

Лабораторная работа №3 (весна) – степень 2

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА
(итерационный метод и его реализация)

Выполнила: Сусллова Виктория

Группа: 382003_4, Вариант: 5

Метод: метод сопряженных градиентов

1. Постановка задач

Основная задача

$$\begin{aligned}\Delta u(x, y) &= -|x - y| \text{ при } x \in (0, 2), y \in (0, 1); \\ u(0, y) &= -y(1 - y), \quad u(2, y) = y(1 - y), \\ &\quad y \in [0, 1] \\ u(x, 0) &= |\sin(\pi x)|, \quad u(x, 1) = |\sin(\pi x)|e^x, \\ &\quad x \in [0, 2]\end{aligned}$$

Форма пластины: прямоугольник

Функция температуры (обозначение): $u(x, y)$

Функция плотности источников и стоков тепла (обозначение): $f(x, y)$

Какую функцию нужно искать (запишите): $u(x, y)$

Тестовая задача

$$\begin{aligned}\Delta u(x, y) &= -0,5\pi^2 e^{\sin^2 \pi xy} (-4 \cos(2\pi xy) + \cos(4\pi xy) - 1)(x^2 + y^2) \\ &\quad \text{при } x \in (0, 2), y \in (0, 1); \\ u(0, y) &= 1 \quad u(2, y) = e^{\sin^2 2\pi y}, \\ &\quad y \in [0, 1] \\ u(x, 0) &= 1, \quad u(x, 1) = e^{\sin^2 \pi x}, \\ &\quad x \in [0, 2]\end{aligned}$$

Решение тестовой задачи

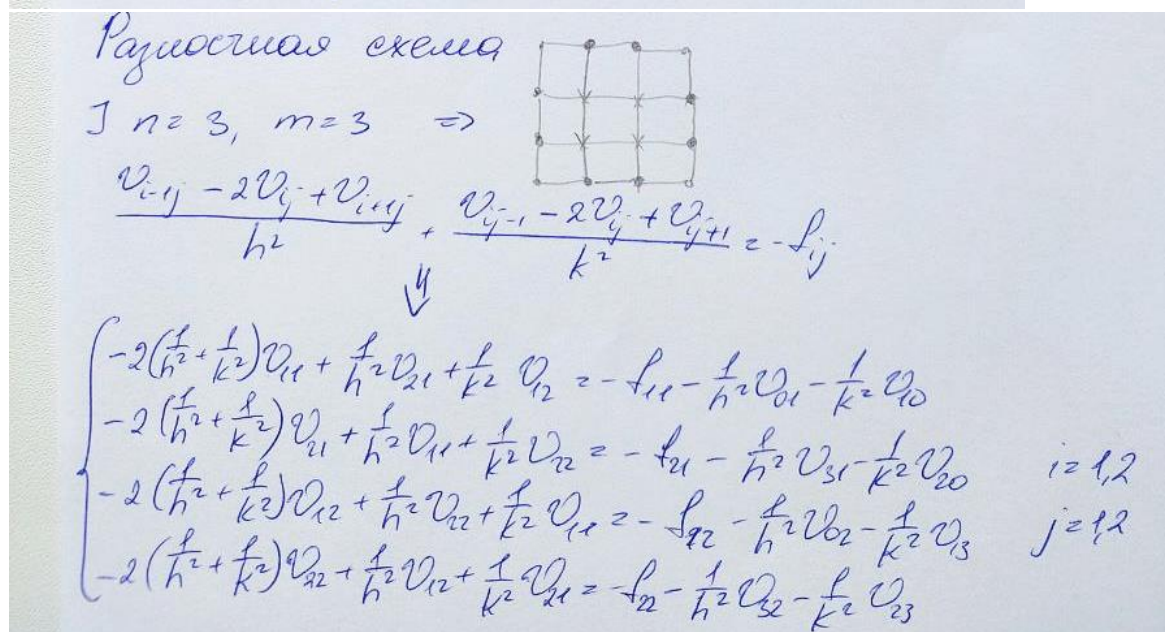
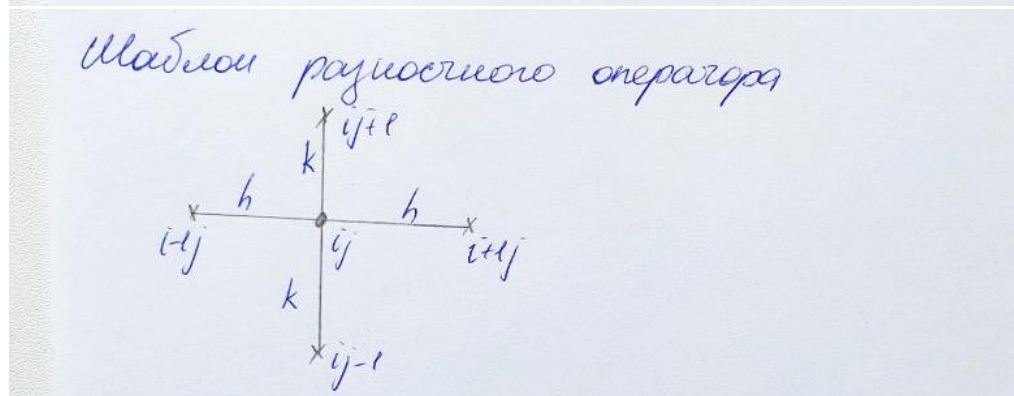
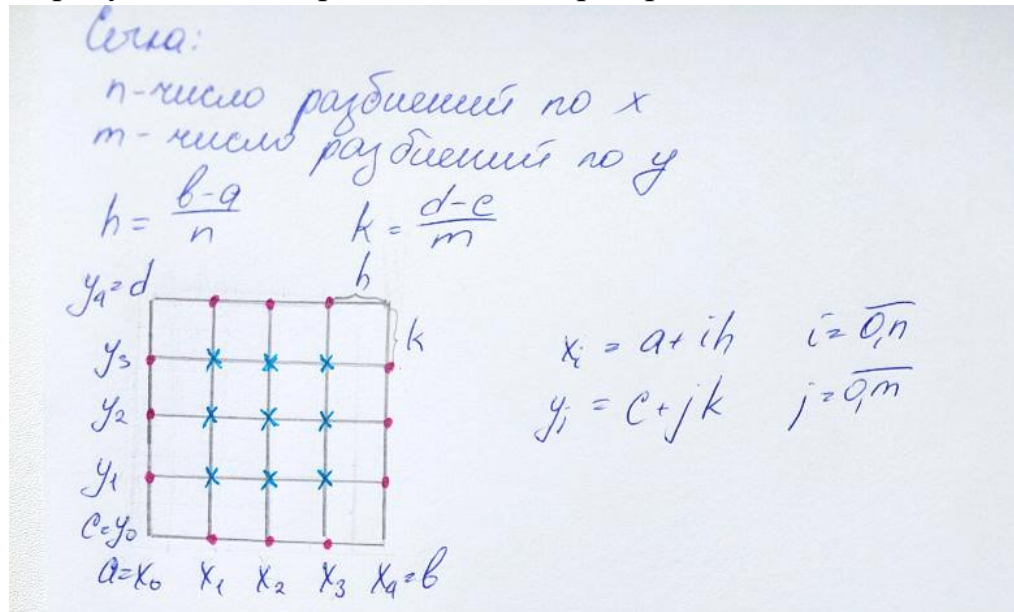
$$u^*(x, y) = e^{\sin^2 \pi xy}$$

