Лабораторная работа №3 (весна) – ступень 1

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА
(метод верхней релаксации, погрешность/точность заданы)

Выполнила: Суслова Виктория

Группа: 382003_4, Вариант: 5

1. Постановка задач

Основная задача

$$\Delta u(x,y) = -|x-y| \text{ при } x \in (0,2),\ y \in (0,1);$$
$$u(0,y) = -y(1-y), \qquad u(2,y) = y(1-y),$$
$$y \in [0,1]$$
$$u(x,0) = |\sin(\pi x)|, \qquad u(x,1) = |\sin(\pi x)|e^{x},$$
$$x \in [0,2]$$

Форма пластины: прямоугольник
Функция температуры (обозначение): $u(x,y)$
Функция плотности источников и стоков тепла (обозначение): $f(x,y)$
Какую функцию нужно искать (запишите): $u(x,y)$

Тестовая задача

$$\Delta u(x,y) = -0{,}5\pi^2 e^{\sin^2 \pi xy}(-4\cos(2\pi xy) + \cos(4\pi xy) - 1)(x^2+y^2)$$
$$\text{при } x \in (0,2),\ y \in (0,1);$$
$$u(0,y) = 1 \ \ u(2,y) = e^{\sin^2 2\pi y},$$
$$y \in [0,1]$$
$$u(x,0) = 1, \qquad u(x,1) = e^{\sin^2 \pi x},$$
$$x \in [0,2]$$

Решение тестовой задачи

$$u^*(x,y) = e^{\sin^2 \pi xy}$$

2. Сетка и разностная схема (общий вид)

Приведите описание сетки (рисунок и формулы).

Запишите разностную схему как систему разностных уравнений (для сетки произвольной размерности), укажите диапазоны изменения индексов.

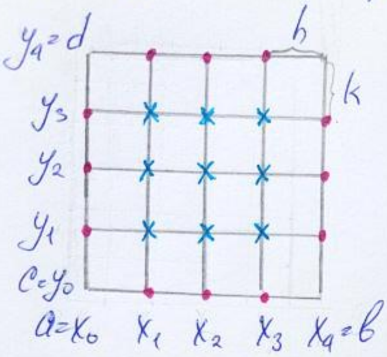
Нарисуйте шаблон разностного оператора.

Сетка:

n - число разбиений по x

m - число разбиений по y

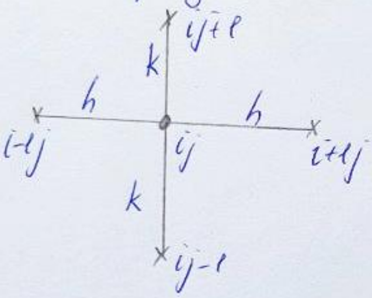
$h = \frac{b-a}{n}$ $\qquad$ $k = \frac{d-c}{m}$



$x_i = a + ih \qquad i = \overline{0,n}$

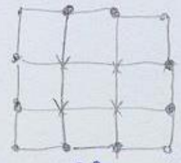
$y_j = c + jk \qquad j = \overline{0,m}$

Шаблон разностного оператора



Разностная схема

J $n = 3,\ m = 3 \Rightarrow$



$$\frac{v_{i-1j} - 2v_{ij} + v_{i+1j}}{h^2} + \frac{v_{ij-1} - 2v_{ij} + v_{ij+1}}{k^2} = -f_{ij}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} -2\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right)v_{11} + \frac{1}{h^2}v_{21} + \frac{1}{k^2}v_{12} = -f_{11} - \frac{1}{h^2}v_{01} - \frac{1}{k^2}v_{10} \\ -2\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right)v_{21} + \frac{1}{h^2}v_{11} + \frac{1}{k^2}v_{22} = -f_{21} - \frac{1}{h^2}v_{31} - \frac{1}{k^2}v_{20} \\ -2\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right)v_{12} + \frac{1}{h^2}v_{22} + \frac{1}{k^2}v_{11} = -f_{12} - \frac{1}{h^2}v_{02} - \frac{1}{k^2}v_{13} \\ -2\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right)v_{22} + \frac{1}{h^2}v_{12} + \frac{1}{k^2}v_{21} = -f_{22} - \frac{1}{h^2}v_{32} - \frac{1}{k^2}v_{23} \end{cases}$$

