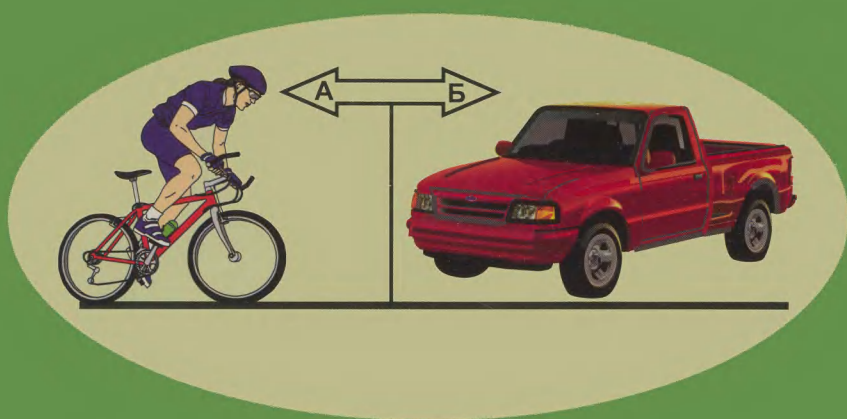


А.В. Шевкин

ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ



7–11 классы



ИЛЕКСА

А.В. Шевкин

**ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ
ПО МАТЕМАТИКЕ**

7–11 классы

Москва
ИЛЕКСА
2011

УДК 373:51
ББК 22.12.721
ШЗ7

ШЗ7 Шевкин А.В.
Текстовые задачи по математике. 7–11 классы. — М.:
ИЛЕКСА, 2011. — 208 с.: ил.

Эта книга — дополнительное учебное пособие по алгебре для учащихся 7–11 классов. Интересный задачный материал дает новую жизнь старой, незаслуженно забытой идее обобщения решений арифметических задач — связующему мостику между арифметикой и алгеброй. В книге рассмотрены задачи, начиная от простых и заканчивая конкурсными задачами прошлых лет.

Книга может быть использована на уроках алгебры, для подготовки к итоговой аттестации (ГИА–9 и ЕГЭ–11), а также для самообразования.

УДК 373:51
ББК 22.12.721

ISBN 978-5-89237-339-5

© Шевкин А.В., 2011
© ИЛЕКСА, 2011

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга является дополнительным учебным пособием по алгебре для учащихся 7–11 классов. Содержание задачного материала в основном соответствует действующему стандарту по математике, все вопросы, выходящие за рамки стандарта, подробно разъяснены.

В книгу включены задачи Л.Ф. Магницкого, Л. Эйлера, А.П. Киселева, П.А. Ларичева, Я.И. Перельмана, Евклида, И. Ньютона, Леонардо Пизанского (Фибоначчи), Э. Безу и др., а также задачи школьных экзаменов для 9-х классов с углубленным изучением математики прошлых лет и государственной итоговой аттестации в 9 классе (ГИА–9), конкурсных экзаменов в МГУ им. М.В. Ломоносова, Московский инженерно-физический институт, Высшую школу экономики и другие вузы страны, из единого государственного экзамена (ЕГЭ), а также задачи, составленные автором сборника. Для конкурсных задач указаны названия соответствующих вузов и год экзамена (список сокращений приведен на с. 205).

Задачи из ЕГЭ приведены с указанием года — это задачи из демонстрационной версии, тренировочные задачи из сборников для подготовки к ЕГЭ или задачи из контрольных работ, проверяющие готовность учащихся 10–11 классов к ЕГЭ.

Чтобы от работы с книгой получить больше пользы, старайтесь решить каждую задачу, условие которой вы прочитали. Если не сможете сразу найти решение, то подумайте, не торопитесь прочитать ответ — не лишайте себя удовольствия найти его самостоятельно. Если через некоторое время вам все-таки не удастся решить задачу, то разберите ее решение по книге, с помощью товарищей или учителя. Постарайтесь понять идею решения новой для себя задачи — возможно, она вам еще пригодится. Тогда размышления над задачей, поиск ее решения обогатят ваш опыт, будут полезны для развития умения решать задачи.

Ко многим задачам в книге даны несколько способов решения в основном тексте или в разделе «Ответы и советы». Для некоторых задач

приведены программы для их решения с помощью компьютера. Это позволит найти интересное и более близкое к математике приложение знаниям, получаемым на уроках информатики. При этом выбран простейший, хотя теперь и редко применяемый, язык БЕЙСИК. Цель этих включений в книгу заключается в том, чтобы показать, как решение задач в общем виде можно использовать для решения любой задачи данного типа. В книге имеются и другие интересные результаты, полученные с помощью программ.

Если читателю покажется неинтересным разбираться в программах, то без ущерба для дальнейшего понимания можно пропускать материал, связанный с ними, но на решение задач в общем виде стоит обратить внимание. Это умение иногда проверялось на конкурсных экзаменах прошлых лет, а также на ЕГЭ.

С благодарностью перечисляю учителей и учащихся, чьи решения задач украсили эту книгу: Д. Алексеев, А.В. Дьячков, А. Ефремов, Ю. Злотников, И. Кобзев, К. Марченко, Г.К. Муравин, Д. Просин, Ю.О. Пукас, В.И. Романовский, С. Чечин, П.В. Чулков. Особую благодарность выражаю В.И. Гридасову и А.Б. Зыблеву за замечания и предложения, которые позволили улучшить книгу.

Первое издание книги вышло в издательстве «Просвещение» (1997 г.), книга была рекомендована Министерством образования РФ. Во втором издании (2003 г.) были сокращены технические подробности составления программ. В новом издании книги добавлено 150 задач и исправлены замеченные опечатки.

Предложения и замечания принимаются по адресу avshevkin@mail.ru. О других работах автора можно узнать по адресу www.shevkin.ru.

*Если хотите научиться плавать,
то смело входите в воду,
а если хотите научиться решать задачи,
то решайте их.*

Дж. Пойа.

1. ЗАДАЧИ НА СОВМЕСТНУЮ РАБОТУ («НА БАССЕЙНЫ»)

Рассмотрим несколько стандартных задач, которые можно решить не только с конкретными числами, но и в общем виде. Это позволит решить целый класс однотипных задач, отличающихся лишь числовыми данными, а также составить программы для решения любой задачи рассматриваемого типа с помощью компьютера.

Вот три задачи одного типа с различными сюжетами.

1.1. Через первую трубу бассейн наполняется за 20 ч, через вторую — за 30 ч. За сколько часов бассейн наполнится через обе эти трубы?

1.2. Первая бригада может выполнить задание за 20 дней, а вторая — за 30 дней. За сколько дней две бригады выполнят задание, работая вместе?

1.3. Первый пешеход может пройти расстояние между селами за 20 мин, а второй — за 30 мин. Однажды пешеходы одновременно отправились навстречу друг другу. Через сколько минут они встретились?

Каждую из этих задач можно решить по действиям:

$$\begin{array}{ll} 1) 1 : 20 = \frac{1}{20}; & 2) 1 : 30 = \frac{1}{30}; \\ 3) \frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{1}{12}; & 4) 1 : \frac{1}{12} = 12. \end{array}$$

В каждой из них получится свой ответ: «за 12 ч», «за 12 дней» или «через 12 мин» — в зависимости от вопроса и от того, в каких единицах измеряется время.

Сформулируем задачу «на бассейны» в общем виде.

1.4. Через первую трубу бассейн наполняется за a ч, через вторую — за b ч. За сколько часов бассейн наполнится через обе эти трубы?

Решим задачу по действиям:

$$\begin{array}{ll} 1) 1 : a = \frac{1}{a}; & 2) 1 : b = \frac{1}{b}; \\ 3) \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}; & 4) 1 : \frac{a+b}{ab} = \frac{ab}{a+b}. \end{array}$$

Если через x ч обозначить время наполнения бассейна через обе трубы, то тот же результат можно получить, выразив x из равенства

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x}, \quad (1)$$

связывающего значения a , b и x .

Ответ к задаче выражается формулой

$$x = \frac{ab}{a+b}. \quad (2)$$

Составим программу для решения задачи 1.4 с помощью компьютера.

```
1  'ПРОГРАММА 1.4
10 INPUT "Введите a"; A
20 INPUT "Введите b"; B
30 X=A*B/(A+B)
40 PRINT "Ответ: за"; X
50 END
```

После запуска программы введем $a = 30$, $b = 20$ и моментально получим

Ответ: за 12

Используя программу 1.4, составленную по формуле (2), можно решить несколько однотипных задач, отличающихся лишь числовыми данными. При этом нужно следить, чтобы a и b выражались одинаковыми единицами измерения. В тех же единицах будет выражен и ответ.

1.5. Через первую трубу бассейн наполняется за 12 ч, через вторую трубу — за 24 ч. За сколько часов бассейн наполнится через обе эти трубы?

1.6. Первая бригада может выполнить задание за 36 дней, а вторая — за 45 дней. За сколько дней две бригады выполнят задание, работая вместе?

1.7. Два велосипедиста одновременно отправились навстречу друг другу из двух сел. Первый мог бы проехать расстояние между

селами за 30 мин, второй — за 45 мин. Через сколько минут они встретятся?

При случайном задании a и b может возникнуть ситуация, когда ответ не выражается конечной десятичной дробью. Например, для $a = 4$, $b = 2$ вместо точного ответа программа дает приближенный: 1,333333. Иногда этот недостаток программы можно «обойти», выразив время в других единицах измерения.

Рассмотрим измененную в первой строке задачу *С. Сатина* (журнал «Крокодил», 1990, № 34).

1.8. За пять недель пират Ерема
Способен выпить бочку рома.
А у пирата у Емели
Ушло б на это две недели.
За сколько дней прикончат ром
Пираты, действуя вдвоем?

Если ввести $a = 5$, $b = 2$ (в неделях), то, используя программу **1.4**, получим «Ответ: за 1,428571» (недели). Если же ввести $a = 35$, $b = 14$ (в днях), то получим «Ответ: за 10» (дней).

Задачу **1.8** можно решить без компьютера.

$$\begin{array}{ll} 1) 1 : 35 = \frac{1}{35}; & 2) 1 : 14 = \frac{1}{14}; \\ 3) \frac{1}{35} + \frac{1}{14} = \frac{1}{10}; & 4) 1 : \frac{1}{10} = 10. \end{array}$$

А можно иначе.

Пусть пираты пьют ром 70 дней подряд (бедные пираты!) — число 70 это НОК (14, 10). За это время пират Ерема выпьет $70 : 35 = 2$ (бочки), а пират Емеля $70 : 14 = 5$ (бочек). Вместе за 70 дней пираты выпьют 7 бочек рома, значит, одну бочку они выпивают за $70 : 7 = 10$ (дней).

Сформулируем новую задачу, будем в равенстве (1) по a и x искать b . Получим задачу, обратную задаче **1.4**.

В качестве примера рассмотрим задачу, которая, если отвлечься от различия в действующих лицах, является обратной для задачи о пиратах.

1.9. Из «Арифметики» Л.Ф. Магницкого (1703). Один человек выпьет кадь¹ питья за 14 дней, а с женою выпьет ту же кадь за 10 дней. За сколько дней жена его отдельно выпьет ту же кадь?

¹ Кадь, кадушка — бочка без верхней крышки.

Мѣжъ I 4
съ женой I O ВѢСТИ

$$\begin{array}{r} 4 \text{ --- } 10 \text{ --- } 14 \\ 10 \\ \hline 140 \end{array}$$

Современному читателю это решение не покажется понятным, но в нем можно найти действия: $14 - 10 = 4$, $14 \cdot 10 = 140$ и $140 : 4 = 35$, связанные со стандартным решением задачи 1.8, приведенным выше:

$$1) \frac{1}{10} - \frac{1}{14} = \frac{14-10}{10 \cdot 14} = \frac{4}{140}; \quad 2) 1 : \frac{4}{140} = 140 : 4 = 35.$$

Но старинное решение не было связано с дробями. Оно могло быть таким. Пусть муж и жена пили питье (квас, например) $14 \cdot 10 = 140$ (дней). За это время они вместе выпили 14 бочек питья, а один муж — 10 бочек, значит, одна жена за то же время выпила $14 - 10 = 4$ (бочки). Тогда на одну бочку она тратила $140 : 4 = 35$ (дней).

1.10. Бассейн наполняется через две трубы за x ч, а через одну из них — за a ч. За сколько часов наполнится бассейн через другую трубу?

Ее можно решить по действиям, как задачу 1.4, а можно из равенства (1), связывающего a , b и x , выразить b :

$$b = \frac{ax}{a-x}.$$

Составим программу для решения задачи 1.10 с помощью компьютера и проверим ее работу с помощью числовых данных из задачи 1.9.

```
1  ПРОГРАММА 1.10
10 INPUT "Введите a"; A
20 INPUT "Введите x"; X
30 B=A*X/(A-X)
```

40 PRINT "Ответ: за"; B
50 END

При $a = 14$, $x = 10$ получим

Ответ: за 35

Рассмотрим еще несколько задач.

1.11. Пешеход может пройти расстояние между двумя селами за 6 ч, а велосипедист может проехать это расстояние за 3 ч. Через сколько часов они встретятся, если отправятся одновременно из этих сел навстречу друг другу?

1.12. Первая бригада, работая отдельно, может выполнить задание за 3 дня, а вместе со второй бригадой — за 2 дня. За сколько дней одна вторая бригада может выполнить то же задание?

1.13. ЕГЭ, 2010. Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 15 ч. Через 5 ч после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. За сколько часов был выполнен весь заказ?

1.14. ЕГЭ, 2011. Двое рабочих, работая совместно, могут выполнить работу за 12 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за 2 дня выполняет такую часть работы, какую второй — за 3 дня?

Если за 2 дня первый рабочий выполняет такую часть работы, какую второй за 3 дня, то за 8 дней он выполняет такую часть работы, какую второй за 12 дней. То есть ту часть работы, которую второй рабочий выполнил за 12 дней, первый рабочий мог бы выполнить за 8 дней. Значит, первый рабочий, работая один, мог бы выполнить всю работу за $12 + 8 = 20$ (дней).

1.15. Двое рабочих, работая совместно, могут выполнить работу за 12 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу второй рабочий, если он за 3 дня выполняет такую часть работы, какую первый — за 4 дня?

1.16. ГАУ, 1993. Из пунктов A и B навстречу друг другу выехали одновременно два автобуса, причем первый, имея вдвое большую скорость, проехал весь путь на 1 ч быстрее второго. На сколько минут раньше произошла бы встреча этих автобусов, если бы скорость второго автобуса увеличилась и стала равной скорости первого автобуса?

Увеличим число «действующих лиц» в задачах 1.4 и 1.10.

1.17. Старинная задача. (Армения, VII в.). В городе Афинах был водоем, в который проведены три трубы. Одна из труб может наполнить водоем за 1 ч, другая, более тонкая, — за 2 ч, третья, еще более тонкая, — за 3 ч. Итак, узнай, за какую часть часа все три трубы вместе наполняют водоем.

1.18. Задача С.А. Рачинского (1833–1902). Пришли 3 учителя просить бумаги для своих школ, а у меня ее только стопа. Один говорит: ее хватит мне на 96 дней, другой — на 120 дней, третий — на 160 дней. На сколько времени этой стопы хватит на все 3 школы?

1.19. Через первую трубу бассейн наполняется за a ч, через вторую трубу — за b ч, через третью трубу — за c ч. За сколько часов бассейн наполнится через три трубы при их совместной работе, если:

- а) $a = 21$, $b = 24$, $c = 28$; б) $a = 12$, $b = 20$, $c = 30$?

За 1 ч через первую трубу наполняется $\frac{1}{a}$, через вторую трубу — $\frac{1}{b}$, а через третью трубу — $\frac{1}{c}$ бассейна. Тогда за 1 ч через все три трубы наполняется $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ бассейна. Следовательно, бассейн наполнится через три трубы за $1 : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$ ч.

Подставив в полученную формулу известные значения a , b и c , получим ответы к заданиям а) и б).

- а) При $a = 21$, $b = 24$, $c = 28$ имеем:

$$1 : \left(\frac{1}{21} + \frac{1}{24} + \frac{1}{28} \right) = 8 \text{ (ч);}$$

- б) При $a = 12$, $b = 20$, $c = 30$ имеем:

$$1 : \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} \right) = 6 \text{ (ч).}$$

Замечание. Выражение $1 : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$ можно записать:

$\frac{abc}{ab + ac + bc}$, но это усложнит вычисления.

1.20. Бак наполняют через три трубы: через первую трубу за a ч, через вторую трубу — за b ч, а через все три трубы — за x ч. За сколько часов бак наполнится только через третью трубу, если:

- а) $a = 12, b = 28, x = 6$; б) $a = 9, b = 30, x = 5$?

Связь между величинами a, b, c и x выражается равенством

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{x},$$

из которого получим формулы:

$$x = \frac{abc}{ab + ac + bc} \quad (3)$$

и

$$c = \frac{abx}{ab - ax - bx}. \quad (4)$$

Если составить программы для решения задач **1.19** и **1.20** по формулам (3) и (4), то с их помощью можно решить любые задачи на совместную работу для трех работников. Но эти задачи не удастся сформулировать для трех участников движения.

1.21. Старинная задача. Лошадь съедает воз сена за месяц, коза — за два месяца, овца — за три месяца. За какое время лошадь, коза и овца вместе съедят такой же воз сена?

1.22. Том может выполнить работу за 3 ч, Дик за 4 ч, а Гарри за 6 ч. За какое время они могут выполнить эту работу, делая ее вместе (предполагается при этом, что они не мешают друг другу)?

И способ. За 1 ч Том может выполнить $\frac{1}{3}$, Дик — $\frac{1}{4}$, а Гарри — $\frac{1}{6}$ всей работы, а вместе они за 1 ч выполнят $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3}{4}$ (работы). Тогда всю работу они выполняют за $1 : \frac{3}{4} = \frac{4}{3}$ (ч), или за 1 ч 20 мин.

И способ (старинный). Пусть Том, Дик и Гарри выполняют работу 12 ч подряд. За это время Том выполнит 4 работы, Дик — 3 работы, а Гарри — 2 работы. За 12 ч совместной работы мальчики выполнят 9 работ. Тогда на 1 работу они тратят $12 : 9 = \frac{4}{3}$ (ч) или 1 ч 20 мин.

1.23. Из «Всеобщей арифметики» И. Ньютона (первое издание 1707 г.). Трое рабочих могут выполнить некоторую работу, при этом А может вы-

полнить ее один раз за 3 недели, *B* три раза за 8 недель, *C* пять раз за 12 недель. Спрашивается, за какое время они смогут выполнить эту работу все вместе. (Считать в неделе 6 рабочих дней по 12 ч.)

1.24. Старинная задача (XVII в.). Четыре человека хотят двор строить. Первый из них может построить в 1 год, второй может в 2 года, третий в 3 года, а четвертый в 4 года. За сколько лет они все вместе построят тот двор?

1.25. ЕГЭ, 2009. Маша и Настя могут вымыть окно за 20 мин. Настя и Лена могут вымыть это же окно за 15 мин, а Маша и Лена — за 12 мин. За какое время девочки вымоют окно, работая втроем? Ответ дайте в минутах.

Эту задачу старшеклассники обычно решают так.

Пусть производительности труда Маши, Насти и Лены (выраженные в долях окна, вымытых за минуту) равны соответственно m , n и l .

Тогда верны равенства $m + n = \frac{1}{20}$, $n + l = \frac{1}{15}$, $m + l = \frac{1}{12}$, следовательно,

$2(m + n + l) = \frac{1}{20} + \frac{1}{15} + \frac{1}{12} = \frac{1}{5}$, откуда $m + n + l = \frac{1}{10}$. Значит, одно окно при

совместной работе девочки вымоют за $1 : \frac{1}{10} = 10$ (мин).

Решите задачу без введения букв.

1.26. Алеша и Боря могут покрасить забор за 3 ч. Алеша и Вася могут покрасить тот же забор за 2 ч, а Боря и Вася — за 1,5 ч. За какое время мальчики покрасят забор, работая втроем? Ответ дайте в минутах.

1.27. Том и Дик могут сделать работу за 2 ч, Том и Гарри сделают ту же работу за 3 ч, Дик и Гарри — за 4 ч. Сколько времени понадобится им, чтобы сделать эту работу втроем?

1.28. Три землекопа подрядились вырыть котлован. Если заболеет Иван, то двое сделают работу за 30 дней, если заболеет Петр, то за 15 дней, а если не придет Андрей, то за 12 дней. Вышел на работу один Андрей. За сколько дней он управится?

Следующие задачи не относятся к задачам на совместную работу. Тем не менее, их можно решить похожими рассуждениями с дробями.

1.29. ЕГЭ, 2009. У Алены есть мобильный телефон, заряда аккумулятора которого хватает на 6 часов разговора или 210 часов ожидания. Когда Алена сядила в поезд, телефон был полностью заряжен, а когда

она выходила из поезда, телефон разрядился. Сколько времени она ехала на поезде, если известно, что Алена говорила по телефону ровно половину времени поездки?

Пусть Алена 1 ч говорила по телефону и 1 ч телефон находился в режиме ожидания. Тогда за эти 2 ч израсходовано $\frac{1}{6} + \frac{1}{210} = \frac{6}{35}$ заряда батарейки. Поэтому полного заряда батарейки хватит на $1 : \frac{6}{35} = \frac{35}{6}$ таких пар ча-

сов, то есть на $2 \cdot \frac{35}{6} = \frac{35}{3}$ (ч), или на 11 ч 40 мин.

1.30. Имея полный бак топлива, рыбак может проплыть на моторной лодке 20 км против течения или 30 км по течению реки. На какое наибольшее расстояние он может отплыть по реке, чтобы топлива хватило и на обратный путь? (Движение с выключенным мотором не рассматривается.)

1.31. Остап Бендер купил для «Антилопы-Гну» 4 новых колеса. Передние колеса автомобиля изнашиваются через 12000 км пробега, а задние — через 8000 км пробега. Какой наибольший путь может проехать «Антилопа-Гну», если Адам Козлевич догадается вовремя поменять задние колеса с передними?

Мы рассмотрели задачи на совместную работу, решаемые арифметически (без уравнений). Но тема не исчерпана, мы вернемся к ней еще не раз, когда речь пойдет о применении уравнений или систем уравнений при решении задач на совместную работу.

2. ЗАДАЧИ НА СРЕДНЮЮ СКОРОСТЬ ДВИЖЕНИЯ

Средней скоростью движения на некотором участке пути называют постоянную скорость, с которой можно тот же участок пути пройти за то же время. Например, если турист шел 3 ч со скоростью 5 км/ч и 2 ч со скоростью 4 км/ч, то средняя скорость движения равна $\frac{3 \cdot 5 + 2 \cdot 4}{3 + 2} = 4,6$ (км/ч).

Задачи, связанные со средней скоростью движения, встречаются нечасто, но умение их решать, как мы увидим, иногда проверяется на олимпиадах, на ЕГЭ и на конкурсных экзаменах в вузы. Эти задачи не сложны для понимания, но при их решении часто допускают одну и ту же ошибку: вычисляют среднюю скорость как среднее арифметическое данных скоростей независимо от условия задачи.

2.1. Расстояние между двумя селами 18 км. Велосипедист ехал из одного села в другое 2 ч, а возвращался по той же дороге 3 ч. Какова средняя скорость движения велосипедиста на всем участке пути?

2.2. Расстояние между двумя пунктами 45 км. Мотоциклист проехал это расстояние в одном направлении (в гору) со скоростью 40 км/ч, а в другом направлении (с горы) со скоростью 60 км/ч. Какова средняя скорость движения мотоциклиста на всем участке пути?

Задача **2.1** проста. Убедитесь, что средняя скорость движения велосипедиста равна 7,2 км/ч. Но и задача **2.2** не намного сложнее, так как нетрудно вычислить весь путь мотоциклиста и время, затраченное на путь туда и обратно.

Рассмотрим более сложные задачи на вычисление средней скорости движения.

2.3. Турист шел со скоростью 4 км/ч, потом точно такое же время со скоростью 5 км/ч. Какова средняя скорость движения туриста на всем участке пути?

Пусть турист шел t ч со скоростью 4 км/ч и t ч со скоростью 5 км/ч. Тогда за $2t$ ч он прошел $4t + 5t = 9t$ (км). Средняя скорость движения туриста равна $\frac{9t}{2t} = 4,5$ (км/ч).

Как видим, средняя скорость туриста оказалась равной среднему арифметическому двух данных скоростей.

Покажем, что если время движения на двух участках пути одинаково, то средняя скорость движения равна среднему арифметическому двух данных скоростей. Для этого решим ту же задачу в общем виде.

2.4. Турист шел со скоростью a км/ч, потом точно такое же время со скоростью b км/ч. Какова средняя скорость движения туриста на всем участке пути?

Пусть турист шел t ч со скоростью a км/ч и столько же — t ч со скоростью b км/ч. Тогда за $2t$ ч он прошел $at + bt = (a + b)t$ (км). Средняя скорость движения туриста равна $\frac{(a + b)t}{2t} = \frac{a + b}{2}$ (км/ч).

2.5. ЕГЭ, 2009. Половину времени, затраченного на дорогу, автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, а вторую половину времени — со скоростью 46 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

2.6. На пути из одного поселка в другой автомобиль некоторое время шел со скоростью 60 км/ч, потом точно такое же время со скоростью 40 км/ч, потом точно такое же время со скоростью, равной средней скорости движения на двух первых участках пути. Какова средняя скорость движения на всем пути из одного поселка в другой?

2.7. Некоторое расстояние автомобиль преодолел в гору со скоростью 42 км/ч, а с горы — со скоростью 56 км/ч. Какова средняя скорость движения автомобиля на всем участке пути?

Пусть длина участка пути равна s км. Тогда в оба конца автомобиль проехал $2s$ км, затратив на весь путь $\frac{s}{42} + \frac{s}{56} = \frac{s}{24}$ (ч).

Средняя скорость движения равна $2s : \frac{s}{24} = 48$ (км/ч).

2.8. Автомобиль ехал из пункта A в пункт B порожняком со скоростью 66 км/ч, а возвращался по той же дороге с грузом со скоростью 55 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на всем участке пути.

Сформулируем ту же задачу в общем виде.

2.9. Некоторое расстояние автомобиль преодолел в гору со скоростью a км/ч, а с горы — со скоростью b км/ч. Какова средняя скорость движения автомобиля на всем участке пути?

2.10. ЕГЭ, 2009. Велосипедист от дома до места работы едет со средней скоростью 10 км/ч, а обратно — со средней скоростью 15 км/ч, поскольку дорога идет немного под уклон. Найдите среднюю скорость движения велосипедиста на всем пути от дома до места работы и обратно.

2.11. Дорога между двумя пунктами разделена на три участка равной длины. Автомобиль шел на первом участке со скоростью 60 км/ч, на втором — со скоростью 40 км/ч, а на третьем — со скоростью, равной средней скорости движения на двух первых участках пути. Какова средняя скорость движения на всем пути из одного пункта в другой?

Рассмотрим задачи, в которых средняя скорость задана, а одну из скоростей нужно определить. Здесь потребуется применение уравнений.

2.12. В гору велосипедист ехал со скоростью 10 км/ч, а с горы — с некоторой другой постоянной скоростью. Как он подсчитал, средняя скорость движения оказалась равной 12 км/ч. С какой скоростью велосипедист ехал с горы?

2.13. Автомобиль ехал из пункта A в пункт B порожняком с постоянной скоростью, а возвращался по той же дороге с грузом со скоростью 60 км/ч. С какой скоростью он ехал порожняком, если средняя скорость движения оказалась равной 70 км/ч?

Сформулируем задачу в общем виде.

2.14. В одном направлении велосипедист проехал расстояние от A до B со скоростью a км/ч, а в обратном — с другой постоянной скоростью. С какой скоростью ехал велосипедист в обратном направлении, если средняя скорость движения оказалась равной x км/ч?

2.15. Пятая Соросовская олимпиада, 1998–99. Из одного города в другой выехала машина. Первую треть пути она ехала со скоростью 50 км/ч, вторую треть — 60 км/ч, а последнюю — 70 км/ч. Чему равна средняя скорость машины на всем пути?

2.16. МГУ, филол. ф., 1999. В течение двух часов пароход двигался по реке в тумане. После того как туман рассеялся, пароход вдвое увеличил свою скорость и плыл еще 6 ч. Какой длины путь проделал пароход в тумане, если его средняя скорость за 8 ч плавания составила 14 км/ч?

3. ЗАДАЧИ НА ДВИЖЕНИЕ ПО РЕКЕ

Начнем с простой задачи.

3.1. Катер проходит некоторое расстояние по озеру за 6 ч, а по течению реки — за 5 ч. Сколько времени потребуется плоту, чтобы проплыть такое же расстояние по течению реки?

Примем все расстояние за 1, тогда за 1 ч катер проходит по течению $\frac{1}{5}$, а по озеру $\frac{1}{6}$ всего расстояния. При движении по течению он проходит на $\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$ (расстояния) больше — это и есть та часть расстояния, на которую в час течение сносит все предметы, в том числе и катер, и плот. Значит, то же расстояние плот проплывет за 30 ч.

Без пояснений решение задачи можно записать так:

$$\begin{array}{ll} 1) 1 : 5 = \frac{1}{5}; & 2) 1 : 6 = \frac{1}{6}; \\ 3) \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}; & 4) 1 : \frac{1}{30} = 30. \end{array}$$

Объяснение решения упростится, если расстояние обозначить буквой.

Пусть x км — данное расстояние, тогда $\frac{x}{5}$ км/ч — скорость катера по течению; $\frac{x}{6}$ км/ч — скорость катера в стоячей воде; $\frac{x}{5} - \frac{x}{6} = \frac{x}{30}$ (км/ч) — скорость течения; $x : \frac{x}{30} = 30$ (ч) — потребуется плоту, чтобы проплыть такое же расстояние.

3.2. Расстояние между двумя пристанями по течению катер проходит за 8 ч, а плот — за 72 ч. Сколько времени потратит катер на такой же путь по озеру?

3.3. Лодка проплыла некоторое расстояние по озеру за 4 ч. Такое же расстояние плот проплывает по реке за 12 ч. Сколько времени затратит лодка на тот же путь:

а) по течению реки; б) против течения реки?

3.4. Моторная лодка проходит расстояние между двумя пунктами A и B по течению реки за 2 ч, а плот — за 8 ч. Какое время затратит моторная лодка на обратный путь?

3.5. Плот плывет по реке 40 ч от пункта A до пункта B , а катер — 4 ч. Сколько часов от B до A плывет катер?

3.6. Теплоход от Киева до Херсона идет трое суток, а от Херсона до Киева — четверо суток (без остановок). Сколько времени от Киева до Херсона будут плыть плоты?

Теплоход в сутки проходит по течению реки $1 : 3 = \frac{1}{3}$ (пути), а против течения $1 : 4 = \frac{1}{4}$ (пути). Вычтем $\frac{1}{4}$ из $\frac{1}{3}$, полученная разность — это удвоенная «скорость течения». Плоты за сутки проплывают $\frac{1}{12} : 2 = \frac{1}{24}$ (пути), значит, весь путь они проплывут за $1 : \frac{1}{24} = 24$ (дня).

Эту задачу, как и большинство задач данной серии, можно решить, обозначив расстояние буквой.

Пусть x км — расстояние от Киева до Херсона, тогда скорость теплохода по течению $\frac{x}{3}$ км/сут, против течения $\frac{x}{4}$ км/сут.

$$1) \frac{x}{3} - \frac{x}{4} = \frac{x}{12} \text{ (км/сут.) — удвоенная скорость течения;}$$

$$2) \frac{x}{12} : 2 = \frac{x}{24} \text{ (км/сут.) — скорость течения;}$$

$$3) x : \frac{x}{24} = 24 \text{ (дня) — время движения плотов.}$$

3.7. Из Нижнего Новгорода в Астрахань теплоход плывет 5 суток, а обратно — 7 суток. За сколько суток из Нижнего Новгорода в Астрахань приплывут плоты?

3.8. Расстояние между двумя пунктами пароход проходит вниз по течению реки за 2 ч, а вверх по течению — за 3 ч. Сколько часов между теми же пунктами плывет бревно?

Сформулируем задачу в общем виде.

3.9. Лодка от пункта A до пункта B плывет по течению a ч, а от B до A — b ч. Сколько часов от A до B плывет бревно?

Решение задачи для конкретных значений a и b рассмотрено выше, а решение задачи в общем виде приводит к формуле $x = \frac{2ab}{b-a}$.

Для решения задачи с любыми числовыми значениями a и b ($a < b$) можно составить программу.

Составим две задачи, обратные задаче **3.9**.

3.10. Теплоход от пункта A до пункта B по течению идет a дней, а бревно от A до B плывет x дней. Сколько дней будет плыть теплоход от B до A против течения?

3.11. Теплоход от пункта B до пункта A против течения идет b дней, а бревно от A до B плывет x дней. Сколько дней будет плыть теплоход от A до B по течению?

Рассмотрим задачи иного рода, связанные с движением по реке.

3.12. Собственная скорость теплохода u км/ч, а скорость течения — v км/ч. Теплоход проплыл некоторое расстояние по течению, потом точно такое же расстояние против течения. Вычислите среднюю скорость движения на всем пути.

3.13. Пловец по течению быстрой реки проплыл 150 м. Когда же он поплыл против течения, то за такое же время его снесло течением на 50 м ниже по течению. Во сколько раз скорость течения реки больше скорости пловца в стоячей воде?

На первый взгляд кажется, что в задачах **3.14–3.15** не хватает данных, но это только на первый взгляд. В них достаточно данных для получения ответа.

3.14. Папа и сын плывут на лодке против течения. В какой-то момент сын уронил за борт папину шляпу. Только через 20 мин папа заметил пропажу, быстро развернул лодку, и они поплыли вниз по течению с той же собственной скоростью. За сколько минут они догонят шляпу?

Если вам не удастся найти решение, то можно для начала решить задачу с различными недостающими данными (собственная скорость лодки и скорость течения реки).

3.15. Я гроб вверх по течению реки и, проплывая под мостом, потерял шляпу. Через 10 мин я это заметил, повернул обратно и с той же собственной скоростью нагнал шляпу в 1 км ниже моста. Какова скорость течения реки?

4. ЗАДАЧИ НА ПРОЦЕНТЫ

В данном разделе рассматриваются задачи на проценты, для решения которых не требуется решать уравнений или неравенств. Но это не означает, что здесь собраны простые задачи. Для решения некоторых из них достаточно выполнить несколько арифметических действий, для других — придется использовать буквы.

Сначала рассмотрим три весьма поучительные задачи.

4.1. Арбуз массой 20 кг содержал 99% воды. Когда он немного усох, то стал содержать 98% воды. Какова теперь масса арбуза?

На первый взгляд кажется, что масса арбуза мало изменилась, но это только на первый взгляд! Масса «сухого вещества» в арбузе первоначально составляла $100 - 99 = 1$ (%), или $20 \cdot 0,01 = 0,2$ (кг). После того, как арбуз усох, масса «сухого вещества» составила $100 - 98 = 2$ (%) от новой массы арбуза. Тогда новая масса арбуза равна $0,2 : 0,02 = 10$ (кг).

4.2. Некий леспромхоз решил вырубить сосновый лес, но экологи запротестовали. Тогда директор леспромхоза всех успокоил, сказав: «В нашем лесу 99% сосны. После рубки сосна будет составлять 98% всех деревьев». Какую часть леса планирует вырубить леспромхоз?

Если бы экологи лучше знали проценты, то директору леспромхоза не удалось бы их так легко перехитрить. Если при рубке деревьев будут рубить только сосны, то леспромхоз может вырубить половину леса (см. решение предыдущей задачи). Если же будут рубить и другие деревья, то леспромхоз может оставить в лесу 49 сосен и 1 березу — и в этом случае директор леспромхоза не нарушит своего обещания, так как 49 сосен составляют как раз 98% от 50-ти деревьев!

Следующая задача составлена по мотивам выступления на телевидении крупного российского чиновника.

Ведущий программы спросил его:

— Как Вы ожидаете, какой будет через год квартплата, скажем, за двухкомнатную квартиру в Нижнем Новгороде?

Чиновник не стал приводить конкретные цифры, он ответил «в процентах»:

— Оплата жилья поднимется за год примерно на 15%. Сейчас население оплачивает в среднем 35% реальных расходов на содержание жилья, а через год будет оплачивать уже 50%.

Итак, задача.

4.3. В 1997 г. население страны оплачивало в среднем 35% реальных расходов на содержание жилья, а через год должно будет оплачивать уже 50% этих расходов. На сколько процентов при этом должна была увеличиться оплата жилья за год?

Как видно из задач **4.1–4.3**, с помощью процентов можно легко ввести в заблуждение человека, особенно если он плохо в них разбирается. Не случайно в рекламе так часто используют проценты. Одно дело, если обещают повысить пушистость ваших ресниц на 33%, и совсем другое дело, если обещают, что вы похудеете на 100%. Изучайте проценты и будьте бдительны!

4.4. ГАУ, 1994. На фирме работает 40 человек. Известно, что 25 из них являются владельцами акций компании «Десна», а 27 — владельцами акций компании «Дубна». Какая часть сотрудников фирмы (в процентах) владеет акциями обеих компаний, если каждый сотрудник является обладателем хотя бы одной акции?