2. Сетка и разностная схема (общий вид)

Приведите описание сетки (рисунок и формулы).

Запишите разностную схему как систему разностных уравнений (для сетки произвольной размерности), укажите диапазоны изменения индексов.

Нарисуйте шаблон разностного оператора.



3. Разностная схема как СЛАУ $\mathcal{A}\mathcal{V} = \mathcal{F}$

Размерность матрицы \mathcal{A} $(m-1)(n-1) \times (m-1)(n-1)$

Свойства матрицы \mathcal{A}

- 1) $-\mathcal{A} = -\mathcal{A}^T$
- 2) $\det(-\mathcal{A}) \neq 0$
- 3) $-\mathcal{A} > 0$
- 4) \exists ортонормированный базис из собственных векторов

Минимальное по модулю собственное число:

$$|\lambda_{\min}| = \left| \frac{4}{h^2} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2n} \right) + \frac{4}{k^2} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2m} \right) \right|$$

Максимальное по модулю собственное число:

$$|\lambda_{\max}| = \left| \frac{4}{h^2} \cos^2 \left(\frac{\pi}{2n} \right) + \frac{4}{k^2} \cos^2 \left(\frac{\pi}{2m} \right) \right|$$

Число обусловленности: $\mu_A = \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|}$

4. Запись схемы в виде $\mathcal{AV} = \mathcal{F}$ или $-\mathcal{AV} = -\mathcal{F}$

на сетке размерности (3, 3)

(должны быть указаны все элементы матрицы, вектора и правой части на сетке конкретной размерности, использовать альбомный разворот или вклеить свой рисунок)

$$\begin{bmatrix} A & \frac{1}{h^2} & \frac{1}{k^2} & 0 \\ \frac{1}{h^2} & A & 0 & \frac{1}{k^2} \\ \frac{1}{k^2} & 0 & A & \frac{1}{h^2} \\ 0 & \frac{1}{k^2} & \frac{1}{h^2} & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_{11} - \frac{1}{h^2} v_{01} - \frac{1}{k^2} v_{10} \\ -f_{21} - \frac{1}{h^2} v_{31} - \frac{1}{k^2} v_{20} \\ -f_{12} - \frac{1}{h^2} v_{02} - \frac{1}{k^2} v_{13} \\ -f_{22} - \frac{1}{h^2} v_{32} - \frac{1}{k^2} v_{23} \end{bmatrix}$$

$$a=0 \quad b=2 \quad c=0 \quad d=1 \quad n=3 \quad m=3$$

$$h = \frac{2}{3} \quad k = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{9}{4} \quad \frac{1}{k^2} = 9$$

$$A = -2 \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2} \right)$$

5. Описание итерационного метода

- 1) Запишите итерационный метод в каноническом виде (т. е. для решения произвольных СЛАУ вида $Ax = b$, $A = A^T > 0$), укажите параметры метода;
- 2) Запишите итерационный метод для решения схемы $-AV = -F$, а именно:
 - формулы для расчета каждой компоненты искомого вектора V на очередной итерации (исходный вариант и оптимизация);
 - формулы для расчета невязки R (исходный вариант и оптимизация);
 - формулы для расчета параметров метода (оптимизация).