$i = 1,2$

$j = 1,2$

3. Разностная схема как СЛАУ $\mathcal{AV} = \mathcal{F}$

Размерность матрицы $\mathcal{A}$ $(m-1)(n-1) \times (m-1)(n-1)$

Свойства матрицы $\mathcal{A}$

1) $-\mathcal{A} = -\mathcal{A}^{\mathrm{T}}$
2) $\det(-\mathcal{A}) \neq 0$
3) $-\mathcal{A} > 0$
4) $\exists$ ортонормированный базис из собственных векторов

Минимальное по модулю собственное число:

$$|\lambda_{min}| = |\frac{4}{h^2} sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) + \frac{4}{k^2} sin^2\left(\frac{\pi}{2m}\right)|$$

Максимальное по модулю собственное число:

$$|\lambda_{max}| = |\frac{4}{h^2} cos^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) + \frac{4}{k^2} cos^2\left(\frac{\pi}{2m}\right)|$$

Число обусловленности: $\mu_A = \frac{|\lambda_{max}|}{|\lambda_{\min|}}$

4. Запись схемы в виде $\mathcal{AV} = \mathcal{F}$ или $-\mathcal{AV} = -\mathcal{F}$

на сетке размерности (3, 3)

(должны быть указаны все элементы матрицы, вектора и правой части на сетке конкретной размерности, использовать альбомный разворот или вклеить свой рисунок)

$$\begin{bmatrix} A & \frac{1}{h^2} & \frac{1}{k^2} & 0 \\ \frac{1}{h^2} & A & 0 & \frac{1}{k^2} \\ \frac{1}{k^2} & 0 & A & \frac{1}{h^2} \\ 0 & \frac{1}{k^2} & \frac{1}{h^2} & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_{11} - \frac{1}{h^2} v_{01} - \frac{1}{k^2} v_{10} \\ -f_{21} - \frac{1}{h^2} v_{31} - \frac{1}{k^2} v_{20} \\ -f_{12} - \frac{1}{h^2} v_{02} - \frac{1}{k^2} v_{13} \\ -f_{22} - \frac{1}{h^2} v_{32} - \frac{1}{k^2} v_{23} \end{bmatrix}$$

$a = 0 \quad b = 2 \quad c = 0 \quad d = 1 \quad n = 3 \quad m = 3$

$h = \frac{2}{3} \qquad k = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{h^2} = \frac{9}{4} \qquad \frac{1}{k^2} = 9 \qquad A = -2\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right)$

5. Описание итерационного метода

1) Запишите итерационный метод в каноническом виде (т. е. для решения произвольных СЛАУ вида $Ax = b,\ A = A^T > 0$), укажите параметры метода;

2) Запишите итерационный метод для решения схемы $-\mathcal{A}\mathcal{V} = -\mathcal{F}$, а именно:
   - формулы для расчета каждой компоненты искомого вектора $\mathcal{V}$ на очередной итерации (исходный вариант и оптимизация);
   - формулы для расчета невязки $\mathcal{R}$ (исходный вариант и оптимизация).

Укажите, зачем проведена замена знаков в системе $\mathcal{A}\mathcal{V} = \mathcal{F}$

Канонический вид: $w \in (0, 2)$ – параметр метода

$$(D + wA_1)\frac{x^{i+1} + x^i}{w} + Ax^i = f$$

$r = Av - b$ – исходный вариант

Формулы для расчета каждой компоненты:

$$r_{ij} = -2\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right)v_{ij} + \frac{1}{h^2}\left(v_{i+1j} + v_{i-1j}\right) + \frac{1}{k^2}\left(v_{ij+1} + v_{ij-1}\right) - f_{ij}$$

$$v_{ij}^{s+1} = -\frac{1}{-2\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{k^2}\right)}\left((1 - w)\left(2\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right)v_{ij}^s + w\left(\frac{1}{h^2}v_{i-1j}^{s+1} + \frac{1}{k^2}v_{ij-1}^{s+1} + \frac{1}{h^2}v_{i+1j}^s + \frac{1}{k^2}v_{ij+1}^s + f_{ij}\right)\right)$$

Замена знаков в системе произведена, чтобы получить положительно определенную матрицу (для сходимости).