4.5. Яблоки, содержащие 70% воды, при сушке потеряли 60% своей массы. Сколько процентов воды содержат сушеные яблоки?

Для объяснения решения этой задачи воспользуемся графической иллюстрацией (рис. 2). Масса воды составляла 70% массы яблок, 60 из них испарилось, а 10 осталось. Теперь 10 частей воды приходится на $100 - 70 = 30$ (частей) «сухого вещества» яблок или на 40 частей массы сушеных яблок. Масса воды составляет $10 : 40 = 0,25$ или 25% массы сушеных яблок.

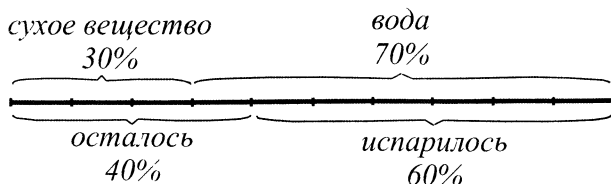


Рис. 2.

Но можно поступить иначе. Пусть масса свежих яблок составляла m кг. Масса воды в них составляла $0,7m$ кг, а масса сухого вещества $m - 0,7m = 0,3m$ (кг); $0,6m$ кг воды испарилось, тогда $0,7m - 0,6m = 0,1m$ (кг) — масса воды в сушеных яблоках, а масса сушеных яблок равна $m - 0,6m = 0,4m$ (кг). Следовательно, масса воды составляет $\frac{0,1m \cdot 100}{0,4m} = 25$ (%) от массы сушеных яблок.

4.6. Груши, содержащие 65% воды, при сушке потеряли 50% своей массы. Сколько процентов воды содержат сушеные груши?

4.7. На коробке с вермишелью написано: «Масса нетто 500 г при влажности 13%». Какова масса вермишели, если она хранится при влажности 25%?

4.8. Для получения томат-пасты протертую массу томатов выпаривают в специальных машинах. Сколько томат-пасты, содержащей 30% воды, получится из 28 т протертой массы томатов, содержащей 95% воды?

4.9. Некто купил зимой акции по 50 р. за штуку. Летом стоимость акций поднялась до 90 р., а цены на товары за то же время увеличились в среднем на 20%. На сколько процентов увеличилась покупательная способность денег, вложенных в акции?

Условия следующих задач не слишком реальны, так как в них процесс чистки картофеля рассматривается как равномерный, да еще с постоянным процентом отходов. И все-таки попробуйте их решить.

4.10. Рядовой Иванов *почистил* ведро картошки за 4 ч и у него 20% всей картошки ушло в очистки. За сколько часов он *начистит* такое же (по весу) ведро картошки?

Обратите внимание на слова, выделенные в условии задачи курсивом. Почистив ведро картошки, рядовой Иванов получает $\frac{4}{5}$ ведра очищенной картошки, так как $\frac{1}{5}$ ведра составляют отходы.

4.11. Рядовой Петров *начистил* ведро картошки за 4 ч и у него 20% всей картошки ушло в очистки. За сколько часов он *почистит* такое же (по весу) ведро картошки?

4.12. Рядовой Сидоров может *почистить* ведро картошки за 3 ч, а *начистит* такое же (по весу) ведро картошки за 4 ч. Сколько процентов картошки идет у него в очистки?

4.13. Рядовой Иванов может почистить котел картошки за 4 ч, а рядовой Петров — за 6 ч. У рядового Иванова 10% картошки идет в очистки, а у рядового Петрова — 15%. Однажды они взялись вместе чистить котел картошки. Сколько процентов картошки уйдет в очистки при их совместной работе?

Рассмотрим задачи, для решения которых требуется введение буквы для обозначения вспомогательных неизвестных, как это было сделано при втором способе решения задачи **4.5**. Найти значения этих величин не удастся, но это и не требуется, а ответ к задаче с их помощью найти можно.

4.14. Некто не доверяет банкам и хранит сбережения дома. Крупная сумма денег пролежала дома с зимы до лета. За это время цены на товары выросли в среднем на 50%. На сколько процентов уменьшилась покупательная способность отложенных денег?

Пусть зимой на a р. можно было купить одну единицу товара. Летом этот товар стоил уже $a + 0,5a = 1,5a$, т.е. летом на те же a р. можно было купить $a : 1,5a = \frac{2}{3}$ (единицы) того же товара. Это меньше на $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ (единицы) товара, или на $33\frac{1}{3}\%$ меньше, чем зимой. Покупательная способность отложенных денег уменьшилась на $33\frac{1}{3}\%$.

4.15. ГАУ, 1994. Гражданин Владимир — владелец акции двух компаний. Стоимость приобретенных им акций компании «Киржач» вдвое превышает стоимость акций компании «Ока». На сколько процентов увеличится общая стоимость акций гр. Владимира, если цена акций компании «Киржач» увеличится на 30%, а цена акций компании «Ока» увеличится на 60%?

4.16. ГАУ, 1994. Гражданин Борисов — владелец акций двух компаний. Стоимость приобретенных им акций компании «Яуза» в четыре раза превышает стоимость акций компании «Дубна». На сколько процентов увеличится общая стоимость акций гр. Борисова, если цена акций компании «Дубна» увеличится на 50%, а цена акций компании «Яуза» увеличится на 25%?

4.17. ГИА, 2009. На должность заведующего кафедрой претендовало три кандидата: Климов, Лебедев, Мишин. Во время выборов за Мишина

было отдано в 4 раза меньше голосов, чем за Климова, а за Лебедева — в 1,5 раза больше, чем за Климова и Мишина вместе. Сколько процентов голосов получил победитель?

Пусть за Мишина было отдано m голосов. Тогда за Климова было отдано $4m$ голосов, а за Лебедева $1,5 \cdot (4m + m) = 7,5m$ голосов из $m + 4m + 7,5m = 12,5m$ голосов. Голоса победителя Лебедева ($7,5m$) составляют $\frac{7,5m \cdot 100\%}{12,5m} = 60\%$ от всех голосов.

4.18. ЕГЭ, 2009. Объемы ежегодной добычи нефти первой, второй и третьей скважинами относятся как 6 : 7 : 10. Планируется уменьшить годовую добычу нефти из первой скважины на 10% и из второй — тоже на 10%. На сколько процентов нужно увеличить годовую добычу нефти из третьей скважины, чтобы суммарный объем добываемой за год нефти не изменился?

Пусть объемы ежегодной добычи нефти из первой, второй и третьей скважин равны $6k$, $7k$ и $10k$ (одних и тех же единиц) соответственно. Уменьшение годовой добычи нефти из первой и из второй скважин составит $6k \cdot 0,1 + 7k \cdot 0,1 = 1,3k$. Чтобы компенсировать эту потерю, на третьей скважине надо увеличить добычу нефти на $1,3k$ единиц, что составит $\frac{1,3k \cdot 100\%}{10k} = 13\%$.

Итак, годовую добычу нефти из третьей скважины нужно увеличить на 13%.

4.19. ЕГЭ, 2009. Объемы ежемесячной добычи газа на первом, втором и третьем месторождениях относятся как 3 : 8 : 13. Планируется уменьшить месячную добычу газа на первом месторождении на 13% и на втором — тоже на 13%. На сколько процентов нужно увеличить месячную добычу газа на третьем месторождении, чтобы суммарный объем добываемого за месяц газа не изменился?

4.20. ЕГЭ, 2009. Секретарю фирмы поручили разослать письма адресатам по списку. Секретарь, отдав своему помощнику часть списка, содержащую 80% адресатов, взял оставшуюся часть себе и разослал письма по своей части списка за время, в 6 раз меньшее, чем помощник — по своей. Сколько процентов списка адресатов секретарь должен был сразу отдать помощнику (взяв себе остальные), чтобы они, работая с пре-

жней производительностью, выполнили свою работу за одинаковое время?

Так как помощник разослал в 4 раза больше писем, чем секретарь, то пусть секретарь разослал p писем, а помощник — $4p$ писем. Секретарь затратил времени в 6 раз меньше, следовательно, если бы он проработал столько же времени, сколько и помощник, то мог бы разослать $6p$ писем. Следовательно, отношение производительностей труда секретаря и помощника равно $6p : 4p = 3 : 2$. Чтобы закончить работу одновременно, из всех 100% списка адресатов помощнику надо отдать $\frac{100 \cdot 2}{3 + 2} = 40$ (%) адресов.

4.21. ЕГЭ, 2009. Три насоса, работая вместе, выкачивают из бассейна воду за 2 ч 5 мин. Производительности насосов относятся как 1 : 4 : 7. Сколько процентов объема бассейна будет выкачено за 45 мин совместной работы первого и третьего насосов?

И способ. Пусть за 125 мин совместной работы первый, второй и третий насосы выкачали x , $4x$ и $7x$ л соответственно. Тогда объем бассейна равен 12х л.

За 45 мин работы первый насос откачает $\frac{x \cdot 45}{125} = \frac{9x}{25}$ (л), третий — в 7 раз больше: $\frac{63x}{25}$ л, а вместе — $\frac{72x}{25}$ л. Это составляет $\frac{72x \cdot 100}{25 \cdot 12x} = 24$ (%) объема бассейна.

Решите задачу без введения букв.

4.22. ЕГЭ, 2009. Три насоса, работая вместе, заполняют бак керосином за 1 ч 40 мин. Производительности насосов относятся как 10 : 8 : 7. Сколько процентов объема бака будет заполнено за 2 ч совместной работы второго и третьего насосов?

4.23. МГУ, социол. ф., 2004. На факультете X отличники составляют 10% от общего количества студентов этого факультета, на факультете Y — 20%, а на факультете Z — лишь 4%. Найти средний процент отличников по всем трем факультетам, если известно, что на факультете Y учатся на 50% больше студентов, чем на факультете X , а на факультете Z — вдвое меньше, чем на факультете X .

Пусть на факультете X учатся x студентов, тогда на факультетах Y и Z учатся $1,5x$ и $0,5x$ студентов соответственно — всего $3x$ студентов.

Всего отличников было $0,1x + 0,2 \cdot 1,5x + 0,04 \cdot 0,5x = 0,42x$, а искомая величина равна $\frac{0,42x \cdot 100\%}{3x} = 14\%$.

4.24. МГУ, социол. ф., 2004. На факультете X отличники составляют 10% от общего количества студентов этого факультета, на факультете Y — 20%, а на факультете Z — 40%. Известно, что на факультете Y учатся в полтора раза больше студентов, чем на факультете X , а средний процент отличников по всем факультетам составляет 20%. Какая доля всех студентов учится на факультете Z ?

Иногда для решения задачи приходится вводить две буквы для обозначения неизвестных вспомогательных величин.

4.25. Купили конфеты и печенье. Цена 1 кг конфет на 50% больше, чем цена 1 кг печенья, но их купили на 50% меньше, чем печенья. За что заплатили меньше? На сколько процентов?

Пусть купили x кг печенья по y р. за один килограмм — всего на xy р. Тогда конфет купили $0,5x$ кг по $1,5y$ р. — всего на $0,75xy$ р. За конфеты заплатили на $0,25xy$ р. меньше, или на 25% меньше, чем за печенье.

4.26. Магазин продал на прошлой неделе некоторый товар. На этой неделе запланировано продать того же товара на 10% меньше, но по цене на 10% большей. Увеличится или уменьшится сумма выручки магазина? На сколько процентов?

4.27. Длину прямоугольника уменьшили на 20%. На сколько процентов нужно увеличить ширину прямоугольника, чтобы его площадь не изменилась?

Пусть у прямоугольника длина была равна a , ширина b . После уменьшения на 20% длина стала равна $0,8a = \frac{4}{5}a$. Чтобы площадь ab не изменилась, нужно длину $\frac{4}{5}a$ умножить на ширину $\frac{5}{4}b = 1,25b$, т.е. ширину нужно увеличить на 25%.

4.28. Картофель подешевел на 20%. На сколько процентов больше картофеля можно купить на ту же сумму денег?

4.29. На некотором участке пути машинист уменьшил скорость поезда на 25%. На сколько процентов увеличится время движения на этом участке?

4.30. Производительность труда повысили на 25%. На сколько процентов уменьшилось время выполнения задания?

4.31. За некоторый промежуток времени цена доллара в рублях увеличилась на 25%. На сколько процентов при этом уменьшилась цена рубля в долларах?

4.32. В понедельник рабочий перевыполнил дневное задание на 10%, а во вторник он перевыполнил такое же задание на 8%. На сколько процентов он перевыполнил задание двух дней?

4.33. Если при повышении производительности труда рабочего на 25% повысить его зарплату на 20%, то это позволит снизить расход на оплату труда в расчете на единицу продукции на 4%. Проверьте это.

Пусть за изготовление a деталей рабочий должен получить b р. На 1 деталь приходится $\frac{b}{a}$ р. Повысив производительность труда на 25%, рабочий сделал $1,25a$ деталей и получил за них $1,2b$ р. Теперь на 1 деталь приходится $\frac{1,2b}{1,25a} = 0,96 \cdot \frac{b}{a}$ р. — это на 4% меньше, чем $\frac{b}{a}$ р.

4.34. Рабочий повысил производительность труда на 40%. При этом его зарплата увеличилась на 26%. На сколько процентов уменьшился расход на оплату труда в расчете на единицу продукции?

4.35. В драмкружке число мальчиков составляет 80% от числа девочек. Сколько процентов составляет число девочек от числа мальчиков в этом кружке?

Рассмотрим три способа решения этой задачи.

I способ. Число мальчиков составляет 80% от числа девочек (100%). Определим, сколько процентов составляет 100% от 80%:
 $\frac{100 \cdot 100}{80} \% = 125\%.$

II способ. Число мальчиков (m) составляет 80% от числа девочек (d), значит, $m = 0,8d$. Откуда $d = 1,25m$, т.е. число девочек составляет 125% от числа мальчиков.

III способ. На 10 девочек приходится 8 мальчиков, число девочек составляет $\frac{10}{8}$, или 125% от числа мальчиков.

4.36. Мальчики составляют 45% всех учащихся школы. Известно, что 30% мальчиков и 40% девочек учатся без троек. Сколько процентов всех учащихся школы учатся без троек?

4.37. В некотором царстве, в некотором государстве правительство вынесло на всенародное голосование проект закона о запрете рекламы

спиртных напитков. Этот проект поддержали 69% всего взрослого населения, принявшего участие в голосовании. Причем «за» проголосовало 94% женщин и 41% мужчин. Кого среди голосовавших было больше — мужчин или женщин? На сколько процентов?

4.38. За год число мальчиков в школе увеличилось на 5%, число девочек уменьшилось на 4%, а общее число учащихся осталось прежним. Кого было больше в прошлом году в школе — мальчиков или девочек? На сколько процентов?

4.39. Число жителей областного центра за год увеличилось на 10%, а число жителей области (без учета областного центра) уменьшилось на 1%. Общее же число жителей областного центра и области за год не изменилось. Во сколько раз теперь число жителей областного центра меньше числа жителей области?

4.40. Год назад число жителей областного центра было в 8 раз меньше, чем число жителей области (без учета областного центра), а теперь — только в 7 раз. При этом за год общее число жителей областного центра и области уменьшилось на 4%. На сколько процентов изменилось число жителей областного центра и число жителей области?

Пусть год назад в областном центре проживало a жителей, а теперь проживает b жителей. Тогда год назад в области проживало $8a$ жителей, а теперь — $7b$ жителей. По условию задачи за год общее число жителей областного центра и области уменьшилось на 4%, т.е. $b + 7b = 8b$ составило 96% от $a + 8a = 9a$. Тогда из равенства $8b = 0,96 \cdot 9a$ получим, что $b = 1,08a$. Этот результат означает, что за год число жителей областного центра увеличилось на 8%.

Число жителей области теперь составляет $7b = 7 \cdot 1,08a = 7,56a$, что меньше, чем $8a$ на $\frac{8a - 7,56a}{8a} \cdot 100\% = 5,5\%$. То есть число жителей области уменьшилось на 5,5%.

4.41. Число жителей областного центра увеличилось за год на 4%, а число жителей области (без учета областного центра) уменьшилось на 3%. Общее число жителей областного центра и области за этот год уменьшилось на 2%. Во сколько раз больше жителей было в прошлом году в области, чем в областном центре?

4.42. ЕГЭ, 2007. Магазин выставил на продажу товар с наценкой 40% от закупочной цены. После продажи 0,75 всего товара магазин сни-

зил назначенную цену на 40% и распродал оставшийся товар. Сколько процентов от закупочной цены товара составила прибыль магазина?

4.43. В некотором царстве, в некотором государстве стоимость алмаза пропорциональна квадрату его массы. При огранке алмаза откололась некоторая его часть.

а) На сколько процентов уменьшилась суммарная стоимость кусков, если алмаз раскололся пополам?

б) На сколько процентов уменьшилась стоимость алмаза, если откололась $\frac{1}{10}$ алмаза?

в) Какая часть алмаза откололась, если его стоимость уменьшилась на 36%?

Рассмотрим решение задачи **4.43** (а). Пусть m — первоначальная масса алмаза, а km^2 — его первоначальная стоимость, где k — коэффициент пропорциональности. Стоимость двух кусков составляет

$$k\left(\frac{m}{2}\right)^2 + k\left(\frac{m}{2}\right)^2 = \frac{km^2}{2},$$

или 50% от km^2 , то есть стоимость алмаза уменьшилась на 50%.

4.44. ЕГЭ, 2010. Четыре рубашки дешевле куртки на 20%. На сколько процентов шесть рубашек дороже куртки?

Пусть стоимость куртки x р. Тогда четыре рубашки стоят $0,8x$ р., а шесть рубашек — $0,8x : 4 \cdot 6 = 1,2x$ (р.). Это на 20% больше, чем x р. То есть шесть рубашек дороже куртки на 20%.

4.45. ЕГЭ, 2008. Брюки дороже рубашки на 20% и дешевле пиджака на 46%. На сколько процентов рубашка дешевле пиджака?

Стоимость брюк сравнивают со стоимостью рубашки, поэтому обозначим стоимость рубашки x р., тогда брюки стоят $x + 0,2x = 1,2x$ (р.).

Далее стоимость брюк сравнивают со стоимостью пиджака, поэтому обозначим стоимость пиджака y р., тогда брюки стоят $y - 0,46y = 0,54y$ (р.). Стоимость брюк выражена двумя способами, поэтому $1,2x = 0,54y$, откуда получим, что $x = 0,45y$ — стоимость рубашки составляет 45% от стоимости пиджака. Это означает, что рубашка дешевле пиджака на $100\% - 45\% = 55\%$.

4.46. ЕГЭ, 2008. Брюки дороже рубашки на 25% и дешевле пиджака на 20%. На сколько процентов рубашка дешевле пиджака?

4.47. ЕГЭ, 2009. В магазине костюм, состоящий из пиджака и брюк, стоит на 20% дороже, чем такой же костюм на рынке, причем брюки стоят на 30% дороже, чем на рынке, а пиджак — на 15%. Во сколько раз на рынке брюки от этого костюма дешевле пиджака?

4.48. На острове Невезения всех граждан условно делят на 3 группы по уровню их доходов. К первой группе относят богатых, ко второй — граждан со средним доходом, к третьей — бедных граждан. Количества граждан в этих группах относятся как 1 : 3 : 5, а доходы в расчете на одного представителя группы — как 25 : 5 : 1. Известно, что общий доход всех граждан острова Невезения увеличился в этом году на 10% по сравнению с прошлым годом. При этом доходы богатых граждан увеличились в среднем на 20%, а доходы бедных граждан уменьшились в среднем на 10%. Определите по этим данным, как изменился за этот год средний доход одного представителя средней группы?

Пусть в прошлом году в трех группах населения (по уровню дохода: большой, средний и низкий) было x , $3x$ и $5x$ человек, а средний доход одного человека составлял $25y$, $5y$ и y (в денежных единицах острова Невезения). Тогда общий доход этих групп населения составлял $25xy$, $15xy$ и $5xy$ денежных единиц.

В этом году доходы первой группы населения увеличились в среднем на 20% и составили $30xy$ денежных единиц, а доходы третьей группы населения уменьшились в среднем на 10% и составили $4,5xy$ денежных единиц.

Общий доход всех граждан острова Невезения увеличился в этом году на 10% по сравнению с прошлым годом и составил

$$1,1(25xy + 15xy + 5xy) = 49,5xy \text{ (денежных единиц).}$$

Теперь можно узнать доход средней группы в этом году: $49,5xy - 30xy - 4,5xy = 15xy$ (денежных единиц). То есть доходы средней группы за год не изменились.

4.49. Один мастер оклеит комнату обоями за a ч, а другой — за b ч. Если же они будут работать вместе, то производительность работы каждого повысится на $p\%$. За сколько часов они оклеят комнату, работая вместе, если:

а) $a = 6$, $b = 4$, $p = 20$; б) $a = 3$, $b = 7$, $p = 40$?

Первый мастер оклеивает $\frac{1}{a}$, второй $\frac{1}{b}$ комнаты в час. Производительность их совместной работы равна $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{p}{100}\right) = \frac{(a+b)(p+100)}{100ab}$ комнаты в час. Поэтому при совместной работе они оклеят комнату за 1 : $\frac{(a+b)(p+100)}{100ab} = \frac{100ab}{(a+b)(p+100)}$ (ч).

а) Если $a = 6, b = 4, p = 20$, то $\frac{100ab}{(a+b)(p+100)} = 2$ (ч).

б) Если $a = 3, b = 7, p = 40$, то $\frac{100ab}{(a+b)(p+100)} = 1,5$ (ч).

4.50. Один работник может вырыть колодец за a дней, другой — за b дней. Если же они будут работать вместе, то производительность работы каждого повысится на $p\%$ и они выкопают колодец за c дней. На сколько процентов повышается производительность труда каждого работника при совместной работе, если:

а) $a = 15, b = 10, c = 4$; б) $a = 21, b = 28, c = 8$?

4.51. *РЭА, 1997.* Моторная лодка проплыла по озеру, а потом поднялась вверх по реке, впадающей в озеро. Путь по озеру на 30% больше, чем путь по реке, а скорость движения лодки против течения на 10% меньше, чем по озеру. На сколько процентов время движения по озеру больше времени движения по реке?

4.52. *ВШЭ, 1997.* Масса бороды Карабаса-Барабаса составляет 40% его общей массы. Буратино остриг ему часть бороды, после чего масса оставшейся части бороды стала составлять 10% массы Карабаса-Барабаса. Какую часть бороды остриг Буратино?

5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим четыре задачи, арифметическое решение которых требует большой изобретательности, а применение уравнения позволяет получить ответ с помощью более простых рассуждений.

5.1. Велосипедист подсчитал, что если поедет со скоростью 6 км/ч, то опоздает на 1 ч, если поедет со скоростью 9 км/ч, то приедет на 1 ч раньше намеченного срока. С какой скоростью нужно ехать велосипедисту, чтобы приехать вовремя?

И способ. Если велосипедист будет ехать со скоростью 6 км/ч, то когда истечет намеченное время, он не доедет 6 км до места назначения. Если же он будет ехать со скоростью 9 км/ч, то за то же время проедет лишние 9 км.

Представим, что выехали два велосипедиста: один со скоростью 6 км/ч, другой — 9 км/ч. В намеченный срок расстояние между ними будет $6 + 9 = 15$ (км). Так как скорость удаления велосипедистов равна $9 - 6 = 3$ (км/ч), то на 15 км они удалились за $15 : 3 = 5$ (ч). Тогда расстояние между пунктами равно $6 \cdot (5 + 1) = 36$ (км), а скорость, с которой можно приехать в срок, равна $36 : 5 = 7,2$ (км/ч).

II способ. Если намеченное время движения x ч, то путь равен $6(x + 1)$ км, или $9(x - 1)$ км. Остается составить уравнение $6(x + 1) = 9(x - 1)$ и, решив его, получить тот же ответ.

5.2. Задача С.А. Рачинского (1833–1902). Я дал одному ученику 3 ореха, а всем остальным по 5. Если бы я всем дал по 4 ореха, то у меня осталось бы 15. Сколько было орехов?

И способ. Представим, что мы сначала раздали по 4 ореха всем учащимся и осталось 15 орехов. Заберем у одного ученика один орех (у него станет 3 ореха) и 16 орехов раздадим остальным ученикам по одному ореху. Теперь у 16 учащихся будет по 5 орехов и у одного 3 ореха. Всего орехов было $16 \cdot 5 + 3 = 83$.

II способ. Пусть было x учеников, найдем число орехов двумя способами: $3 + 5(x - 1)$ и $4x + 15$. Решив уравнение $3 + 5(x - 1) = 4x + 15$, получим $x = 17$, поэтому орехов было $4x + 15 = 83$.

5.3. Задача Я.И. Перельмана (1882–1942). Бригада из шести плотников и столяра взялась выполнить одну работу. Каждый плотник заработал по 20 р., столяр же на 3 р. больше, чем заработал в среднем каждый из семи членов бригады. Сколько же заработал столяр?

I способ. Предположим, что столяр решил разделить деньги поровну между всеми членами бригады. Для этого нужно разделить 3 р. на шестерых плотников, дав каждому по 0,5 р. В этом случае все члены бригады получат по 20,5 р. Следовательно, столяр заработал $20,5 + 3 = 23,5$ (р.).

II способ. Пусть столяр заработал x р. Тогда средняя зарплата семи членов бригады равна $\frac{x + 6 \cdot 20}{7}$ р., что на 3 р. меньше зарплаты столяра. Остается составить уравнение $x - \frac{x + 6 \cdot 20}{7} = 3$ и, решив его, получить тот же ответ.

5.4. Задача Евклида (прибл. 365–300 до н.э.). Мул и осел шагали по дороге с мешками. Осел жаловался на свою непомерно тяжелую ношу. Мул обратился к попутчику с речью: «Если я возьму у тебя один мешок, то моя ноша станет вдвое тяжелее твоей. Вот если бы ты взял у меня один мешок, то наши ноши сравнялись бы». Сколько мешков нес каждый из них?

I способ. Арифметическое решение этой задачи дала ученица 6 класса Марченко К. (Ревякинская муниципальная гимназия, Московская область; учитель математики Т.В. Абросимова). Кристина сделала графическую иллюстрацию, на которой отражены все условия задачи.

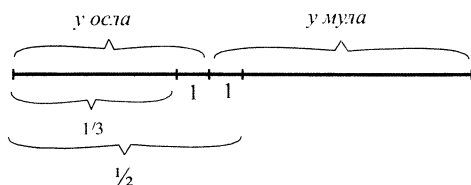


Рис. 3.

Из рис. 3 видно, что на 2 мешка приходится $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ числа всех мешков. Следовательно, всех мешков было $2 \cdot 6 = 12$. Тогда у мула было $12 : 2 + 1 = 7$, а у осла $12 - 7 = 5$ (мешков).

II способ. Обозначим за x число мешков у каждого после передачи одного мешка от мула к ослу. Тогда первоначально у мула было $(x + 1)$ мешков, а у осла $(x - 1)$ мешков. Если же сначала осел даст мешок мулу, то у мула станет $(x + 2)$ мешка, а у осла $(x - 2)$ мешка — в 2 раза меньше, чем у мула.

Остается составить уравнение $x + 2 = 2(x - 2)$ и, решив его, получить тот же ответ.

5.5. Вася должен решить несколько задач. Он рассчитал, что если будет решать по 3 задачи в день, начиная с сегодняшнего, то все задание выполнит в воскресенье. Если же будет решать по 5 задач в день, то выполнит задание в пятницу. В какой день недели Вася вел расчеты?

5.6. Из *Начальных оснований алгебры... Д. Аничкова (1781)*. Сидор и Карп стали играть в карты, имея поровну денег. Но так как Сидор проиграл 12 р., а Карп 57 р., то по окончании игры у Сидора осталось денег в 4 раза больше, чем у Карпа. По сколько денег каждый из них имел до игры?

5.7. Задача Э. Безу (1730–1783). По контракту работникам причитается 48 франков за каждый отработанный день, а за каждый неотработанный день с них вычитается по 12 франков. Через 30 дней выяснилось, что работникам ничего не причитается. Сколько дней они отработали в течение этих 30 дней?

Задачи **5.8–5.13** взяты из книги С.А. Рачинского (1833–1902) «1001 задача для умственного счета» (1899 г.).

5.8. Я принес своим ученикам пряников. Хотел я дать каждому по 7, но 36 пряников не хватает. Если же я дам каждому по 6 пряников, то их у меня останется 12. Сколько я принес пряников, и сколько у меня учеников?

5.9. Торгую я землю. Просят по 23 р. за десятину, но на покупку у меня не хватает 15 р. Если же землю уступят по 17 р. за десятину, у меня останется 15 р. Сколько десятин в участке и сколько у меня денег?

5.10. Стояли березы, летели галки. На каждую березу село по галке, и осталось 5 галок. Потом на каждую березу село по 2 галки, и осталось 5 берез без галок. Сколько галок, сколько берез?

5.11. Два мальчика играли в шашки. Через несколько минут на доске оказалось пустых клеток втрое больше, чем занятых шашками, а у одного мальчика двумя шашками больше, чем у другого. Сколько осталось у каждого? (Всего на доске 64 клетки.)

5.12. В первые 4 месяца 1891 года я проболел столько дней, сколько недель я был здоров. Сколько дней я проболел?

5.13. Ко мне приехали гости, все мужья с женами. Если бы 3 мужа оставили своих жен дома, было бы мужчин вдвое более, чем женщин. Если бы 3 барыни приехали без мужей, то наоборот. Сколько было гостей?

5.14. *Задача Я.И. Перельмана (1882–1942).* Двое очистили 400 картофелин; один очищал 3 штуки в минуту, другой — 2. Второй работал на 25 мин больше, чем первый. Сколько времени работал каждый?

5.15. Двое друзей сделали 29 бумажных самолетиков. Первый делал 3 самолетика в каждые 2 мин, второй — 2 самолетика в каждые 3 мин. Сколько самолетиков сделал каждый, если второй работал на 11 мин дольше?

5.16. Теплоход прошел расстояние между двумя пристанями по течению реки за 4 ч, а против течения за — 5 ч. Определите расстояние между пристанями, если скорость течения 2 км/ч.

5.17. *Задача И. Ньютона (1643–1727).* Некий торговец каждый год увеличивал на одну треть свое состояние, уменьшенное на 100 фунтов стерлингов, которые он ежегодно затрачивал на семью. Через 3 года торговец обнаружил, что его состояние удвоилось. Сколько денег было у торговца вначале?

5.18. Проливной дождь шел 6 ч подряд и наполнил некоторую часть открытого бассейна. Если бы дождь прекратился, то насос откачал бы воду за 2 ч. Определите, за сколько часов насос откачает воду из бассейна, если дождь продолжает идти? Считайте процессы наполнения бассейна и откачки воды равномерными.

5.19. Брат и сестра одновременно начали сбор малины: брат собирал ягоды в четырехлитровую корзину, а сестра — в трехлитровую. Брат собирал ягоды в 1,5 раза быстрее сестры. В какой-то момент они поменялись корзинами и закончили сбор ягод одновременно. Сколько литров ягод собрал брат за все время? Сколько литров ягод собрала сестра до обмена корзинами?

Пусть до обмена корзинами сестра собрала x л, тогда брат собрал $1,5x$ л ягод. После обмена корзинами сестра собрала $4 - 1,5x$, а брат $(3 - x)$ л ягод, причем и после обмена корзинами производительность труда брата была в 1,5 раза больше, чем сестры. Составим уравнение: $3 - x = 1,5 \times$

$\times(4 - 1,5x)$, откуда $x = 2,4$, т.е. сестра до обмена корзинами собрала 2,4 л ягод. Тогда брат за все время собрал $1,5x + 3 - x = 4,2$ (л) ягод.

5.20. Отец и сын принялись косить два соседних участка. Когда сын выкосил половину меньшего участка, они присели отдохнуть и подсчитали, что отец косит в 2 раза быстрее сына, и что если они будут работать с той же производительностью, но поменяются участками, то закончат работу одновременно. Определите площадь каждого участка, если один из них больше другого на 1 сотку.

5.21. Сулико подошла к роднику с двумя кувшинами. Вода из родника текла двумя струями — одна давала в 3 раза больше воды, чем другая. Сулико подставила под струи два кувшина одновременно и, когда набралась половина меньшего кувшина, она поменяла кувшины местами. Как это ни удивительно, но кувшины наполнились одновременно. Определите объем каждого кувшина, если вместе они вмещают 8 л.

5.22. Велосипедист проехал путь от пункта A до пункта B и обратно с некоторой постоянной скоростью. Пешеход прошел путь от A до B со скоростью в 2 раза меньшей скорости велосипедиста, но зато возвращался на автобусе, скорость которого в 4 раза больше скорости велосипедиста. Сколько времени затратил каждый из них на путь туда и обратно, если один был в пути на 0,5 ч дольше другого?

5.23. За неделю до получения стипендии у четырех студентов осталось 45 р. Если бы деньги первого студента увеличить на 2 р., деньги второго уменьшить на 2 р., деньги третьего увеличить вдвое, а деньги четвертого уменьшить вдвое, то у всех четверых денег было бы поровну. Сколько денег было у каждого студента?

5.24. Задача Д. Пойа. Патрульный самолет в тихую безветренную погоду делает 220 миль в час. Запас топлива рассчитан на 4 ч полета. На какое расстояние может удалиться этот самолет, если ему необходимо будет вернуться к месту вылета и если против направления, в котором он первоначально летит, дует ветер, скорость которого равна 20 милям в час?

Предполагается, что самолет летит по прямой, что время разворота (в наиболее удаленной от места взлета точке) пренебрежимо мало.

5.25. Три брата делили мешок яблок. Старший оставил себе на 12 яблок больше, чем дал среднему, и в 3 раза больше, чем дал младшему. Из своих яблок средний брат съел ровно в 2 раза больше, чем было дано младшему, но на 9 яблок меньше, чем съел старший. Сколько яблок

съел старший брат, если известно, что младший съел на 42 яблока меньше, чем было дано среднему, и у него еще осталось 6 яблок?

5.26. У Алеши марок в n раз больше, чем у Бори, а всего у них m марок. Сколько марок у каждого, если:

- а) $n = 4$, $m = 450$; б) $n = 3$, $m = 280$?

Решим задачу в общем виде, затем получим ответы для указанных значений m и n .

Пусть у Бори было x марок, тогда у Алеши nx марок, а всего у них было $nx + x = (n + 1)x$ (марок), что по условию задачи равно m . Составим уравнение: $(n + 1)x = m$.

Так как по смыслу задачи $n + 1 \neq 0$, то $x = \frac{m}{n + 1}$. Итак, у Бори было

$\frac{m}{n + 1}$ марок, у Алеши $m - \frac{m}{n + 1} = \frac{mn}{n + 1}$ (марок).

- а) Если $n = 4$, $m = 450$, то $\frac{m}{n + 1} = 90$ (марок), $\frac{mn}{n + 1} = 360$ (марок).

- б) Если $n = 3$, $m = 280$, то $\frac{m}{n + 1} = 70$ (марок), $\frac{mn}{n + 1} = 210$ (марок).

5.27. У Ани открыток в p раз меньше, чем у Веры, у которой их на q больше, чем у Ани. Сколько открыток у каждой, если:

- а) $p = 3$, $q = 60$; б) $p = 4$, $q = 45$?

5.28. На двух полках a книг. Если с первой полки переставить на вторую b книг, то на второй полке станет в c раз больше книг, чем на первой. Сколько книг на каждой полке, если:

- а) $a = 60$, $b = 6$, $c = 3$; б) $a = 48$, $b = 10$, $c = 2$?

5.29. В двух бригадах было a рабочих. Из первой бригады уволилось b рабочих и c рабочих перешли во вторую бригаду. В результате в первой бригаде стало в n раз меньше рабочих, чем во второй. Сколько рабочих было в каждой бригаде первоначально, если:

- а) $a = 48$, $b = 3$, $c = 8$, $n = 2$; б) $a = 29$, $b = 4$, $c = 3$, $n = 1,5$?

5.30. Брат старше сестры в n раз, а через a лет он будет старше сестры в m раз. Сколько лет каждому сейчас, если:

- а) $a = 4$, $m = 2$, $n = 3$; б) $a = 3$, $m = 2,5$, $n = 3$?

5.31. Сейчас отец в n раз старше сына, а k лет назад он был старше сына в m раз. Сколько лет отцу сейчас, если:

- а) $k = 7$, $m = 5$, $n = 3$; б) $k = 5$, $m = 4$, $n = 3$?

5.32. Если раздать каждому учащемуся по m тетрадей, то останется a тетрадей, а чтобы раздать каждому по n тетрадей, не хватит еще b тетрадей. Сколько было учащихся и сколько было тетрадей?

5.33. Для отопления дома ежедневно расходуют одно и то же число килограммов угля. Через m дней после начала отопительного сезона осталось a кг угля, а когда пройдет n дней от начала сезона, то останется b кг угля. По сколько килограммов угля расходуют ежедневно и на сколько дней было запасено угля?

5.34. ЕГЭ, 2008. Рабочий должен выполнить задание за 5 дней. Перевыполняя норму на 17 деталей в день, рабочий за 4 дня выполнил задание и еще 15 деталей дополнительно. Сколько деталей изготовил рабочий?