Укажите, зачем проведена замена знаков в системе $AV = F$

α_s, β_s – параметры метода

Шаг 1:

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \alpha_0 h^{(0)}$$

$$h^{(0)} = -r^{(0)} = Ax^{(0)} - b.$$

$$\alpha_0 = -\frac{(Ax^{(0)} - b, h^{(0)})}{(Ah^{(0)}, h^{(0)})}$$

Шаг 2 и далее:

$$x^{(s+1)} = x^{(s)} + \alpha_s h^{(s)}$$

$$h^{(s)} = -r^{(s)} + \beta_s h^{(s-1)}$$

$$r^{(s)} = Ax^{(s)} - b$$

$$\beta_s = \frac{(Ah^{(s-1)}, r^{(s)})}{(Ah^{(s-1)}, h^{(s-1)})}$$

$$\alpha_s = -\frac{(Ax^{(s)} - b, h^{(s)})}{(Ah^{(s)}, h^{(s)})}$$

Формулы для расчета каждой компоненты:

1-я итерация:

$$v_{ij} = v_{ij} + \alpha_s h_{ij}$$

$$h_{ij} = -r_{ij}$$

$$r_{ij} = -2\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right)v_{ij} + \frac{1}{h^2}(v_{i+1j} + v_{i-1j}) + \frac{1}{k^2}(v_{ij+1} + v_{ij-1}) - f_{ij}$$

$$\alpha_0 = \frac{r_{ij} h_{ij}}{\left(-2\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right)h_{ij} + \frac{1}{h^2}(h_{i+1j} + h_{i-1j}) + \frac{1}{k^2}(h_{ij+1} + h_{ij-1})\right)h_{ij}}$$

2-я итерация:

$$v_{ij} = v_{ij} + \alpha_s h_{ij}$$

$$h_{ij} = -r_{ij} + \beta_s h_{ij}$$

$$r_{ij} = -2\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right)v_{ij} + \frac{1}{h^2}(v_{i+1j} + v_{i-1j}) + \frac{1}{k^2}(v_{ij+1} + v_{ij-1}) - f_{ij}$$

$$\beta_s = \frac{\left(-2\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right)h_{ij} + \frac{1}{h^2}(h_{i+1j} + h_{i-1j}) + \frac{1}{k^2}(h_{ij+1} + h_{ij-1})\right)r_{ij}}{\left(-2\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right)h_{ij} + \frac{1}{h^2}(h_{i+1j} + h_{i-1j}) + \frac{1}{k^2}(h_{ij+1} + h_{ij-1})\right)h_{ij}}$$

$$\alpha_s = \frac{r_{ij} h_{ij}}{\left(-2\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}\right)h_{ij} + \frac{1}{h^2}(h_{i+1j} + h_{i-1j}) + \frac{1}{k^2}(h_{ij+1} + h_{ij-1})\right)h_{ij}}$$

Замена знаков в системе произведена, чтобы получить положительно определенную матрицу (для сходимости).

6. Анализ структуры погрешности

Запишите обозначения и определения всех типов (компонент) погрешностей, возникающих при решении основной и тестовой задачи с помощью разностных схем итерационными методами.

Запишите утверждения, необходимые для оценки погрешностей, и формулировку теоремы о сходимости итерационного метода.

Вычислительная погрешность:

ВП = $v^{(s)} - \tilde{v}^{(s)}$ – разность между тем, что хотим получить и получили.

Погрешность метода:

ИП = $v - v^{(s)}$ – разность точного решения разностной схемы и решения на шаге s.

Погрешность схемы:

РП = $u - v$ – разность решения ДУ и решения разностной схемы.

Общая погрешность:

$$\text{ОП} = u - v + v - v^{(s)} + v^{(s)} - \tilde{v}^{(s)} = \text{РП} + \text{ИП} + \text{ВП}$$

$|\text{ОП}| \leq |\text{РП}| + |\text{ВП}| + |\text{ИП}|$ – оценка общей погрешности

Погрешность решения СЛАУ на шаге s:

$$\|z^{(s)}\|_2 \leq \|A^{-1}\|_2 \|r^{(s)}\|_2 = \frac{\|r^{(s)}\|_2}{\lambda_1(A)}$$

По теореме о сходимости схемы:

$$\|z^{(s)}\|_\infty \leq \frac{(b-a)^2 + (d-c)^2}{16} (\hat{M}_1 h^2 + \hat{M}_2 k^2)$$

$$\hat{M}_1 = \frac{1}{12} \max |u_{xxxx}^{IV}(x, y)|$$

$$\hat{M}_2 = \frac{1}{12} \max |u_{yyyy}^{IV}(x, y)|$$

Погрешность итерационного метода:

$$\|z^{(s)}\|_2 \leq \frac{2\rho^s}{1+\rho^{2s}} \|z^{(0)}\|_2$$

7. Численное решение тестовой задачи с заданной погрешностью

Тестовая задача должна быть решена с заданной погрешностью $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-6}$