6. Анализ структуры погрешности

Запишите обозначения и определения всех типов (компонент) погрешностей, возникающих при решении основной и тестовой задачи с помощью разностных схем итерационными методами.

Запишите утверждения, необходимые для оценки погрешностей, и формулировку теоремы о сходимости итерационного метода.

Вычислительная погрешность:

$\text{ВП} = v^{(s)} - \tilde{v}^{(s)}$ – разность между тем, что хотим получить и получили.

Погрешность метода:

$\text{ИП} = v - v^{(s)}$ – разность точного решения разностной схемы и решения на шаге s.

Погрешность схемы:

$\text{РП} = u - v$ – разность решения ДУ и решения разностной схемы.

Общая погрешность:

$\text{ОП} = u - v + v - v^{(s)} + v^{(s)} - \tilde{v}^{(s)} = \text{РП} + \text{ИП} + \text{ВП}$

$|\text{ОП}| \leq |\text{РП}| + |\text{ВП}| + |\text{ИП}|$ – оценка общей погрешности

Погрешность решения на шаге s:

$$\left\|z^{(s)}\right\|_2 \leq \|A^{-1}\|_2 \left\|r^{(s)}\right\|_2 = \frac{\left\|r^{(s)}\right\|_2}{\lambda_1(A)}$$

По теореме о сходимости схемы:

$$\left\|z^{(s)}\right\|_\infty \leq \frac{(b-a)^2 + (d-c)^2}{16}\left(\widehat{M}_1 h^2 + \widehat{M}_2 k^2\right)$$

$$\widehat{M}_1 = \frac{1}{12} max\left|u_{xxxx}^{IV}(x,y)\right|$$

$$\widehat{M}_2 = \frac{1}{12} max\left|u_{yyyy}^{IV}(x,y)\right|$$

Погрешность итерационного метода:

$$\left\|z^{(s)}\right\|_2 \leq \rho^s \left\|z^{(0)}\right\|_2$$

7. Численное решение тестовой задачи с заданной погрешностью

Тестовая задача должна быть решена с заданной погрешностью $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-6}$

Тестовая задача решена с погрешностью $\varepsilon 1 = 4 \cdot 10^{-5}$

Максимальное отклонение точного и численного решений в узле

$x = 1.81$ $y = 0.831667$

Для решения тестовой задачи использована сетка

Число разбиений по x $n = 600$ число разбиений по y $m = 600$

метод верхней релаксации с параметром $w = 1.995$

Значения критериев остановки метода:

По точности $\varepsilon_{met} = 10^{-10}$ по числу итераций $N_{max} = 1000000$

На решение СЛАУ затрачено $N = 4942$ итераций

Достигнута точность метода $\varepsilon^{(N)} = 9.999357 \cdot 10^{-11}$

СЛАУ решена с невязкой $\| R^{(N)} \| = 6 \cdot 10^{-4}$

для невязки использована евклидова норма

погрешность решения СЛАУ

$\| Z^{(N)} \|_\infty \leq \| Z^{(N)} \|_2 \leq \|A^{-1}\|_2 \left\|R^{(N)}\right\|_2 = \frac{6 \cdot 10^{-4}}{12.33698} = 4.86343 \cdot 10^{-5}$

Начальное приближение итерационного метода – интерполяция по x

По теореме о сходимости схемы погрешность схемы

$\| \mathrm{z} \|_\infty \leq 3 \cdot 10^{-4}$

Использована норма $\| \mathrm{z} \|_\infty = \max |z|$

Общая погрешность решения тестовой задачи с учетом ее компонент

$\| \mathrm{z}_{\text{общ}} \|_\infty \leq 3 \cdot 10^{-4} + 4.86343 \cdot 10^{-5} = 3{,}78 \cdot 10^{-4}$

