funktioner har människan alltså aldrig stött på!

5.4 Övningar

1. Skiv $\frac{15}{13}$ på decimalform.
2. Vilket rationellt tal motsvarar $3.\overline{12353}$?
3. Vilket rationellt tal motsvarar $5.17\overline{26}$?
4. Kontrollera att $0.4\overline{9} = \frac{1}{2}$.
5. Vilket rationella uttryck motsvarar $f(x) = 2+3x+4x^2+2x^3+3x^4+4x^5+\cdots$?
6. Uttryck $f(x) = \dfrac{5x^2+3x+2}{x^3+4}$ som en potensserie?
7. Verifiera att
$$f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$$
genererar Fibonaccis talföljd.
8. Verifiera att e^x genereras av talförljden $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$ med $a_0 = a_1 = 1$.
9. Verifira uttrycken (5.1)-(5.4)

Facit

1. $1.\overline{153846}$
2. $\dfrac{312353}{999}$
3. $\dfrac{51209}{9900}$
4. Som du förstår av detta exempel finns alltså alltid två sätt att skriva rationella tal med ”ändlig” decimalutveckling. Dels den vanliga som slutar med nollor, dels en som slutar med nior. Det kanske upplevs lite oväntat att detta fenomen uppstår i matematiken, men det beror på hur de reella talen definieras axiomatiskt, vilket ligger utanför ramen för denna text.
5. $f(x) = \dfrac{2+3x+4x^2}{1-x^3}$.

6.

$$\begin{array}{rcrcrcrc} f(x) & = & & \frac{2}{4} & + & \frac{3}{4}x & + & \frac{5}{4}x^2 \\ & & - & \frac{2}{4^2}x^3 & - & \frac{3}{4^2}x^4 & - & \frac{5}{4^2}x^5 \\ & & + & \frac{2}{4^3}x^6 & + & \frac{3}{4^3}x^7 & + & \frac{5}{4^3}x^8 & - \cdots \end{array}$$

7. Fibonaccis talföljd ges som lösning till $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ med $a_0 = 0$ och $a_1 = 1$.

8. -

9. -

6 Avslutning

Du har i denna text fått ett litet smakprov på matematikens storskaliga struktur. Du har sett att vissa begrepp som du kände till från talteorin gäller för fler matematiska skapelser som uppfyller vissa axiom.

Du har också sett att det är skillnad på att betrakta till exempel ett polynom som ett sorts tal, och på den ekvation och den funktion som definieras med samma polynom.

Sammanfattningsvis har vi avhandlar följande strukturer och begrepp.

Ring		**Kropp**		(Supremumegenskapen)
Heltal	$\rightarrow$	Rationella tal	$\rightarrow$	Reella tal
$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$
Polynom	$\rightarrow$	Rationella uttryck	$\rightarrow$	Potensserier
addition		multiplikativ invers		decimalutveckling
additativ invers		förlänga		algebraisk
(subtraktion)		förkorta		transendent
multiplikation		minsta gemensamma nämnare		
faktor		heltalsdel		
primtal				
irreducibel				
kvot				
delare				
rest				
sgd				
mgm				
relativt prima				