Тестовая задача решена с погрешностью $\varepsilon_1 = 4 \cdot 10^{-5}$

Максимальное отклонение точного и численного решений в узле

$$x = 1.81 \quad y = 0.831667$$

Для решения тестовой задачи использована сетка

Число разбиений по x $n = 600$ число разбиений по y $m = 600$

Метод сопряженных градиентов

Значения критериев останова метода:

По точности $\varepsilon_{met} = 10^{-10}$ по числу итераций $N_{max} = 1000000$

На решение СЛАУ затрачено $N = 2443$ итераций

Достигнута точность метода $\varepsilon^{(N)} = 9.88 \cdot 10^{-15}$

СЛАУ решена с невязкой $\|R^{(N)}\| = 9.6 \cdot 10^{-4}$

для невязки использована евклидова норма

погрешность решения СЛАУ

$$\|Z^{(N)}\|_{\infty} \leq \|Z^{(N)}\|_2 \leq \|A^{-1}\|_2 \|R^{(N)}\|_2 = \frac{9.6 \cdot 10^{-4}}{12.33698} = 7.78148 \cdot 10^{-5}$$

Начальное приближение итерационного метода – интерполяция по x

Невязка на начальном приближении $\|R^{(0)}\| = 8695279.74611286$

Для невязки использована евклидова норма

погрешность решения СЛАУ

$$\|Z^{(N)}\|_{\infty} \leq \|Z^{(N)}\|_2 \leq \frac{2\rho^N}{1+\rho^{2N}} \|Z^{(0)}\|_2 = 3.9$$

По теореме о сходимости схемы погрешность схемы

$$\|z\|_{\infty} \leq 3 \cdot 10^{-4}$$

Использована норма $\|z\|_{\infty} = \max |z|$

Общая погрешность решения тестовой задачи с учетом ее компонент

$$\|z_{\text{общ}}\|_{\infty} \leq 3 \cdot 10^{-4} + 7.78148 \cdot 10^{-5} = 3.78 \cdot 10^{-4}$$

Использована норма $\|z_{\text{общ}}\|_{\infty} = \max |z_{\text{общ}}|$

Численное решение

| YWX | 0 | 0,003333333 | 0,006666666 | 0,01 | 0,013333333 | 0,016666666 | 0,02 | 0,023333333 |
|-----------|---|-------------|-------------|------------|-------------|-------------|------------|-------------|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0,0016666 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1,00000001 | 1,00000001 | 1,00000001 |
| 0,0033333 | 1 | 1 | 1 | 1,00000001 | 1,00000002 | 1,00000003 | 1,00000004 | 1,00000006 |
| 0,005 | 1 | 1 | 1,00000001 | 1,00000002 | 1,00000004 | 1,00000007 | 1,0000001 | 1,00000013 |
| 0,0066666 | 1 | 1 | 1,00000002 | 1,00000004 | 1,00000008 | 1,00000012 | 1,00000018 | 1,00000024 |
| 0,0083333 | 1 | 1,00000001 | 1,00000003 | 1,00000007 | 1,00000012 | 1,00000019 | 1,00000027 | 1,00000037 |
| 0,01 | 1 | 1,00000001 | 1,00000004 | 1,0000001 | 1,00000018 | 1,00000027 | 1,00000039 | 1,00000054 |
| 0,0116666 | 1 | 1,00000001 | 1,00000006 | 1,00000013 | 1,00000024 | 1,00000037 | 1,00000054 | 1,00000073 |
| 0,0133333 | 1 | 1,00000002 | 1,00000008 | 1,00000018 | 1,00000031 | 1,00000049 | 1,0000007 | 1,00000095 |
| 0,015 | 1 | 1,00000002 | 1,0000001 | 1,00000022 | 1,00000039 | 1,00000062 | 1,00000089 | 1,00000121 |
| 0,0166666 | 1 | 1,00000003 | 1,00000012 | 1,00000027 | 1,00000049 | 1,00000076 | 1,0000011 | 1,00000149 |
| 0,0183333 | 1 | 1,00000004 | 1,00000015 | 1,00000033 | 1,00000059 | 1,00000092 | 1,00000133 | 1,00000181 |
| 0,02 | 1 | 1,00000004 | 1,00000018 | 1,00000039 | 1,0000007 | 1,0000011 | 1,00000158 | 1,00000215 |
| 0,0216666 | 1 | 1,00000005 | 1,00000021 | 1,00000046 | 1,00000082 | 1,00000129 | 1,00000185 | 1,00000252 |
| 0,0233333 | 1 | 1,00000006 | 1,00000024 | 1,00000054 | 1,00000095 | 1,00000149 | 1,00000215 | 1,00000292 |