Использована норма $\| \mathrm{z}_{\text{общ}} \|_\infty = \max |\mathrm{z}_{\text{общ}}|$

Численное решение

	i	0	1	2	3	4	5
j	Y\X	0	0,003333333333...	0,006666666666...	0,01	0,013333333333...	0,01666666
0	0	1	1	1	1	1	1
1	0,0016...	1	1	1	1	1	1,00000001
2	0,0033...	1	1	1	1,00000001	1,00000002	1,00000003
3	0,005	1	1	1,00000001	1,00000002	1,00000004	1,00000007
4	0,0066...	1	1	1,00000002	1,00000004	1,00000008	1,00000012
5	0,0083...	1	1,00000001	1,00000003	1,00000007	1,00000012	1,00000019
6	0,01	1	1,00000001	1,00000004	1,0000001	1,00000018	1,00000027
7	0,0116...	1	1,00000001	1,00000006	1,00000013	1,00000024	1,00000037
8	0,0133...	1	1,00000002	1,00000008	1,00000018	1,00000031	1,00000049
9	0,015	1	1,00000002	1,0000001	1,00000022	1,00000039	1,00000062
10	0,0166...	1	1,00000003	1,00000012	1,00000027	1,00000049	1,00000076
11	0,0183...	1	1,00000004	1,00000015	1,00000033	1,00000059	1,00000092
12	0,02	1	1,00000004	1,00000018	1,00000039	1,0000007	1,0000011

Точное решение

	i	0	1	2	3	4	5
j	Y\X	0	0,003333333333...	0,006666666666...	0,01	0,013333333333...	0,016666666
0	0	1	1	1	1	1	1
1	0,0016...	1	1	1	1	1	1,00000001
2	0,0033...	1	1	1	1,00000001	1,00000002	1,00000003
3	0,005	1	1	1,00000001	1,00000002	1,00000004	1,00000007
4	0,0066...	1	1	1,00000002	1,00000004	1,00000008	1,00000012
5	0,0083...	1	1,00000001	1,00000003	1,00000007	1,00000012	1,00000019
6	0,01	1	1,00000001	1,00000004	1,0000001	1,00000018	1,00000027
7	0,0116...	1	1,00000001	1,00000006	1,00000013	1,00000024	1,00000037
8	0,0133...	1	1,00000002	1,00000008	1,00000018	1,00000031	1,00000049
9	0,015	1	1,00000002	1,0000001	1,00000022	1,00000039	1,00000062
10	0,0166...	1	1,00000003	1,00000012	1,00000027	1,00000049	1,00000076
11	0,0183...	1	1,00000004	1,00000015	1,00000033	1,00000059	1,00000092
12	0,02	1	1,00000004	1,00000018	1,00000039	1,0000007	1,0000011

Разность точного и численного решения

	i	0	1	2	3	4	5
j	Y\X	0	0,003333333333...	0,006666666666...	0,01	0,013333333333...	0,01666666
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0,0016...	0	0	0	0	0	0
2	0,0033...	0	0	0	0	0	0
3	0,005	0	0	0	0	0	0
4	0,0066...	0	0	0	0	0	0
5	0,0083...	0	0	0	0	0	0
6	0,01	0	0	0	0	0	0
7	0,0116...	0	0	0	0	0	0
8	0,0133...	0	0	0	0	0	0
9	0,015	0	0	0	0	0	0
10	0,0166...	0	0	0	0	0	0
11	0,0183...	0	0	0	0	0	0
12	0,02	0	0	0	0	0	0

8. Численное решение основной задачи

Основная задача должна быть решена с заданной точностью $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-6}$

Основная задача решена с точностью $\varepsilon 2 = 3 \cdot 10^{-3}$

Максимальное отклонение численных решений на основной сетке и сетке с половинным шагом в узле $x = 1 \quad y = 0.998$

Для решения основной задачи использована сетка

Число разбиений по $x\ n = 500$ число разбиений по $y\ m = 500$

метод верхней релаксации с параметром $w = 1.994$

Значения критериев остановки метода:

По точности $\varepsilon_{met} = 10^{-10}$ по числу итераций $N_{max} = 1000000$

На решение СЛАУ затрачено $N = 4501$ итераций

Достигнута точность метода $\varepsilon^{(N)} = 3.266 \cdot 10^{-11}$

СЛАУ решена с невязкой $\| R^{(N)} \| = 10^{-3}$

для невязки использована евклидова норма

погрешность решения СЛАУ

$$\| Z^{(N)} \|_\infty \leq \| Z^{(N)} \|_2 \leq \|A^{-1}\|_2 \left\| R^{(N)} \right\|_2 = \frac{10^{-3}}{12.33696} = 8.10571 \cdot 10^{-8}$$

Начальное приближение итерационного метода интерполяция по x

Для контроля точности использована сетка

число разбиений по $x\ n2 = 1000$

число разбиений по $y\ m2 = 1000$

Метод верхней релаксации с параметром $w2 = 1.997$

Значения критериев остановки метода:

По точности $\varepsilon_{met2} = 10^{-10}$

по числу итераций $N2_{max} = 1000000$

На решение СЛАУ затрачено $N2 = 9001$ итераций

Достигнута точность метода $\varepsilon^{(N2)} = 2.2925 \cdot 10^{-11}$

СЛАУ решена с невязкой $\| R^{(N2)} \| = 6 \cdot 10^{-3}$

для невязки использована евклидова норма

погрешность решения СЛАУ

$$\| Z^{(N2)} \|_\infty \leq \| Z^{(N2)} \|_2 \leq \|A^{-1}\|_2 \left\|R^{(N)}\right\|_2 = \frac{6\cdot 10^{-3}}{12.337} = 4.86342 \cdot 10^{-4}$$

Начальное приближение итерационного метода интерполяция по x

Численное решение:

	i	0	1	2	3	4	5
j	Y\X	0	0,004	0,008	0,012	0,016	0,02
0	0	0	0,01256604	0,0251301	0,03769018	0,05024432	0,06279052
1	0,002	0,001996	0,01444243	0,02689713	0,03935314	0,05180669	0,06425493
2	0,004	0,003984	0,01631677	0,02866387	0,04101675	0,05337045	0,06572136
3	0,006	0,005964	0,01818753	0,03042917	0,0426802	0,05493494	0,06718929
4	0,008	0,007936	0,02005376	0,03219214	0,04434273	0,05649959	0,06865821
5	0,01	0,0099	0,02191485	0,03395206	0,04600372	0,05806382	0,07012765
6	0,012	0,011856	0,02377038	0,03570837	0,0476626	0,05962713	0,07159717
7	0,014	0,013804	0,02562004	0,03746063	0,04931891	0,0611891	0,07306634
8	0,016	0,015744	0,02746361	0,03920849	0,05097226	0,0627493	0,0745348
9	0,018	0,017676	0,0293009	0,04095167	0,05262229	0,06430739	0,0760022
10	0,02	0,0196	0,03113179	0,04268992	0,05426874	0,06586305	0,07746821
11	0,022	0,021516	0,03295615	0,04442305	0,05591134	0,06741602	0,07893256
12	0,024	0,023424	0,0347739	0,0461509	0,05754988	0,06896606	0,08039499

Численное решение2

	i	0	1	2	3	4	5
j	Y\X	0	0,004	0,008	0,012	0,016	0,02
0	0	0	0,01256604	0,0251301	0,03769018	0,05024432	0,06279052
1	0,002	0,001996	0,01444216	0,02689695	0,03935301	0,05180659	0,06425484
2	0,004	0,003984	0,01631642	0,02866356	0,04101651	0,05337025	0,0657212
3	0,006	0,005964	0,01818718	0,0304288	0,04267988	0,05493468	0,06718906
4	0,008	0,007936	0,02005344	0,03219175	0,04434236	0,05649926	0,06865792
5	0,01	0,0099	0,02191457	0,03395167	0,04600332	0,05806344	0,07012732
6	0,012	0,011856	0,02377014	0,03570799	0,04766219	0,05962674	0,07159679
7	0,014	0,013804	0,02561983	0,03746028	0,0493185	0,06118868	0,07306594
8	0,016	0,015744	0,02746341	0,03920816	0,05097186	0,06274888	0,07453438
9	0,018	0,017676	0,02930073	0,04095136	0,05262191	0,06430697	0,07600177
10	0,02	0,0196	0,03113163	0,04268963	0,05426837	0,06586264	0,07746778
11	0,022	0,021516	0,032956	0,04442278	0,05591098	0,06741562	0,07893213
12	0,024	0,023424	0,03477376	0,04615064	0,05754954	0,06896566	0,08039456