Пусть рабочий должен изготовить x деталей в день. Тогда за 5 дней он должен изготовить $5x$ деталей. Перевыполняя норму на 17 деталей в день, рабочий за 4 дня изготовит $4(x + 17)$ деталей, что на 15 деталей больше, чем $5x$. Составим уравнение: $5x = 4(x + 17) - 15$.

Это уравнение имеет единственный корень $x = 53$. Перевыполняя норму на 17 деталей в день, рабочий за 4 дня сделает $4(x + 17) = 280$ (деталей).

5.35. ЕГЭ, 2009. Два каменщика, работая вместе, могут выполнить задание за 12 ч. Производительности труда первого и второго каменщиков относятся как 1 : 3. Каменщики договорились работать поочередно. Сколько времени должен проработать первый каменщик, чтобы это задание было выполнено за 20 ч?

5.36. Несколько подруг решили обменяться фотографиями на память. Чтобы каждая девочка получила по одной фотографии каждой своей подруги, потребовалось 30 фотографий. Сколько было подруг?

Пусть было x подруг, тогда каждая должна получить по $(x - 1)$ фотографии. Всего фотографий будет $x(x - 1)$. Составим уравнение: $x(x - 1) = 30$.

Закончите решение.

5.37. Несколько приятелей решили сыграть турнир по шахматам. Кто-то из них подсчитал, что если каждый сыграет с каждым по 1 партии, то всего будет сыграно 36 партий. Сколько было приятелей?

5.38. В турнире по шахматам каждый участник сыграл с остальными по две партии. За выигрыш в партии присуждали 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков. Три лучших игрока набрали

вместе 24 очка, что составило половину от числа очков остальных участников вместе взятых. Сколько было участников турнира?

Рассмотрим задачу из руководства по алгебре начала XIX в.

5.39. На вопрос о возрасте одна дама ответила: «Мой возраст таков, что если его возвысить в квадрат или умножить на 53 и из результата вычесть 696, то получится одно и то же». Сколько лет даме?

Условие задачи довольно надуманное, но, решая квадратное уравнение, автор руководства замечает: «так как вопрос касается возраста дамы, то из вежливости нужно перед радикалом поставить нижний знак». Решите задачу с этим дополнительным условием.

5.40. Из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого (1703). Случилось некоему человеку к стене лестницу приставить, стены же той высота 117 стоп. А лестница была длиною 125 стоп. Спрашивается, на сколько стоп нижний конец той лестницы отстоял от стены.

5.41. Из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого (1703). В некоем колодце поставлена лестница длиною 41 стопа, а колодец шириною во все стороны по 9 стоп. Какова глубина этого колодца?

5.42. Задача Диофанта (III в.). Найдем два числа, зная, что их сумма равна 20, а произведение 96.

Пусть x — первое число, тогда второе число есть $20 - x$. Составим уравнение: $x(20 - x) = 96$, которое можно переписать в виде квадратного уравнения $x^2 - 20x + 96 = 0$.

Сам Диофант избегал здесь решения полного квадратного уравнения, обозначив данные числа за $10 + x$ и $10 - x$. Он приводил решение задачи к уравнению $(10 + x)(10 - x) = 96$, которое можно переписать в виде неполного квадратного уравнения $x^2 = 4$, имеющего корни -2 и 2 . В обоих случаях искомые числа 12 и 8.

5.43. Задача Бега-Эддина (Иран, XVI в.). Заиду обещана награда в виде большей из двух частей, дающих в сумме 20, произведение же этих частей 96. Как велика награда?

5.44. Задача Бхаскары (Индия, XII в.). Цветок лотоса возвышался над тихим озером на полфута. Когда порыв ветра отклонил цветок от прежнего места на 2 фута, цветок скрылся под водой. Определите глубину озера.

Пусть отрезки AB и AC изображают стебель лотоса в двух положениях (рис. 4). Если $AD = x$ — глубина озера, то $BD = \frac{1}{2}$, $AC = x + \frac{1}{2}$ (длины отрезков измерены в футах). Составим уравнение по теореме Пифагора: $x^2 + 2^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$.

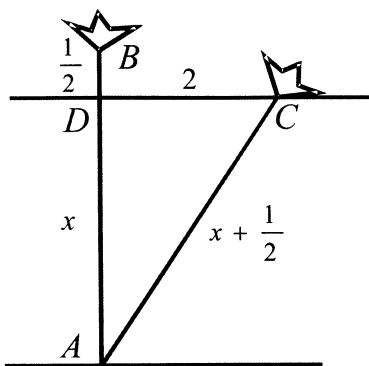


Рис. 4.

Перенесем все члены уравнения в одну часть, и окажется, что составленное уравнение является линейным, его корень $3\frac{3}{4}$. То есть глубина озера $3\frac{3}{4}$ фута.

5.45. Задача аль-Каши (Самарканд, ум. ок. 1436–1437 г.). Копье стояло в воде отвесно и высывалось наружу на три локтя. Ветер отклонил его и погрузил в воду таким образом, что его вершина стала находиться на поверхности воды, а основание не изменило своего положения. Расстояние между первоначальным местом его появления и местом его исчезновения в воде — пять локтей. Мы хотим узнать длину копья.

5.46. ЕГЭ, 2010. Численность волков в двух заповедниках в 2009 году составляла 220 особей. Через год обнаружили, что в первом заповеднике численность волков возросла на 10%, а во втором — на 20%. В результате общая численность волков в двух заповедниках составила 250 особей. Сколько волков было в первом заповеднике в 2009 году?

5.47. Из «Арифметики» Л.Ф. Магницкого (1703). Один воин вышел из Цареграда и шел всякий день по 12 миль, а второй пошел вслед его в тот же час, и шел таким образом: в первый день прошел 1 милю, во второй день — 2 мили, в третий день — 3 мили, в четвертый день — 4 мили, в пятый — 5 миль, и так прибавлял каждый день одну милю. Спрашивается, в сколько дней второй догонит первого?

Пусть второй догнал первого через x дней. Первый прошел $12x$ миль, а второй $1 + 2 + \dots + (x - 1) + x$ миль. Нетрудно видеть, что эта удвоенная сумма

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & + & 2 & & + & \dots & + & (x-1) & + & x & + \\ & + & x & + & (x-1) & + & \dots & + & 2 & & + & 1 \end{array}$$

содержит x пар слагаемых, подписанных друг под другом, дающих в сумме $(x + 1)$. Поэтому удвоенная сумма равна $x(x + 1)$, и второй воин

прошел $\frac{(1+x)x}{2}$ миль.

Составим уравнение

$$12x = \frac{(1+x)x}{2}.$$

Оно имеет единственный положительный корень $x = 23$. Следовательно, второй воин догнал первого через 23 дня.

5.48. Задача Дж. ал-Каши (XIV–XV вв.). Однажды встречаются два пешехода на берегу моря. Один из них проходит каждый день десять миль, а другой, идя в обратную сторону, навстречу первому, проходит в первый день 1 милю, во второй день 2 мили, в третий день 3 мили и так далее, каждый день увеличивая пройденное расстояние на одну милю; причем оба не удаляются от берега. Когда они встретились, один прошел одну шестую берега, а другой — пять шестых. Мы хотим узнать длину берега и число дней пути.

5.49. Ящик вмещает 12 кг крупы высшего сорта или 16 кг крупы третьего сорта. Если ящик заполнить крупой высшего и третьего сорта так, что их стоимости одинаковы, то в ящике окажется 15 кг смеси на сумму 180 р. Сколько стоит 1 кг крупы третьего сорта?

Из условия задачи следует, что 1 кг крупы высшего сорта занимает $\frac{1}{12}$,

а 1 кг крупы третьего сорта — $\frac{1}{16}$ ящика. Пусть было x кг крупы высшего

го сорта и $(15 - x)$ кг крупы третьего сорта. Вся эта крупа заполнила ящик. Составим уравнение:

$$\frac{x}{12} + \frac{15 - x}{16} = 1.$$

Это уравнение имеет единственный корень $x = 3$. Следовательно, крупы высшего сорта было 3 кг, а крупы третьего сорта $15 - 3 = 12$ (кг). Стоимость крупы третьего сорта составляла половину от 180 р., поэтому 1 кг крупы третьего сорта стоит $90 : 12 = 7,5$ (р.).

5.50. Ящик вмещает 16 кг риса или 20 кг пшена. Если ящик заполнить рисом и пшеном так, что их стоимости одинаковы, то содержимое будет иметь массу 18 кг и стоить 240 р. Сколько стоит 1 кг риса?

5.51. За 4 лимона нужно заплатить столько рублей, сколько лимонов можно купить на 25 р. Сколько стоит 1 лимон?

5.52. Тракторист должен был вспахать 24 га пашни за некоторый срок. Когда он выполнил половину задания, пошел сильный дождь, поэтому один день оказался нерабочим. После дождя тракторист перевыполнял норму на 1 га в день и выполнил задание к намеченному сроку. Сколько гектаров в день вспахивал тракторист после дождя?

5.53. ЕГЭ, 2009. Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми 40 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист. Известно, что за час автомобилист проезжает на 70 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт B на 3,5 ч позже автомобилиста.

5.54. ЕГЭ, 2009. Первая труба пропускает на 3 л воды за минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды за минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 130 л она заполняет на 3 мин дольше, чем вторая труба?

5.55. ЕГЭ, 2009. Моторная лодка прошла против течения реки 72 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 ч меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч.

5.56. За один час две трубы наполнили бассейн объемом 22 м^3 . Сколько кубометров заполнила первая труба, если 2 м^3 она заполнила на 3 мин быстрее, чем вторая труба заполнила 3 м^3 ?

Пусть первая труба за 1 ч наполнила $x \text{ м}^3$, тогда вторая труба за 1 ч наполнила $(22 - x) \text{ м}^3$. На наполнение 1 м^3 первая труба расходует $\frac{60}{x}$ мин, а вторая $\frac{60}{22 - x}$ мин. На 2 м^3 первая труба расходует $\frac{120}{x}$ мин, а вторая на 3 м^3 расходует $\frac{180}{22 - x}$ мин. По условию задачи первая труба заполнила 2 м^3 на 3 мин быстрее, чем вторая труба заполнила 3 м^3 . Составим уравнение: $\frac{180}{22 - x} - \frac{120}{x} = 3$.

Решив это уравнение, получим единственный его положительный корень 10. То есть первая труба заполнила 10 м^3 .

Решая задачи, приводящие к квадратным уравнениям, всегда приходится определять, удовлетворяют ли найденные корни уравнения условию задачи. Иногда оказывается, что оба корня удовлетворяют условиям задачи, тогда она имеет два решения.

5.57. Задача Э. Безу (1730–1783). Некто купил лошадь и спустя некоторое время продал ее за 24 пистоля. При этой продаже он потерял столько процентов, сколько стоила ему лошадь. Спрашивается, за какую сумму он ее купил?

Пусть некто купил лошадь за x пистолей. Продав ее за 24 пистоля, он потерял на этой продаже $x - 24$ пистоля. Выразим убыток в процентах: $\frac{x - 24}{x} \cdot 100$. По условию задачи он равен x . Составим уравнение: $\frac{x - 24}{x} \cdot 100 = x$.

Решив это уравнение, получим два его корня: $x_1 = 40$; $x_2 = 60$. Оба эти корня удовлетворяют условию задачи: лошадь стоила 40 или 60 пистолей.

5.58. Торговец покупает книги по оптовой цене, а продает за 11 р. Он подсчитал, что доход от продажи одной книги в процентах равен оптовой цене книги в рублях. Какова оптовая цена книги?

5.59. ГАУ, 1993. Два стрелка сделали по 30 выстрелов каждый; при этом было 44 попадания, остальные — промахи. Сколько раз попал каждый, если известно, что у первого стрелка на каждый промах приходилось в 2 раза больше попаданий, чем у второго?

Сначала определим число промахов: $30 + 30 - 44 = 16$. Пусть у второго стрелка было x промахов, тогда у первого стрелка было $(16 - x)$ промахов. На каждый промах у первого стрелка приходилось $\frac{30 - (16 - x)}{16 - x}$ попаданий, что в 2 раза больше, чем у второго: $\frac{30 - x}{x}$. Сос-

тавим уравнение:
$$\frac{30 - (16 - x)}{16 - x} = \frac{2(30 - x)}{x}.$$

Решите уравнение и получите ответ.

5.60. Первый пешеход может пройти расстояние между двумя пунктами на 5 ч быстрее, чем второй. Если пешеходы выйдут из этих пунктов навстречу друг другу одновременно, то встретятся через 6 ч. За сколько часов каждый из них может пройти это расстояние?

Сначала решим задачу стандартным школьным способом.

И способ. Пусть первый пешеход может пройти все расстояние за x ч, тогда второй может пройти это расстояние за $(x + 5)$ ч. В час первый пешеход проходит $\frac{1}{x}$, второй $\frac{1}{x + 5}$, а вместе они проходят $\frac{1}{6}$ этого расстояния. Составим уравнение:
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 5} = \frac{1}{6}.$$

Решив это уравнение, получим два его корня: $x_1 = 10$; $x_2 = -3$. Так как по смыслу задачи $x > 0$, то $x = 10$, а $x + 5 = 15$.

Итак, первый пешеход может пройти все расстояние за 10 ч, а второй — за 15 ч.

Теперь воспользуемся методом, который будем называть методом подобия. Он описан в статье Б.А. Кордемского «Графики в задачах на равномерные процессы» (Квант, 1971, № 11).

И способ. Пусть первый пешеход может пройти все расстояние за x ч, тогда второй — за $(x + 5)$ ч. Построим графики движения этих пешеходов. Так как движение равномерное, то графики являются отрезками.

На рис. 5 отрезки CB и AD изображают промежутки времени движения от одного пункта до другого первого и второго пешеходов соответственно. Отрезок MN изображает промежуток времени движения пешеходов до встречи. Поэтому $CB = x$, $AD = x + 5$, $MN = 6$, $KB = x - 6$, $PD = x - 1$.

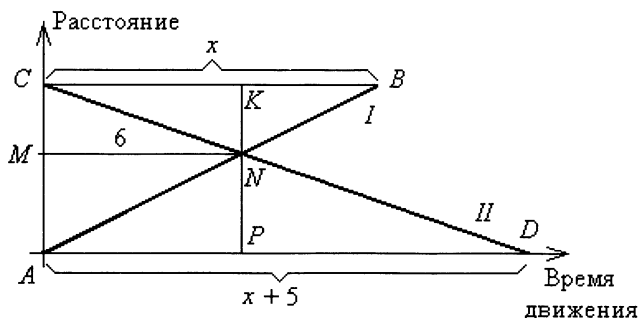


Рис. 5.

Из подобия двух пар треугольников: $\triangle CKN$ и $\triangle DPN$, $\triangle BKN$ и $\triangle APN$ (по двум углам) следует, что верны равенства: $\frac{KN}{NP} = \frac{6}{x-1}$, $\frac{KN}{NP} = \frac{x-6}{6}$.

Составим уравнение: $\frac{6}{x-1} = \frac{x-6}{6}$.

Здесь также получилось уравнение с неизвестным в знаменателе, оно приводит к тому же ответу.

Академик В.И. Арнольд писал, что испытал первое математическое потрясение, когда появился настоящий учитель математики, Иван Васильевич Морозкин. «Я помню, — писал он, — задачу о двух старушках, вышедших одновременно навстречу друг другу, встретившихся в полдень и достигших чужого города: одна в 4 ч по полудни, а другая в 9. Требовалось узнать, когда они вышли. Алгебру тогда еще не учили. Придумав «арифметическое» решение (основанное на соображениях размерности или подобия), я впервые испытал ту радость открытия, стремление к которой и сделало меня математиком» (*Квант*, 1990, № 7).

Сформулируем задачу еще раз.

5.61. Две старушки вышли одновременно навстречу друг другу из двух городов. Они встретились в полдень и достигли чужого города: первая в 4 ч по полудни, а вторая в 9 ч. Нужно узнать, когда они вышли из своих городов.

Рассмотрим решения этой задачи, основанные на трех идеях: составление уравнения с неизвестным в знаменателе (стандартный школьный метод), обратная пропорциональная зависимость скорости

равномерного движения и времени движения на фиксированном участке пути, метод подобия.

I способ. Пусть до встречи старушки шли x ч. Тогда на весь путь первая затратила $(x + 4)$ ч, а вторая $(x + 9)$ ч.

Первая проходила в час $\frac{1}{x+4}$, вторая $\frac{1}{x+9}$ часть пути, вместе $\frac{1}{x}$ часть пути. Составим уравнение: $\frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+9} = \frac{1}{x}$.

Это уравнение имеет единственный положительный корень $x_1 = 6$. Следовательно, старушки были в пути 6 ч, т.е. вышли из своих городов в 6 ч утра ($12 - 6 = 6$).

II способ. Пусть скорость первой старушки в n раз больше скорости второй старушки. Тогда на одном и том же участке пути первая тратит в n раз меньше времени, чем вторая, а вторая — в n раз больше, чем первая (рис. 6).

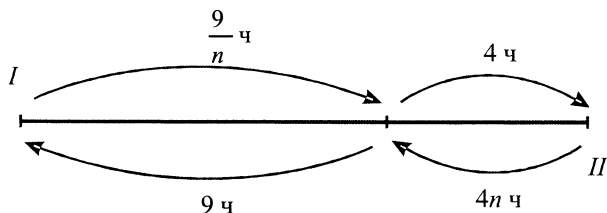


Рис. 6.

До встречи они шли одинаковое время, поэтому числа $\frac{9}{n}$ и $4n$ равны.

Уравнение $\frac{9}{n} = 4n$ имеет единственный положительный корень $n_1 = 1,5$, тогда

до встречи они шли $4 \cdot 1,5 = 6$ (ч), то есть вышли из своих городов в 6 ч утра.

III способ. Пусть по-прежнему старушки шли до встречи x ч. Построим графики движения первой и второй старушек: PP_1 и VV_1 соответственно (рис. 7). Моменту их встречи соответствует точка M графиков.

Из условия задачи следует, что $NP_1 = 4$, $KV_1 = 9$, а требуется найти $PK = x$. Из подобия двух пар треугольников VMN и V_1MK , MPK и MP_1N

получим пропорции: $\frac{x}{9} = \frac{MN}{NK}$ и $\frac{MN}{MK} = \frac{4}{x}$, составим уравнение: $\frac{x}{9} = \frac{4}{x}$.

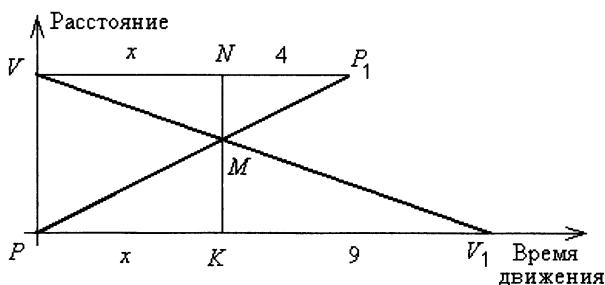


Рис. 7.

Последнее (более простое) уравнение также имеет единственный положительный корень 6. Итак, старушки были в пути 6 ч и вышли из своих городов в 6 ч утра.

5.62. Два брата вскапывали грядки — каждый свою и со своей постоянной производительностью. Они очень удивились, когда обнаружили, что затратили на работу одинаковое время. Вот если бы они с самого начала поменялись грядками и работали каждый со своей производительностью, то старший закончил бы работу за 32 мин, а младший за 50 мин. За сколько минут братья вскопали грядки?

Эта задача аналогична предыдущей, ведь можно считать, что братья начали и закончили работу одновременно. Они не переделывали работу друг друга (как старушки проходили пройденный друг другом путь), но в соответствии с условиями задачи можно рассмотреть два случая — первый произошел на самом деле, а второй мог бы произойти (рис. 8).

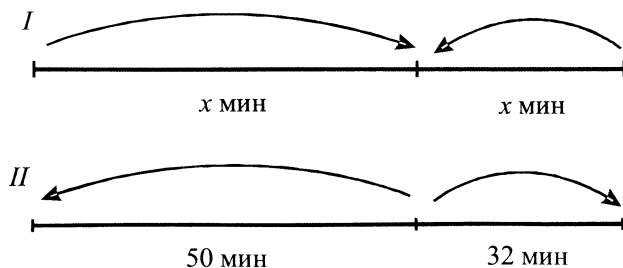


Рис. 8.

5.63. Из города A в город B вышел пешеход. Через некоторое время после выхода пешехода из города B ему навстречу выехал велосипедист. Через час после выхода пешехода вслед за ним выехал мотоциклист. Все участники двигались равномерно и встретились в одной точке маршрута. Мотоциклист прибыл в город B через 3 ч после выезда из него велосипедиста, но за 2 ч до прибытия пешехода в город B . Через сколько часов после выезда мотоциклиста велосипедист прибыл в город A ?

Построим графики движения пешехода, велосипедиста и мотоциклиста: AP , BUV и ANM соответственно (рис. 9). Моменту их встречи в одной точке маршрута соответствует точка O графиков.

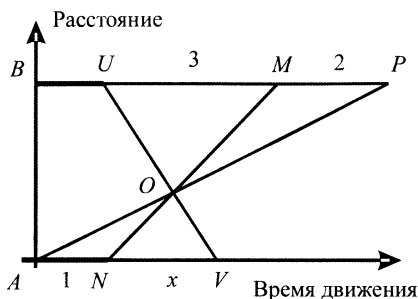


Рис. 9.

Из условия задачи следует, что $MP = 2$, $UM = 3$, $AN = 1$, а требуется найти $NV = x$. Из подобия двух пар треугольников UOM и VON , POM и AON получим пропорции: $\frac{x}{3} = \frac{NO}{OM}$ и $\frac{NO}{OM} = \frac{1}{2}$, составим уравнение:

$$\frac{x}{3} = \frac{1}{2}.$$

Решив это уравнение, получим его единственный корень $x = 1,5$.

Итак, через 1,5 ч после выезда мотоциклиста велосипедист прибыл в город A .

5.64. МИФИ, 1994. Из пункта M в пункт N выходит первый пешеход, а через 2 ч навстречу ему из пункта N в пункт M выходит второй пешеход. К моменту встречи второй пешеход прошел $\frac{7}{9}$ от расстояния, пройденного к этому моменту первым пешеходом. Сколько часов требуется

первому пешеходу на весь путь от M до N , если второй пешеход проходит путь от N до M за 7 ч?

5.65. МГУ, биол.-почв. ф., 1966. Каждому из двух рабочих поручили обработать одинаковое число деталей. Первый начал работу сразу и выполнил ее за 8 ч. Второй же потратил сначала больше двух часов на наладку приспособления, а затем с его помощью закончил работу на 3 ч раньше первого. Известно, что второй рабочий через час после начала своей работы обработал столько же деталей, сколько к этому моменту обработал первый. Во сколько раз приспособление увеличивает производительность станка (то есть количество деталей, обрабатываемых за час работы)?

5.66. МГУ, ВМиК, 1992. Из города A в город B выехал автомобиль. Спустя некоторое время из B в A по той же дороге выехал мотоцикл. Скорости автомобиля и мотоцикла на всем пути постоянны. Автомобиль до встречи с мотоциклом находился в пути 7 ч 30 мин, а мотоцикл до встречи ехал 3 ч. Мотоцикл прибыл в A в 23 ч, а автомобиль прибыл в B в 16 ч 30 мин. Найдите время отправления мотоцикла из города B .

5.67. МГИЭМ, 1999. Путь из города A в город B , расстояние между которыми 200 км, пролегает сначала по шоссе, затем по грунтовой дороге. Из города A в город B выехал первый автомобиль, скорость которого по шоссе равна 80 км/ч, а по грунтовой дороге — 60 км/ч. Одновременно с первым из города B в город A выехал второй автомобиль, скорость которого по шоссе равна 60 км/ч, а по грунтовой дороге — 50 км/ч. Известно, что автомобили встретились через 1 ч 30 мин после своего выезда. Определите, насколько раньше первый автомобиль прибыл в город B , чем второй автомобиль — в город A .

5.68. Пешеход, велосипедист и мотоциклист двигались по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда пешеход и велосипедист находились в одной точке, мотоциклист отставал от них на 6 км. Когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. На сколько километров велосипедист был впереди пешехода в тот момент, когда пешехода настиг мотоциклист?

Построим схематически графики движения пешехода PP_1 , мотоциклиста MM_1 и велосипедиста PM_1 (рис. 10). В точке P графики движения пешехода и велосипедиста пересеклись — велосипедист догнал пешехода, а мотоциклист отставал от них на 6 км ($PM = 6$). В точке M_1 графиче-

ки движения мотоциклиста и велосипедиста пересеклись — мотоциклист догнал велосипедиста, а пешеход отставал от них на 3 км ($P_1M_1 = 3$). В точке O графики движения пешехода и мотоциклиста пересеклись — мотоциклист догнал пешехода, а велосипедист был впереди — на расстоянии $VO = x$, которое надо найти.

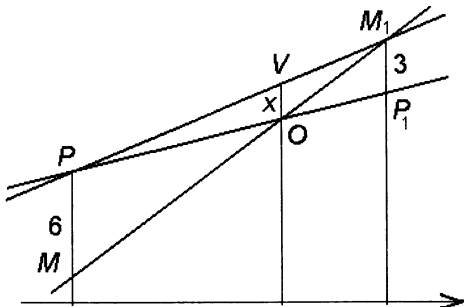


Рис. 10.

Из подобия треугольников POM и P_1OM_1 получим пропорцию: $\frac{PO}{OP_1} = \frac{6}{3}$, откуда $PO = 2OP_1$. Из подобия треугольников PVO и PM_1P_1 по-

лучим пропорцию: $\frac{x}{3} = \frac{PO}{PP_1}$, откуда $\frac{x}{3} = \frac{2OP_1}{3OP_1} = \frac{2}{3}$ и $x = 2$.

Итак, велосипедист был впереди пешехода на 2 км в тот момент, когда пешехода настиг мотоциклист.

5.69. Сулико по очереди (через некоторые промежутки времени) поставила три пустых кувшина под три крана, из которых вытекала вода. Когда количества воды в двух первых кувшинах сравнялись, в третьем кувшине было на 3 л воды меньше, чем во втором. Когда же количества воды в первом и в третьем кувшинах сравнялись, в первом кувшине было на 1 л воды меньше, чем во втором. На сколько литров воды было меньше в первом кувшине, чем в третьем, когда количества воды во втором и в третьем кувшинах сравнялись?

5.70. Имеется 9 пустых больших коробок. В некоторые из них положили по 10 пустых средних коробок, а в некоторые средние — по 10 пустых маленьких. Всего оказалось 109 коробок. Сколько среди них было пустых коробок?

Пусть положили $10s$ средних коробок в s больших и $10m$ маленьких в m средних. Число всех коробок $9 + 10s + 10m$, что по условию задачи равно 109. Из уравнения $9 + 10s + 10m = 109$ находим, что $s + m = 10$.

Так как занято s больших коробок и m средних, то всего занято $s + m = 10$ (коробок), тогда пустых коробок было $109 - 10 = 99$.

5.71. Алеша на 3 года старше Бори и на 6 лет старше Вовы. Произведение возрастов Гриши и Бори на 9 больше произведения возрастов Алеши и Вовы. На сколько лет Алеша старше Гриши?

Здесь, очевидно, не обойтись одним неизвестным. Пусть Алеше a лет ($a > 6$), а Грише g лет, тогда Боре $(a - 3)$ года, Вове $(a - 6)$ лет. Составим уравнение: $g(a - 3) - a(a - 6) = 9$, которое перепишем в виде:

$$\begin{aligned}a^2 - 6a + 9 - ga + 3g &= 0, \\(a - 3)(a - 3 - g) &= 0.\end{aligned}$$

Так как $a > 6$, то $a - 3 \neq 0$. Тогда $a - 3 - g = 0$, откуда следует, что $a - g = 3$, то есть Алеша старше Гриши на 3 года.

5.72. Брат и сестра собирали малину в двухлитровые бидоны. Брат собирал ягоды быстрее сестры. Через некоторое время он решил ей помочь и поменялся с ней бидонами. Момент для обмена бидонами был выбран удачно — ребята наполнили их ягодами одновременно. Сколько литров ягод они набрали вместе до того, как поменялись бидонами?

Пусть брат до обмена бидонами собрал x л, а сестра y л ягод, тогда после обмена брат собрал $(2 - y)$, а сестра $(2 - x)$ л ягод. Брат собирал ягоды быстрее сестры в одно и то же число раз до и после обмена бидонами, поэтому x больше y во столько же раз, во сколько $(2 - y)$ больше, чем $(2 - x)$. Составим уравнение: $\frac{2 - y}{2 - x} = \frac{x}{y}$.

Закончите решение.

5.73. Дед и внук начали одновременно собирать клюкву в одинаковые лукошки. Дед собирает быстрее внука. Когда им нужно поменяться лукошками, чтобы оба лукошка наполнились одновременно?

5.74. Брат и сестра собирали малину. Корзина брата вмещала 5 л, а корзина сестры 4 л. Брат собирал ягоды быстрее сестры, поэтому, когда она набрала половину своей корзины, они поменялись корзинами и через некоторое время наполнили их одновременно. Сколько литров ягод собрал брат?

5.75. Брат и сестра собирали малину. Когда сестра собрала $\frac{2}{3}$ своего

двухлитрового бидона, трехлитровый бидон брата был почти полон. Ребята поменялись бидонами и через некоторое время одновременно закончили сбор ягод. Во сколько раз брат работал быстрее сестры?

5.76. Отец и сын принялись косить два соседних луга, площади которых относятся как 8 : 7. Когда отец скошил три четверти большего луга, а сын — больше половины меньшего, они присели отдохнуть и подсчитали, что если будут работать так же хорошо, но поменяются местами, то закончат работу одновременно. Во сколько раз отец косил быстрее сына?

Следующая задача является переформулировкой задачи **5.74** и отличается от нее тем, что при ее решении не удастся отбросить второй корень квадратного уравнения.

5.77. Сулико подошла к роднику с двумя пустыми кувшинами. Один вмещал 5 л, а другой — 4 л. Вода из родника текла двумя струями — одна сильнее, другая слабее. Сулико одновременно подставила кувшины под струи и, когда набралась половина меньшего кувшина, поменяла кувшины местами. Как это ни удивительно, но кувшины наполнились одновременно. Во сколько раз больше воды дает одна струя, чем другая?

5.78. Из сборника задач П.А. Ларичева. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за t часов, причем первый, работая отдельно, может выполнить ее на 4 ч скорее второго. За сколько времени может выполнить эту работу каждый из них, работая отдельно?

Пусть первый рабочий может выполнить работу за x ч, тогда второй рабочий может выполнить работу за $(x + 4)$ ч.

За 1 ч они выполняют $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4}$, или $\frac{1}{t}$ часть работы.

Составим уравнение: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+4} = \frac{1}{t}$, решив которое относительно x ,

получим $x_{1,2} = t - 2 \pm \sqrt{t^2 + 4}$.

Так как $t - 2 < \sqrt{t^2 + 4}$, то уравнение имеет единственный положительный корень $x_1 = t - 2 + \sqrt{t^2 + 4}$. Итак, первый рабочий может выполнить работу за $t - 2 + \sqrt{t^2 + 4}$ ч, а второй — на 4 ч медленнее, то есть за $t + 2 + \sqrt{t^2 + 4}$ ч.

5.79. Теплоход длины l м движется в неподвижной воде. Катер, имеющий скорость v м/с, проходит расстояние от кормы движущегося теплохода до его носа и обратно за t с. Найдите скорость теплохода.

5.80. СГУ, 1992. Теплоход длины l м движется по реке с постоянной скоростью. Катер, имеющий скорость v м/с, проходит расстояние от кормы движущегося теплохода до его носа и обратно за t с. Найдите скорость теплохода.

5.81. СГУ, 1992. Курьер, начав движение от конца движущейся колонны, доехал до ее начала и вернулся обратно. За это время колонна прошла расстояние s км. Найдите длину пути, который прошел курьер, если длина колонны равна l км.

И способ. Пусть скорость колонны равна x км/ч, а скорость курьера — y км/ч ($y > x$). Тогда время движения курьера в оба конца равно $\frac{l}{y-x} + \frac{l}{y+x} = \frac{2yl}{y^2 - x^2}$ (ч). За это время колонна прошла $\frac{2yl}{y^2 - x^2} \cdot x = \frac{2xyl}{y^2 - x^2}$, или s км. Составим уравнение:

$$\frac{2xyl}{y^2 - x^2} = s. \quad (1)$$

Курьер за время движения в оба конца прошел путь в $\frac{y}{x}$ раз больший, чем s , то есть $\frac{sy}{x}$ км. Чтобы найти эту величину, нужно из уравнения (1) найти $\frac{y}{x}$. Введем новое неизвестное $n = \frac{y}{x}$ и перепишем уравнение (1) в виде:

$$\frac{2nl}{n^2 - 1} = s \quad (2)$$

или в виде

$$\frac{sn^2 - 2nl - s}{n^2 - 1} = 0. \quad (3)$$

Числитель дроби в левой части уравнения (3) обращается в нуль при $n_{1,2} = \frac{l \pm \sqrt{l^2 + s^2}}{s}$, а так как $y > x$, то $n > 1$ и знаменатель дроби в левой части уравнения (3) в нуль не обращается. Уравнение (3), а значит, и уравне-

ние (2) имеют единственный положительный корень $n_1 = \frac{l + \sqrt{l^2 + s^2}}{s}$.

Тогда искомое расстояние равно $\frac{l + \sqrt{l^2 + s^2}}{s} \cdot s = l + \sqrt{l^2 + s^2}$ (км).

II способ. Чтобы избежать введения третьего неизвестного, равного отношению двух уже введенных неизвестных, можно через n обозначить число, показывающее, во сколько раз скорость курьера больше скорости колонны.

Пусть скорость колонны равна x км/ч, а скорость курьера в n раз больше скорости колонны, то есть nx км/ч. Тогда время движения курьера в оба конца равно $\frac{l}{nx - x} + \frac{l}{nx + x} = \frac{2nl}{x(n^2 - 1)}$ (ч). За это время колон-

на прошла путь $\frac{2nl}{x(n^2 - 1)} \cdot x = \frac{2nl}{n^2 - 1}$ (км), что по условию задачи равно s

км. Далее составим уравнение (2), решив которое относительно n , получим тот же результат.

5.82. УГАТУ, 1995. Войсковая колонна имеет длину 5 км. Связной, выехав из арьергарда колонны, передал пакет в начало колонны и вернулся обратно. Колонна за это время прошла 12 км. Какой путь прошел связной?

Во многих из последних задач вводилось больше одного неизвестного. Найти значения всех неизвестных не удавалось, но это и не требовалось для получения ответа. Прежде, чем рассмотреть последнюю задачу, для решения которой будет составлено уравнение с тремя неизвестными, решим подготовительную задачу.

5.83. Поле разделено на 3 участка. За день были вспаханы половина первого участка, $\frac{3}{4}$ второго участка, а третий, составляющий четвертую часть всего поля, был вспахан полностью. Вспаханные за день площади в 2 раза больше площади второго участка. Какую часть площади поля составляет площадь, вспаханная за день?

Пусть площадь первого участка x , второго y , тогда площадь третьего участка составляет $\frac{1}{3}(x + y)$ — все площади измерены одной едини-

цей площади. За день вспахали $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y = \frac{10x + 13y}{12}$, или $2y$.

Из уравнения $\frac{10x + 13y}{12} = 2y$ получим, что $x = 1,1y$. Требуется найти отношение площади $2y$, вспаханной за день, к площади всего поля $\frac{4(x + y)}{3} = 2,8y$. Это отношение равно $\frac{5}{7}$.

Замечание. При решении задачи составлено уравнение с двумя неизвестными, из которого одно неизвестное можно выразить через другое, а этого достаточно для получения ответа.

5.84. Через 3 ч после начала снегопада снегоуборочная машина начала уборку снега на участке. Снег продолжал идти. Машина двигалась с постоянной скоростью, сдвигая снег с проезжей части дороги на обочину, и убрала снег на участке за 2 ч. Какая часть выпавшего снега осталась неубранной после окончания работы? Считайте, что процессы выпадения снега и его уборки являются равномерными и что машина убирает снег с любого участка дороги за один заход.

Выясним сначала, какую часть снега, выпадающего за время работы, убирает машина. Для этого представим, что машина начала убирать снег тогда, когда он только начал падать, а закончила работу, когда слой снега составлял a см. Тогда к концу работы в начале участка (и на неубранном участке) лежал слой снега высотой a см.

Так как снегоуборочная машина двигалась равномерно и высота слоя пропорциональна времени снегопада, то слой снега на убранном участке (в разрезе) имеет вид треугольника (рис. 11).

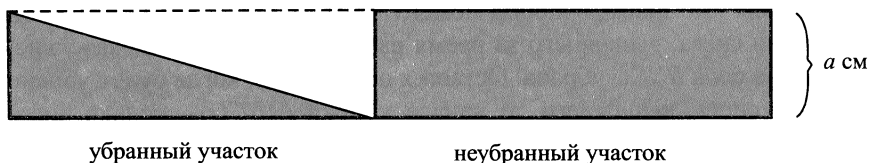


Рис. 11.