Точное решение

| YWX | 0 | 0,003333333 | 0,006666666 | 0,01 | 0,013333333 | 0,016666666 | 0,02 |
|-----------|---|-------------|-------------|------------|-------------|-------------|------------|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0,0016666 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1,00000001 | 1,00000001 |
| 0,0033333 | 1 | 1 | 1 | 1,00000001 | 1,00000002 | 1,00000003 | 1,00000004 |
| 0,005 | 1 | 1 | 1,00000001 | 1,00000002 | 1,00000004 | 1,00000007 | 1,0000001 |
| 0,0066666 | 1 | 1 | 1,00000002 | 1,00000004 | 1,00000008 | 1,00000012 | 1,00000018 |
| 0,0083333 | 1 | 1,00000001 | 1,00000003 | 1,00000007 | 1,00000012 | 1,00000019 | 1,00000027 |
| 0,01 | 1 | 1,00000001 | 1,00000004 | 1,0000001 | 1,00000018 | 1,00000027 | 1,00000039 |
| 0,0116666 | 1 | 1,00000001 | 1,00000006 | 1,00000013 | 1,00000024 | 1,00000037 | 1,00000054 |
| 0,0133333 | 1 | 1,00000002 | 1,00000008 | 1,00000018 | 1,00000031 | 1,00000049 | 1,0000007 |
| 0,015 | 1 | 1,00000002 | 1,0000001 | 1,00000022 | 1,00000039 | 1,00000062 | 1,00000089 |
| 0,0166666 | 1 | 1,00000003 | 1,00000012 | 1,00000027 | 1,00000049 | 1,00000076 | 1,0000011 |
| 0,0183333 | 1 | 1,00000004 | 1,00000015 | 1,00000033 | 1,00000059 | 1,00000092 | 1,00000133 |
| 0,02 | 1 | 1,00000004 | 1,00000018 | 1,00000039 | 1,0000007 | 1,0000011 | 1,00000158 |
| 0,0216666 | 1 | 1,00000005 | 1,00000021 | 1,00000046 | 1,00000082 | 1,00000129 | 1,00000185 |
| 0,0233333 | 1 | 1,00000006 | 1,00000024 | 1,00000054 | 1,00000096 | 1,00000149 | 1,00000215 |

8. Численное решение основной задачи

Основная задача должна быть решена с заданной погрешностью

$$\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-6}$$

Основная задача решена с погрешностью $\varepsilon_2 = 3 \cdot 10^{-3}$

Максимальное отклонение численных решений на основной сетке и сетке с половинным шагом в узле $x = 1$ $y = 0.998$

Для решения основной задачи использована сетка

Число разбиений по x $n = 500$ число разбиений по y $m = 500$

Метод сопряженных градиентов

Значения критериев остановки метода:

По точности $\varepsilon_{met} = 10^{-10}$ по числу итераций $N_{max} = 1000000$

На решение СЛАУ затрачено $N = 2037$ итераций

Достигнута точность метода $\varepsilon^{(N)} = 9.754 \cdot 10^{-11}$

СЛАУ решена с невязкой $\|R^{(N)}\| = 5.9873 \cdot 10^{-4}$

для невязки использована евклидова норма

погрешность решения СЛАУ

$$\|Z^{(N)}\|_{\infty} \leq \|Z^{(N)}\|_2 \leq \|A^{-1}\|_2 \|R^{(N)}\|_2 = \frac{5.9873 \cdot 10^{-4}}{12.33696} = 4.85314 \cdot 10^{-5}$$

Начальное приближение итерационного метода интерполяция по x

Невязка на начальном приближении $\|R^{(0)}\| = 14343265.75$

Для невязки использована евклидова норма

погрешность решения СЛАУ

$$\|Z^{(N)}\|_{\infty} \leq \|Z^{(N)}\|_2 \leq \frac{2\rho^N}{1+\rho^{2N}} \|Z^{(0)}\|_2 = 3.212$$

Для контроля точности использована сетка

число разбиений по x $n_2 = 1000$

число разбиений по y $m_2 = 1000$

Метод сопряженных градиентов

Значения критериев остановки метода:

По точности $\varepsilon_{met2} = 10^{-10}$

по числу итераций $N2_{max} = 1000000$

На решение СЛАУ затрачено $N2 = 3980$ итераций

Достигнута точность метода $\varepsilon^{(N2)} = 9.89 \cdot 10^{-11}$

СЛАУ решена с невязкой $\|R^{(N2)}\| = 3 \cdot 10^{-3}$

для невязки использована евклидова норма

погрешность решения СЛАУ

$$\|Z^{(N2)}\|_{\infty} \leq \|Z^{(N2)}\|_2 \leq \|A^{-1}\|_2 \|R^{(N)}\|_2 = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{12.337} = 2.43171 \cdot 10^{-4}$$

Начальное приближение итерационного метода интерполяция по y

Невязка на начальном приближении $\|R^{(0)}\| = 81138020.44$

Для невязки использована евклидова норма

погрешность решения СЛАУ

$$\|Z^{(N2)}\|_{\infty} \leq \|Z^{(N2)}\|_2 \leq \frac{2\rho^N}{1+\rho^{2N}} \|Z^{(0)}\|_2 = 48,78$$

Численное решение:

| Y\X | | 0,004 | 0,008 | 0,012 | 0,016 | 0,02 | 0,024 | 0,028 |
|-------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 0 | 0 | 0,0125660 | 0,0251301 | 0,0376901 | 0,0502443 | 0,0627905 | 0,0753268 | 0,0878512 |
| 0,002 | 0,001996 | 0,0144424 | 0,0268971 | 0,0393531 | 0,0518066 | 0,0642549 | 0,0766953 | 0,0891256 |
| 0,004 | 0,003984 | 0,0163167 | 0,0286638 | 0,0410167 | 0,0533704 | 0,0657213 | 0,0780665 | 0,0904033 |
| 0,006 | 0,005964 | 0,0181875 | 0,0304291 | 0,0426802 | 0,0549349 | 0,0671892 | 0,0794398 | 0,0916838 |
| 0,008 | 0,007936 | 0,0200537 | 0,0321921 | 0,0443427 | 0,0564995 | 0,0686582 | 0,0808149 | 0,0929666 |
| 0,01 | 0,0099 | 0,0219148 | 0,0339520 | 0,0460037 | 0,0580638 | 0,0701276 | 0,0821913 | 0,0942515 |
| 0,012 | 0,011856 | 0,0237703 | 0,0357083 | 0,0476626 | 0,0596271 | 0,0715971 | 0,0835686 | 0,0955381 |
| 0,014 | 0,013804 | 0,0256200 | 0,0374606 | 0,0493189 | 0,0611891 | 0,0730663 | 0,0849465 | 0,0968261 |
| 0,016 | 0,015744 | 0,0274636 | 0,0392084 | 0,0509722 | 0,0627493 | 0,0745348 | 0,0863246 | 0,0981151 |
| 0,018 | 0,017676 | 0,0293009 | 0,0409516 | 0,0526222 | 0,0643073 | 0,0760022 | 0,0877025 | 0,0994047 |
| 0,02 | 0,0196 | 0,0311317 | 0,0426899 | 0,0542687 | 0,0658630 | 0,0774682 | 0,0890800 | 0,1006948 |
| 0,022 | 0,021516 | 0,0329561 | 0,0444230 | 0,0559113 | 0,0674160 | 0,0789325 | 0,0904568 | 0,1019850 |
| 0,024 | 0,023424 | 0,0347739 | 0,0461509 | 0,0575498 | 0,0689660 | 0,0803949 | 0,0918326 | 0,1032751 |
| 0,026 | 0,025324 | 0,0365849 | 0,0478733 | 0,0591841 | 0,0705129 | 0,0818552 | 0,0932071 | 0,1045648 |

Численное решение2

| Y\X | 0 | 0,004 | 0,008 | 0,012 | 0,016 | 0,02 | 0,024 | 0,028 | 0,032 |
|-------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 0 | 0 | 0,0125660 | 0,0251301 | 0,0376901 | 0,0502443 | 0,0627905 | 0,0753268 | 0,0878512 | 0,1003617 |
| 0,002 | 0,001996 | 0,0144421 | 0,0268969 | 0,0393530 | 0,0518065 | 0,0642548 | 0,0766952 | 0,0891256 | 0,1015436 |
| 0,004 | 0,003984 | 0,0163164 | 0,0286635 | 0,0410165 | 0,0533702 | 0,0657212 | 0,0780663 | 0,0904032 | 0,1027292 |
| 0,006 | 0,005964 | 0,0181871 | 0,0304288 | 0,0426798 | 0,0549346 | 0,0671890 | 0,0794396 | 0,0916836 | 0,1039182 |
| 0,008 | 0,007936 | 0,0200534 | 0,0321917 | 0,0443423 | 0,0564992 | 0,0686579 | 0,0808147 | 0,0929664 | 0,1051103 |
| 0,01 | 0,0099 | 0,0219145 | 0,0339516 | 0,0460033 | 0,0580634 | 0,0701273 | 0,0821910 | 0,0942513 | 0,1063051 |
| 0,012 | 0,011856 | 0,0237701 | 0,0357079 | 0,0476621 | 0,0596267 | 0,0715967 | 0,0835683 | 0,0955378 | 0,1075023 |
| 0,014 | 0,013804 | 0,0256198 | 0,0374602 | 0,0493185 | 0,0611886 | 0,0730659 | 0,0849461 | 0,0968257 | 0,1087015 |
| 0,016 | 0,015744 | 0,0274634 | 0,0392081 | 0,0509718 | 0,0627488 | 0,0745343 | 0,0863242 | 0,0981147 | 0,1099025 |
| 0,018 | 0,017676 | 0,0293007 | 0,0409513 | 0,0526219 | 0,0643069 | 0,0760017 | 0,0877021 | 0,0994043 | 0,1111051 |
| 0,02 | 0,0196 | 0,0311316 | 0,0426896 | 0,0542683 | 0,0658626 | 0,0774677 | 0,0890796 | 0,1006944 | 0,1123088 |
| 0,022 | 0,021516 | 0,032956 | 0,0444227 | 0,0559109 | 0,0674156 | 0,0789321 | 0,0904563 | 0,1019846 | 0,1135134 |
| 0,024 | 0,023424 | 0,0347737 | 0,0461506 | 0,0575495 | 0,0689656 | 0,0803945 | 0,0918321 | 0,1032747 | 0,1147187 |
| 0,026 | 0,025324 | 0,0365848 | 0,0478730 | 0,0591838 | 0,0705125 | 0,0818548 | 0,0932067 | 0,1045644 | 0,1159245 |
| 0,028 | 0,027216 | 0,0383891 | 0,0495899 | 0,0608137 | 0,0720560 | 0,0833127 | 0,0945798 | 0,1058535 | 0,1171305 |