Разность решений

	i	0	1	2	3	4	5
j	Y\X	0	0,004	0,008	0,012	0,016	0,02
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0,002	0	2,7E-07	1,8E-07	1,3E-07	1E-07	8E-08
2	0,004	0	3,6E-07	3,1E-07	2,4E-07	1,9E-07	1,6E-07
3	0,006	0	3,5E-07	3,7E-07	3,2E-07	2,7E-07	2,3E-07
4	0,008	0	3,2E-07	3,9E-07	3,7E-07	3,3E-07	2,9E-07
5	0,01	0	2,8E-07	3,9E-07	4E-07	3,7E-07	3,4E-07
6	0,012	0	2,5E-07	3,7E-07	4,1E-07	4E-07	3,7E-07
7	0,014	0	2,2E-07	3,5E-07	4,1E-07	4,1E-07	4E-07
8	0,016	0	2E-07	3,3E-07	4E-07	4,2E-07	4,2E-07
9	0,018	0	1,8E-07	3,1E-07	3,9E-07	4,2E-07	4,3E-07
10	0,02	0	1,6E-07	2,9E-07	3,7E-07	4,2E-07	4,3E-07
11	0,022	0	1,5E-07	2,7E-07	3,6E-07	4,1E-07	4,3E-07
12	0,024	0	1,4E-07	2,6E-07	3,4E-07	4E-07	4,3E-07

9. Проверка программы: контроль «порядка сходимости»

Проверка убывания погрешности $\varepsilon1$ при решении тестовой задачи и проверка динамики точности $\varepsilon2$ (рост точности) при решении основной задачи показывают следующее:

Тестовая задача

n	m	ε_m	$\varepsilon^{(s)}$	$\max\lvert u^* - v^{(N)}\rvert$	*Отношение значений погрешности*
5	5	10^{-5}	$7.4 \cdot 10^{-6}$	$8.13 \cdot 10^{-1}$	---
10	10	10^{-5}	$4.7 \cdot 10^{-6}$	$1.495 \cdot 10^{-1}$	6
50	50	10^{-5}	$9.1 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-3}$	24
100	100	10^{-5}	$9.6 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-3}$	4
Порядок 2					

Основная задача

n	m	ε_m	$\varepsilon^{(s)}$	ε_{m2}	$\varepsilon^{(s2)}$	$\max\lvert v^{(N)} - v2^{(N2)}\rvert$	*Отношение значений погрешности*
5	5	10^{-5}	$5.1 \cdot 10^{-6}$	10^{-5}	$3.9 \cdot 10^{-6}$	$1.4 \cdot 10^{-1}$	---
10	10	10^{-5}	$9.9 \cdot 10^{-6}$	10^{-5}	$9.9 \cdot 10^{-6}$	$1.43 \cdot 10^{-1}$	1
50	50	10^{-5}	$9.6 \cdot 10^{-6}$	10^{-5}	$9.8 \cdot 10^{-6}$	$2.7 \cdot 10^{-2}$	5
100	100	10^{-5}	$9.9 \cdot 10^{-6}$	10^{-5}	$9.9 \cdot 10^{-6}$	$1.4 \cdot 10^{-2}$	2
Порядок 1							

На сетке (n, m) использованы значения w = 1.4, 1.7, 1.94, 1.97

На сетке (2n, 2m) использованы значения w2 = 1.7, 1.85, 1.97, 1.985

10.Выводы, ответы на вопросы

Погрешность состоит из нескольких компонент: погрешность итерационного метода, погрешность схемы и вычислительная погрешность. При росте размерности матрицы, растет число арифметических действий, соответственно растет и вычислительная погрешность и тем самым вносит большой вклад в оценку общей погрешности. Оценка погрешности схемы при увеличении размерности матрицы также будет сходиться со вторым порядком.