Очевидно, что на убранном участке машина убирает половину снега, выпадающего за время работы. Теперь ответим на вопрос задачи. Если за 3 ч до уборки выпало 3 части снега, то за 2 ч уборки выпало еще

2 — всего 5 частей снега. Из них осталась неубранной только 1 часть, то есть $\frac{1}{5}$ всего снега, выпавшего за 5 ч.

5.85. Однажды снег шел 6 ч подряд. Он продолжал идти и в следующие 5 ч, за которые снегоуборочная машина убрала участок. Через сколько часов после начала работы машина убрала ровно половину выпавшего к тому времени снега? Считайте процессы выпадения снега и его уборки равномерными.

Пусть машина едет со скоростью v , к началу уборки высота слоя снега составила $6x$, где x — высота слоя снега, выпадающего за 1 ч. На рис. 12 весь участок изображен отрезком AG , а слой снега, выпавшего за 6 ч, изображен прямоугольником $ABMG$. Пусть через t ч после начала работы будет убрана половина выпавшего к тому моменту снега. Длина участка, убранного за t ч, равна vt , а оставшегося неубранным — $v(5 - t)$.

На рис. 12 слой снега, выпавшего за t ч, изображен прямоугольником $BNEC$. Его высота равна tx , значит, на неубранном участке высота слоя снега составляет $6x + tx = (6 + t)x$.

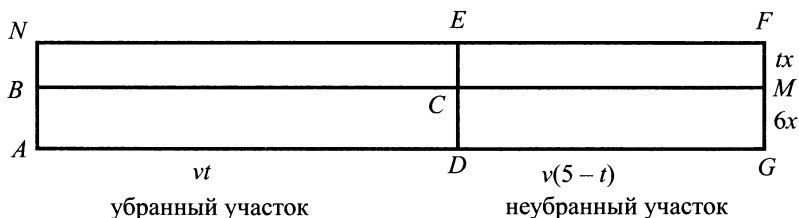


Рис. 12.

Как мы уже знаем, в любой момент времени оказывается убранной половина снега, выпавшего за время работы машины, следовательно, половина слоя $BNEC$ убрана. Остается определить, когда будет убрано столько снега, выпавшего до начала уборки ($ABCD$), сколько снега останется на неубранном участке ($DEFG$), то есть когда площади прямоугольников $ABCD$ и $DEFG$ окажутся равными. Составим уравнение: $6xvt = (t + 6)xv(5 - t)$.

Преобразуем полученное уравнение $xv(t^2 + 7t - 30) = 0$.

Так как по смыслу задачи $xv \neq 0$, то $t^2 + 7t - 30 = 0$, откуда получим только один положительный корень $t = 3$.

Итак, через 3 ч после начала работы будет убрана половина выпавшего к тому моменту снега.

6. ЗАДАЧИ НА СПЛАВЫ И СМЕСИ

Рассмотрим задачи, охватывающие большой круг ситуаций — смешение товаров разной цены, жидкостей с различным содержанием соли, кислот разной концентрации, сплавление металлов с различным содержанием некоторого металла и пр. Если не только решать каждую задачу в отдельности, а рассматривать типичные ситуации в общем виде, то связь различных задач между собою станет яснее, а полученные по ходу решения формулы позволят составить программы для решения типовых задач с помощью компьютера.

Начнем с решения простых задач на смешивание товаров разной цены.

6.1. Имеется чай двух сортов — по 800 р. и 1200 р. за 1 кг. Смешали 300 г первого и 200 г второго сорта. Определите стоимость 1 кг полученной смеси.

1) $0,3 + 0,2 = 0,5$ (кг) — купили чая двух сортов;

2) $800 \cdot 0,3 + 1200 \cdot 0,2 = 480$ (р.) — стоимость полученной смеси;

3) $480 : 0,5 = 960$ (р.) — стоимость 1 кг полученной смеси.

6.2. Из «Арифметики» А.П. Киселева (1852–1940). Смешано три сорта муки: 15 фунтов по 8 к., 20 фунтов по 7 к. и 25 фунтов по 4 к. за фунт. Сколько стоит фунт смеси?

Рассмотрим задачи, в которых содержание вещества в сплавляемых частях и в сплаве выражено в процентах.

6.3. Даны два куса сплавов с различным содержанием олова. Первый, массой 300 г, содержит 20% олова. Второй, массой 200 г, содержит 40% олова. Сколько процентов олова будет содержать сплав, полученный из этих кусков?

Здесь и далее мы предполагаем, что в процессе сплавления нет потерь массы, то есть масса сплава равна сумме масс сплавляемых кусков.

До сплавления в двух кусках было $300 \cdot \frac{20}{100} + 200 \cdot \frac{40}{100} = 140$ (г) оло-

ва. После сплавления кусок массой $200 + 300 = 500$ (г) будет содержать $\frac{140 \cdot 100\%}{500} = 28\%$ олова.

Пусть процентное содержание олова в первом куске p_1 , во втором куске p_2 , в сплаве p , масса первого куска m_1 , масса второго — m_2 (в граммах). В рассмотренной задаче $m_1 = 300$, $p_1 = 20$, $m_2 = 200$, $p_2 = 40$, а требуется определить процентное содержание олова в сплаве — p . Вычислим массу олова до и после сплавления. Так как это одна и та же величина, то верно равенство:

$$m_1 \cdot \frac{p_1}{100} + m_2 \cdot \frac{p_2}{100} = (m_1 + m_2) \cdot \frac{p}{100},$$

или

$$m_1 \cdot p_1 + m_2 \cdot p_2 = (m_1 + m_2) \cdot p. \quad (1)$$

В простых задачах на смеси бывает нужно найти одну из пяти величин m_1 , m_2 , p_1 , p_2 и p по четырем известным величинам. Эти задачи обычно решают арифметически или с помощью уравнения.

Сформулируем задачу в общем виде.

6.4. Найдите процентное содержание олова в сплаве, полученном из двух кусков массой m_1 и m_2 , если известно, что первый содержит p_1 %, а второй — p_2 % олова.

Ее решение получим из равенства (1):

$$p = \frac{m_1 \cdot p_1 + m_2 \cdot p_2}{m_1 + m_2}. \quad (2)$$

Заметим, что процентное содержание олова в сплаве (p) заключено между p_1 и p_2 . Этот факт можно доказать. Если для определенности считать, что $p_1 < p_2$, то справедливы неравенства:

$$m_1 \cdot p_1 + m_2 \cdot p_1 < m_1 \cdot p_1 + m_2 \cdot p_2 < m_1 \cdot p_2 + m_2 \cdot p_2.$$

Вынесем за скобки общие множители в левой и в правой частях двойного неравенства:

$$(m_1 + m_2) \cdot p_1 < m_1 \cdot p_1 + m_2 \cdot p_2 < (m_1 + m_2) \cdot p_2.$$

Разделив двойное неравенство на положительную сумму $m_1 + m_2$ и заменив $\frac{m_1 \cdot p_1 + m_2 \cdot p_2}{m_1 + m_2}$ на p , получим: $p_1 < p < p_2$.

По формуле (2) можно составить программу для решения задачи **6.4**.

1 ПРОГРАММА 6.4

10 INPUT "Введите m1"; M1

20 INPUT "Введите p1"; P1

30 INPUT "Введите m2"; M2

40 INPUT "Введите p2"; P2

```

50 P= (M1*P1+M2*P2) / (M1+M2)
60 PRINT "Ответ: "; P; "%"
70 END

```

Проверим работу программы, используя числовые данные задачи

6.3. Введем $m_1 = 300$, $p_1 = 20$, $m_2 = 200$, $p_2 = 40$, получим

Ответ: 28%

Рассмотрим несколько задач близкого содержания на смешение жидкостей, товаров и пр. Нетрудно убедиться, что новые по сюжету задачи решаются тем же способом, что и задача **6.3**.

6.5. Смешали 300 г 50%-го и 100 г 30%-го раствора кислоты. Определите процентное содержание кислоты в полученной смеси.

6.6. Смешали 3 кг молока жирностью 6% и 2 кг молока жирностью 3,5%. Определите жирность молока в полученной смеси. (Жирность молока — это процентное отношение массы жира, содержащегося в молоке, к массе молока.)

6.7. Из «Арифметики» А.П. Киселева (1852–1940). 30 ведер вина в 48 градусов смешано с 24 ведрами вина в 36 градусов. Сколько градусов в смеси? (Число градусов означает процентное содержание чистого спирта в вине.)

6.8. Из «Арифметики» А.П. Киселева (1852–1940). 25 фунтов серебра 84 пробы сплавлены с 12 фунтами серебра 72-й пробы. Какой пробы сплав?

В старые времена в России проба металла означала число весовых частей чистого металла в 96 весовых частях сплава. Выбор же числа 96 определялся соотношением весовых величин: 1 фунт содержал 96 золотников, а 1 золотник — 96 долей. Например, выражение «серебро 84 пробы» означало, что в 1 фунте сплава содержится 84 золотника, а в 1 золотнике — 84 доли чистого серебра.

Заметим, что теперь пробу драгоценных металлов выражают трехзначным числом. Например, выражение «серебро 835-й пробы» означает, что масса чистого серебра составляет 835 тысячных (или 83,5%) массы сплава.

В следующей задаче содержание металлов в сплавах задано в виде отношений. Она имеет простое арифметическое решение.

6.9. В двух сплавах меди и цинка отношение меди к цинку 4 : 3 и 2 : 3 соответственно. После совместной переплавки 140 кг первого сплава,

150 кг второго и некоторой массы чистой меди получили сплав, в котором меди на 20 кг больше, чем цинка. Найти массу нового сплава.

6.10. ВШЭ, 1995. Имеются два сплава, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 40% олова, а второй — 26% меди. Процентное содержание цинка в первом и во втором сплавах одинаково. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30% цинка. Определить, сколько килограммов олова содержится в новом сплаве.

Так как процентное содержание цинка в первом и во втором сплавах одинаково, то после сплавления любых масс этих сплавов процентное содержание цинка останется прежним. А так как в новом сплаве оказалось 30% цинка, то и исходные сплавы содержали по 30% цинка. Тогда во втором сплаве содержалось $100 - 26 - 30 = 44$ (%) олова.

Теперь определим процентное содержание олова в полученном сплаве:
$$\frac{(0,4 \cdot 150 + 0,44 \cdot 250) \cdot 100\%}{150 + 250} = 42,5\%.$$

6.11. ВШЭ, 1995. Имеются три слитка: первый слиток — сплав меди и никеля, второй слиток — сплав никеля с цинком, третий слиток — сплав цинка с медью. Если сплавить первый слиток со вторым, то процент меди в полученном сплаве будет в 2 раза меньше, чем он был в первом слитке. Если сплавить второй слиток с третьим, то процент никеля в полученном сплаве будет в 3 раза меньше, чем он был во втором слитке. Какой процент цинка будет содержать слиток, полученный при сплавлении всех трех слитков, если во втором слитке цинка 10%, а в третьем 7%?

Рассмотрим задачи, которые можно решить с помощью уравнения.

6.12. Имеется два куска сплава олова и свинца. Первый, массой 300 г, содержит 60% олова, второй содержит 40% олова. Сколько граммов от второго куска нужно добавить к первому, чтобы получить сплав с содержанием олова 56%?

Здесь $m_1 = 300, p_1 = 60, p_2 = 40, p = 56$. Определить m_2 можно из уравнения $300 \cdot 60 + m_2 \cdot 40 = (300 + m_2) \cdot 56$, откуда $m_2 = 75$. То есть от второго куска нужно добавить к первому 75 г.

Сформулируем задачу в общем виде.

6.13. Имеется два куска сплава олова и свинца. Первый, массой m_1 г, содержит p_1 % олова, второй содержит p_2 % олова. Сколько граммов от

второго куска нужно добавить к первому, чтобы получить сплав с содержанием олова $p\%$?

Решение задачи можно получить, выразив m_2 из равенства (1):

$$m_2 = \frac{p - p_1}{p_2 - p} \cdot m_1. \quad (3)$$

Формула (3) дает правильный ответ и в случае $p_2 < p_1$.

Частным случаем рассмотренной ситуации может быть добавление чистого металла ($p_2 = 100$) или добавление сплава, не содержащего этот металл ($p_2 = 0$). Два примера таких задач находим среди конкурсных задач.

6.14. МАДИ, 1993. Кусок сплава меди и цинка массой 36 кг содержит 45% меди. Сколько килограммов меди нужно добавить к этому куску, чтобы полученный новый сплав содержал бы 60% меди?

Пусть нужно добавить x кг меди. Тогда новый сплав массой $(x + 36)$ кг будет содержать $(0,45 \cdot 36 + x)$ кг меди, поэтому верно равенство

$$0,45 \cdot 36 + x = 0,6(x + 36).$$

Решив это уравнение, получим $x = 13,5$, то есть нужно добавить 13,5 кг меди.

6.15. МАДИ, 1993. Имеется кусок сплава меди с оловом общей массой 12 кг, содержащий 45% меди. Сколько килограммов олова нужно прибавить к этому куску сплава, чтобы получившийся новый сплав содержал 40% меди?

6.16. Сколько чистой воды нужно добавить к 300 г морской воды, содержащей 4% соли, чтобы получить воду с содержанием 3% соли?

6.17. МГУЭСИ. В 1 л 10%-го водного раствора поваренной соли добавили 4 л чистой воды. Определите процентное содержание соли в полученном растворе.

1 способ.

1) $1 \cdot 0,10 = 0,1$ (кг) — масса соли в данном растворе;

2) $1 + 4 = 5$ (кг) — масса полученного раствора;

3) $\frac{0,1 \cdot 100}{5} = 2$ (%) — процентное содержание соли в полученном

растворе.

Заметим, что процентное содержание соли в данном растворе было вычислено так: $\frac{m_c \cdot 100}{m_p} = 10$ (%), где m_c — масса соли, а m_p — масса дан-

ного раствора. Согласно условию задачи, масса соли не изменилась, а масса раствора увеличилась в 5 раз. Поэтому числитель дроби $\frac{m_c \cdot 100}{m_p}$

остался тот же, а знаменатель увеличился в 5 раз, значит, и дробь уменьшилась в 5 раз.

Эти рассуждения дают нам второй способ решения задачи.

II способ.

1) $1 + 4 = 5$ (кг) — масса полученного раствора;

2) $5 : 1 = 5$ (раз) — в 5 раз увеличилась масса раствора и уменьшилась концентрация соли;

3) $10 : 5 = 2$ (%) — процентное содержание соли в полученном растворе.

В двух следующих задачах числовые данные подобраны так хорошо, что задачи легко решить без уравнения.

6.18. Имеется уксусный раствор массой 1,5 кг, содержащий 40% уксуса. Сколько воды нужно добавить в раствор, чтобы новый раствор содержал 10% уксуса?

6.19. Сколько чистой воды нужно добавить к 400 г морской воды, содержащей 4% соли, чтобы получить воду с содержанием 2% соли?

6.20. *Старинная задача.* Сколько фунтов меди должно сплавить с 75-ю фунтами серебра 72-й пробы, чтобы составить серебро 64-й пробы?

6.21. Сколько чистого серебра нужно прибавить к 200 г серебра 835-й пробы, чтобы получить серебро 875-й пробы?

Рассмотрим теперь задачи, в которых задана не масса одного из кусков, а масса нового сплава.

6.22. Имеется два куска сплава олова и свинца, содержащие 60% и 40% олова. По сколько граммов от каждого куска нужно взять, чтобы получить 600 г сплава, содержащего 45% олова?

Обычно такие задачи решают с помощью уравнения. Обозначим массу куска, взятого от первого сплава, через m_1 , тогда из равенства (1) получим: $m_1 \cdot 60 + (600 - m_1) \cdot 40 = 600 \cdot 45$, откуда $m_1 = 150$, $600 - m_1 = 450$.

Сформулируем задачу в общем виде.

6.23. Имеется два куска сплава олова и свинца, содержащие p_1 % и p_2 % олова. По сколько граммов от каждого куска нужно взять, чтобы получить m г сплава, содержащего p % олова?

6.24. Из «Арифметики» Л.П. Киселева (1852–1940). Из двух сортов чаю составлено 32 фунта смеси; фунт первого сорта стоит 3 р., фунт второго сорта — 2 р. 40 к. Сколько фунтов взято от того и другого сорта, если фунт смешанного чаю стоит 2 р. 85 к.?

6.25. Задача Д. Пойа (1887–1985). Торговец продает орехи двух сортов: одни по 90 центов, другие по 60 центов за килограмм. Он хочет получить 50 кг смеси по 72 цента за килограмм. Сколько для этого потребуется орехов каждого сорта?

В условии задачи может быть задано только процентное содержание металла в каждом из двух сплавов (p_1 и p_2) и в новом сплаве (p), а требуется узнать отношение масс, которые нужно взять от этих сплавов для получения нового сплава.

6.26. Имеется два куска сплавов, содержащих 40% и 60% олова. В каком отношении (по массе) нужно сплавить части этих кусков, чтобы получить сплав с 45%-ым содержанием олова?

И эту задачу можно решить, подставив $p_1 = 40, p_2 = 60, p = 45$ в равенство

(1). Преобразовав полученное равенство, имеем: $\frac{m_1}{m_2} = \frac{60 - 45}{45 - 40} = 3 : 1$.

Сформулируем задачу в общем виде.

6.27. Имеется два сплава олова и свинца. Первый содержит p_1 %, второй — p_2 % олова. В каком отношении нужно взять массы кусков от этих сплавов, чтобы получить сплав с содержанием олова p %?

Решение задачи в общем виде также получим из равенства (1):

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{p_2 - p}{p - p_1}.$$

6.28. Из «Арифметики» Л.Ф. Магницкого (1703). У некоторого человека были для продажи вина двух сортов. Первое ценою 10 гривен ведро, второе же — по 6 гривен. Захотелось ему сделать из тех двух вин, взяв по части, третье вино, чтобы ему цена была по 7 гривен. Какие части надлежит из тех двух вин взять к наполнению ведра третьего вина ценою в 7 гривен?

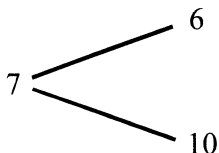
Рассмотрим современное решение задачи. Пусть для составления одного ведра требуемой смеси нужно взять x ведер первого сорта ($x < 1$) и $(1 - x)$ ведер второго сорта. Первая часть вина стоит $10x$ гривен, а вторая $6(1 - x)$ гривен. Составим уравнение: $10x + 6(1 - x) = 7$, откуда $x = \frac{1}{4}$; $1 - x = \frac{3}{4}$.

Итак, нужно взять $\frac{1}{4}$ ведра вина по 10 гривен и $\frac{3}{4}$ ведра вина по 6 гри-

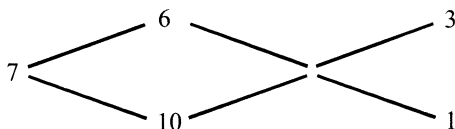
вен за ведро.

В старые времена такие задачи решали иначе. Сокращая текст, который у Л.Ф. Магницкого занимает больше страницы, старинный способ решения задач на смеси можно описать так.

Запишем цены вин каждого сорта и цену смеси:



Вычислим прибыль $7 - 6 = 1$ и убыток $10 - 7 = 3$ на каждом ведре и запишем результаты по линиям:



Таким образом, 3 части из четырех приходятся на более дешевое вино и 1 часть — на более дорогое.

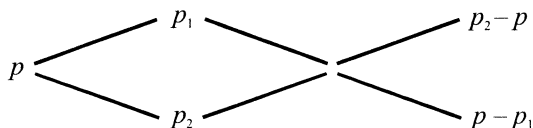
Вовсе не случайно в старые времена отношения масс смешиваемых вещей находили таким образом. Но вряд ли все ученики, получавшие правильные ответы описанным способом, понимали тогда смысл выполняемых ими действий.

Рассмотрим решение задачи **6.28** в общем виде. Пусть объемы смешиваемых вин V_1 и V_2 , а стоимости ведра вина первого, второго сорта и смеси p_1 , p_2 и p соответственно. Так как стоимость смеси равна сумме стоимостей смешиваемых частей, то будет выполняться равенство, похожее на равенство (1):

$$V_1 \cdot p_1 + V_2 \cdot p_2 = (V_1 + V_2) \cdot p.$$

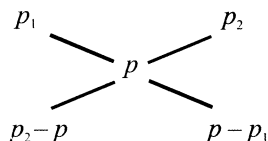
Тогда отношение объемов взятых вин равно: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{p_2 - p}{p - p_1}$.

Заполним старинную схему, пользуясь введенными обозначениями для случая $p_1 < p < p_2$:



Теперь понятно, почему эта схема давала правильные результаты.

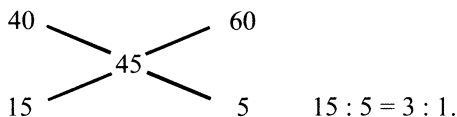
Заметим, что этот прием получения ответа в измененном виде используется до сих пор:



В «Арифметике» Л.П. Киселева было дано такое правило для решения задач на смеси: «Количества двух смешиваемых сортов должны быть обратно пропорциональны числам, показывающим прибыль или убыток на единице каждого сорта».

Это правило применимо ко всем задачам рассматриваемого вида — на смеси, на сплавы, на смешивание товаров.

Применив этот прием для решения задачи **6.26**, получим тот же ответ:



Оказывается, равенство (1) может связывать не только массу и процентное содержание вещества, количество товаров и цену за единицу товара, но и плотность вещества и его объем.

6.29. Из «Всеобщей арифметики» И. Ньютона. Даны плотности двух веществ и их смеси. В каком отношении (по объему) смешаны эти вещества?

Обозначим плотности двух веществ и смеси ρ_1 , ρ_2 и ρ соответственно, а объемы двух веществ — V_1 и V_2 . Сумма масс смешиваемых веществ равна массе смеси, следовательно, выполняется равенство, аналогичное равенству (1): $V_1 \cdot \rho_1 + V_2 \cdot \rho_2 = (V_1 + V_2) \cdot \rho$.

Тогда вещества нужно смешивать в отношении $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\rho_2 - \rho}{\rho - \rho_1}$.

Покажем, что задача на вычисление температуры смеси решается тем же способом, как и рассмотренные выше задачи. Предполагается, что при смешивании жидкостей не происходит потерь тепла. Равенство (1), в котором обе части разделены на коэффициент удельной теплоемкости воды, здесь имеет вид:

$$m_1 \cdot t_1 + m_2 \cdot t_2 = (m_1 + m_2) \cdot t,$$

где m_1 и m_2 — массы смешиваемых жидкостей, t_1 , t_2 и t — температуры смешиваемых жидкостей и смеси.

6.30. Смешали 1 л воды, температура которой 80°C и 2 л воды, температура которой 20°C . Определите температуру смеси.

6.31. Смешали 4 л горячей воды и 2 л воды, температура которой 10°C . Температура смеси оказалась равной 40°C . Найдите температуру горячей воды.

6.32. Какой должна быть температура 20 л воды, чтобы при смешении ее с 10 л воды, температура которой 20°C , получить воду, температура которой не менее 30°C и не более 40°C ?

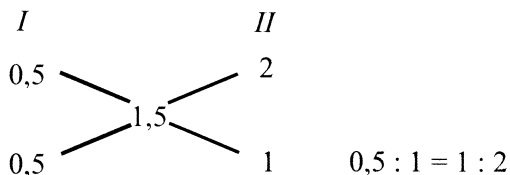
В заключение рассмотрим задачи выпускного экзамена (ЕГЭ) и конкурсных экзаменов в вузы.

6.33. МГУ, филол. ф., 2000. Имеется 40 л 0,5%-го раствора и 50 л 2%-го раствора уксусной кислоты. Сколько нужно взять первого и сколько второго раствора, чтобы получить 30 л 1,5%-го раствора уксусной кислоты?

Пусть взяли x л первого раствора и $(30 - x)$ л второго. Составим уравнение, приравняв объемы уксусной кислоты до смешения и после смешения растворов: $0,005x + 0,02 \cdot (30 - x) = 0,015 \cdot 30$.

Решив это уравнение, получим $x = 10$. Тогда надо взять первого раствора 10 л, второго $30 - 10 = 20$ (л).

Тот же результат получится и по приведенному выше правилу:



Итак, объемы растворов надо взять в отношении 1 : 2 — надо взять 10 л первого раствора и 20 л второго.

6.34. ЕГЭ, 2009. Масса первого сплава на 3 кг больше массы второго сплава. Первый сплав содержит 10% цинка, второй — 40% цинка. Новый сплав, полученный из двух первоначальных, содержит 20% цинка. Определите массу нового сплава.

6.35. МГИЭТ, 1993. Один сплав состоит из двух металлов, входящих в него в отношении 1 : 2, а другой сплав содержит те же металлы в отношении 2 : 3. Из скольких частей обоих сплавов можно получить новый сплав, содержащий те же металлы в отношении 17 : 27?

В решении этой задачи применим вспомогательные неизвестные.

Пусть первого сплава взяли x г, второго — y г. Тогда в новом сплаве содержится первого металла $\left(\frac{x}{3} + \frac{2y}{5}\right)$ г, а второго металла $\left(\frac{2x}{3} + \frac{3y}{5}\right)$ г.

По условию задачи $\left(\frac{x}{3} + \frac{2y}{5}\right) : \left(\frac{2x}{3} + \frac{3y}{5}\right) = 17 : 27$, откуда $\frac{x}{y} = \frac{9}{35}$.

Это означает, что на 9 частей первого сплава нужно взять 35 частей второго.

6.36. МИФИ, 1993. Имеются два водных раствора щелочи: первый раствор содержит 10% щелочи (по объему), второй — 30%. После смешивания 20 л первого раствора, некоторого количества второго раствора и 10 л воды получили раствор, в котором воды оказалось в 2,5 раза больше, чем щелочи. Сколько литров второго раствора было взято?

6.37. МГУ, ФНМ, 2004. Для приготовления 36%-го раствора кислоты взяли чистую воду и 40%-й и 60%-й растворы кислоты. Сколько литров надо взять 60%-го раствора кислоты, если использовали 12 л 40%-го раствора и 4 л воды?

6.38. МГУ, ФНМ, 2004. Для приготовления водного раствора кислоты взяли 4 л 40%-го и 6 л 60%-го раствора кислоты. Затем часть полученной смеси вылили и добавили такое же количество воды, в результате чего получился 39%-ный раствор кислоты. Сколько литров воды было добавлено?

6.39. МТУСИ. Имеются два сплава золота и серебра: в одном массы этих металлов находятся в отношении 2 : 3, в другом — в отношении 3 : 7. Сколько килограммов нужно взять от каждого сплава, чтобы получить 8 кг нового сплава, в котором золото и серебро находились бы в отношении 5 : 11?

7. ЗАДАЧИ НА ПЕРЕЛИВАНИЯ

Начнем с простой задачи.

7.1. В первом стакане налито молока столько, сколько черного кофе во втором. Ложку молока перелили в стакан кофе, тщательно перемешали, потом ложку полученной смеси перелили обратно в стакан с молоком. Чего стало больше: молока в кофе или кофе в молоке?

Так как в каждом из двух стаканов после переливания количество жидкости не изменилось, то сколько жидкости перелили из первого стакана во второй, столько же перелили из второго стакана в первый. Итак, сколько молока оказалось в кофе, столько же и кофе в молоке.

7.2. В первом стакане налито молока столько, сколько черного кофе во втором. Из первого стакана во второй налили 4 ложки молока, потом из второго в первый налили 3 ложки полученной смеси, затем из первого стакана во второй добавили еще 1 ложку, а из второго в первый 2 ложки. После каждого переливания смеси тщательно перемешивали. Чего стало больше молока в кофе или кофе в молоке?

7.3. У торговца имеются два бочонка вина: емкостью 40 л ценою 7 р. за литр и емкостью 10 л ценою 5 р. за литр. По какому одинаковому количеству вина нужно взять из каждого бочонка и перелить в другой бочонок, чтобы цены вина за литр в двух бочонках сравнялись?

Пусть из каждого бочонка перелили в другой по x литров вина. Тогда цена литра вина в первом бочонке составит $\frac{7(40-x)+5x}{40}$ р., а во втором бочонке $\frac{5(10-x)+7x}{10}$ р. По условию задачи цены вина в бочонках

после переливания сравнялись. Составим уравнение:

$$\frac{7(40-x)+5x}{40} = \frac{5(10-x)+7x}{10}.$$

Это уравнение имеет единственный корень $x = 8$. Следовательно, чтобы цены вина за литр в двух бочонках сравнялись, нужно взять из каждого бочонка и перелить в другой по 8 л вина.

Заметим, что уравнение могло бы быть более простым, если бы мы одну из полученных дробей заменили числом $\frac{7 \cdot 40 + 5 \cdot 10}{40 + 10} = 6,6$, выра-

жающим цену вина в рублях после переливания.

7.4. У торговца имеются два бочонка вина: емкостью 40 и 10 л. Цены вина за литр различны, но неизвестны. По какому одинаковому количеству вина надо взять из каждого бочонка и перелить в другой бочонок, чтобы цены вина за литр в двух бочонках сравнялись?

7.5. У торговца имеются два бочонка вина разной цены за литр емкостью m л и n л. По какому одинаковому количеству вина нужно взять из каждого бочонка и перелить в другой бочонок, чтобы цены вина за литр в двух бочонках сравнялись?

7.6. МИСиС. В сосуде объемом 12 л было 12 л чистого спирта. Часть спирта отлили и сосуд долили водой. Затем отлили еще столько же и опять долили водой¹. Сколько (в литрах) отливали каждый раз, если в сосуде оказался 25%-ый раствор спирта?

Пусть первый раз отлили x л спирта и долили x л воды ($x < 12$). Осталось $(12 - x)$ л спирта, его доля в растворе составляет $\frac{12 - x}{12}$. Когда во второй раз отлили x л раствора и долили x л воды, то отлили $\frac{(12 - x)x}{12}$ л спирта, а осталось $(12 - x) - \frac{(12 - x)x}{12} = \frac{(12 - x)^2}{12}$ (л), или $0,25 \cdot 12 = 3$ (л) спирта. Составим уравнение: $\frac{(12 - x)^2}{12} = 3$.

Решив это уравнение, получим два его положительных корня: $x_1 = 6$ и $x_2 = 18$. Второй корень не удовлетворяет условию $x < 12$.

Итак, каждый раз отливали по 6 л.

7.7. В сосуде объемом 20 л содержится всего 20 л спирта. Несколько литров спирта отлили и долили сосуд водой. Затем отлили столько же литров полученной смеси и опять долили сосуд водой. В результате в сосуде оказался 64%-ый раствор спирта. Сколько литров спирта отлили из сосуда в первый раз?

¹ Здесь и далее предполагается, что после каждого переливания смеси тщательно перемешивали.

7.8. В сосуде объемом 40 л содержится 40 л спирта. Несколько литров спирта отлили и долили сосуд водой. Затем отлили столько же литров полученной смеси и опять долили сосуд водой. В результате в сосуде оказался 36%-ый раствор спирта. Сколько литров спирта отлили из сосуда в первый раз?

7.9. В сосуде объемом 10 л содержится 10 л 75%-го раствора спирта. Несколько литров раствора отлили и долили сосуд спиртом. Затем отлили столько же литров полученной смеси и опять долили сосуд спиртом. В результате в сосуде оказался 84%-ый раствор спирта. Сколько литров спирта доливали каждый раз?

Первоначально в сосуде было 7,5 л спирта. Пусть первый раз отлили x л раствора ($x < 10$), осталось $(7,5 - 0,75x)$ л спирта.

Когда сосуд долили спиртом, то спирта стало

$$7,5 - 0,75x + x = 7,5 + 0,25x \text{ (л)}.$$

Когда во второй раз отлили x л раствора, в сосуде осталось $\frac{(7,5 + 0,25x) \cdot (10 - x)}{10}$ (л) спирта. Когда сосуд еще раз долили спиртом,

то спирта в сосуде стало $x + \frac{(7,5 + 0,25x) \cdot (10 - x)}{10} = \frac{-0,25x^2 + 5x + 75}{10}$,
 или 8,4 л. Составим уравнение:

$$\frac{-0,25x^2 + 5x + 75}{10} = 8,4.$$

Это уравнение имеет два корня: $x_1 = 18$ и $x_2 = 2$. Так как $x < 10$, то $x = 2$.

Итак, каждый раз доливали 2 л спирта.

7.10. В сосуде объемом 20 л содержится 20 л 50%-го раствора спирта. Несколько литров раствора отлили и долили сосуд спиртом. Затем отлили столько же литров полученной смеси и опять долили сосуд спиртом. В результате в сосуде оказался 68%-ый раствор спирта. Сколько литров спирта доливали каждый раз?

7.11. В двух одинаковых сосудах, объемом по 30 л каждый, содержится всего 30 л спирта. Первый сосуд доливают доверху водой и полученной смесью дополняют второй сосуд, затем из второго сосуда отливают в первый 12 л новой смеси. Сколько литров спирта было первоначально в первом сосуде, если во втором сосуде оказалось на 2 л спирта меньше, чем в первом?

Сначала заметим, что в конце всех переливаний в первом сосуде оказалось 16 л, а во втором 14 л спирта. Пусть в первом сосуде первоначально

начально было x л спирта, тогда во втором было $(30 - x)$ л спирта. Когда в первый сосуд долили воду, то доля спирта в нем составляла $\frac{x}{30}$.

Из первого сосуда во второй перелили x л смеси, содержащей $x \cdot \frac{x}{30} = \frac{x^2}{30}$ (л) спирта и во втором сосуде стало $(30 - x + \frac{x^2}{30})$ л спирта. Доля

спирта во втором сосуде стала равной $\frac{30 - x + \frac{x^2}{30}}{30}$, поэтому в 12 л сме-

си, перелитой в первый сосуд, содержалось $\frac{12}{30} \cdot \left(30 - x + \frac{x^2}{30}\right) =$

$12 - \frac{2x}{5} + \frac{x^2}{75}$ (л) чистого спирта.

Итак, во втором сосуде осталось $\left(30 - x + \frac{x^2}{30} - 12 + \frac{2x}{5} - \frac{x^2}{75}\right)$ или

14 л спирта. Составим уравнение: $30 - x + \frac{x^2}{30} - 12 + \frac{2x}{5} - \frac{x^2}{75} = 14$.

Уравнение имеет два корня $x_1 = 10$ и $x_2 = 20$, при этом нет оснований для исключения одного из корней. Убедимся, что задача имеет два решения.

1) Если в первом сосуде было 10 л спирта, то во втором было 20 л спирта. В первый сосуд долили 20 л воды, в полученной смеси доля спирта составила $\frac{1}{3}$, поэтому во второй сосуд перелили $\frac{10}{3}$ л спирта. Во

втором сосуде стало $20 + \frac{10}{3} = \frac{70}{3}$ (л) спирта и доля спирта составляла

$\frac{70}{3} : 30 = \frac{7}{9}$, поэтому в первый сосуд перелили $\frac{7}{9} \cdot 12 = \frac{28}{3}$ (л) спирта, а во

втором сосуде осталось $\frac{70}{3} - \frac{28}{3} = 14$ (л) спирта, т.е. x_1 — решение задачи.

2) Если в первом сосуде было 20 л спирта, то во втором было 10 л спирта. В первый сосуд долили 10 л воды, в полученной смеси доля

спирта составила $\frac{2}{3}$, поэтому во второй сосуд перелили $\frac{40}{3}$ л спирта. Во втором сосуде стало $10 + \frac{40}{3} = \frac{70}{3}$ (л). Результат повторился, поэтому дальнейшие вычисления приведут к тому же ответу, то есть x_2 — решение задачи.

Итак, проверка показала, что задача имеет два решения: в первом сосуде было или 10, или 20 л спирта.

7.12. В двух одинаковых сосудах, объемом по 50 л каждый, содержится всего 50 л спирта. Первый сосуд доливают доверху водой и полученной смесью дополняют второй сосуд, затем из второго сосуда отливают в первый 15 л новой смеси. Сколько литров спирта было первоначально в первом сосуде, если во втором сосуде оказалось на 3,2 л спирта больше, чем в первом?

7.13. В ведре находится 10 л 90%-го раствора спирта, а в баке — 20 л 66%-го раствора спирта. Некоторое количество раствора из ведра переливают в бак, полученную смесь перемешивают и точно такое же количество смеси переливают обратно. В результате в ведре оказался 82%-ый раствор спирта. Сколько литров раствора перелили из бака в ведро?

Сначала в ведре было $0,9 \cdot 10 = 9$ (л) спирта, а в баке $0,66 \cdot 20 = 13,2$ (л) спирта. Пусть из ведра в бак перелили x л раствора спирта. В баке стало $13,2 + 0,9x$ л спирта, что составляет $\frac{13,2 + 0,9x}{20 + x}$ часть объема раствора в баке. Затем из бака в ведро перелили $\frac{(13,2 + 0,9x)x}{20 + x}$ л спирта. Теперь в ведре стало $9 - 0,9x + \frac{(13,2 + 0,9x)x}{20 + x}$, или $0,82 \cdot 10 = 8,2$ (л) спирта. Составим уравнение: $9 - 0,9x + \frac{(13,2 + 0,9x)x}{20 + x} = 8,2$.