Разность решений

| Y\X | 0 | 0,004 | 0,008 | 0,012 | 0,016 | 0,02 | 0,024 | 0,028 | 0,032 |
|-------|---|----------|---------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0,002 | 0 | 2,7E-07 | 1,8E-07 | 1,3E-07 | 1,00E-07 | 8,00E-08 | 7,00E-08 | 6,00E-08 | 5,00E-08 |
| 0,004 | 0 | 3,6E-07 | 3,1E-07 | 2,4E-07 | 1,9E-07 | 1,6E-07 | 1,4E-07 | 1,2E-07 | 1,1E-07 |
| 0,006 | 0 | 3,5E-07 | 3,7E-07 | 3,2E-07 | 2,7E-07 | 2,3E-07 | 2,00E-07 | 1,8E-07 | 1,6E-07 |
| 0,008 | 0 | 3,2E-07 | 3,9E-07 | 3,7E-07 | 3,3E-07 | 2,9E-07 | 2,5E-07 | 2,3E-07 | 2,1E-07 |
| 0,01 | 0 | 2,8E-07 | 3,9E-07 | 4,00E-07 | 3,7E-07 | 3,4E-07 | 3,00E-07 | 2,7E-07 | 2,5E-07 |
| 0,012 | 0 | 2,5E-07 | 3,7E-07 | 4,1E-07 | 4,00E-07 | 3,7E-07 | 3,4E-07 | 3,2E-07 | 2,9E-07 |
| 0,014 | 0 | 2,2E-07 | 3,5E-07 | 4,1E-07 | 4,1E-07 | 4,00E-07 | 3,7E-07 | 3,5E-07 | 3,3E-07 |
| 0,016 | 0 | 2,00E-07 | 3,3E-07 | 4,00E-07 | 4,2E-07 | 4,2E-07 | 4,00E-07 | 3,8E-07 | 3,6E-07 |
| 0,018 | 0 | 1,8E-07 | 3,1E-07 | 3,9E-07 | 4,2E-07 | 4,3E-07 | 4,2E-07 | 4,00E-07 | 3,8E-07 |
| 0,02 | 0 | 1,6E-07 | 2,9E-07 | 3,7E-07 | 4,2E-07 | 4,3E-07 | 4,3E-07 | 4,2E-07 | 4,1E-07 |
| 0,022 | 0 | 1,5E-07 | 2,7E-07 | 3,6E-07 | 4,1E-07 | 4,3E-07 | 4,4E-07 | 4,4E-07 | 4,3E-07 |
| 0,024 | 0 | 1,4E-07 | 2,6E-07 | 3,4E-07 | 4,00E-07 | 4,3E-07 | 4,5E-07 | 4,5E-07 | 4,4E-07 |
| 0,026 | 0 | 1,3E-07 | 2,4E-07 | 3,3E-07 | 3,9E-07 | 4,3E-07 | 4,5E-07 | 4,5E-07 | 4,5E-07 |
| 0,028 | 0 | 1,2E-07 | 2,3E-07 | 3,2E-07 | 3,8E-07 | 4,2E-07 | 4,5E-07 | 4,6E-07 | 4,6E-07 |

9. Проверка программы: контроль «порядка сходимости»

Проверка убывания погрешности ε_1 при решении тестовой задачи и проверка динамики точности ε_2 при решении основной задачи показывают следующее:

Тестовая задача

| n | m | ε_m | $\varepsilon^{(s)}$ | $\max u^* - v^{(N)} $ | <i>Отношение значений погрешности</i> |
|-----------|-----|-----------------|---------------------|------------------------|---------------------------------------|
| 5 | 5 | 10^{-5} | $6.4 \cdot 10^{-6}$ | $8.1 \cdot 10^{-1}$ | --- |
| 10 | 10 | 10^{-5} | $8.6 \cdot 10^{-6}$ | $1.4 \cdot 10^{-1}$ | 6 |
| 50 | 50 | 10^{-5} | $9.7 \cdot 10^{-6}$ | $5.9 \cdot 10^{-2}$ | 24 |
| 100 | 100 | 10^{-5} | $9.4 \cdot 10^{-6}$ | $1.5 \cdot 10^{-3}$ | 4 |
| 500 | 500 | 10^{-5} | $7.9 \cdot 10^{-6}$ | $7.9 \cdot 10^{-4}$ | 2 |
| Порядок 2 | | | | | |

Основная задача

[illegible]

10. Выводы, ответы на вопросы

Погрешность состоит из нескольких компонент: погрешность итерационного метода, погрешность схемы и вычислительная погрешность. При росте размерности матрицы, растет число арифметических действий, соответственно растет и вычислительная погрешность и тем самым вносит большой вклад в оценку общей погрешности. Оценка погрешности схемы при увеличении размерности матрицы также будет сходиться со вторым порядком.

Таким образом, при малом количестве разбиений вычислительная погрешность и погрешность метода малы, погрешность схемы сильно влияет на оценку общей погрешности. При большом количестве разбиений погрешность схемы становится мала и мало влияет на оценку общей погрешности, но вычислительная погрешность сильно растет и не позволяет схеме сходиться со вторым порядком. Оценка итерационного метода очень мала и не вносит особого вклада в оценку общей погрешности.

Для того чтобы уменьшить вычислительную погрешность надо: хранить отношения в форме обыкновенных дробей, использовать более мощный компьютер, выбирать число разбиений тщательно, чтобы погрешность была минимальна.

При решении тестовой задачи методом сопряженных градиентов подтверждается второй порядок сходимости, что соответствует теоретической оценке. Это можно увидеть по таблице из пункта 9. При изменении размерности матрицы в 10 раз погрешность изменяется в 100 раз. Но не удается достичь заданной погрешности из-за оценки общей погрешности.