Таким образом, при малом количестве разбиений вычислительная погрешность и погрешность метода малы, погрешность схемы сильно влияет на оценку общей погрешности. При большом количестве разбиений погрешность схемы становится мала и мало влияет на оценку общей погрешности, но вычислительная погрешность сильно растет и не позволяет схеме сходиться со вторым порядком. Оценка итерационного метода очень мала и не вносит особого вклада в оценку общей погрешности.

Для того чтобы уменьшить вычислительную погрешность надо: хранить отношения в форме обыкновенных дробей, использовать более мощный компьютер, выбирать число разбиений тщательно, чтобы погрешность была минимальна.

При решении тестовой задачи методом сопряженных градиентов подтверждается второй порядок сходимости, что соответствует теоретической оценке. Это можно увидеть по таблице из пункта 9. При изменении размерности матрицы в 10 раз погрешность изменяется в 100 раз. Но не удается достичь заданной погрешности из-за оценки общей погрешности.

При решении основной задачи методом сопряженных градиентов второй порядок точности не подтвердился, потому что при численном решении появляется общая погрешность, состоящая из нескольких компонент, также при решении задачи на контрольной сетке при большем числе разбиений присутствует общая погрешность и вычислительная погрешность на контрольной сетке еще больше, которая в итоге не дает схеме сойтись со вторым порядком.

11.Сведения о программе

Интерполяция по x для тестовой задачи

```
public double interpolation_x_test(double j, double m, double c, double d)
{
        double t;
        double k = (d - c) / m;
        double y = c + j * k;
        t = j / m;
        return (mu2_test(y) - mu1_test(y)) * t + mu1_test(y);
}
```

Заполнение граничных условий

```
for (int j = 0; j <= m; j++)
{
        double y = c + j * k;
        v[0][j] = mu1_test(y);
        v[n][j] = mu2_test(y);
}
for (int i = 0; i <= n; i++)
{
        double x = a + i * h;
        v[i][0] = mu3_test(x);
        v[i][m] = mu4_test(x);
}
```

Заполнение вектора правой части

```
for (int j = 0; j <= m; j++)
        for (int i = 0; i <= n; i++)
        {
                double x = a + i * h;
                double y = c + j * k;
                f[i][j] = f_test(x, y);
}
```

Невязка

```
for (int j = 1; j < m; j++)
        for (int i = 1; i < n; i++)
                R[i][j] = a2 * v[i][j] + h2 * v[i + 1][j] + h2 * v[i - 1][j] + k2 * v[i][j + 1] + k2 * v[i][j - 1] -
f[i][j];

R0 = 0.0;
for (int i = 0; i < n + 1; i++)
        for (int j = 0; j < m + 1; j++)
                R0 += R[i][j] * R[i][j];
R0 = Math.Sqrt(R0);
```

Метод верхних релаксаций

```
double v_old, v_new;
double eps_curr = 0.0;
bool flag = false;
while (!flag)
{
	eps_max = 0.0;
	for (int j = 1; j < m; j++)
	{
		for (int i = 1; i < n; i++)
		{
			v_old = v[i][j];
			v_new = -w * (h2 * v[i + 1][j] + h2 * v[i - 1][j] + k2 * v[i][j + 1] + k2 * v[i][j - 1]);
			v_new = v_new + (1 - w) * a2 * v[i][j] + w * f[i][j];
			v_new = v_new / a2;
			v[i][j] = v_new;
			R[i][j] = a2 * v[i][j] + h2 * v[i + 1][j] + h2 * v[i - 1][j] + k2 * v[i][j + 1] + k2 *
v[i][j - 1] - f[i][j];

			eps_curr = Math.Abs(v_old - v_new);
			if (eps_curr > eps_max)
				eps_max = eps_curr;
		}
	}
	s++;
	if ((eps_max <= eps) || (s >= n_max))
		flag = true;
}
```