Решив это уравнение, получим его единственный корень $x = 4$.

Итак, 4 л раствора перелили из бака в ведро.

7.14. В ведре находится 10 л чистого спирта, а в баке — 20 л 40%-го раствора этого спирта. Некоторое количество спирта из ведра переливают в бак, полученную смесь перемешивают и точно такое же количество смеси переливают обратно. Эту операцию повторили несколько

раз, соблюдая следующие условия: в ведро переливают такое же количество раствора, какое перед этим из ведра перелили в бак; после каждого переливания новый раствор тщательно перемешивают. После нескольких описанных операций в ведре оказался 70% раствор спирта. Определите процентную концентрацию раствора спирта в баке.

Здесь не сказано, какое именно количество жидкости переливают из ведра, даже не сказано, что одно и то же количество. Не указано и число проведенных переливаний. Оказывается, ничего этого и не нужно знать для решения задачи! Здесь важно другое: общее количество спирта в ведре и баке после любых описанных переливаний не изменяется. Первоначально в ведре и в баке было $10 + 0,4 \cdot 20 = 18$ (л) спирта. В конце процесса в ведре оказалось $0,7 \cdot 10 = 7$ (л) спирта, следовательно, остальные $18 - 7 = 11$ (л) находились в баке. В результате каждой пары последовательных переливаний количество раствора в баке оставалось неизменным, поэтому процентная концентрация раствора в баке оказалась равной $\frac{11 \cdot 100\%}{20} = 55\%$.

7.15. В ведре находится 10 л чистого спирта, а в баке — 20 л 75%-го раствора спирта. Некоторое количество спирта из ведра переливают в бак, полученную смесь перемешивают и точно такое же количество смеси переливают обратно. В результате в баке оказался 90%-ый раствор спирта. Сколько литров спирта перелили из ведра в бак?

7.16. ГАУ, 2000. Имеются два бака: первый наполнен доверху глицерином, а второй — водой. Взяли два двухлитровых ковша, зачерпнули первым ковшом доверху глицерин из первого бака, вторым ковшом — воду из второго бака, после чего первый ковш влили во второй бак, а второй ковш — в первый бак. После перемешивания повторили эту операцию со смесью еще раз. В результате 40% объема первого бака занял чистый глицерин. Определить суммарный объем баков, если по объему второй бак в 4 раза больше первого.

8. ЗАДАЧИ НА ПРОЦЕНТЫ (продолжение)

Рассмотрим теперь задачи на так называемые сложные проценты.

8.1. Число увеличили на 10%, полученный результат увеличили еще на 10%. На сколько процентов увеличилось число за два раза?

Если дано число a , то после первого увеличения этого числа на 10% получится $a + \frac{10}{100}a = 1,1a$. Чтобы полученное число увеличить на 10%, нужно умножить его на 1,1. Получится $1,1a \cdot 1,1 = 1,21a$. Это число составляет 121% от a , что на 21% больше числа a . Итак, за два раза число увеличилось на 21%.

Для увеличения числа на p % это число нужно умножить на $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$. Аналогично, для уменьшения числа на q % нужно это число умножить на $\left(1 - \frac{q}{100}\right)$.

8.2. Зарплата сотрудника составляла 10000 р. Зарплату повысили на несколько процентов, а через некоторое время повысили еще на столько же процентов. Теперь зарплата сотрудника составляет 14400 р. На сколько процентов повышали зарплату каждый раз.

Пусть зарплату повышали оба раза на p %. Тогда после первого повышения зарплата составила $10000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ р., а после второго —

$10000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$ р., что составляет 14400 р. Составим уравнение:

$$10000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 = 14400.$$

Учитывая, что выражение в скобках положительное, имеем: $1 + \frac{p}{100} = 1,2$, откуда $p = 20$, то есть зарплату повышали оба раза на 20%.

8.3. В течение года завод дважды увеличивал выпуск продукции на одно и то же число процентов. Найдите это число процентов, если в начале года завод выпускал ежемесячно 600 изделий, а в конце года стал выпускать ежемесячно 726 изделий.

Аналогично решается задача, в которой величина уменьшается два раза на одно и то же число процентов.

8.4. ЕГЭ, 2010. Цена холодильника в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена холодильника, если выставленный на продажу за 8000 р., он через два года был продан за 6480 р.

8.5. ЕГЭ, 2008. В комиссионном магазине цена товара, выставленного на продажу, ежемесячно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый месяц уменьшалась цена магнитофона, если, выставленный на продажу за 4000 р., он через два месяца был продан за 2250 р.

8.6. ЕГЭ, 2009. Заработная плата служащего, равная 7000 рублей, повышалась два раза, причем во второй раз процент, на который она была повышена, был в два раза больше, чем в первый. На сколько процентов повышалась заработная плата в первый раз, если после второго повышения она составила 9240 рублей?

8.7. Оптовый склад покупает товар по 800 р. и продает его, повысив цену на некоторое число процентов. Магазин покупает тот же товар на оптовом складе и продает его, повысив цену на число процентов, в 1,5 раза большее, чем оптовый склад. В результате цена товара в магазине составляет 1248 р. На сколько процентов увеличивает цену оптовый склад, на сколько магазин?

8.8. ЕГЭ, 2008. В понедельник акции компании A подорожали на некоторое число процентов, а во вторник подешевели на то же число процентов. В результате они стали стоить на 16% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На какое число процентов подорожали акции компании A в понедельник?

8.9. МГУ, социол. ф., 2000. В городе N в течение двух лет наблюдался рост числа жителей. Во втором году процент роста числа жителей города N увеличился на 1 по сравнению с процентом роста числа жителей в первом году. Найдите процент роста числа жителей в первом году, если известно, что он на 5,2 меньше, чем процент роста населения за два года.

8.10. МГУ, социол. ф., 2000. В городе N в течение двух лет наблюдался рост числа жителей. Во втором году процент роста числа жителей города N увеличился на 1 по сравнению с процентом роста числа жителей в первом году. Найдите процент роста числа жителей во втором году, если известно, что он на 5,3 меньше, чем процент роста населения за два года.

8.11. Торговец продает купленный товар в розницу с наценкой p %. С какой наибольшей скидкой в целое число процентов q % от розничной цены он может продать остатки этого товара, чтобы на этой продаже не иметь убытка, если:

- а) $p = 30$; б) $p = 25$?

Пусть торговец закупал товар по цене a р., а продавал с наценкой p %, то есть по цене $a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ р. Со скидкой q % он продаст товар по цене $a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \left(1 - \frac{q}{100}\right)$ р., которая по условию задачи не должна быть меньше цены закупки (в этом случае при продаже не будет убытка). Это означает, что должно выполняться неравенство: $a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \left(1 - \frac{q}{100}\right) \geq a$.

Разделив обе части неравенства на положительное число a , получим неравенство: $\left(1 + \frac{p}{100}\right) \left(1 - \frac{q}{100}\right) \geq 1$, а после преобразований получим неравенство: $q \leq \frac{100p}{100 + p}$.

Наибольшее целое значение q есть целая часть дроби $\frac{100p}{100 + p}$, то есть $q_{\text{наиб}} = \left[\frac{100p}{100 + p} \right]$. (Здесь $[x]$ — целая часть числа x , то есть наибольшее целое число, не превосходящее x .)

а) Если $p = 30$, то $q_{\text{наиб}} = \left[\frac{100p}{100 + p} \right] = \left[\frac{3000}{130} \right] = 23$.

б) Если $p = 25$, то $q_{\text{наиб}} = \left[\frac{100p}{100 + p} \right] = \left[\frac{2500}{125} \right] = 20$.

8.12. Торговец продает купленный товар в розницу с наценкой p %. С какой наибольшей скидкой в целое число процентов q % от розничной цены он может продавать товар, чтобы иметь доход не менее d %, если:

а) $p = 30, d = 10$; б) $p = 25, d = 10$?

8.13. Сберегательные кассы СССР платили доход вкладчикам из расчета 2% годовых. На сколько процентов увеличивалась сумма вклада за 10 лет, если начисление процентов по вкладу производилось ежегодно?

За 1 год сумма a р. обращалась в $a \left(1 + \frac{2}{100}\right) = 1,02 a$ (р.), за 2 года — в $1,02^2 a$ р., ... за 10 лет — в $1,02^{10} a$ р., то есть сумма увеличивалась примерно в 1,22 раза или на 22%.

8.14. Стоимость акций компании росла пять месяцев на 15% ежемесячно. Верно ли, что за это время стоимость акций удвоилась?

8.15. Через сколько лет сумма, вложенная под 2% годовых, удваивается при ежегодном начислении процентов?

Будем искать такое наименьшее целое значение n , при котором выполняется неравенство $a \left(1 + \frac{2}{100}\right)^n \geq 2a$, или $1,02^n \geq 2$.

Поручим поиск наименьшего решения этого неравенства компьютеру, ограничив число циклов заведомо большим числом 50.

1 ПРОГРАММА 8.15

10 FOR N=1 TO 50

20 IF 1.02^N>=2 GOTO 40

30 NEXT N

40 PRINT "Ответ: число лет для удвоения суммы"; N

50 END

После запуска программы получим

Ответ: число лет для удвоения суммы 36

За неимением компьютера для проверки полученного результата можно воспользоваться калькулятором. Нужно набрать число 1,02, нажать клавишу «х» и 35 раз нажать клавишу «=», что соответствует возведению в степень 36.

8.16. Через сколько лет сумма, вложенная под 3% годовых удваивается при ежегодном начислении процентов?

8.17. В мэрии города N подсчитали, что число легковых автомобилей в городе увеличивалось в последние годы на 15% ежегодно. Через сколько лет число легковых автомобилей удвоится, если эта тенденция сохранится?

8.18. ЕГЭ, 2007. Денежный вклад в банке за год увеличивается на 11%. Вкладчик внес в банк 7000 р. В конце первого года он решил увеличить сумму вклада и продлить срок действия договора еще на год, чтобы в конце второго года иметь на счету не менее 10000 рублей. Какую наименьшую сумму необходимо дополнительно положить на счет по окончании первого года, чтобы при той же процентной ставке (11%) реализовать этот план? (Ответ округлите до целых.)

В конце первого года на счете было $7000 \cdot 1,11 = 7770$ (р.). Пусть вкладчик положит на счет еще x р. Тогда в конце второго года на счете будет $(7770 + x) \cdot 1,11$ р. По условию задачи эта величина должна быть не менее 10000 р. Составим неравенство: $(7770 + x) \cdot 1,11 \geq 10000$.

Решив это неравенство, получим: $x \geq 1239,009\dots$. Следовательно, 1240 — наименьшее целое число, удовлетворяющее этому неравенству.

Итак, 1240 р. — наименьшая сумма, которую необходимо дополнительно положить на счет по окончании первого года.

8.19. В какую сумму обратятся a р., вложенные n раз на $\frac{1}{k}$ года под p % годовых?

За $\frac{1}{k}$ года платят $\frac{p}{k}$ %; через $\frac{1}{k}$ года a р. обратятся в $a\left(1 + \frac{p/k}{100}\right)$ р.

После n -кратного вложения первоначальная сумма обратится в $a\left(1 + \frac{p/k}{100}\right)^n$ р.

Теперь рассмотрим ситуацию, которая произошла в 1993 г. в период бурного роста цен. Сбербанк России с 1 октября 1993 г. за хранение денег на депозитном вкладе в течение года, 6 и 3 месяцев выплачивал доход в размере 150%, 130% и 120% годовых соответственно. Расчеты показывают, что при двукратном вложении денег на 6 месяцев и четырехкратном — на 3 месяца можно получить 172,25% и 185,61% соответственно, что заметно превышает 150% годовых. Таким образом,

вкладчики имели возможность получить выигрыш за счет более выгодного использования условий Сбербанка России.

Описанная ситуация поставила естественную задачу, которую нужно было бы решить руководству Сбербанка России, если бы оно считало нежелательным многократное использование клиентами вкладов на 3 и 6 месяцев при заданной процентной ставке для вкладов на 1 год. Сформулируем ее в общем виде.

8.20. Каким наибольшим целым числом должен выражаться процент годовых для депозитных вкладов на 6 месяцев, чтобы двукратное использование этого вклада приносило доход меньший, чем вклад на 1 год под p % годовых? Каким наибольшим целым числом должен выражаться процент годовых для вкладов на 3 месяца, чтобы двукратное использование этого вклада приносило доход меньший, чем вклад на 6 месяцев?

Определим наибольшее целое число x , которым должен выражаться процент годовых для вкладов на 6 месяцев, чтобы двукратное использование этого вклада приносило доход, меньший p %.

Пусть в начале года положили a р. под p % годовых. В конце года получают $a \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ р. Пусть теперь положили a р. под x % годовых на

6 месяцев, полученную через полгода сумму, увеличенную на $\frac{x}{2}$ %, еще

раз положили на 6 месяцев. В конце года получают $a \left(1 + \frac{x/2}{100}\right)^2$ р. По

условию задачи первый результат должен быть больше второго, то есть

должно выполняться неравенство: $a \left(1 + \frac{p}{100}\right) > a \left(1 + \frac{x/2}{100}\right)^2$, которое

перепишем в виде:

$$x^2 + 400x - 400p < 0. \quad (1)$$

Вычислим корни квадратного трехчлена:

$$\frac{D}{4} = 40000 + 400p = 400(100 + p);$$

$$x_1 = -200 - 20\sqrt{p+100}, x_2 = -200 + 20\sqrt{p+100}.$$

Решения неравенства (1) составляют промежуток

$$-200 - 20\sqrt{p+100} < x < -200 + 20\sqrt{p+100}. \quad (2)$$

При $p = 150$ имеем:

$$x < -200 + 20\sqrt{p+100} = -200 + 20\sqrt{250} = 116,2\dots,$$

откуда наибольшее целое значение $x_{\text{наиб}} = 116$.

Проверим полученный результат. Двукратное вложение денег на 6 месяцев под 116% годовых увеличит вклад в $\left(1 + \frac{116/2}{100}\right)^2 = 2,49\dots$ раза, то есть меньше, чем на 150%; а под 117% годовых — увеличивает вклад в $\left(1 + \frac{117/2}{100}\right)^2 = 2,51\dots$ раза, то есть больше, чем на 150%.

Пусть теперь известна процентная ставка x по вкладам на 6 месяцев. Определим наибольшее целое число y , которым должен выражаться процент годовых для вкладов на 3 месяца, чтобы двукратное использование этого вклада приносило доход меньший x %. Далее можно полностью повторить рассуждения по приведенной выше схеме или получить результат из неравенства (2) подстановкой $p = \frac{x}{2}$, $x = \frac{y}{2}$:

$$-200 - 20\sqrt{\frac{x}{2} + 100} < \frac{y}{2} < -200 + 20\sqrt{\frac{x}{2} + 100},$$

откуда

$$-400 - 20\sqrt{2x + 400} < y < -400 + 20\sqrt{2x + 400}. \quad (3)$$

При $x = 116$ имеем:

$$y < -400 + 20\sqrt{232 + 400} = -400 + 20\sqrt{632} = 102,7\dots,$$

откуда наибольшее целое значение $y_{\text{наиб}} = 102$.

Проверка показывает, что двукратное вложение денег на 3 месяца под 102% годовых увеличивает вклад в $\left(1 + \frac{102/4}{100}\right)^2 = 1,575\dots$ раза, то есть меньше, чем на $\frac{116\%}{2} = 58\%$; а под 103% годовых — увеличит

вклад в $\left(1 + \frac{103/4}{100}\right)^2 = 1,581\dots$ раза, то есть больше, чем на 58%.

Таким образом, мы получили неравенства (2) и (3), с помощью которых по заданному проценту p для депозитных вкладов на 1 год можно вычислить процент годовых x для вкладов на 6 месяцев, а по нему — процент годовых y для вкладов на 3 месяца. При указанных процентах x

и у многократное использование вкладов на 6 и 3 месяца вместо одного вклада на 1 год становится невыгодным.

Отметим, что не прошло и года, как приведенные выше процентные ставки по депозитным вкладам Сбербанка России были изменены. Интересно не то, что они уменьшились, тем более не то, что сей факт случился после публикации решения этой задачи в журнале «Квант» (это, разумеется, совпадение), а то, что новые процентные ставки (70, 60 и 50 процентов для депозитных вкладов на год, 6 и 3 месяца соответственно) удовлетворяли неравенствам (2) и (3), чем и лишили дополнительного дохода наиболее сообразительных вкладчиков Сбербанка России.

Заметим, что наши расчеты имеют чисто теоретическое значение, так как на принятие решения о величине процентной ставки по вкладам могут влиять самые разные причины.

Завершим разговор о процентных ставках по вкладам задачей, подводящей к пониманию очень важного в математике числа e .

8.21. Представим себе, что некоторый банк платит по вкладам 100% годовых независимо от срока хранения вклада: за 1 год — 100%, за $\frac{1}{2}$ года — $\frac{100}{2}\% = 50\%$, за $\frac{1}{3}$ года — $\frac{100}{3}\% = 33\frac{1}{3}\%$, за $\frac{1}{4}$ года — $\frac{100}{4}\% = 25\%$ и т.д. Возникает естественный вопрос: можно ли неограниченно увеличивать доход, увеличивая частоту перевложений суммы, если при каждой такой операции начисляются проценты?

Подсчитаем, во сколько раз увеличится сумма после n вложений на $\frac{1}{n}$ года. Ответ прост: в $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ раза.

Составим программу для вычисления с помощью компьютера значений выражения $x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ по заданным значениям n . Чтобы проследить изменения x , будем печатать все получаемые результаты. Пусть n меняется от 1 до 12. Определим, во сколько раз при этом увеличивается вклад за год.

```
1 ПРОГРАММА 8.21
10 FOR N=1 TO 12
20 X=(1+1/N)^N
30 PRINT "n =", N; "x =", X
```

40 NEXT N

50 END

После запуска программы получим:

$$n = 1 \quad x = 2$$

$$n = 2 \quad x = 2.25$$

$$n = 3 \quad x = 2.37037$$

$$n = 4 \quad x = 2.441406$$

$$n = 5 \quad x = 2.48832$$

$$n = 6 \quad x = 2.521626$$

$$n = 7 \quad x = 2.5465$$

$$n = 8 \quad x = 2.565784$$

$$n = 9 \quad x = 2.581175$$

$$n = 10 \quad x = 2.593742$$

$$n = 11 \quad x = 2.604199$$

$$n = 12 \quad x = 2.613035$$

Как видим, при увеличении числа n от 1 до 12 число x увеличивается. Правда, этот рост замедляется. Если число перевложений увеличить до 365, то есть до 1 раза в день, то величина x примет значение 2,714501. Можно доказать, что с увеличением n последовательность значений выражения $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ возрастает, но ограничена числом 3.

При неограниченном увеличении n (при $n \rightarrow +\infty$) значения выражения $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ стремятся к числу $e = 2,718281828459045\dots$.

Это число иррациональное, оно не выражается обыкновенной дробью. В приближенных вычислениях его округляют до 2,7. Следующие восемь цифр легко запомнить: они образуют повторяющийся два раза год рождения Л.Н. Толстого (1828).

Полученный результат показывает, что в задаче **8.21** нельзя добиться неограниченного увеличения дохода за счет увеличения числа операций.

Теперь рассмотрим две задачи с конкурсных экзаменов.

8.22. МГУ, социол. ф., 1999. Кандидат в депутаты за время избирательной кампании имеет право на одно бесплатное выступление в газете, а также на платные выступления по радио и телевидению. Выступление

в газете увеличивает число сторонников кандидата на 1000 человек; каждое выступление по радио увеличивает количество голосов на 40% и стоит 32 тыс. р.; каждое выступление по телевидению — на 80% и стоит 47 тыс. р. Определите количество и последовательность выступлений кандидата в этих средствах массовой информации, при которых он получит наибольшее возможное количество голосов, если за всю кампанию можно израсходовать не более 112 тыс. р.

8.23. *МГУ, социол. ф., 1999.* Для улучшения собираемости налогов правительство может провести одну бесплатную рекламную акцию на государственном телеканале, а также может увеличить штат налоговых инспекторов и повысить зарплату налоговой полиции. Рекламная акция по телевидению увеличивает количество граждан, подавших налоговые декларации, на 10000 человек; каждое увеличение штата налоговых инспекторов увеличивает количество поданных деклараций на 40% и требует 31 млн. р.; каждое повышение зарплаты налоговой полиции увеличивает количество поданных деклараций на 60% и требует 42 млн. р. Определите количество и последовательность проведения этих мероприятий, при которых будет подано наибольшее количество налоговых деклараций, если на эти цели из бюджета можно израсходовать не более 123 млн. р.

9. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Первые задачи данного раздела можно решить без уравнения, с помощью уравнения с одним неизвестным, с помощью системы уравнений. По мере продвижения вперед по списку задач окажется, что использование системы уравнений делает решение задачи более простым.

9.1. Старинная задача (Китай). В клетке находится неизвестное число фазанов и кроликов. Известно, что всего в клетке 35 голов и 94 ноги. Требуется узнать число фазанов и число кроликов.

I способ. Представим, что на верх клетки положили морковку и все кролики встали на задние лапы. В этот момент каждый кролик и каждый фазан стоят на двух лапах, поэтому на земле находится $2 \cdot 35 = 70$ (лап). А в воздухе находятся $94 - 70 = 24$ (лапы) кроликов — по две лапы у каждого. Следовательно, кроликов было $24 : 2 = 12$, тогда фазанов было $35 - 12 = 23$.

II способ. Пусть было k кроликов, тогда фазанов было $35 - k$. У кроликов и фазанов вместе $4k + 2(35 - k)$ лап, что по условию задачи равно 94. Составим уравнение:

$$4k + 2(35 - k) = 94.$$

Решив это уравнение, получим: $k = 12$. Следовательно, кроликов было 12, тогда фазанов было $35 - 12 = 23$.

III способ. Пусть было f фазанов и k кроликов. Тогда верны два равенства: $f + k = 35$ и $2f + 4k = 94$.

Решив систему из двух уравнений с неизвестными f и k , получим: $f = 23$, $k = 12$.

Следовательно, было 23 фазана и 12 кроликов.

9.2. Если каждая девочка принесет по 3 кг, а каждый мальчик — по 5 кг макулатуры, то все 30 учащихся класса принесут 122 кг макулатуры. Сколько мальчиков в классе?

I способ. Представим, что каждый учащийся класса принес по 3 кг макулатуры. Тогда до 122 кг не хватает $122 - 3 \cdot 30 = 32$ (кг). Это количество

должны были принести мальчики — каждый по $5 - 3 = 2$ (кг). Следовательно, мальчиков было $32 : 2 = 16$.

II способ. Пусть было m мальчиков, тогда девочек было $30 - m$. Все учащиеся принесли $5m + 3(30 - m)$ кг макулатуры, что по условию задачи равно 122 кг. Составим уравнение:

$$5m + 3(30 - m) = 122.$$

Решив это уравнение, получим: $m = 16$. Следовательно, мальчиков было 16.

III способ. Пусть было m мальчиков и d девочек. Тогда верны два равенства: $m + d = 30$ и $5m + 3d = 122$.

Решив систему из двух уравнений с неизвестными m и d , получим: $m = 16$, $d = 14$. Следовательно, мальчиков было 16.

9.3. Учащиеся класса собрались в поход и приготовили 35 кг продуктов. Если каждый мальчик возьмет по 3 кг продуктов, а каждая девочка — по 2 кг, то учительнице останется 2 кг продуктов. Если же каждый мальчик возьмет по 3,5 кг продуктов, а каждая девочка — по 1,5 кг, то учительнице останется 1,5 кг продуктов. Сколько мальчиков и сколько девочек собрались в поход?

Причислим учительницу к девочкам (или заменим учительницу девочкой), так как она несет столько же продуктов, сколько и девочка. Каждая пара «мальчик – девочка» при первом и втором способе раздачи продуктов будет нести 5 кг, поэтому таких пар было $35 : 5 = 7$. Следовательно, мальчиков было 7, девочек на одну меньше, т.е. 6.

Итак, было 7 мальчиков и 6 девочек.

Решите задачу с помощью системы уравнений.

Как видим, арифметическое решение рассмотренных задач требует большой изобретательности, тогда как применение системы дает простые уравнения, наглядно отражающие соотношения между известными и неизвестными величинами. Решите с помощью системы следующие задачи. Постарайтесь найти и другие способы решения.

9.4. Из «Арифметики» Н.Г. Курганова (1791). 23 человека — мужчин и женщин — ели в харчевне. Каждый мужчина платил 5 к., каждая женщина 4 к., всего заплатили 1 р. Сколько было мужчин и женщин в отделиности?

9.5. Задача Р.М. Смаллиана. Десяти собакам и кошкам скормили 56 галет. Каждой собаке досталось 6 галет, а каждой кошке — 5. Сколько было собак и сколько кошек?

9.6. Задача Р.М. Смаллиана. В зоомагазине продают больших и маленьких птиц. Большая птица вдвое дороже маленькой. Леди, зашедшая в магазин, купила 5 больших птиц и 3 маленьких. Если бы она вместо этого купила 3 больших птицы и 5 маленьких, то потратила бы на 20 долларов меньше. Сколько стоит каждая птица?

Пусть x долларов — стоимость большой, y долларов — стоимость маленькой птицы; тогда верны два равенства: $x = 2y$ и $(5x + 3y) - (3x + 5y) = 20$.

Решив систему двух уравнений, получим ее решение: $x = 20$, $y = 10$. Следовательно, большая птица стоит 20 долларов, а маленькая 10 долларов.

Замена $x = 2y$, которая используется при решении системы, наводит на мысль заменить в условии задачи каждую большую птицу двумя маленькими. Получится новая задача, решение которой даст решение исходной задачи. Вот эта новая задача: «Леди, зашедшая в магазин, купила 13 маленьких птиц. Если бы она вместо этого купила 11 маленьких птиц, то потратила бы на 20 долларов меньше. Сколько стоит маленькая птица?»

Теперь очевидно, что 20 долларов уплачены за двух маленьких птиц, каждая из которых стоит 10 долларов, а одна большая птица стоит 20 долларов.

Такой прием изменения условия задачи будем называть переформулировкой задачи. Этот прием окажется полезным при решении других задач.

Задачи **9.5** и **9.6** взяты из книги «Принцесса или тигр?» («Мир», 1985). По поводу первой задачи автор писал: «Самым поучительным в этой задаче является то, что, хотя она легко решается посредством элементарных алгебраических выкладок, ее можно решить вообще без всякой математики — лишь с помощью рассуждений. Более того, решение, подсказанное здравым смыслом, по-моему, гораздо интереснее и уж, конечно более творческое, а также содержит больше информации, чем сугубо математическое решение». По поводу второй задачи автор писал: «Вот еще одна задача, которая решается как алгебраически, так и с помощью здравых рассуждений; я и тут предпочитаю здравый смысл».

9.7. Из рассказа А.П. Чехова «Репетитор». Купец купил 138 аршин черного и синего сукна за 540 р. Спрашивается, сколько аршин купил он того и другого сукна, если синее стоило 5 р. за аршин, а черное — 3 р.?

9.8. Три утенка и четыре гусенка весят 2 кг 500 г, а четыре утенка и три гусенка весят 2 кг 400 г. Сколько весит 1 гусенок?

9.9. Имеются березовые и сосновые дрова. 7 м³ березовых и 5 м³ сосновых дров весят 7,44 т, а 9 м³ березовых и 10 м³ сосновых дров весят 11,28 т. Сколько весит 1 м³ березовых и сосновых дров в отдельности?

9.10. Из древнего трактата «Солнечные часы» (Китай). Имеются два сорта чая. 3 фунта первого сорта смешаны с 6 фунтами второго, после чего фунт смеси стоит $3\frac{1}{2}$ дяо (денежных единиц). Если смешать

12 фунтов первого с 4 фунтами второго, то фунт смеси будет стоить 3 дяо. Сколько стоит фунт каждого сорта?

9.11. Старинная задача (Китай, I в.). Имеются 9 слитков золота и 11 слитков серебра, их взвесили, вес совпал. Слиток золота и слиток серебра поменяли местами, золото стало легче на 13 ланов (мера веса). Спрашивается, каков вес слитка золота и слитка серебра в отдельности?

9.12. Задача С.А. Рачинского (1833–1902). За 1000 р. я купил 44 коровы — по 18 р. и по 26 р. Сколько тех и других в отдельности?

9.13. Из «Арифметики» Л.Ф. Магницкого (1703). Купил 112 баранов старых и молодых, дал 49 рублей и 20 алтын. За старого платил по 15 алтын и по 2 деньги¹, а за молодого — по 10 алтын. Спрашивается, сколько старых и молодых баранов купил он?

9.14. В один из дней каникул учащиеся класса, кроме нескольких оставшихся дома, отправились гулять. 12 учащихся — треть всех девочек и половина всех мальчиков — пошли в кино, а еще 13 человек — половина всех девочек и треть всех мальчиков — пошли на выставку. Сколько учащихся этого класса осталось дома?

9.15. Задача Леонардо Пизанского (Фибоначчи) (1180–1240). Один говорит другому: «Дай мне 7 динариев, и я буду в 5 раз богаче тебя». А другой говорит: «Дай мне 5 динариев, и я буду в 7 раз богаче тебя». Сколько денег у каждого?

Пусть у первого было x динариев, а у второго — y динариев. После передачи семи динариев у них станет $(x + 7)$ и $(y - 7)$ динариев. Составим первое уравнение: $x + 7 = 5(y - 7)$.

После передачи пяти динариев у них станет $(x - 5)$ и $(y + 5)$ динариев. Составим второе уравнение: $7(x - 5) = y + 5$.

¹ Здесь и далее см. Справочную таблицу (С. 204).

Решив систему двух уравнений, получим довольно громоздкие значения для x и y : $x = 7\frac{2}{17}$, $y = 9\frac{14}{17}$.

Следовательно, у первого было $7\frac{2}{17}$, а у второго $9\frac{14}{17}$ динариев.

Заметим, что составители задач в давние времена не сильно заботились о реалистичности числовых данных. Очевидно, что динарий нельзя было разделить на 17 равных долей. Скорее всего, задачи в то время имели еще целью тренировку обучаемых в сложных расчетах.

9.16. Из «Начальных оснований алгебры...» Д. Аничкова (1781). Молодой осел и ослица несли наполненные вином мехи. Ослица, неся мехи, так устала, что не могла сойти с места. Видя это, молодой осел сказал ей: «Если я из своего меха перелю одно ведро в твой мех, то наши ноши сравняются. Но я того делать не хочу. Ты в мой мех перелей одно ведро, и у меня будет вдвое больше твоего». Сколько ведер вина находилось в мехах у ослицы и осла?

Следующая задача начинает серию задач на избыток-недостаток. Первая из них может быть решена с помощью уравнения с одним неизвестным или с помощью системы двух уравнений с двумя неизвестными, но арифметическое рассуждение превосходит оба эти способа решения по простоте. Попробуйте найти и его.

9.17. Мама посчитала, что если дать детям по четыре конфеты, то три конфеты останутся лишними. А чтобы дать по пять конфет, двух конфет не хватает. Сколько было детей?

9.18. Если раздать детям по 1 тетради, останется 36 тетрадей, а чтобы раздать по 3 тетради, не хватит 12. Сколько тетрадей и сколько детей?

9.19. *Старинная задача (Китай, I в.).* Сообща покупают вещь. Если каждый человек внесет по 8 (денежных единиц), то избыток равен 3. Если каждый человек внесет по 7, то недостаток равен 4. Спрашивается количество людей и стоимость вещи.

9.20. Из «Всеобщей арифметики» И. Ньютона. Некто желает распределить между бедными деньги. Если бы у него было на восемь динариев больше, то он мог бы дать каждому по три, но он раздает лишь по два, и у него еще остается три. Сколько было бедных?

9.21. Из «Арифметики» Л.Ф. Магницкого (1703). Некто желает дать милостыню убогим, дав каждому из них по 3 пенязя¹, но недостает денег на 3 человека. Если бы дал им по 2 пенязя, тогда бы осталось денег на 4 человека. Спрашивается, сколько было убогих, и сколько у того мужа было денег, и по сколько каждому досталось?

9.22. *Старинная задача (Китай, II в.).* Сообща покупают курицу. Если каждый человек внесет по 9 (денежных единиц), то останется 11, если же каждый внесет по 6, то не хватит 16. Требуется найти количество людей и стоимость курицы.

9.23. *Старинная задача (Китай, II в.).* Сообща покупают буйвола. Если каждые семь семей внесут по 190 (денежных единиц), то недостаток равен 330. Если же каждые девять семей внесут по 270, то избыток равен 30. Сколько семей и сколько стоит буйвол?

9.24. *Старинная задача.* Крестьянин хочет купить лошадь и для этого продает рожь. Если он продаст 15 ц ржи, то ему не хватит для покупки лошади 80 р., а если он продаст 20 ц ржи, то после покупки у него останется 110 р. Сколько стоит лошадь?

9.25. *Старинная задача.* Некий человек покупал масло. Когда он давал деньги за 8 бочек масла, то у него осталось 20 алтын. Когда же стал давать за 9 бочек, то не хватило денег полтора рубля с гривною. Сколько денег было у человека?

9.26. ЕГЭ, 2008. Трое рабочих первого разряда и пять рабочих второго разряда выполнили некоторую работу за 2,5 дня. За один день пять рабочих первого разряда и трое рабочих второго разряда выполняют $\frac{34}{75}$ этой работы. За сколько дней выполняют эту работу 6 рабочих первого разряда и 15 рабочих второго разряда?

9.27. Машинистка рассчитала, что если она будет печатать ежедневно на 2 листа более установленной нормы, то окончит работу раньше намеченного срока на 3 дня. Если же она будет печатать ежед-

¹ **Пенязь** — (от староанглийского *пенега*) название серебряной монеты в древней России. Так первоначально назывались англосаксонские и германские пеннинги, во множестве обращавшиеся в IX–XI вв. в России. В XV–XVI вв. пенязем называли серебряную польскую монету; до сих пор в польском языке слово *pieniadze* означает деньги, из всех металлов.

невно на 4 листа сверх нормы, то окончит работу на 5 дней раньше срока. Сколько листов она должна напечатать и в какой срок?

9.28. Если продать 20 коров, то заготовленного сена хватит на десять дней дольше, если же прикупить 30 коров, то запас сена исчерпается десятью днями раньше. Сколько было коров и на сколько дней заготовлено сена?

Пусть для x коров на y дней запасено по z кг сена на день, то есть всего xyz кг сена. Весь запас сена можно вычислить еще двумя способами: $(x - 20)(y + 10)z$ и $(x + 30)(y - 10)z$.

Составим систему двух уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} (x - 20)(y + 10)z = xyz, \\ (x + 30)(y - 10)z = xyz. \end{cases}$$

От «лишнего» неизвестного здесь легко избавиться, разделив обе части каждого уравнения на z ($z \neq 0$):

$$\begin{cases} (x - 20)(y + 10) = xy, \\ (x + 30)(y - 10) = xy. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение: $x = 120$, $y = 50$. Следовательно, было 120 коров и сена заготовлено на 50 дней.

Попробуйте решить задачу иначе, вводя только два неизвестных.

9.29. Если продать 20 коров, то заготовленного сена хватит на двадцать дней дольше, если же уменьшить выдачу сена на одну корову в день на 20% (заменяв сено другими кормами), то сена хватит еще на 15 дней. Сколько было коров и на сколько дней заготовлено сена?

9.30. ЕГЭ, 2009. Смешав 70%-й и 60%-й растворы кислоты и добавив 2 кг чистой воды, получили 50%-й раствор кислоты. Если бы вместо 2 кг воды добавили 2 кг 90%-го раствора той же кислоты, то получили бы 70%-й раствор кислоты. Сколько килограммов 70%-го раствора использовали для получения смеси?

Пусть взяли x кг от первого раствора и y кг от второго раствора, тогда взяли $(0,7x + 0,6y)$ кг кислоты, она составляет 50% от $(x + y + 2)$ кг полученного раствора. Составим первое уравнение: $0,7x + 0,6y = 0,5(x + y + 2)$.

Пусть во второй раз взяли x кг от первого раствора и y кг от второго раствора и добавили $0,9 \cdot 2 = 1,8$ (кг) кислоты, тогда взяли $(0,7x + 0,6y + 1,8)$ кг кислоты, она составляет 70% от $(x + y + 2)$ кг полученного раствора. Составим второе уравнение: $0,7x + 0,6y + 1,8 = 0,7(x + y + 2)$.

Решив систему двух уравнений с двумя неизвестными, получим: $x = 3$, $y = 4$. Следовательно, для получения смеси использовали 3 кг 70%-го раствора.

9.31. Имеются два слитка сплавов золота и меди. В первом слитке отношение золота к меди равно $1 : 2$, а во втором — $2 : 3$. Если сплавить $\frac{1}{3}$ первого слитка с $\frac{5}{6}$ второго, то в получившемся слитке окажется

столько золота, сколько было в первом меди, а если $\frac{2}{3}$ первого слитка

сплавить с половиной второго, то в получившемся слитке окажется меди на 1 кг больше, чем было золота во втором слитке. Сколько золота в каждом слитке?