При решении основной задачи методом сопряженных градиентов второй порядок точности не подтвердился, потому что при численном решении появляется общая погрешность, состоящая из нескольких компонент, также при решении задачи на контрольной сетке при большем числе разбиений присутствует общая погрешность и вычислительная погрешность на контрольной сетке еще больше, которая в итоге не дает схеме сойтись со вторым порядком.

11.Сведения о программе

Интерполяция по x для тестовой задачи

```
public double interpolation_x_test(double j, double m, double c, double d)
{
    double t;
    double k = (d - c) / m;
    double y = c + j * k;
    t = j / m;
    return (mu2_test(y) - mu1_test(y)) * t + mu1_test(y);
}
```

Заполнение граничных условий

```
for (int j = 0; j <= m; j++)
{
    double y = c + j * k;
    v[0][j] = mu1_test(y);
    v[n][j] = mu2_test(y);
}
for (int i = 0; i <= n; i++)
{
    double x = a + i * h;
    v[i][0] = mu3_test(x);
    v[i][m] = mu4_test(x);
}
```

Заполнение вектора правой части

```
for (int j = 0; j <= m; j++)
    for (int i = 0; i <= n; i++)
    {
        double x = a + i * h;
        double y = c + j * k;
        f[i][j] = f_test(x, y);
    }
```

Невязка

```
for (int j = 1; j < m; j++)
    for (int i = 1; i < n; i++)
        R[i][j] = a2 * v[i][j] + h2 * v[i + 1][j] + h2 * v[i - 1][j] + k2 * v[i][j + 1] + k2 * v[i][j - 1] -
f[i][j];

R0 = 0.0;
for (int i = 0; i < n + 1; i++)
    for (int j = 0; j < m + 1; j++)
        R0 += R[i][j] * R[i][j];
R0 = Math.Sqrt(R0);
```


Метод сопряженных градиентов

```
double alfa, betta;
bool flag = false;
//первая итерация
for (int j = 1; j < m; j++)
    for (int i = 1; i < n; i++)
    {
        R[i][j] = a2 * v[i][j] + h2 * v[i + 1][j] + h2 * v[i - 1][j] + k2 * v[i][j + 1] + k2 * v[i][j - 1] - f[i][j];
        hn[i][j] = -R[i][j];
    }
for (int j = 1; j < m; j++)
    for (int i = 1; i < n; i++)
    {
        chisl += R[i][j] * hn[i][j];
        znam += (a2 * hn[i][j] + h2 * hn[i + 1][j] + h2 * hn[i - 1][j] + k2 * hn[i][j + 1] + k2 *
        hn[i][j - 1]) * hn[i][j];
    }
alfa = -chisl / znam;
eps_max = 0.0;
for (int j = 1; j < m; j++)
{
    for (int i = 1; i < n; i++)
    {
        v_old = v[i][j];
        v_new = v_old + alfa * hn[i][j];

        eps_curr = Math.Abs(v_old - v_new);
        if (eps_curr > eps_max) { eps_max = eps_curr; };
        v[i][j] = v_new;
    }
}
s++;
if ((eps_max < eps) || (s >= n_max))
    flag = true;
// вторая итерация и далее
while (flag != true)
{
    chisl = znam = 0.0;
    eps_max = 0.0;

    for (int j = 1; j < m; j++)
    {
        for (int i = 1; i < n; i++)
        {
            R[i][j] = a2 * v[i][j] + h2 * v[i + 1][j] + h2 * v[i - 1][j] + k2 * v[i][j + 1] + k2 * v[i][j - 1] - f[i][j];
            chisl += (a2 * hn[i][j] + h2 * (hn[i + 1][j] + hn[i - 1][j]) + k2 * (hn[i][j + 1] + hn[i][j - 1])) *
            R[i][j];
            znam += (a2 * hn[i][j] + h2 * (hn[i + 1][j] + hn[i - 1][j]) + k2 * (hn[i][j + 1] + hn[i][j - 1])) *
            hn[i][j];
        }
    }

    betta = chisl / znam;

    chisl = znam = 0.0;

    for (int j = 1; j < m; j++)
```

```

{
    for (int i = 0; i <= n; i++)
    {
        hn[i][j] = -R[i][j] + betta * hn[i][j];
    }
}

for(int j = 1; j < m; j++)
{
    for (int i = 1; i < n; i++)
    {
        chisl += R[i][j] * hn[i][j];
        znam += (a2 * hn[i][j] + h2 * hn[i + 1][j] + h2 * hn[i - 1][j] + k2 * hn[i][j + 1] + k2 *
        hn[i][j - 1]) * hn[i][j];
    }
}

alfa = -chisl / znam;

chisl = znam = 0.0;

for(int j = 1; j < m; j++)
{
    for (int i = 1; i < n; i++)
    {
        v_old = v[i][j];

        v_new = v_old + alfa * hn[i][j];

        eps_curr = Math.Abs(v_old - v_new);
        (eps_curr > eps_max) { eps_max = eps_curr; };
        v[i][j] = v_new;
    }
}
s++;
if ((eps_max < eps) || (s >= n_max))
    flag = true;
}

```