9.32. Три тракторные бригады вместе вспахивают поле за 4 дня. Это же поле первая и вторая бригады вместе вспахивают за 6 дней, первая и третья вместе — за 8 дней. Во сколько раз больше вспахивает в день вторая бригада, чем третья?

Рассмотрим несколько задач, которые можно решить с помощью системы трех уравнений с тремя неизвестными.

9.33. Дворники получают грабли и метлы. Если каждый возьмет одну метлу или одни грабли, то останется 14 метел. А чтобы дать каждому дворнику и одну метлу, и одни грабли, не хватает 10 грабель. Сколько было метел и грабель в отдельности?

Пусть d — число дворников, g — число грабель, m — число метел. Тогда по результатам раздачи метел и грабель составим два уравнения: $m + g = d + 14$; $m + g = 2d - 10$.

Заметим, что при второй раздаче предметов каждому дворнику хватило бы по метле и метел не осталось бы, то есть метел было столько же, сколько дворников. Это наблюдение дает нам недостающее уравнение: $m = d$.

Решив систему трех уравнений с тремя неизвестными, получим: $d = 24$, $g = 14$, $m = 24$, то есть было 24 метлы и 14 грабель.

Попробуйте найти арифметическое решение этой задачи.

9.34. Из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого (1703). Три человека хотят двор купить. Первый говорит второму: «Дашь мне $\frac{3}{4}$ денег, что имеешь,

и я один заплачу цену за двор». Второй говорит третьему: «Дашь мне $\frac{2}{5}$

из твоих денег, и я один заплачу цену за двор». Третий говорит первому: «Дашь мне $\frac{1}{3}$ из твоих денег, и я один заплачу цену за двор». А двору цена 100 р. Сколько каждый имел денег?

Пусть у первого было x р., у второго — y р., у третьего — z р. Составим систему трех уравнений:

$$\begin{cases} x + \frac{3}{4}y = 100, \\ y + \frac{2}{5}z = 100, \\ z + \frac{1}{3}x = 100. \end{cases}$$

Решив систему уравнений, получим: $x = 50$ р., $y = 66\frac{2}{3}$ р., $z = 83\frac{1}{3}$ р.

Следовательно, у первого, второго и третьего были 50 р., $66\frac{2}{3}$ р., $83\frac{1}{3}$ р. соответственно.

|| З а м е ч а н и е . Если в условии задачи число 100 заменить на 300, то ответ будет более правдоподобный: 150 р., 200 р., 250 р.

9.35. Из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого. Три человека разговаривали между собой. Первый из них говорит второму: «Если бы мне взять от твоих денег $\frac{2}{4}$, а от третьего $\frac{3}{5}$, тогда было бы у меня 150 р.». Второй говорит третьему: «Если бы я взял твоих денег $\frac{3}{5}$, а от первого $\frac{5}{7}$, то я тоже имел бы 150 р.». Третий говорит первому: «Если бы я взял от твоих денег $\frac{5}{7}$, а от второго $\frac{2}{4}$, то тоже имел бы 150 р.». Сколько денег каждый в то время имел?

9.36. Три друга хотели купить книгу за 17 р., но ни у кого не набралось нужной суммы. Первый говорит друзьям: «Дайте мне каждый по половине своих денег, и я куплю книгу». Второй говорит: «Дайте мне по трети своих денег, и я куплю книгу». Третий говорит: «Дайте мне по четверти своих денег, и я куплю книгу». Сколько денег было у каждого?

9.37. Задача А. Ризе (1492–1559). Трое торгуют лошадь за 12 флоринов, но никто в отдельности не располагает такой суммой. Первый говорит двум другим: «Дайте мне каждый по половине своих денег, и я куплю лошадь». Второй говорит первому и третьему: «Дайте мне по одной трети ваших денег, и я приобрету лошадь». Наконец, третий говорит первым двум: «Дайте мне только по четверти ваших денег, и лошадь будет моя». Спрашивается, сколько денег было у каждого?

9.38. Из «Всеобщей арифметики» И. Ньютона. Некто покупает 40 мер пшеницы, 24 ячменя и 20 овса за 15 фунтов 12 шиллингов¹. Затем он производит вторую закупку тех же сортов в 26 мер пшеницы, 30 ячменя и 50 овса за 16 фунтов. Наконец, он делает третью закупку тех же сортов в 24 меры пшеницы, 120 ячменя и 100 овса за 34 фунта. Спрашивается цена меры каждого рода зерновых.

Иногда по условию задачи удается составить меньше уравнений, чем введено неизвестных. В этом случае не удастся найти значения всех неизвестных, но это бывает и не нужно для получения ответа. Рассмотрим для примера такую задачу.

9.39. ГАУ, 1995. Суммарный доход двух предприятий возрастет втрое, если доход первого предприятия останется неизменным, а доход второго увеличится в 4 раза. Во сколько раз надо увеличить доход первого предприятия, оставляя первоначальным доход второго, чтобы их суммарный доход возрос в 4 раза?

Пусть первое предприятие имело доход x р., а второе предприятие — y р. Составим первое уравнение: $3(x + y) = x + 4y$. Пусть доход второго предприятия надо увеличить в n раз. Составим второе уравнение: $4(x + y) = nx + y$. В системе

$$\begin{cases} 3x + 3y = x + 4y, \\ 4x + 4y = nx + y \end{cases}$$

неизвестных больше, чем уравнений. Выразим y через x из первого уравнения: $y = 2x$. Теперь можно вычислить n из второго уравнения: $n = \frac{4x + 3y}{x} = \frac{4x + 6x}{x} = 10$.

Итак, доход второго предприятия надо увеличить в 10 раз.

¹ 1 фунт = 20 шиллингам.

9.40. ГАУ, 1995. Суммарный доход двух фирм возрастет вдвое, если доход первой фирмы увеличится в 3 раза, а доход второй фирмы останется неизменным. Во сколько раз надо увеличить доход второй фирмы, оставляя первоначальным доход первой, чтобы их суммарный доход возрос в 3 раза?

9.41. Некто купил бананов и по дороге домой вычислял: он умножил целую часть цены 1 кг бананов (в рублях) на целую часть массы купленных бананов (в килограммах) и получил 8. Потом он умножил целую часть цены на дробную часть массы и получил 2. Наконец, он умножил дробную часть цены на целую часть массы и получил 1. Определите стоимость купленных бананов.

Примечание. Целая часть числа x есть наибольшее целое число, не превосходящее x , целую часть числа x обозначают $[x]$. Дробная часть числа x есть $x - [x]$, ее обозначают: $\{x\}$; $x = [x] + \{x\}$. Например, $[5] = 5$, $\{5\} = 0$, $[3,4] = 3$, $\{3,4\} = 0,4$.

9.42. Некто измерил длину и ширину прямоугольника. Он умножил целую часть длины на целую часть ширины и получил 48; умножил целую часть длины на дробную часть ширины и получил 3,2; умножил дробную часть длины на целую часть ширины и получил 1,5. Определите площадь прямоугольника.

9.43. Проливной дождь шел несколько часов подряд. Когда он наполнил некоторую часть открытого бассейна, включили насос для откачки воды. Он откачал воду за 5 ч, в течение которых дождь продолжал лить. Если бы вместо первого насоса включили второй, в два раза более мощный, то он откачал бы воду за 2 ч. За сколько часов откачали бы воду два насоса при совместной работе? Считайте процессы наполнения бассейна и откачки воды равномерными.

Пусть до включения насоса в бассейне было x л воды, за 1 ч наливалось в бассейн u л воды, первый насос откачивал из бассейна z л воды, за t ч два насоса откачали воду из бассейна. По условиям задачи составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 5y = 5z, \\ x + 2y = 2 \cdot 2z, \\ x + ty = t \cdot 3z. \end{cases}$$

В системе уравнений число уравнений меньше, чем число неизвестных, поэтому все ее решения найти не удастся, но это и не требуется.

Выразим t из третьего уравнения: $t = \frac{x}{3z - y}$. Вычитая второе уравнение

из первого, получим: $z = 3y$. Из первого уравнения выразим x через y :

$$x = 10y. \text{ Теперь вычислим: } t = \frac{x}{3z - y} = \frac{10y}{9y - y} = 1\frac{1}{4}.$$

Следовательно, два насоса откачают воду за 1 ч 15 мин.

Рассмотрим серию задач, интересную тем, что при их решении кроме первоначального запаса травы нужно учитывать объем травы, прирастающий ежедневно.

9.44. На лугу растет трава. 20 коров съедят всю траву за 21 день, а 30 коров — за 7 дней. За сколько дней всю траву на лугу могли бы съесть 22 коровы?

После первого прочтения условия задачи может показаться, что в условие задачи вкралась ошибка: если 20 коров съедят всю траву за 21 день, то 30 коров должны съесть траву за $\frac{21 \cdot 20}{30} = 14$ (дней). Но

ошибки нет. Дело в том, что мы пока еще не учли, что трава ежедневно прирастает.

Пусть первоначальный объем травы на лугу t ед., трава растет равномерно, то есть ежедневно прирастает один и тот же объем травы x ед., каждая корова съедает в день один и тот же объем y ед. травы (объем травы измеряется некоторой общей для всех величин единицей). А 22 коровы съедят всю траву на лугу за d дней. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} t + 21x = 21 \cdot 20 \cdot y, \\ t + 7x = 30 \cdot 7 \cdot y, \\ t + dx = 22 \cdot d \cdot y. \end{cases}$$

Далее, рассуждая как и при решении предыдущей задачи, получим: $d = 15$.

Следовательно, 22 коровы съедят всю траву на лугу за 15 дней.

9.45. На лугу растет трава. 6 коров съедят всю траву за 6 дней, а 7 коров — за 4 дня. Сколько коров могли бы съесть всю траву на лугу за 2 дня?

9.46. На лугу растет трава. 60 коров могли бы прокормиться на этом лугу в течение 14 дней, а 50 коров — в течение 28 дней. Какое

наибольшее число коров могло бы пастись на этом лугу постоянно, пока растет трава?

9.47. Из «Всеобщей арифметики» И. Ньютона. Двенадцать быков съедают $3\frac{1}{3}$ югера¹ пастбища за 4 недели; 21 бык съедает 10 югеров того же пастбища за 9 недель. Сколько быков съедят траву на 24 югерах пастбища за 18 недель?

В завершение раздела, посвященного использованию систем уравнений для решения текстовых задач, рассмотрим несколько задач курсных экзаменов в вузы.

9.48. МГТУ, 1995. Завод изготовил две партии изделий, при этом затраты на изготовление первой партии оказались на 20%, а второй партии — на 25% больше, чем планировалось. Таким образом, общие затраты превысили планируемые на 23% и составили 246 р. Какие затраты планировались на изготовление каждой партии?

9.49. РЭА, 2000. Имеются два раствора кислоты в воде, содержащие 40% и 60% кислоты. Смешав эти растворы и добавив 5 л воды, получили 20%-ый раствор. Если бы вместо воды добавили 5 л 80%-го раствора, то получился бы 70%-ый раствор. Сколько литров 60%-го раствора кислоты было первоначально?

Пусть первоначально было x л 40%-го раствора и y л 60%-го раствора. После добавления 5 л воды объем кислоты не изменился, следовательно, справедливо равенство:

$$0,4x + 0,6y = 0,2 \cdot (x + y + 5).$$

После добавления пяти литров 80%-го раствора кислоты объем кислоты увеличился на $0,8 \cdot 5 = 4$ (л). Теперь справедливо равенство

$$0,4x + 0,6y + 4 = 0,7 \cdot (x + y + 5).$$

Решив систему уравнений, получим $x = 1$, $y = 2$, то есть первоначально было 2 л 60%-го раствора кислоты.

9.50. РЭА, 2000. Имеются два раствора спирта в воде. Если смешать весь первый раствор и 4 л второго, добавив 1 л воды, то получится 44%-ый раствор. Если смешать весь первый раствор и 2 л второго, добавив 3 л 90%-го раствора, то получится 64%-ый раствор. Каково процентное содержание спирта во втором растворе, если первый раствор содержит 60% спирта?

¹ Югер — древняя римская мера площади (около 2500 м²).

9.51. ГАУ, 1993. Если пароход и катер плывут по течению, то расстояние от пункта A до пункта B пароход проходит в 1,5 раза быстрее, чем катер; при этом катер каждый час отстает от парохода на 8 км. Если же они плывут против течения, то пароход проходит путь от B до A в 2 раза быстрее катера. Найти скорости парохода и катера в стоячей воде.

Пусть v км/ч — скорость парохода в стоячей воде, u км/ч — скорость течения, s км — расстояние от A до B . Нам удастся составить только два уравнения:

$$\frac{s}{v-8+u} = \frac{1,5s}{v+u} \text{ и } \frac{s}{v-8-u} = \frac{2s}{v-u}$$

с тремя неизвестными, но от одного неизвестного легко избавиться.

9.52. МГУ, хим. ф., 1966. Две бригады работали вместе 15 дней, затем к ним присоединилась третья бригада, и через 5 дней после этого вся работа была закончена. Известно, что вторая бригада вырабатывает за день на 20% больше первой. Вторая и третья бригады вместе могли бы выполнить всю работу за 0,9 времени, которое требуется для выполнения всей работы первой и третьей бригадам, работающим совместно. За какое время могли бы выполнить всю работу три бригады, работая совместно?

9.53. ВШЭ, 1993. Завод имеет сборочные линии трех типов. На каждой линии первого, второго и третьего типов ежедневно собираются соответственно 100, 400 и 30 приемников первого класса, а также 19, 69 и 5 приемников высшего класса. В сумме на всех линиях ежедневно собираются 1030 приемников первого класса и 181 приемников высшего класса. Найти число имеющихся линий каждого типа, зная, что их общее число не превосходит 10.

9.54. ГАУ, 1995. 10 кг картофеля, 15 кг свеклы, 10 кг моркови и 14 кг капусты вместе стоят 528 р. 15 кг картофеля, 6 кг свеклы, 4 кг моркови, 21 кг капусты вместе стоят 550 р. Какова общая стоимость 20 кг картофеля, 12 кг свеклы, 8 кг моркови и 28 кг капусты?

9.55. ГАУ, 1995. В магазин привезли 30 ящиков апельсинов, 63 ящика яблок, 75 ящиков груш, 84 ящика слив. Ящики с одинаковыми фруктами весят одинаково. 14 ящиков апельсинов, 15 ящиков яблок, 35 ящиков груш и 20 ящиков слив весят вместе 445 кг, а 6 ящиков апельсинов, 27 ящиков яблок, 15 ящиков груш и 36 ящиков слив весят вместе 417 кг. Сколько весят все привезенные в магазин фрукты?

9.56. МГУ, биол.-почв. ф., 1966. Имеются два раствора одной и той же соли в воде. Для получения смеси, содержащей 10 г соли и 90 г воды, берут первого раствора вдвое больше по весу, чем второго. Через неделю из каждого килограмма первого и второго раствора испарилось по 200 г воды, и для получения такой же смеси, как и раньше, требуется первого раствора уже вчетверо больше по весу, чем второго. Сколько граммов соли содержалось первоначально в 100 г каждого раствора?

Пусть в 100 г первого и второго растворов содержалось первоначально по p и q г соли соответственно. Первый раз составили 10%-ый раствор соли, так как $\frac{10 \cdot 100\%}{10 + 90} = 10\%$. Пусть первый раз взяли $2m$ и m г первого и второго растворов соответственно. Составим уравнение:

$$\frac{2mp}{100} + \frac{mq}{100} = \frac{10(2m + m)}{100},$$

которое перепишем в виде:

$$2p + q = 30. \quad (1)$$

Через неделю из каждого килограмма первого и второго растворов испарилось по 200 г воды, то есть доля соли составила $\frac{p}{80}$ и $\frac{q}{80}$ масс первого и второго растворов соответственно.

Пусть второй раз взяли $4m$ и m г первого и второго растворов соответственно. Составим уравнение:

$$\frac{4mp}{80} + \frac{mq}{80} = \frac{10(4m + m)}{100},$$

которое перепишем в виде:

$$4p + q = 40. \quad (2)$$

Решив систему уравнений (1) и (2), получим, что $p = 5$, $q = 20$. Следовательно, первоначально в 100 г первого и второго растворов содержалось 5 и 20 г соли соответственно.

9.57. МГУ, геол. ф., 1966. Проценты содержания спирта в трех растворах образуют геометрическую прогрессию. Если смешать первый, второй и третий растворы в отношении 2 : 3 : 4, то получится раствор, содержащий 32% спирта. Если же смешать их в отношении 3 : 2 : 1, то получится раствор, содержащий 22% спирта. Сколько процентов спирта содержит каждый раствор?

9.58. МГУ, геол. ф., 1966. Из пункта A выехал велосипедист, через 1 ч после него и в том же направлении выехал мотоциклист, а еще через полчаса — автомобиль, причем каждый из них едет с постоянной скоростью. Автомобиль догнал велосипедиста через 15 мин после того, как проехал мимо мотоциклиста, а мотоциклист догнал велосипедиста в 120 км от пункта A . Найти скорости велосипедиста, мотоцикла и автомобиля, если известно, что они образуют арифметическую прогрессию.

Пусть $v, v + d, v + 2d$ км/ч — скорости велосипедиста, мотоциклиста и автомобилиста соответственно ($d \neq 0$), и автомобиль догнал мотоцикл через x ч после своего выезда, а y ч — промежуток времени между моментами обгона велосипедиста сначала автомобилем, а потом мотоциклом. Составим систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} (v + d)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (v + 2d)x, \\ v\left(x + \frac{7}{4}\right) = (v + 2d)\left(x + \frac{1}{4}\right), \\ (v + d)\left(x + y + \frac{3}{4}\right) = 120, \\ v\left(x + y + \frac{7}{4}\right) = 120. \end{array} \right.$$

Для составления системы полезно нарисовать графики движения велосипедиста, мотоциклиста и автомобилиста. Перепишем систему в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}d = dx, \\ \frac{3}{2}v = 2dx + \frac{1}{2}d, \\ vx + vy + \frac{3}{4}d + \frac{3}{4}v + dx + dy = 120, \\ vx + vy + \frac{7}{4}v = 120. \end{array} \right.$$

Из первого уравнения имеем $v = 2dx - d$, подставив это выражение вместо v во второе уравнение и учитывая, что $d \neq 0$, имеем $x = 2$. Тогда $v = 3d$. Подставив 2 вместо x , $3d$ вместо v в третье и четвертое уравнения, получим:

$$\begin{cases} 11d + 4dy = 120, \\ 11\frac{1}{4}d + 3dy = 120, \end{cases}$$

откуда $y = \frac{1}{4}$, $d = 10$, $v = 30$, $v + d = 40$, $v + 2 = 50$. Следовательно, скорости велосипедиста, мотоцикла и автомобиля равны 30, 40, 50 км/ч соответственно.

9.59. МИФИ, 1996. Расстояние между пунктами A и B равно l км. Одновременно из пункта A по направлению к B вышли два пешехода, а из пункта B им навстречу — третий. Первый и третий пешеходы повстречались через 3 ч после начала движения. В тот момент, когда первый пешеход оказался в пункте B , второй пешеход находился в 10 км от этого пункта. Определите скорость второго пешехода, если известно, что скорости пешеходов постоянны, причем скорость второго пешехода больше скорости третьего на 2 км/ч, но меньше скорости первого.

Пусть скорость второго пешехода — x км/ч, скорость первого — y км/ч. Первый пешеход прошел весь путь быстрее второго, поэтому $x < y$. Скорость третьего пешехода $(x - 2)$ км/ч. Так как первый и третий пешеходы встретились через 3 ч, то $3(y + x - 2) = l$. Это первое уравнение системы.

Первый пешеход прошел весь путь за $\frac{l}{y}$ ч, второй пешеход за это время прошел $\frac{lx}{y}$ км, или $(l - 10)$ км, то есть $\frac{lx}{y} = l - 10$ (здесь $l - 10 > 0$). Это второе уравнение системы.

Решим систему уравнений с неизвестными x и y :

$$\begin{cases} 3(y + x - 2) = l, \\ \frac{lx}{y} = l - 10. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы выразим y через x и l :

$$y = \frac{lx}{l - 10}.$$

Полученный результат подставим в первое уравнение системы, получим уравнение: $\frac{3lx}{l - 10} + 3x - 6 = l$, из которого найдем: $x = \frac{(l + 6)(l - 10)}{6(l - 5)}$.

Итак, скорость второго пешехода равна $\frac{(l+6)(l-10)}{6(l-5)}$ км/ч.

9.60. МГУ, хим. ф., 1966. В озеро впадают две реки. Пароход выходит из порта M на первой реке, плывет вниз по течению до озера, затем через озеро (где нет течения) и по второй реке вверх (против течения) до порта N . Затем пароход возвращается обратно. Скорость парохода при отсутствии течения равна v , скорость течения первой реки v_1 , второй реки — v_2 , время движения парохода от M до N равно t , а длина пути от M до N равна S . Время обратного движения от N до M по тому же пути также равно t . Какое расстояние пароход идет по озеру в одном направлении?

9.61. МГУ, экон. ф., 1993. За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно сначала в размере 5% в месяц, затем — $11\frac{1}{9}\%$, потом — $7\frac{1}{7}\%$ и, наконец, 12% в месяц. Известно, что под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на 180%. Определите срок хранения вклада.

Пусть a р. ($a \neq 0$) положили на m месяцев под 5% в месяц. Полученную сумму положили на n месяцев под $\frac{100}{9}\%$ в месяц. Затем — на k месяцев под $\frac{50}{7}\%$ в месяц и на p месяцев под 12% в месяц. За $m + n + k + p$ месяцев вклад a р. обратился в $a \left(1 + \frac{5}{100}\right)^m \left(1 + \frac{100}{900}\right)^n \left(1 + \frac{50}{700}\right)^k \left(1 + \frac{12}{100}\right)^p =$

$= a \left(\frac{21}{20}\right)^m \left(\frac{10}{9}\right)^n \left(\frac{15}{14}\right)^k \left(\frac{28}{25}\right)^p$ р. или по условию задачи в $a \cdot \left(1 + \frac{180}{100}\right) = \frac{14}{5}a$ р.

Составим уравнение:

$$a \left(\frac{21}{20}\right)^m \left(\frac{10}{9}\right)^n \left(\frac{15}{14}\right)^k \left(\frac{28}{25}\right)^p = \frac{14}{5}a.$$

Разделив полученное уравнение на a ($a \neq 0$), перепишем уравнение в виде:

$$\left(\frac{21}{20}\right)^m \left(\frac{10}{9}\right)^n \left(\frac{15}{14}\right)^k \left(\frac{28}{25}\right)^p = \frac{14}{5}.$$

Умножив его на $20^m \cdot 9^n \cdot 14^k \cdot 25^p \cdot 5$, получим равносильное ему уравнение:

$$5 \cdot 21^m \cdot 10^n \cdot 15^k \cdot 28^p = 20^m \cdot 9^n \cdot 14^{k+1} \cdot 5^{2p}.$$

Разложив обе части равенства на простые множители, получим равенство:

$$2^{n+2p} \cdot 3^{m+k} \cdot 5^{n+k+1} \cdot 7^{m+p} = 2^{2m+k+1} \cdot 3^{2n} \cdot 5^{m+2p} \cdot 7^{k+1}.$$

Из единственности разложения натурального числа на простые множители (основная теорема арифметики) следует, что

$$n + 2p = 2m + k + 1,$$

$$m + k = 2n,$$

$$n + k + 1 = m + 2p,$$

$$m + p = k + 1.$$

Решив систему четырех уравнений, получим, что $m = 2$, $n = 3$, $k = 4$, $p = 3$. Так как $m + n + k + p = 12$, то деньги были вложены в банк на 12 месяцев.

9.62. МГУ, экон. ф., 1993. Техническая реконструкция предприятия была проведена в четыре этапа. Каждый из этапов продолжался целое число месяцев и сопровождался падением производства. Ежемесячное падение производства составило на первом этапе 4%, на втором — $6\frac{2}{3}\%$, на треть-

ем — $6\frac{1}{4}\%$ и на четвертом — $14\frac{2}{7}\%$ в месяц. По окончании реконструкции первоначальный объем производства на предприятии сократился на 37%. Определите продолжительность периода реконструкции.

9.63. МГУ, ФНМ, 1999. Из города в деревню одновременно отправились бегун Б и пешеход Π_1 , а в тот же момент из деревни в город вышел пешеход Π_2 . Скорости пешеходов были равны. Встретившись, Б и Π_2 некоторое время стояли на месте, а затем направились в деревню. При этом Б побежал с прежней скоростью, равной 12 км/ч, а Π_2 уменьшил свою скорость в полтора раза. В результате в деревню сначала прибежал Б, а затем через промежуток времени, в два раза больший длительности встречи Б и Π_2 , одновременно пришли оба пешехода. Найдите скорость пешехода Π_1 .

Пусть Π_2 и Б двигались до встречи x ч, скорости Π_1 и Π_2 равны v км/ч. Скорость Π_2 после остановки уменьшилась в 1,5 раза, следова-

тельно, на обратный путь Π_2 затратил в 1,5 раза больше времени, то есть 1,5х ч. Пусть время остановки равно у ч, тогда Б прибыл в деревню на 2у ч раньше Π_1 .

Расстояние от города до деревни вычислим тремя способами:

$$(12 + v)x = v(2,5x + y) = 12(2,5x - 2y).$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} (12 + v)x = v(2,5x + y), \\ (12 + v)x = 12(2,5x - 2y). \end{cases}$$

Выразив из каждого уравнения системы отношение $\frac{y}{x}$, приравняем полученные результаты:

$$\frac{12 - 1,5v}{v} = \frac{18 - v}{24}.$$

Решив полученное уравнение, найдем два его корня: $v_1 = 6$ и $v_2 = 48$. Так как скорость пешехода меньше скорости бегуна, то она равна 6 км/ч.

9.64. МГУ, ФНМ, 1999. Из города в деревню одновременно выехали велосипедист В и мотоциклист M_1 , а в тот же момент из деревни в город выехал второй мотоциклист M_2 . Скорости M_1 и M_2 были равны 30 км/ч. Встретившись, В и M_2 некоторое время стояли на месте, а затем оба направились в деревню. При этом В поехал с прежней скоростью, а M_2 увеличил свою скорость в три раза. В результате M_1 и M_2 прибыли в деревню одновременно, а через промежуток времени, в десять раз больший длительности встречи В и M_2 , в деревню приехал В. Найдите скорость велосипедиста В.

9.65. МГУ, ВМК, 2000. Имеется некоторое количество раствора соли в воде. После испарения из раствора двух литров воды концентрация соли возросла на 20%, а после разведения получившегося раствора десятью литрами воды концентрация соли стала в 2 раза меньше первоначальной. Найдите концентрацию соли в исходном растворе, считая массу 1 л воды равной 1 кг.

Пусть масса первоначального раствора х кг, а концентрация соли в воде р % ($p > 0$). После испарения двух литров воды масса раствора стала равна $(x - 2)$ кг, а концентрация соли в воде $(p + 20)$ %. Так как масса соли при этом не изменилась, то справедливо равенство:

$$\frac{px}{100} = \frac{(p+20)(x-2)}{100}.$$

После разведения получившегося раствора десятью литрами воды концентрация соли в воде стала в 2 раза меньше первоначальной и равна $\frac{p}{2}\%$. Так как масса соли и на этот раз не изменилась, то справедливо равенство:

$$\frac{px}{100} = \frac{\frac{p}{2}(x+8)}{100}.$$

Решив систему уравнений, получим: $x_1 = 8, p_1 = 60$ и $x_2 = 2, p_2 = 0$. Так как $p > 0$, то концентрация соли в исходном растворе равна 60%.

9.66. МГУ, ВМиК, 2000. Имеется некоторое количество раствора соли в воде. После добавления в раствор трех литров воды концентрация соли уменьшилась на 15%, а после испарения из получившегося раствора пяти литров воды концентрация соли стала в 3 раза больше первоначальной. Найдите концентрацию соли в исходном растворе, считая массу 1 л воды равной 1 кг.

9.67. МТУСИ, 2000. Стива Облонский и Васенька Весловский поехали на охоту. Спустя некоторое время вслед за ними отправился Константин Дмитриевич Левин. Через час после своего выезда Левин находился на равном расстоянии от Облонского и Васеньки, а еще через 1,5 ч, обогнав обоих, Левин был в 8 раз дальше от Стивы, чем от Васеньки. Найдите, через сколько времени после выезда Облонского и Весловского выехал Левин, если он догнал Васеньку через 3 ч после выезда своих гостей.

Изобразим графики движения: Облонского — OS ; Весловского — OV ; Левина — KL (рис. 13). Пусть Константин Дмитриевич отправился через x ч после своих гостей ($OK = x$). Через час ($KM = 1$) Левин находился на равном расстоянии от Облонского и Васеньки ($AB = BC = z$). Через 3 ч после выезда гостей Левин обогнал Васеньку ($MP = OP - OM = 2 - x$), а еще через 1,5 ч, обогнав обоих, Левин был в 8 раз дальше от Стивы, чем от Васеньки ($PN = MN - MP = 1,5 - (2 - x) = x - 0,5, LV = y, VS = 7y$).

10. ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ В НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЛАХ

Для решения следующих задач будут использоваться уравнения с двумя неизвестными, принимающими натуральные значения. Эти уравнения часто называют диофантовыми в честь Диофанта (III в.). Начнем с задач, приводящих к уравнениям первой степени.

10.1. Определите, можно ли отпустить со склада 17 кг гвоздей ящиками по 3 и 5 кг, не нарушая их упаковки?

Обозначим через x количество ящиков по 3 кг, через y количество ящиков по 5 кг. Так как 17 не делится ни на 3, ни на 5, то выдать 17 кг гвоздей не удастся ящиками одного вида, поэтому решение задачи сводится к поиску натуральных решений уравнения с двумя неизвестными: $3x + 5y = 17$.

Несложным перебором по y ($y = 1, 2, 3$) найдем единственное решение $(x; y)$ этого уравнения в натуральных числах: $(4; 1)$. Таким образом, со склада можно отпустить 4 ящика по 3 кг и 1 ящик по 5 кг — всего 17 кг гвоздей, не нарушая их упаковки.

Решим в натуральных числах другое уравнение:

$$3x + 5y = 60. \quad (1)$$

Чтобы не перебирать все значения y от 1 до 11, заметим, что числа 3 и 60 делятся на 3, следовательно, $5y$ делится на 3. Но 5 не делится на 3, поэтому $5y$ делится на 3 тогда и только тогда, когда y делится на 3. Обозначим $y = 3y_1$, где y_1 — натуральное число. Подставим $3y_1$ вместо y в уравнение (1) и разделив полученное уравнение на 3, имеем:

$$x + 5y_1 = 20. \quad (2)$$

Рассуждая аналогично, устанавливаем, что x делится на 5. Обозначим $x = 5x_1$, где x_1 — натуральное число. Подставим $5x_1$ вместо x в уравнение (2) и, разделив полученное уравнение на 5, имеем: $x_1 + y_1 = 4$.

Это уравнение имеет три очевидных решения $(x_1; y_1)$ в натуральных числах: $(1; 3)$, $(2; 2)$, $(3; 1)$. Теперь, пользуясь формулами $x = 5x_1$ и $y = 3y_1$,

найдем решения $(x; y)$ уравнения (1) в натуральных числах: $(5; 9)$, $(10; 6)$, $(15; 3)$.

Использованный здесь метод решения диофантового уравнения в натуральных числах будем называть методом понижения коэффициентов.

10.2. Купили несколько мороженных по 35 р. и пирожных по 27 р. на 480 р. Определите, сколько мороженных и сколько пирожных купили.

Пусть купили m мороженных и p пирожных (m и p — натуральные числа). Тогда верно равенство $35m + 27p = 480$.

Чтобы сократить процесс поиска решений этого уравнения, заметим, что для наименьшего значения $m = 1$ корень уравнения $p = 16,4\dots$ — число не натуральное. Если увеличивать значения m в равенстве $27p = 480 - 35m$, то значения p будут уменьшаться, то есть $p < 17$.

Числа 35 и 480 делятся на 5, а число 27 не делится на 5, значит, равенство возможно только для тех p , которые делятся на 5. То есть натуральное число p меньше 17 и делится на 5. Для $p = 5, 10, 15$ из равенства $m = \frac{480 - 27p}{35}$ найдем соответствующие значения $m = 9, 8, \dots, 6, 2, 1, \dots$

Условию « m — натуральное число» удовлетворяет лишь $m = 6$, тогда $p = 10$.

Итак, купили 6 мороженных и 10 пирожных.

Решите ту же задачу методом понижения коэффициентов.

10.3. Купили 7 одинаковых блокнотов и 6 одинаковых книг на 378 р. Определите цену 1 блокнота (она больше 20 р.) и цену 1 книги (она больше 30 р.), если известно, что цены выражаются натуральными числами.

10.4. *Задача Леонардо Пизанского (Фибоначчи) (1180–1240).* Некто купил 30 птиц за 30 монет, из числа этих птиц за каждых трех воробьев заплачена 1 монета, за каждых двух горлиц — также 1 монета и, наконец, за каждого голубя — по 2 монеты. Сколько было птиц каждой породы?

Пусть купили x воробьев, y горлиц, тогда голубей купили $(30 - x - y)$. Здесь x и y — натуральные числа. Составим уравнение:

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + 2 \cdot (30 - x - y) = 30,$$

которое перепишем в виде:

$$10x + 9y = 180 \quad (3)$$

Применив метод понижения коэффициентов, перепишем уравнение (3) в виде:

$$x_1 + y_1 = 2,$$

где $x = 9x_1$, $y = 10y_1$, x_1 и y_1 — натуральные числа.

Это уравнение имеет единственное решение в натуральных числах: $x_1 = 1$; $y_1 = 1$. Теперь по формулам $x = 9x_1$ и $y = 10y_1$ найдем единственное решение уравнения (3) в натуральных числах: $x = 9$, $y = 10$. Тогда $30 - x - y = 11$.

Итак, на 30 монет купили 9 воробьев, 10 горлиц и 11 голубей.

Для решения задачи 10.4 с помощью компьютера составим программу с двумя циклами. Для упрощения набора программы будем проверять выполнение равенства (3). С помощью этого равенства проще определить границы значений x и y .

При наименьшем значении $y = 1$ неизвестное x принимает наибольшее значение $(180 - 9) : 10 = 17,1$. Так как число x натуральное, то $x \leq 17$. При наименьшем значении $x = 1$ неизвестное y принимает наибольшее значение $(180 - 10) : 9 = 18,88....$ Так как число y натуральное, то $y \leq 18$.

```
1 ПРОГРАММА 10.4
5 N=0
10 FOR X=1 TO 17
20 FOR Y=1 TO 18
30 IF 10*X+9*Y=180 THEN PRINT "вор. -"; X; "гор. -"; Y;
"гол. -"; 30-X-Y: N=N+1
40 NEXT Y
50 NEXT X
60 PRINT "Число решений задачи:"; N
70 END
```

Программа подтверждает единственность найденного ранее решения задачи 10.4 и дает тот же ответ.

Решите следующие задачи, используя метод понижения коэффициентов.

10.5. Купили 40 птиц за 40 монет. За каждых трех воробьев платили 1 монету, за каждых двух горлиц платили 1 монету, а за каждого голубя 2 монеты. Сколько было куплено птиц каждой породы?

10.6. Задача Леонардо Пизанского (Фибоначчи) (1180–1240). 30 птиц стоят 30 монет, куропатки стоят по 3 монеты, голуби — по 2 и

пара воробьев — по монете. Спрашивается, сколько куплено птиц каждого вида?

10.7. Задача Джон Цюцзяня (Китай, V в.). 1 петух стоит 5 цяней (денежных единиц), 1 курица стоит 3 цяня, 3 цыпленка стоят 1 цянь. Всего на 100 цяней купили 100 птиц. Спрашивается, сколько было в отдельности петухов, кур, цыплят?

10.8. Старинная задача. Двенадцать человек несут 12 хлебов; каждый мужчина несет по 2 хлеба, женщина по половине хлеба, ребенок по четверти хлеба. Сколько было мужчин, женщин и детей?

Рассмотрим задачи, которые в старые времена называли задачами «на девичье правило».

10.9. Задача Адама Ризе (XVI в.). 26 персон издержали вместе 88 марок, причем мужчины издержали по 6 марок, женщины по 4, девушки по 2. Сколько было мужчин, женщин и девушек?

Пусть было m мужчин, g женщин, тогда девушек было $26 - m - g$. Составим уравнение: $6m + 4g + 2(26 - m - g) = 88$, которое перепишем в виде

$$2m + g = 18.$$

Это уравнение имеет 8 решений ($m; g$) в натуральных числах: (1; 16), (2; 14), (3; 12), (4; 10), (5; 8), (6; 6), (7; 4), (8; 2). Следовательно, задача имеет 8 решений: мужчин, женщин и девушек было соответственно 1, 16, 9, или 2, 14, 10, или 3, 12, 11, или 4, 10, 12, или 5, 8, 13, или 6, 6, 14, или 7, 4, 15, или 8, 2, 16.

Одна из первых задач рассматриваемого типа содержится в сборнике задач Алькуина (VIII в.).

10.10. Задача Алькуина. 100 шеффелей (денежных единиц) разделили между мужчинами, женщинами и детьми и дали при этом мужчинам по 3 шеффеля, женщинам — по 2 и детям — по $\frac{1}{2}$ шеффеля. Сколько было мужчин, женщин и детей?

У Алькуина приведено одно решение: 11, 15, 74. Как видно, условие «100 персон» могло быть пропущено в тексте задачи, либо просто имелось в виду. Задачу с этим условием рассмотрим позже, а пока составим программу для подсчета числа всех решений задачи Алькуина.

Пусть было m мужчин, g женщин и d детей. Составим уравнение: $3m + 2g + \frac{1}{2}d = 100$, которое перепишем в виде

$$6m + 4g + d = 200,$$

здесь $2 \leq d \leq 190$, $1 \leq m \leq 32$, $1 \leq g \leq 48$.

```

1 ПРОГРАММА 10.10
5 N=0
10 FOR M=1 TO 32
20 FOR G=1 TO 48
30 FOR D=2 TO 190
40 IF 6*M+4*G+D=200 THEN PRINT "М. -"; M; "Ж. -"; G; "Д. -";
D: N=N+1
50 NEXT D
60 NEXT G
70 NEXT M
80 PRINT "Число решений задачи:"; N
90 END

```

После запуска программы машина «задумается», по экрану побегут строчки:

М. - 1 Ж. - 1 Д. - 190

М. - 1 Ж. - 2 Д. - 186

Наконец, появится запись:

Число решений задачи: 784

Это означает, что задача Алькуина имеет 784 решения.

Изменим условие задачи Алькуина, введя условие «100 персон». Это уменьшит число решений.

10.11. 100 шеффелей разделили между 100 мужчинами, женщинами и детьми и дали при этом мужчинам по 3 шеффеля, женщинам по 2 и детям по $\frac{1}{2}$ шеффеля. Сколько было мужчин, женщин и детей?

10.12. Какое наименьшее число персон должно быть в задаче **10.10**, чтобы она имела решение? Сколько решений имеет задача в этом случае?

Составим программу для решения этой задачи. Пусть было x персон, среди которых было m мужчин, g женщин, $(x - m - g)$ детей. Составим уравнение и упростим его:

$$3m + 2g + \frac{1}{2}(x - m - g) = 100,$$

$$5m + 3g + x = 200.$$

Так как $x = 3$ не дает решения задачи, то наименьшее x , для которого задача Алькуина имеет решение, будем искать с помощью цикла по x от 4 до 40. При этом m и g «пробегают» значения от 1 до 38 и от 1 до 63 соответственно.

```

1 ПРОГРАММА 10.12
10 FOR X=4 TO 40
20 FOR M=1 TO 38
30 FOR G=1 TO 63
40 D=X-M-G: S=5*M+3*G+X
50 IF S=200 AND D>0 THEN PRINT "м. -"; M; "ж. -"; G; "д. -";
D: N=N+1
60 NEXT G
70 NEXT M
80 PRINT "Для числа персон"; X; "число решений"; N
90 IF N>0 GOTO 110
100 NEXT X
110 PRINT "Задача имеет решение при наименьшем числе
персон"; X
120 END

```

В строке 40 находим число детей d и число шеффелей s . В строке 50 при одновременном выполнении условий $s = 200$ и $d > 0$ дается команда печатать найденное решение. Для каждого значения x программа печатает результат поиска решений (строка 80). По окончании каждого цикла (по m) программа печатает:

Для числа персон 4 число решений 0
Для числа персон 5 число решений 0

После того как при некотором значении x будет найдено одно или несколько решений, переменная n примет значение, равное числу найденных решений, и программа выйдет из цикла по x . Появятся три последние строки:

м. — 31 ж. — 3 д. — 2
Для числа персон 36 число решений 1
Задача имеет решение при наименьшем числе персон 36

10.13. Из «Арифметики» Л.Ф. Магницкого. Купил некто на 80 алтын гусей, утят и чирков. Гуся покупал по 2 алтына, утку по 1 алтыну, чирка же по 3 деньга, а всех куплено 80 птиц. Спрашивается, сколько каких птиц купил?

У Л.Ф. Магницкого приведено лишь одно решение задачи: 15 гусей, 35 уток, 30 чирков, однако задача имеет больше решений. Найдите число решений задачи.

Кроме задач рассмотренного типа в «Арифметике» Л.Ф. Магницкого есть и другие задачи на неопределенные (диофантовы) уравнения, для которых автор указывает только одно решение.

10.14. Некий торговец имел четыре сорта вина разной цены: по 10 алтын, по 8 алтын, по 6 алтын и по 5 алтын и 2 деньга за галенок¹. И хочет из тех вин налить бочку в 80 галенков, чтобы галенок был ценою 6 алтын и 4 деньга. Спрашивается, сколько галенков каждого вида нужно взять для наполнения той бочки?

Л.Ф. Магницкий переводит все цены в копейки (четыре сорта вина по 30, 24, 18 и 16 к., смесь — по 20 к.) и находит одно из 268 решений задачи (рис. 14).

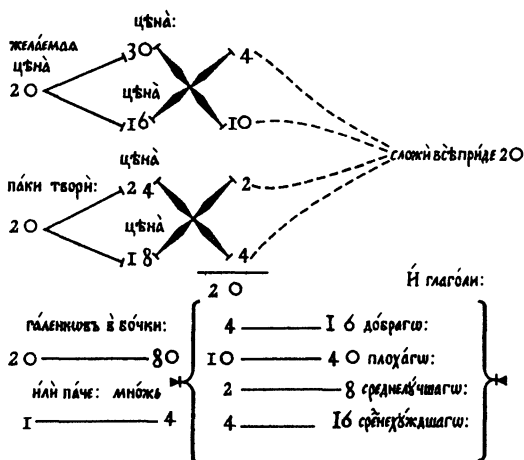


Рис. 14.

¹ Галенок — мера жидкости, например, вина, галенок — порция. Происходит от англ. или франц. *gallon* (галлон).

10.15. Алеша на 3 года старше Бори и на 6 лет старше Вовы. Произведение возрастов Гриши и Бори на 20 больше произведения возрастов Алеши и Вовы. Сколько лет Грише?

Пусть Алеше a лет ($a > 6$), а Грише — g лет. Тогда Боре $(a - 3)$ года, Вове $(a - 6)$ лет. Составим уравнение: $a(a - 6) + 20 = g(a - 3)$.

Выразим из этого уравнения g через a и выделим целую часть дроби:

$$g = \frac{a^2 - 6a + 20}{a - 3} = a - 3 + \frac{11}{a - 3}.$$

Очевидно, что число g — натуральное только тогда, когда $a = 4$ или $a = 14$. Так как $a > 6$, то $a = 14$, тогда $g = 12$. Значит, Грише 12 лет.

10.16. Задача Л. Эйлера. Некий чиновник купил лошадей и быков за 1770 талеров. За каждую лошадь он уплатил по 31 талеру, а за каждого быка — по 21 талеру. Сколько лошадей и быков купил чиновник?

Пусть чиновник купил x лошадей и y быков. Тогда справедливо равенство:

$$31x + 21y = 1770. \quad (4)$$

По смыслу задачи x и y — натуральные числа. Так как 21 и 1770 делятся на 3, то $31x$ делится на 3 и x делится на 3. Пусть $x = 3x_1$, где x_1 — натуральное число, тогда справедливо равенство:

$$31x_1 + 7y = 590,$$

откуда $x_1 = \frac{590 - 7y}{31}$.

Преобразуем полученное выражение:

$$x_1 = \frac{590 - 7y}{31} = 19 + \frac{1 - 7y}{31} = 19 - \frac{7y - 1}{31}.$$

Очевидно, что число x_1 будет натуральным, если $7y - 1$ делится на 31. Наименьшее натуральное y , при котором это произойдет, равно 9. При этом $x_1 = 17$, $x = 51$. Первое решение уравнения (4) найдено: (51; 9). Чтобы не заниматься долгим перебором значений y , заметим, что следующие целые x_1 будут получаться от увеличения $y = 9$ на число, кратное 31. В самом деле, увеличим $y = 9$ на k :

$$x_1 = 19 - \frac{7 \cdot (9 + k) - 1}{31} = 19 - \frac{62 + 7k}{31} = 17 - \frac{7k}{31}.$$

Теперь видно, что x_1 будет целым, если $7k$ делится на 31, то есть если k делится на 31.

При $y = 9 + 31 = 40$ имеем: $x_1 = 10$, $x = 30$.

При $y = 40 + 31 = 71$ имеем: $x_1 = 3$, $x = 9$.

При следующих значениях y значения x_1 отрицательны. Таким образом, уравнение (4) имеет 3 решения в натуральных числах: (51; 9), (30; 40), (9; 71). Чиновник купил лошадей и быков: 51 и 9, или 30 и 40, или 9 и 71 соответственно.

Здесь мы применили еще один прием поиска натуральных решений уравнения с двумя неизвестными — выделение целой части выражения, принимающего натуральное значение, и поиск значения неизвестного, при котором получившаяся дробь является целым числом.

Рассмотрим две задачи из заочного тура Соросовской олимпиады (1998).

10.17. Иван Иванович пришел в магазин, имея 20 р. В магазине продавали веники по 1 р. 17 к. и тазики по 1 р. 66 к. (других товаров в магазине уже не осталось). Сколько веников и сколько тазиков ему нужно купить, чтобы потратить как можно больше денег?

Попробуем потратить все 2000 к. Если решение для этой суммы будет найдено, то уменьшать сумму не потребуется.

Пусть Иван Иванович купил x веников и y тазиков. Тогда верно равенство: $117x + 166y = 2000$.

Так как 166 и 2000 делятся на 2, то $117x$ делится на 2 и x делится на 2. Пусть $x = 2x_1$, где x_1 — натуральное число, тогда справедливо равенство:

$$117x_1 + 83y = 1000,$$
$$\text{откуда } y = \frac{1000 - 117x_1}{83} = 12 - x_1 - \frac{34x_1 - 4}{83}.$$

Здесь $x_1 \leq 8$. Наименьшее натуральное число x_1 , при котором число $34x_1 - 4$ делится на 83, равно 5. При этом $x = 2x_1 = 10$, $y = 5$. Следующие значения x_1 , при которых число $34x_1 - 4$ делится на 83, не меньше 88, но $x_1 \leq 8$. Поэтому других решений в натуральных числах это уравнение не имеет.

Итак, Иван Иванович должен купить 10 веников и 5 тазиков.

10.18. Число x таково, что 15% от него и 33% от него — целые положительные числа. Каково наименьшее число x (не обязательно целое!) с таким свойством?

10.19. ЕГЭ, 2010. Группу школьников нужно перевезти из летнего лагеря одним из двух способов: либо двумя автобусами типа А за несколько рейсов, либо тремя автобусами типа В за несколько рейсов,

причем в этом случае число рейсов каждого автобуса типа В будет на один меньше, чем рейсов каждого автобуса типа А. В каждом из случаев автобусы заполняются полностью. Какое максимальное количество школьников можно перевезти при указанных условиях, если в автобус типа В входит на 7 человек меньше, чем в автобус типа А?

Пусть три автобуса типа В совершат x рейсов, перевозя по y человек или два автобуса типа А совершат $(x + 1)$ рейсов, перевозя по $(y + 7)$ человек. Так как в обоих случаях будет перевезено одно и то же число школьников, то

$$3xy = 2(x + 1)(y + 7),$$

откуда

$$(x - 2)y = 14x + 14.$$

Так как при $x = 2$ последнее равенство неверно, то $x \neq 2$ и $y = \frac{14x + 14}{x - 2} = 14 + \frac{42}{x - 2}$. При $x = 1$ число y отрицательное, поэтому число $(x - 2)$ является одним из натуральных делителей числа 42 (1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42). Для каждого из делителей числа 42 найдем число детей $3xy$ и среди них наибольшее значение $3xy$.

Если $x - 2 = 1$, то $x = 3$, $y = 56$, $3xy = 504$;

Если $x - 2 = 2$, то $x = 4$, $y = 35$, $3xy = 420$;

Если $x - 2 = 3$, то $x = 5$, $y = 28$, $3xy = 420$;

Если $x - 2 = 6$, то $x = 8$, $y = 21$, $3xy = 504$;

Если $x - 2 = 7$, то $x = 9$, $y = 20$, $3xy = 540$;

Если $x - 2 = 14$, то $x = 16$, $y = 17$, $3xy = 816$;

Если $x - 2 = 21$, то $x = 23$, $y = 16$, $3xy = 1104$;

Если $x - 2 = 42$, то $x = 44$, $y = 15$, $3xy = 1980$.

Итак, наибольшее число школьников, которое можно перевезти, равно 1980.

10.20. МГУ, биол. ф., 1996. В двух коробках лежали карандаши: в первой — красные, во второй — синие, причем красных было меньше, чем синих. Сначала 40% карандашей из первой коробки переложили во вторую. Затем 20% карандашей, оказавшихся во второй коробке, переложили в первую, при этом половину из перекладываемых карандашей составляли синие. После этого красных карандашей в первой коробке оказалось на 26 больше, чем во второй, а общее количество карандашей

во второй коробке увеличилось по сравнению с первоначальным более, чем на 5%. Найдите общее количество синих карандашей.

10.21. НГУ, 1996. Купил Роман раков: вчера мелких — по цене 51 к. за штуку, а сегодня — по 99 к., но очень крупных. Всего на раков он израсходовал 25 р. 20 к., из них переплаты из-за отсутствия сдачи в сумме составили от 16 до 20 к. Определите, сколько раков купил Роман вчера и сколько сегодня.

10.22. У двух братьев было стадо баранов. Они продали его и за каждого барана получили столько рублей, сколько голов было в стаде. Выручку стали делить пополам. Старшему брату — десятку, младшему брату — десятку, старшему — десятку, младшему — десятку. И так несколько раз. Потом старший брат взял свою десятку, а младшему нескольких рублей не хватило до десяти. Тогда старший вынул из кармана нож и отдал брату в компенсацию за недостающую сумму. Сколько стоил нож?

Вырученная сумма — натуральное число (квадрат числа баранов). Число целых десятков нечетное, так как они закончились на старшем брате.

Тогда вырученную сумму можно записать так: $10(2k + 1) + p = 20k + 10 + p$, где $2k + 1$ — число целых десятков, а p — последняя сумма, полученная младшим братом. Откуда видно, что квадрат натурального числа при делении на 20 имеет остаток $10 + p$.

Квадраты чисел 0, 1, 2, ..., 9 при делении на 20 дают остатки: 0, 1, 4, 9, 16, 5. Любое многозначное натуральное число можно записать в виде $10a + b$, где b — цифра единиц (однозначное число), а его квадрат — в виде $100a^2 + 20ab + b^2$. Так как два первых слагаемых суммы делятся на 20 без остатка, то остаток от деления на 20 квадрата натурального числа равен остатку от деления на 20 квадрата его цифры единиц, то есть одному из чисел: 0, 1, 4, 9, 16, 5.

Целая десятка входит в единственный остаток 16. Значит, младшему брату досталось 6 р., а излишек $10 - 6 = 4$ (р.) старший брат поделил поровну, оставив себе 2 р. и отдав брату нож, который стоил 2 р.

В рассмотренных выше задачах основным приемом решения является перебор всех значений неизвестных и отбор тех из них, которые обращают уравнение с двумя неизвестными в верное равенство. Часто нам удавалось сократить перебор, используя делимость. Рассмотрим задачи, при решении которых использование делимости позволяет

решить и такие задачи, для которых не составлено уравнение, но известно, что некоторое выражение с неизвестным имеет своим значением натуральное число.

10.23. МГУ, хим. ф., 1998. Определите число студентов, сдававших экзамен, если известно, что шестая часть из них получили оценку «удовлетворительно», 56% получили оценку «хорошо», а 14 человек получили оценку «отлично», причем эти отличники составляют более 4%, но менее 5% от искомого числа студентов.

Пусть было x студентов, сдававших экзамен, тогда для 14 отличников должно выполняться неравенство:

$$0,04x < 14 < 0,05x,$$

откуда следует, что

$$280 < x < 350.$$

Так как количества студентов, получивших оценки «удовлетворительно» и «хорошо», выражаются натуральными числами, то числа $\frac{1}{6}x$ и

$0,56x = \frac{14}{25}x$ — натуральные, то есть число x делится и на 6, и на 25. А так как числа 6 и 25 — взаимно простые, то число x делится и на их произведение 150. Из чисел, удовлетворяющих неравенству, только одно число делится на 150 — это число 300. Итак, было 300 студентов, сдававших экзамен.

10.24. МГУ, хим. ф., 1998. Определите число студентов, сдававших экзамен, если известно, что третья часть из них получили оценку «удовлетворительно», 44% получили оценку «хорошо», а пять человек получили оценку «отлично», причем эти отличники составляют более 3%, но менее 4% от искомого числа студентов.

10.25. АФСБ, 2002. В урне лежали белые и черные шары, их общее число не превышало 55. Число белых шаров относилось к числу черных как 3 : 2. После того как из урны вынули 4 шара, оказалось, что отношение белых и черных шаров стало 4 : 3. Сколько шаров лежало в урне?

Пусть в урне было $3k$ белых и $2k$ черных шаров, всего $5k$ шаров, где k — натуральное число. Так как $5k \leq 55$, то $k \leq 11$. После того как из урны вынули 4 шара, оказалось, что отношение белых и черных шаров стало 4 : 3. Это возможно лишь при выполнении одного из условий:

$$\frac{3k-4}{2k} = \frac{4}{3}, \text{ или } \frac{3k-3}{2k-1} = \frac{4}{3}, \text{ или } \frac{3k-2}{2k-2} = \frac{4}{3},$$

$$\text{или } \frac{3k-1}{2k-3} = \frac{4}{3}, \text{ или } \frac{3k}{2k-4} = \frac{4}{3}.$$

Условиям « k — натуральное число» и $k \leq 11$ удовлетворяет лишь корень второго уравнения $k = 5$. Следовательно, задача имеет единственное решение: в урне лежало 25 шаров.

10.26. АФСБ, 2002. В стопке книг было не более 39 штук. Известно, что четверть книг в этой стопке были учебниками по математике. Если убрать пять верхних книг, то седьмая часть оставшихся книг будут учебниками по математике. Сколько книг было в стопке?

10.27. МГУ, мех.-мат., 2000. Два друга, Ваня и Петя, ходили за грибами. Встретившись перед возвращением домой, они обнаружили, что Ваня нашел 35 грибов, среди которых было несколько подосиновиков, а Петя грибов не нашел. Ваня взял себе все белые грибы, а остальные отдал Пете. Петя, обнаружив среди них червивый подберезовик, выкинул его. Сколько было найдено подосиновиков, если доля белых в найденных Ваней грибах оказалась равна доле подосиновиков в принесенных Петей домой грибах?

Пусть Ваня взял себе b белых грибов. Тогда, выбросив один гриб из оставшихся, Петя взял себе $(34 - b)$ грибов, среди которых было p подосиновиков. Составим уравнение:

$$\frac{b}{35} = \frac{p}{34 - b},$$

из которого следует, что $p = \frac{b(34 - b)}{35}$. Сумма натуральных чисел b и

$34 - b$ равна 34, а произведение делится на 7. Выпишем все такие пары натуральных чисел, одно из которых делится на 7, а сумма равна 34: (7; 27), (14; 20), (21; 13), (28; 6). Произведение чисел в паре делится на 35 лишь во втором случае. Таким образом, $b = 14$ или $b = 20$. В любом из этих случаев было 8 подосиновиков.

10.28. МГУ, мех.-мат., 2000. Два друга, Коля и Толя, ходили за грибами. Встретившись перед возвращением домой, они обнаружили, что Толя нашел 21 гриб, среди которых было несколько подберезовиков, а Коля грибов не нашел. Толя взял себе все найденные им подосиновики, а остальные грибы отдал Коле. Коля, обнаружив среди них

червивый белый гриб, выкинул его. Сколько было найдено подберезовиков, если доля подосиновиков в найденных Толей грибах оказалась равна доле подберезовиков в принесенных Колей домой грибах?

10.29. МИФИ, 1996. Иван Петрович приобрел в начале года k акций банка «Надежда», часть из которых — простые, а другая часть — привилегированные. За год доход по одной простой акции составил 16 условных денежных единиц, а доход по одной привилегированной акции — 21 условную денежную единицу. Сколько привилегированных акций купил Иван Петрович, если доход за год по купленным акциям составил 269 условных денежных единиц?

Пусть Иван Петрович приобрел в начале года x привилегированных акций, тогда простых акций он купил $(k - x)$ штук. Доход за год по всем акциям составил $21x + 16(k - x)$, или 269 условных денежных единиц. Составим уравнение:

$$21x + 16(k - x) = 269,$$

единственный корень которого есть $x = \frac{269 - 16k}{5}$.

Итак, Иван Петрович купил $\frac{269 - 16k}{5}$ привилегированных акций.

Задача почти решена. Ответ выражен через k , значение которого в условии задачи не дано. Заметим, что количество акций — число натуральное. Оно больше $\frac{269}{21}$, но меньше $\frac{269}{16}$, так как первая дробь дает наименьшее число акций (если все акции привилегированные), а вторая — их наибольшее число (если все акции простые), то есть $13 \leq k \leq 16$. В этом промежутке только при $k = 14$ число $\frac{269 - 16k}{5}$ является натуральным. Итак, Иван Петрович купил $\frac{269 - 16k}{5} = \frac{269 - 16 \cdot 14}{5} = 9$ привилегированных акций.

10.30. Пастух заметил, что произведение числа баранов на число его баранов, уменьшенное на единицу, на 15 больше, чем произведение его собственного возраста на число его баранов, уменьшенное на 2. Сколько лет пастуху?

Рассмотрим решение этой задачи из книги Ж.-К. Байифа «Логические задачи», («Мир», 1983).

«Пусть n — число баранов и a — возраст пастуха, тогда

$$n(n-1) = 15 + a(n-2),$$

или

$$n^2 - (a+1)n + 2a - 15 = 0.$$

Так как n — целое число, то дискриминант этого квадратного уравнения с неизвестным n должен равняться квадрату некоего целого числа; обозначим это число через b . Тогда

$$(a+1)^2 - 4(2a-15) = b^2, \\ a^2 - 6a + 61 - b^2 = 0.$$

Но a — тоже целое число; поэтому дискриминант последнего квадратного уравнения с неизвестным a также равняется квадрату целого числа; обозначим это число через c . Тогда

$$9 - 61 + b^2 = c^2$$

или

$$b^2 - c^2 = 52, \text{ т.е. } (b+c)(b-c) = 52 = 2 \cdot 2 \cdot 13.$$

Единственное решение этого последнего уравнения в целых числах таково: $b = 14, c = 12$. Итак, пастуху 15 лет».

Найдите решение задачи **10.30**, основанное на выделении целой части дроби.

10.31. Саша сказал: «Моему младшему брату больше семи лет, а сумма квадратов наших возрастов в 20 раз больше моего возраста». Сколько лет Саше?

Пусть Саше x лет, а его младшему брату — y лет (x и y — натуральные числа и $7 < y < x$), тогда

$$x^2 + y^2 = 20x, \\ x^2 - 20x + y^2 = 0.$$

Решим это уравнение относительно x :

$$x_{1,2} = 10 \pm \sqrt{100 - y^2}.$$

Так как x — натуральное число, то $(100 - y^2)$ — точный квадрат. При условии $y > 7$ это возможно лишь при $y = 8$. Тогда $x_1 = 4, x_2 = 16$. Но $x > y$, значит, $x = 16$. Итак, Саше 16 лет.

10.32. Вася возвел число мальчиков и число девочек нашего класса в квадрат. Сумма полученных чисел оказалась в 25 раз больше числа мальчиков. Сколько мальчиков в нашем классе, если девочек больше 10, а мальчиков больше, чем девочек?

10.33. МГУ, мех.-мат. ф., 1992. Мастер делает за 1 ч целое число деталей, большее 5, а ученик — на 2 детали меньше. Один мастер выполняет заказ за целое число часов, а два ученика вместе — на 1 ч быстрее. Из какого количества деталей состоит заказ?

10.34. МГУ, мех.-мат. ф., 1992. Один рабочий на новом станке производит за 1 ч целое число деталей, большее 8, а на старом станке — на 3 детали меньше. На новом станке один рабочий выполняет норму за целое число часов, а два рабочих вместе выполняют норму на старых станках на 1 ч быстрее. Из какого количества деталей состоит дневная норма?

Рассмотрим несколько задач о турнирах.

10.35. Шесть мальчиков и четыре девочки организовали турнир по шашкам. Каждый участник турнира сыграл с остальными по одной партии. За выигрыш присуждали 2 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш — 0 очков. Девочки вместе набрали 40 очков. Кто выиграл больше очков: мальчики у девочек или девочки у мальчиков, и на сколько?

Участников турнира было $6 + 4 = 10$. Они сыграли $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ (партий)

и набрали $45 \cdot 2 = 90$ (очков) независимо от исходов отдельных партий. По условию задачи девочки набрали 40 очков, тогда мальчики набрали $90 - 40 = 50$ (очков). Чтобы ответить на вопрос задачи, рассмотрим «турнир в турнире» — игры девочек между собой. В них сыграно $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ (партий) и набрано $6 \cdot 2 = 12$ (очков). Остальные $40 - 12 = 28$ (очков) девочки выиграли у мальчиков.

Аналогично, мальчики в играх между собой набрали 30 очков, значит, мальчики выиграли у девочек $50 - 30 = 20$ (очков).

Итак, девочки выиграли у мальчиков на $28 - 20 = 8$ (очков) больше, чем мальчики у девочек.

10.36. В шахматном турнире участвовали учащиеся 10 класса и два ученика 9 класса. Каждый участник турнира сыграл с остальными по одной партии. За выигрыш в партии присуждали 2 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш — 0 очков. Два девятиклассника набрали вместе 7 очков, а все десятиклассники набрали очков поровну. Сколько десятиклассников участвовали в турнире?

Пусть из 10 класса в турнире участвовало x человек (x — натуральное число), тогда всех участников было $(x + 2)$ человека и они набрали вместе $(x + 2)(x + 1) = x^2 + 3x + 2$ (очков). Тогда десятиклассники набрали на 7 очков меньше: $x^2 + 3x - 5$ очков. Так как они набрали очков поровну, то многочлен $x^2 + 3x - 5$ делится на x , то есть количество очков, набранных каждым учащимся 10 класса, равно $x + 3 - \frac{5}{x}$ и является натуральным числом. Это возможно лишь при $x = 1$ или при $x = 5$.

В первом случае число очков каждого десятиклассника отрицательное, что не отвечает условию задачи. Следовательно, в турнире участвовали 5 десятиклассников.

10.37. Несколько учащихся 9 «а» и 9 «б» классов организовали турнир по шашкам. Каждый участник турнира сыграл с остальными по одной партии. За выигрыш в партии присуждали 2 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш — 0 очков. Учащиеся 9 «а» класса набрали вместе 26 очков, а учащиеся 9 «б» класса, которых было на 3 больше, набрали очков поровну. Сколько было участников турнира?

В заключение рассмотрим две конкурсные задачи.

10.38. ГАУ, 1995. Десантников, прибывших на одинаковых транспортных самолетах, разбивают на равные по численности группы. Известно, что если разбить на такие группы всех десантников из девяти самолетов, то останется лишних 4 человека. Если же к десанникам, прибывшим четырьмя самолетами, добавить 3 человека, то получится некоторое число укомплектованных групп. Сколько человек в группе? (Считайте, что число десантников во всех самолетах одно и то же и больше 1, и число десантников в группах больше 1.)

Пусть в каждом самолете было по d десантников ($d > 1$). Пусть десантники из 9 самолетов образовали несколько групп по m десантников ($m > 1$), тогда $9d - 4$ делится на m . А десантники из 4 самолетов и еще 3 десантника образовали несколько групп по m десантников, тогда $4d + 3$ делится на m . Но тогда и $9(4d + 3) - 4(9d - 4) = 43$ тоже делится на m . Так как $m > 1$, то $m = 43$.

Итак, в каждой группе было по 43 десантника.

10.39. ГАУ, 1995. В каждом классе средней школы одинаковое число парт. Во время ремонта парты со второго этажа увозили на грузовике по 5 штук, а в последний рейс осталось 2 парты. С третьего этажа парты

увозили на другом грузовике по 7 штук, а в последний рейс осталось 4 парты. Второй грузовик сделал на 1 рейс больше, чем первый. Сколько парт было в каждом классе? (Считайте, что в классе больше 10 парт.)

10.40. МГУ, мех.-мат. ф., 2009. После рыбалки в ведре у Бориса (ведро у него вмещает не более 100 рыб) оказалось карасей на 25% меньше, чем у Андрея. Зато Андрей поймал других рыб на 25% меньше, чем Борис. Сколько всего рыб поймал Андрей, если известно, что это количество составляет 55% от общего количества пойманных Борисом и Андреем рыб?

11. ЗАДАЧИ О ДЕЛЕЖЕ ПРИБЫЛИ

В старые добрые времена детей учили решать задачи на пропорциональное деление. При этом рассматривали и так называемый сложный случай пропорционального деления — с учетом времени.

В Арифметике Л.Ф. Магницкого имеется «Статья первая на десять (одиннадцатая) торговая складная со времени», а в ней такие задачи.

11.1. Два человека сложили в купечество денег. Первый положил 10 р. на 7 месяцев, а второй положил 12 р. на 6 месяцев. Приторговали они 8 р. Спрашивается, сколько рублей прибытка досталось каждому?

Здесь доля каждого купца из общей прибыли прямо пропорциональна не только внесенной сумме денег, но и времени, в течение которого его деньги вложены в общее дело. То есть вклад купца в общее дело — это произведение внесенной им суммы на промежуток времени. Здесь 8 р. прибыли надо было поделить пропорционально вкладу каждого, то есть в отношении $70 : 72 = 35 : 36$. Получим $3\frac{67}{71}$ р. и $4\frac{4}{71}$ р.

Составители задач в те времена совсем не заботились о правдоподобности ответов, о том, чтобы ответы были «круглыми», чтобы можно было реализовать решения. Просто тогда текстовые задачи, кроме прочего, были еще способом тренировки обучающихся в сложных вычислениях.

11.2. Три человека сложили в купечество деньги. Первый положил $70\frac{1}{2}$ р. на $5\frac{1}{2}$ месяцев, второй положил $140\frac{1}{2}$ р. на $3\frac{1}{2}$ месяца, третий положил 150 р. на $2\frac{1}{2}$ месяца. А получили прибыли 220 р. Спрашивается, сколько рублей прибытка досталось каждому?

В этой задаче ответ еще сложнее: $67\frac{2507}{2509}$ р., $86\frac{596}{2509}$ р. и $65\frac{1915}{2509}$ р.

Эти и другие задачи из старинных сборников решались так, будто бы при торговле полученная прибыль сразу изымалась из оборота и по окончании торговли делилась между купцами. Если же представить, что получаемая в ходе торговли прибыль вкладывалась в дело, увеличивая общий доход, то задачи такого рода надо решать иначе — с учетом дохода, который приносят не только вложенные деньги, но и получаемая в ходе торговли прибыль. При таком решении задач ответы будут другими, и разница будет тем заметнее, чем больше сумма общего дохода и разница между промежутками времени.

Сформулируем одну из старинных задач, в которой изменим числовые данные так, чтобы получить «круглый» ответ.

11.3. Два купца внесли для общего дела по 48 тыс. р.: первый на один год, а второй — на два года. Как они должны поделить между собой 42 тыс. р. прибыли?

В старые времена решали задачи такого рода следующим образом. Второй купец получил бы тот же доход не за 2, а за 1 год, если бы вложил в дело в два раза большую сумму, то есть 96 тыс. р. Тогда доход в 42 тыс. р. нужно поделить между компаньонами пропорционально вкладу каждого в расчете на год, то есть в отношении $48 : 96 = 1 : 2$. Первый должен получить $\frac{42 \cdot 1}{1 + 2} = 14$, а второй $\frac{42 \cdot 2}{1 + 2} = 28$ (тыс. руб.).

Здесь прибыль первого купца, полученная за первый год и остающаяся в общей торговле, приносит новый доход, который в приведенном решении не учитывается. Рассмотрим более справедливое решение задачи — с учетом дохода на прибыль.

Пусть общая торговля приносит постоянный доход, то есть вложенная сумма увеличивается ежегодно в одно и то же число раз — в x раз ($x > 1$). За два года доход первого купца составил $(48x - 48)x$, а второго купца $(48x^2 - 48)$ тыс. р. Составим уравнение:

$$(48x - 48)x + 48x^2 - 48 = 42,$$

которое перепишем в виде:

$$16x^2 - 8x - 15 = 0.$$

Так как $x > 1$, то $x = 1,25$.

Доход первого купца составил $48 \cdot (1,25 - 1) \cdot 1,25 = 15$, а второго — $42 - 15 = 27$ (тыс. р.).

Как видим, второе решение увеличивает доход первого купца более чем на 7%.

Решите самостоятельно следующие задачи.

11.4. Два компаньона вложили деньги в общее дело. Первый внес 40 тыс. р., а второй — 60 тыс. р. Через месяц первый забрал свои деньги (без дохода), а еще через месяц они решили поделить доход, полученный за эти два месяца. Как они должны поделить между собой доход в сумме 17 тыс. р.?

11.5. Некоторое дело приносит стабильный доход. Первый компаньон вложил в него 9 тыс. р., а второй — 2 тыс. р. Первый забрал вложенные деньги (без дохода) через месяц, второй — через два месяца. Только после этого они разделили полученный доход. Во сколько раз увеличивалась сумма ежемесячно, если доход первого оказался в 2,5 раза больше дохода второго?

11.6. Первый предприниматель вложил в некоторое дело 91 тыс. р., второй — 66 тыс. р. Через два месяца первый забрал вложенные им деньги (без дохода), а еще через месяц оказалось, что за три месяца оба предпринимателя получили одинаковый доход. Каков процент прибыли, получаемой на вложенные деньги ежемесячно?

11.7. Некоторое дело приносит стабильный доход. Первый компаньон вложил в него 13 тыс. р., второй — 10 тыс. р., а третий — 13 тыс. р. Первый забрал вложенные деньги через месяц, второй — через два, а третий — через три месяца. Только после этого они разделили полученный доход. На сколько процентов увеличивалась сумма ежемесячно, если суммарный доход первого и второго оказался равным доходу третьего?

11.8. Первый предприниматель вложил в некоторое дело 60 тыс. р., второй — 40 тыс. р. Через два месяца первый забрал вложенные им деньги (без дохода), а еще через два месяца предприниматели решили разделить доход в 33,81 тыс. р., полученный за эти 4 месяца. Определите процент прибыли, получаемой на вложенные деньги ежемесячно.

Нетрудно заметить, что почти во всех рассмотренных задачах отношение сроков вложения денег равно 1 : 2. Это условие позволяло сводить решение задач к квадратному уравнению. Более сложные задачи составлены так, чтобы от кубического уравнения можно было перейти к квадратному. Подбор данных обеспечивает получение «круглых» ответов.

Если же отношения сроков вложения и суммы денег будут произвольными, то решение задачи описанным способом может привести к

уравнению большей, чем вторая, степени. Прежде чем решать такие задачи, рассмотрим способ приближенного решения уравнений и проверим работу этого способа в знакомой ситуации.

Решим приближенно уравнение $16x^2 - 8x - 15 = 0$, полученное при решении задачи 11.3. Для этого рассмотрим функцию $f(x) = 16x^2 - 8x - 15$. На отрезке $[1; 2]$ функция возрастает, так как эта квадратичная функция с положительным коэффициентом при x^2 возрастает на промежутке $[x_0; +\infty)$, где $x_0 = \frac{1}{4}$ — абсцисса вершины параболы.

Так как $f(1) = -7 < 0$, $f(2) = 33 > 0$ и функция $f(x)$ непрерывна, то график функции пересекает ось Ox во внутренней точке отрезка $[1; 2]$, то есть корень искомого уравнения принадлежит отрезку $[1; 2]$.

Границы промежутка, которому принадлежит корень уравнения, будем обозначать через a и b (здесь $a = 1$, $b = 2$). Разделим этот отрезок пополам, вычислив среднее арифметическое координат его концов: $x = 1,5$. Определим знак функции в точке $x = 1,5$: $f(1,5) = 9 > 0$. Из двух образовавшихся отрезков выберем тот, на концах которого функция принимает значения разных знаков. Это будет отрезок $[1; 1,5]$. Придадим переменной b новое значение: $b = 1,5$. Разделим новый отрезок $[a; b]$ пополам и т.д. Если на каком-то шаге значение функции в середине отрезка окажется равным 0, то координата середины отрезка является корнем уравнения. Если нет, продолжим половинное деление отрезка, пока его длина не окажется меньше некоторой наперед заданной величины (например, 0,000002), и объявим координату середины этого последнего отрезка приближенным корнем уравнения.

Составим программу, которая будет последовательно делить отрезок $[a; b]$ пополам, вычислять среднее арифметическое координат его концов, определять знак функции в точке x . Если для некоторого значения x верно равенство $f(x) = 0$, то программа объявит x корнем уравнения. Если нет, то программа будет продолжать половинное деление отрезка $[a; b]$ до тех пор, пока его длина не окажется меньше числа 0,000002. При выполнении условия $b - a < 0,000002$ программа закончит работу, объявит координату середины этого последнего отрезка приближенным корнем данного уравнения, вычислит доходы первого (I) и второго предпринимателей (II), а также их суммарный доход $(I + II)$ — для сравнения полученного результата с заданной суммой.

1 'ПРОГРАММА 11.3

10 A = 1: B=2

20 X=(A+B)/2

30 IF B-A<.000002 THEN GOTO 80

40 F=16*X^2-8*X-15

50 IF F=0 THEN GOTO 80

60 IF F<0 THEN A=X: GOTO 20

70 B=X: GOTO 20

80 I=48*X^2-48*X: II=48*X^2-48

90 PRINT "Ответ: x ="; X

100 PRINT "I получим"; I: PRINT "II получим"; II

110 PRINT "Всего: "; I+II

120 END

После запуска программы получим:

Ответ: x = 1.25

I получим 15

II получим 27

Всего: 42

С помощью компьютера удалось получить точный корень уравнения: 1,25. В других случаях результаты будут, скорее всего, неточными — тому есть две причины. В нашей программе длина отрезка последовательно делится на 2 равные части, поэтому программа не может дать точный ответ тогда, когда корень уравнения — число рациональное, но не выражающееся дробью со знаменателем вида 2^n . Кроме того, корень уравнения может оказаться иррациональным числом, тогда его можно выразить конечной десятичной дробью лишь приближенно.

Теперь решим задачу, приводящую к уравнению большей, чем вторая, степени.

11.9. Два компаньона вложили деньги в общее дело. Первый внес 30 тыс. р., второй — 40 тыс. р. Первый забрал вложенные деньги (без дохода) через 3 месяца. А еще через месяц они поделили между собой 50 тыс. р. прибыли. Сколько получил каждый?

Старинный способ решения этой задачи приводит к «круглым» ответам:

первый должен получить $\frac{50 \cdot 30 \cdot 3}{30 \cdot 3 + 40 \cdot 4} = 18$, а второй $50 - 18 = 32$ (тыс. р.).

Решим задачу с учетом дохода на прибыль. Пусть вложенная сумма ежемесячно увеличивается в x раз ($x > 1$). Тогда доход первого компаньона вычисляется по формуле $I = (30x^3 - 30)x = 30x^4 - 30x$, а доход второго — $II = 40x^4 - 40$ (тыс. р). Составим уравнение:

$$30x^4 - 30x + 40x^4 - 40 = 50,$$

которое перепишем в виде:

$$7x^4 - 3x - 9 = 0.$$

Функция $f(x) = 7x^4 - 3x - 9$ возрастает и непрерывна на отрезке $[1; 2]$, так как $f'(x) = 28x^3 - 3 > 0$ при $x > 1$. На концах этого отрезка она принимает значения разных знаков: $f(1) < 0$, $f(2) > 0$. Ее график пересекает ось Ox во внутренней точке отрезка $[1; 2]$, то есть искомый корень уравнения принадлежит отрезку $[1; 2]$. Новую программу получим из предыдущей, внося изменения в строках 40 и 80.

```

1 'ПРОГРАММА 11.9
10 A=1: B=2
20 X=(A+B)/2
30 IF B-A<.000002 THEN GOTO 80
40 F=7*X^4-3*X-9
50 IF F=0 THEN GOTO 80
60 IF F<0 THEN A=X: GOTO 20
70 B=X: GOTO 20
80 I=30*X^4-30*X: II=40*X^4-40
90 PRINT "Ответ: x ="; X
100 PRINT "I получит"; I: PRINT "II получит"; II
110 PRINT "Всего:"; I+II
120 END

```

После запуска программы получим:

```

Ответ: x = 1.15519
I получит 18.76819
II получит 31.23187
Всего: 50.00007

```

Как видим, новый результат отличается от полученного ранее.

Решите методом половинного деления отрезков задачу из «Методики арифметики» В. Евтушевского (1874):

11.10. Три купца внесли капиталы для общей торговли: один 1000 р. на 6 месяцев, второй 2700 р. на 1 год 2 месяца и третий 1300 р. на все время торговли. По прошествии двух лет они разделили между собой 1710 р. прибыли. Сколько получил каждый?

Как видно из условия задачи, первый купец через 6 месяцев забрал вложенную сумму, а его доход продолжал увеличиваться еще 1,5 года; второй забрал вложенную сумму через 1 год 2 месяца и его доход продолжал увеличиваться еще 10 месяцев. Можно ожидать, что старинный способ расчета окажется невыгодным именно для первого купца. Решив задачу старинным способом и с помощью компьютера, нетрудно в этом убедиться.

11.11. Два компаньона вложили деньги в общее дело. Первый внес 45 тыс. р., второй — 54 тыс. р. Первый забрал вложенные деньги (без дохода) через 11 месяцев. А еще через месяц они поделили между собой 36 тыс. р. прибыли. Сколько должен получить каждый?

12. РЕШАЙТЕ ЗАДАЧИ ПРОЩЕ!

Начнем с почти анекдотичного примера. Выпускнику вуза, окончившему в свое время физико-математический класс, была предложена известная задача 1.9 про кадь питания. Для ее решения он составил такую систему:

$$\begin{cases} 14 \cdot v_m = V, \\ 10 \cdot (v_m + v_{ж}) = V, \\ t \cdot v_{ж} = V, \end{cases}$$

где v_m и $v_{ж}$ — количество питания, выпиваемое за один день мужем и женой соответственно, V — объем кади, t — время, за которое жена одна выпивает кадь питания.

Приравняв левые части первого и третьего уравнений и разделив второе уравнение на первое, он получил два равенства:

$$\frac{v_{ж}}{v_m} = \frac{14}{t} \text{ и } \frac{10}{14} \left(1 + \frac{v_{ж}}{v_m} \right) = 1,$$

откуда получил $\frac{10}{14} \left(1 + \frac{14}{t} \right) = 1$ и $t = 35$.

Как видно, этого выпускника не обучали в свое время решению задач на совместную работу, но он хорошо научился решать задачи с помощью систем. Приведенное решение показывает, как много лишней работы приходится выполнять, если поспешить с введением неизвестных. Ведь, как мы уже знаем, эта задача имеет простое арифметическое решение.

12.1. Задача Я.И. Перельмана. Садовник продал первому покупателю половину своих яблок и еще пол-яблока, второму покупателю — половину оставшихся и еще пол-яблока, третьему покупателю половину оставшихся и еще пол-яблока и т.д. Седьмому покупателю он продал половину оставшихся и еще пол-яблока; после этого яблок у него не осталось. Сколько яблок было у садовника?

Приведем решение Я.И. Перельмана.

Если первоначальное число яблок x , то первый получил $\frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2}$, второй $\frac{1}{2}\left(x - \frac{x+1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2^2}$, третий $\frac{1}{2}\left(x - \frac{x+1}{2} - \frac{x+1}{4}\right) + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2^3}$, и т.д., седьмой покупатель $\frac{x+1}{2^7}$.

Имеем уравнение:

$$(x+1)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^7}\right) = x.$$

Вычисляя стоящую в скобках сумму членов геометрической прогрессии, найдем:

$$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{2^7}$$

и

$$x = 2^7 - 1 = 127.$$

Всех яблок было 127.

Найдите более простое решение этой задачи.

12.2. Над озерами летели гуси. На каждом садилась половина гусей и еще полгуся, остальные летели дальше. Все сели на семи озерах. Сколько было гусей?

12.3. Две крестьянки принесли на рынок вместе 100 яиц, одна больше, нежели другая; обе выручили одинаковые суммы. Первая сказала тогда второй: «Будь у меня твои яйца, я выручила бы 15 крейцеров». Вторая ответила: «А будь твои яйца у меня, я выручила бы за них $6\frac{2}{3}$ крейцера». Сколько яиц было у каждой?

Эту задачу можно решить так. Пусть первая крестьянка принесла x яиц, тогда вторая принесла $(100 - x)$ яиц. Если бы первая крестьянка продавала $(100 - x)$ яиц, то выручила бы 15 крейцеров, значит, она продавала яйца по $\frac{15}{100 - x}$ крейцера за штуку. Если бы вторая крестьянка продавала x яиц, то выручила бы $\frac{20}{3}$ крейцера, значит, она продавала

яйца по $\frac{20}{3x}$ крейцера за штуку. Так как крестьянки выручили одинаковые суммы, то справедливо равенство

$$\frac{15x}{100 - x} = \frac{20(100 - x)}{3x}.$$

Это уравнение имеет только один положительный корень 40, значит, первая крестьянка принесла 40 яиц, а вторая $100 - 40 = 60$ (яиц).

При более удачном выборе неизвестного задачу можно решить проще. Попробуйте.

Очень часто задачу, которую многие решают с помощью системы, можно решить с помощью одного уравнения или арифметически.

12.4. Задача С.А. Рачинского (1833–1902). В лавке несколько платков. Если они будут проданы по 6 р., то лавочник получит 24 р. барыша. Если же они будут проданы по 3 р., он будет в убытке на 12 р. Сколько платков у лавочника, и почем он их покупал?

Рассмотрим несколько примеров, показывающих, что удачная переформулировка задачи позволяет упростить ее решение. Один такой пример мы уже рассмотрели (№ 9.6). Приведем другие примеры.

12.5. Две мухи ползут по стене от пола до потолка и обратно (по вертикали). Первая с одной и той же постоянной скоростью, а вторая вверх ползет со скоростью в 2 раза большей, а вниз со скоростью в 2 раза меньшей, чем скорость первой мухи. Какая из них первой вернется обратно, если от пола они стартовали одновременно?

I способ. Обозначим высоту стены s м и скорость первой мухи v м/мин. Первая муха затратит на путь туда и обратно $\frac{2s}{v} = \frac{4s}{2v}$ мин, а

вторая $\frac{s}{2v} + \frac{s}{0,5v} = \frac{5s}{2v}$ мин. Первой вернется обратно первая муха, так как $\frac{4s}{2v} < \frac{5s}{2v}$.

II способ. А теперь переформулируем задачу. Пусть вторая муха сначала ползла с меньшей скоростью, а потом с большей, (от этого время движения этой мухи в оба конца не изменится). Ясно, что пока вторая муха поднимется до потолка, первая муха проделает весь путь в оба конца, так как ее скорость в 2 раза больше. Итак, первой вернется первая муха.

12.6. Пароход начали грузить 4 подъемных крана одинаковой мощности. После того как они проработали 2 ч, к ним присоединились еще 2 крана меньшей мощности, и после этого погрузка была окончена через 3 ч. Если бы краны начали работать одновременно, то погрузка была бы окончена за 4,5 ч. Определите, за сколько часов мог бы окончить погрузку один кран меньшей мощности.

Для краткости назовем краны большей мощности большими, а краны меньшей мощности — маленькими. Запишем в таблице время работы кранов в двух случаях:

	4 больших крана	2 маленьких крана
I	5 ч	3 ч
II	4,5 ч	4,5 ч

Как видим, 0,5 ч работы четырех больших кранов заменяют 1,5 ч работы двух маленьких кранов, то есть 4 больших крана можно заменить на 6 маленьких. Тогда за 4,5 ч всю работу могли бы выполнить $6 + 2 = 8$ маленьких кранов, а 1 маленький кран мог бы выполнить всю работу за $4,5 \cdot 8 = 36$ (ч).

Чтобы убедиться, что применение систем для решения такого рода задач может быть довольно громоздким, рассмотрим похожую задачу и ее решение, приведенное в журнале «Математика в школе» (1993, № 1).

12.7. МПГУ, матем. ф., 1992. На вспашке поля работали 4 гусеничных трактора одинаковой мощности. После того как они проработали 2 ч, к ним присоединились еще 2 колесных трактора, после чего работа была закончена за 2 ч. Если бы все тракторы начали работать одновременно, то поле было бы вспахано за 3 ч. Определите, за сколько часов могут вспахать поле 2 гусеничных трактора и 2 колесных трактора, работая одновременно.

Обозначим через A всю работу. Пусть 2 гусеничных трактора смогут вспахать поле за x ч, а 2 колесных — за y ч. По условию задачи

$$\begin{cases} 2 \cdot 4 \cdot \frac{A}{2x} + 2 \cdot \left(4 \cdot \frac{A}{2x} + 2 \cdot \frac{A}{2y} \right) = A, \\ 3 \cdot \left(4 \cdot \frac{A}{2x} + 2 \cdot \frac{A}{2y} \right) = A. \end{cases}$$

Решив систему этих уравнений, находим, что $x = 12$, $y = 6$. Из уравнения $t \left(\frac{A}{x} + \frac{A}{y} \right) = A$ находим время $t = 4$.

Ответ: за 4 ч.

Здесь составлена система трех уравнений с четырьмя неизвестными (правда, от неизвестного A легко избавиться, разделив каждое уравнение на A). Очевидно, что система могла бы быть проще при ином выборе обозначений. Пусть g и k — части всей работы (принимаемой за 1), которую выполняет за 1 ч гусеничный и колесный тракторы соответственно. Так как 4 гусеничных трактора за 4 ч и 2 колесных трактора за 2 ч вспахали поле, то верно равенство $2 \cdot 4g + 2 \cdot (4g + 2k) = 1$. Так как 4 гусеничных трактора и 2 колесных трактора за 3 ч совместной работы вспахали поле, то верно равенство $3 \cdot (4g + 2k) = 1$.

Решив систему уравнений

$$\begin{cases} 16g + 14k = 1, \\ 12g + 6k = 1, \end{cases}$$

получим, что $g = \frac{1}{24}$, $k = \frac{1}{12}$. Тогда 2 гусеничных трактора и 2 колесных трактора за 1 ч совместной работы выполняют $\left(\frac{1}{24} + \frac{1}{12} \right) \cdot 2 = \frac{1}{4}$ всей работы, поэтому вспашут поле за $1 : \frac{1}{4} = 4$ (ч).

Эта задача имеет простое арифметическое решение. Найдите его.

В двух последних задачах суть переформулировки задачи заключалась в замене одних кранов (тракторов) другими — как когда-то мы одну большую птицу заменяли двумя маленькими (№ 9.6). Этот прием иногда применим и для решения конкурсных задач, перед которыми рассмотрим подготовительную задачу.

12.8. Первый мастер шьет шубу за 5 дней, а второй — за 3 дня. Как распределить между ними заказ на пошив 9 шуб, чтобы каждый сшил целое число шуб и заказ был выполнен в кратчайший срок?

Очевидно, что наименьшее время выполнения заказа получится при условии, что мастера работают одновременно. Решим задачу на совместную работу.

1) $1 : 5 = \frac{1}{5}$ (шубы) — шьет I-й мастер в день,

2) $1 : 3 = \frac{1}{3}$ (шубы) — шьет II-й мастер в день,

3) $\frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{8}{15}$ (шубы) — шьют два мастера в день при совместной работе,

4) $9 : \frac{8}{15} = \frac{135}{8}$ (дня) — время выполнения заказа при совместной работе,

5) $\frac{135}{8} \cdot \frac{1}{5} = 3\frac{3}{8}$ (шубы) — сошьет I-й мастер при совместной работе,

6) $\frac{135}{8} \cdot \frac{1}{3} = 5\frac{5}{8}$ (шубы) — сошьет II-й мастер при совместной работе.

Так как при совместной работе каждый мастер сошьет дробное число шуб, то придется согласиться с тем, чтобы один из них закончил работу раньше другого. Остается выбрать, в каком случае работа будет выполнена быстрее: если первый и второй мастера пошьют 3 и 6 или 4 и 5 шуб соответственно.

В первом случае мастера будут работать $3 \cdot 5 = 15$ и $6 \cdot 3 = 18$ (дней), заказ будет выполнен за 18 дней. Во втором случае они будут работать $4 \cdot 5 = 20$ и $5 \cdot 3 = 15$ (дней), заказ будет выполнен за 20 дней. Первый способ распределения заказа дает выигрыш во времени.

Другое распределение шуб между мастерами приведет к увеличению срока выполнения заказа. В самом деле, если, например, первый мастер сошьет более 4-х шуб или второй мастер — более 6-ти, то время выполнения заказа будет больше 18 дней.

Итак, первому мастеру нужно дать 3 шубы, второму — 6. Задача имеет и более простое решение — ответ можно получить не после шести, а после трех действий. Найдите его.

12.9. МГУ, экон. ф., 1992. Фабрика получила заказ на изготовление 6000 деталей типа P и 2000 деталей типа Q . Каждый из 214 рабочих фабрики затрачивает на изготовление 5 деталей типа P время, за которое он мог бы изготовить 3 детали типа Q . Каким образом следует разделить рабочих фабрики на две бригады, чтобы выполнить заказ за наименьшее время, при условии, что обе бригады приступят к работе одновременно и каждая из бригад будет занята изготовлением деталей только одного типа?

Рассмотрим решение этой задачи из журнала «Математика в школе» (1993, № 1).

Пусть x — число рабочих в бригаде, изготавливающей детали типа P , а $5k$ — количество деталей типа P , которое один рабочий делает за единицу времени. Тогда $(214 - x)$ — численность второй бригады, а $3k$ — количество деталей типа Q , которое один рабочий делает за ту же единицу времени. Время изготовления деталей типа P составит $t_P(x) = \frac{6000}{5kx}$, время

изготовления деталей типа Q — $t_Q(x) = \frac{2000}{3k(214 - x)}$, а время $t(x)$ выполнения заказа в целом будет равно наибольшей из двух величин t_P и t_Q :

$$t(x) = \max(t_P, t_Q) = \frac{2000}{k} f(x),$$

где

$$f(x) = \max\left(\frac{3}{5x}, \frac{1}{3(214 - x)}\right).$$

Таким образом, задача сведена к поиску натурального x , $1 \leq x \leq 213$, являющегося точкой минимума функции $f(x)$. Этот минимум достигается в точке $x_* = 137\frac{4}{7}$, которая является решением уравнения $\frac{3}{5x} = \frac{1}{3(214 - x)}$.

Поскольку число x_* не является целым и функция $f(x)$ убывает на промежутке $[1; x_*]$ и возрастает на промежутке $[x_*; 213]$, то остается сравнить значения функции $f(x)$ в двух соседних с x_* целочисленных точках $x_1 = 137$ и $x_2 = 138$ и убедиться в том, что $f(137) < f(138)$.

Приведенное решение не просто, в нем полезно разобраться, но задачу можно решить проще — «по-нашему, по-неученому», как говорил Удодов-старший из чеховского «Репетитора».

Если время изготовления 5 деталей типа P равно времени изготовления 3 деталей типа Q , то 6000 деталей типа P можно заменить на $\frac{6000 \cdot 3}{5} = 3600$ деталей типа Q .

Решим новую задачу, которая даст искомый ответ и в которой нужно разделить 214 человек на две бригады так, чтобы в наименьшее время первая бригада изготовила 3600 деталей, а вторая — 2000 таких же деталей. Наименьшее время выполнения заказа получится при одновременной работе двух бригад.

Очевидно, что число рабочих нужно разделить в отношении $3600 : 2000 = 9 : 5$. Получится 137,5... рабочих в первой бригаде и 76,4... рабочих во второй. Остается сравнить время выполнения задания для ближайших к найденным целочисленным значений 137 и 77, 138 и 76. Для большей наглядности занесем результаты вычислений в таблицу.

	I способ		II способ	
	1-я бригада	2-я бригада	1-я бригада	2-я бригада
Число рабочих в бригаде	137	77	138	76
Количество деталей на 1 рабочего	26,2...*	25,9...	26,0...	26,3...*

В последней строке таблицы записано количество деталей, приходящихся на одного рабочего — та бригада будет работать дольше, у которой это количество больше. В каждом из двух случаев звездочкой отмечены количества деталей, приходящиеся на одного рабочего, в той бригаде, которая закончит работу позже. Так как $26,2... < 26,3...$, то заказ будет выполнен раньше при первом распределении рабочих по бригадам: 137 и 77 рабочих.

Другое распределение рабочих по бригадам только увеличит время выполнения заказа, так как, например, если число рабочих во второй бригаде будет меньше 76 или в первой бригаде — меньше 137, то количество деталей, приходящихся на одного рабочего, будет больше 26,3....

Это решение, на наш взгляд, не менее обоснованное, чем приведенное в журнале.

12.10. МГУ, экон. ф., 1992. Цех получил заказ на изготовление 5000 деталей первого типа и 3000 деталей второго типа. Каждый из 187 рабочих цеха затрачивает на изготовление 2 деталей первого типа время, за которое он мог бы изготовить 3 детали второго типа. Каким образом следует разделить рабочих цеха на две бригады, чтобы выполнить заказ за наименьшее время, при условии, что обе бригады приступят к работе одновременно и каждая из бригад будет занята изготовлением деталей только одного типа?

12.11. Грузовая машина выехала из пункта *A* в пункт *B*. Спустя 2 ч из *B* в *A* выехала легковая машина, которая прибыла в *A* на час позже,

чем грузовая машина в В. Сколько часов была в пути грузовая машина, если к моменту встречи она уже проехала $\frac{2}{3}$ всего пути?

Решая эту задачу, трудно избежать соблазна ввести несколько неизвестных, что мы и сделаем для начала.

I способ. Пусть легковая машина ехала до встречи t ч, тогда грузовая машина ехала $(t + 2)$ ч. Пусть скорость грузовой машины x км/ч, а легкой — y км/ч. Тогда грузовая машина до встречи проехала $x(t + 2)$ км, а легковая — ty км. Из условия задачи следует, что $x(t + 2) = 2ty$. Это первое уравнение системы.

Грузовая машина затратила на весь путь $\left(t + 2 + \frac{ty}{x}\right)$ ч, а легковая — $\left(t + \frac{(t + 2)x}{y}\right)$ ч. Время движения грузовой машины на всем участке пути на 1 ч больше, чем легкой машины, поэтому

$$\left(t + 2 + \frac{ty}{x}\right) - \left(t + \frac{(t + 2)x}{y}\right) = 1.$$

Это второе уравнение системы, которая после упрощения уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} x(t + 2) = 2ty, \\ \frac{ty}{x} - \frac{(t + 2)x}{y} + 1 = 0. \end{cases}$$

Выразим через t отношение $\frac{x}{y}$ из первого уравнения:

$$\frac{x}{y} = \frac{2t}{t + 2}$$

и подставим полученную дробь во второе уравнение системы, получим уравнение с одним неизвестным t :

$$\frac{t + 2}{2} - 2t + 1 = 0.$$

Решив это уравнение, получим, что $t = \frac{4}{3}$.

Тогда грузовая машина была в пути $\left(t + 2 + \frac{ty}{x}\right) = t + 2 + \frac{t + 2}{2} = 5$ (ч).

Заметим, что можно было составить более простую систему. Ведь путь грузовой машины до встречи в 2 раза больше, чем у км. Он равен $2ty$ км, а ее скорость $\frac{2ty}{t+2}$ км/ч. Это означает, что составляя систему, можно было обойтись без x . Скажем больше: если не торопиться вводить неизвестные, то можно обойтись и без y .

Решите задачу с помощью одного уравнения с одним неизвестным.

12.12. Если человек с постоянной скоростью спускается по эскалатору, едущему вниз, то проходит 30 ступенек эскалатора. Поднимаясь с той же скоростью по опускающемуся эскалатору, он проходит 150 ступенек. Сколько ступенек при той же скорости движения человек пройдет по неподвижному эскалатору?

Эту задачу можно решить разными способами. Обычно ее решают с помощью системы уравнений.

1 способ. Пусть u — скорость человека относительно ступеней эскалатора, v — скорость самого эскалатора, а s — длина эскалатора, измеренная в ступеньках. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{s}{u+v} = \frac{30}{v}, \\ \frac{s}{u-v} = \frac{150}{v}. \end{cases}$$

Разделив второе уравнение системы на первое, получим новое уравнение:

$$\frac{u+v}{u-v} = 5,$$

которое перепишем в виде:

$$u + v = 5(u - v).$$

Из этого уравнения получим, что $u = 1,5v$. Найти $s = 75$ можно из первого уравнения, но значения u и v найти не удастся, так как система содержит неизвестных больше, чем уравнений.

Так как при подъеме против хода эскалатора со скоростью $u - v = 0,5v$ человек прошел 150 ступеней, то при спуске по стоящему эскалатору со скоростью в 3 раза большей, чем $0,5v$, он пройдет в 3 раза меньше ступенек, то есть 50 ступенек.

Решите эту задачу без системы.

12.13. Спускаясь по движущемуся эскалатору, пассажир проходит до его конца 40 ступенек. При движении против хода эскалатора, ему

приходится преодолевать 120 ступенек. Сколько бы он прошел ступенек, если бы спускался по неподвижному эскалатору?

Рассмотрим две задачи, условия которых были размещены на сайте www.shevkin.ru. Для них удалось собрать интересные решения.

12.14. Бассейн начали заполнять водой с помощью насоса. После того, как треть бассейна была заполнена, насос поработал еще минуту и сломался. Оставшаяся часть бассейна заполнялась с помощью запасного насоса, имеющего меньшую мощность. Известно, что первая треть бассейна заполнилась на 10 мин быстрее второй, а вторая — на 10 мин быстрее третьей. За какое время наполнилась первая треть бассейна?

1 способ. Пусть первая треть бассейна наполнилась за t мин.

Тогда вторая треть — за $(t + 10)$ мин, из которых второй насос работал $(t + 9)$ мин, а третья треть — за $(t + 20)$ мин (рис. 15). Пусть производительности первого и второго насосов a и b литров в минуту соответственно. Приравняем объемы первой и второй, второй и третьей третей бассейна. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} at = a \cdot 1 + (t + 9)b, \\ a \cdot 1 + (t + 9)b = (t + 20)b. \end{cases}$$

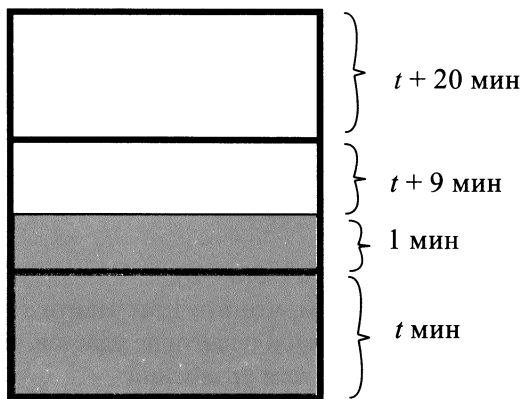


Рис. 15.

Из второго уравнения системы получим, что $a = 11b$, подставим вместо a в первое уравнение системы $11b$. После деления полученного уравнения на отличное от нуля число b получим, что $t = 2$.

Это означает, что первая треть бассейна была заполнена за 2 мин.

Решите эту задачу с помощью одного уравнения или вообще без уравнения.

12.15. Мальчики спорили о длине трубы, которую трактор тянул на полозьях. Чтобы выяснить, кто прав, один из мальчиков длиной шага 0,75 м прошел вдоль трубы. Когда он шел в направлении движения трактора, то сделал 120 шагов, в обратном направлении он сделал вдоль трубы 30 шагов. Какова длина трубы?

1 способ. Пусть длина трубы x м. Учитывая длину шага, мальчик в направлении движения трактора прошел $0,75 \cdot 120 = 90$ (м), за это время конец трубы, от которого мальчик удалялся, преодолел $(90 - x)$ м. В противоположном направлении мальчик прошел $0,75 \cdot 30 = 22,5$ (м). За это время конец трубы, к которому теперь мальчик приближался, преодолел $(x - 22,5)$ м.

Так как в первом случае движение (и мальчика, и конца трубы) заняло времени в $120 : 30 = 4$ раза меньше, то $(x - 22,5)$ м в 4 раза меньше, чем $(90 - x)$ м. Составим уравнение:

$$4(x - 22,5) = 90 - x.$$

Решив это уравнение, получим $x = 36$. Следовательно, длина трубы 36 м.

Решите задачу другим способом.

12.16. ВШЭ, 1997. Два брата купили акции одного достоинства на сумму \$3640. Когда цена на эти акции возросла, они продали часть акций на сумму \$3927. Первый брат продал 75% своих акций, а второй — 80% своих. При этом сумма, полученная от продажи акций вторым братом, превышает сумму от продажи акций первым братом на 140%. На сколько процентов возросла цена акции?

Пусть братья купили акции по a долларов за штуку: первый брат — x акций, второй — y акций. Стоимость акций составила $ax + ay$, или 3640 долларов. Когда цена на эти акции возросла до b долларов за штуку, они продали часть акций на сумму $0,75bx + 0,8by$, или 3927 долларов. При этом сумма $0,8by$ была больше $0,75bx$ на 140%, или в 2,4 раза. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} ax + ay = 3640, \\ 0,75bx + 0,8by = 3927, \\ 0,8by = 2,4 \cdot 0,75bx. \end{cases}$$

Мы составили систему из трех уравнений с четырьмя неизвестными. Она не имеет единственного решения, но из ее уравнений можно три неизвестных величины выразить через четвертую. Требуется определить, на сколько процентов увеличилась стоимость акции, то есть величину $\frac{b-a}{a} \cdot 100\% = \left(\frac{b}{a} - 1\right) \cdot 100\%$. Теперь достаточно выразить a и b через одно неизвестное, которое сократится при вычислении отношения $\frac{b}{a}$.

Из третьего уравнения системы выразим y через x (здесь $b \neq 0$ по смыслу задачи): $y = 2,25x$. Заменим y в первых двух уравнениях системы на $2,25x$, получим два равенства: $3,25ax = 3640$ и $2,55bx = 3927$, из которых получим: $a = \frac{1120}{x}$, $b = \frac{1540}{x}$, тогда $\frac{b}{a} = \frac{1540}{1120} = \frac{11}{8}$. Стоимость акции увеличилась на $\left(\frac{b}{a} - 1\right) \cdot 100\% = 37,5\%$.

Найдите более простое решение этой задачи.

12.17. ВШЭ, 1997. Два брата купили акции одного достоинства на сумму \$3375. Когда цена на эти акции возросла, они продали часть акций на сумму \$2916. Первый брат продал 60% своих акций, а второй — 70% своих. При этом сумма, полученная от продажи акции первым братом, на $\frac{200}{7}\%$ превысила сумму, полученную вторым братом. На сколько процентов возросла цена одной акции?

Задачи **12.16** и **12.17** с небольшим редакционным изменением были предложены в экзаменационной работе 2000 г. в девятих физико-математических классах.

12.18. МГУ, геол. ф., 1993. На берегу озера расположены пункты A и B . Из пункта A в пункт B отправился катер, а через 1 ч после этого из пункта B в пункт A вышла моторная лодка. Еще через 1 ч они встретились и, не останавливаясь, продолжили движение. Катер прибыл в пункт B через 2 ч 20 мин после того, как в пункт A прибыла моторная лодка. Через какое время после начала движения произошла бы их встреча, если бы они отправились навстречу друг другу одновременно?

Приведем решение этой задачи из журнала «Математика в школе» (1994, № 1).

1 способ. Обозначим через v_k и v_m скорости катера и моторной лодки, а через s — расстояние AB , получим равенства

$$2v_k + v_m = s, \quad \frac{s}{v_k} - \frac{s}{v_m} = \frac{10}{3},$$

из которых нужно найти величину $\frac{s}{v_k + v_m}$. Введя неизвестные $x = \frac{v_k}{s}$,

$y = \frac{v_m}{s}$ и решив систему

$$\begin{cases} 2x + y = 1, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{10}{3}, \end{cases}$$

получим два решения: $\left(\frac{1}{5}; \frac{3}{5}\right)$ и $\left(\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}\right)$. Второе из них должно быть отброшено.

Искомая величина:

$$\frac{s}{v_k + v_m} = \frac{1}{x + y} = \frac{5}{4} \text{ (ч)}.$$

Попробуйте решить задачу без составления системы.

12.19. Из «Всеобщей арифметики» И. Ньютона. Даны три металлических сплава. Один фунт первого сплава содержит 12 унций серебра, 1 унцию меди и 3 унции олова. Фунт второго сплава содержит 1 унцию серебра, 12 унций меди и 3 унции олова. Фунт третьего сплава содержит 14 унций меди, 2 унции олова и вовсе не содержит серебра. Из каких трех сплавов нужно составить новый, фунт которого содержал бы 4 унции серебра, 9 унций меди и 3 унции олова?

Обычно эту задачу решают, составляя систему с тремя неизвестными. Найдите более простое решение.

Рассмотрим еще одну задачу. Она была включена в переводной экзамен по алгебре для учащихся 8 класса ФМШ № 2007 Москвы.

12.20. Пешеход вышел из пункта A в пункт B . Через 45 мин из A в B выехал велосипедист. Когда велосипедист прибыл в пункт B , пешеходу оставалось пройти $\frac{3}{8}$ всего пути. Сколько времени потратил пешеход на

весь путь, если известно, что велосипедист догнал пешехода на половине пути из пункта A в пункт B , а скорости пешехода и велосипедиста постоянны?

Некоторые учащиеся решали эту задачу составлением системы уравнений так. Пусть время движения пешехода из A в B составляет x ч, а время движения велосипедиста из A в B составляет y ч. Тогда на половину пути пешеход затратил $\frac{x}{2}$ ч, что равно $\frac{y}{2} + \frac{3}{4}$. Составим первое уравнение: $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} + \frac{3}{4}$.

Так как при движении с постоянной скоростью пройденное расстояние пропорционально времени движения, то в тот момент, когда велосипедист прибыл в B , пешеход прошел $1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ расстояния от A до B и затратил на это $\frac{5x}{8}$ ч, что равно $\left(y + \frac{3}{4}\right)$ ч. Составим второе уравнение: $\frac{5x}{8} = y + \frac{3}{4}$.

Решив систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{2} + \frac{3}{4}, \\ \frac{5x}{8} = y + \frac{3}{4}, \end{cases}$$

найдем, что $x = 2$, $y = 0,5$. То есть время движения пешехода из A в B составляет 2 ч.

Система получилась несложная, но без нее можно обойтись.

12.21. РЭА, 2002. Если $\frac{1}{3}$ пути турист пройдет пешком, а $\frac{2}{3}$ пути проедет на велосипеде, то затратит на весь путь 1,5 ч. Если же $\frac{1}{3}$ пути он проедет на велосипеде, а $\frac{2}{3}$ пути пройдет пешком, то затратит на весь путь 2 ч 15 мин. За какое время он пройдет весь путь пешком?

Пусть на весь путь пешком турист расходует — x мин, а на велосипеде — y мин. Тогда на $\frac{1}{3}$ пути пешком и $\frac{2}{3}$ пути на велосипеде турист

расходует $\left(\frac{x}{3} + \frac{2y}{3}\right)$ мин, или 90 мин. А на $\frac{2}{3}$ пути пешком и $\frac{1}{3}$ пути на велосипеде турист расходует $\left(\frac{2x}{3} + \frac{y}{3}\right)$ мин, или 135 мин.

Составим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{2y}{3} = 90, \\ \frac{2x}{3} + \frac{y}{3} = 135. \end{cases}$$

Она имеет единственное решение: $x = 180$, $y = 45$. Следовательно, весь путь пешком турист пройдет за 180 мин, или за 3 ч.

Найдите арифметическое решение задачи.

12.22. РЭА, 2002. Если $\frac{1}{4}$ бассейна наполнит первая труба, а затем $\frac{3}{4}$ —

вторая, то бассейн будет наполнен за 5 ч. Если же $\frac{3}{4}$ бассейна наполнит

первая труба, а затем $\frac{1}{4}$ — вторая, то бассейн будет наполнен за 7 ч. За

какое время наполнит бассейн одна вторая труба?

Прежде чем решать старую задачу про трех землекопов или четырех едоков, поедающих торт, рассмотрим более простую подготовительную задачу, в которой уменьшено число действующих лиц.

12.23. Два человека съели торт. Они ели по очереди, и первый ел столько времени, сколько понадобилось бы второму, чтобы съесть $\frac{1}{4}$ торта, второй ел столько времени, сколько понадобилось бы пер-

вому, чтобы съесть $\frac{3}{4}$ торта. Во сколько раз быстрее они съели бы торт,

если бы ели его не по очереди, а вместе?

И способ. Сначала решим задачу, следуя призыву «Не бойтесь вводить лишние буквы!». Пусть «производительность труда» первого человек a , а второго — b (в долях торта, поедаемых в минуту). Пусть первый ел x мин, а второй y мин. Тогда за $(x + y)$ мин они съели $(ax + by)$ торта, или целый торт. Поэтому верно равенство

$$ax + by = 1.$$

Так как второй за x мин мог съесть bx торта, что равно $\frac{1}{4}$ торта, а первый за y мин — ay торта, что равно $\frac{3}{4}$ торта, то верны еще два равенства:

$$bx = \frac{1}{4} \text{ и } ay = \frac{3}{4}.$$

Сложив эти три равенства, получим, что

$$ax + by + bx + ay = 2,$$

откуда $(x + y)(a + b) = 2$ и $x + y = \frac{2}{a + b}$ (мин).

Если бы они ели торт вместе, то затратили бы на работу $\frac{1}{a + b}$ мин, то есть при совместной работе они работали в 2 раза быстрее.

II способ (П.В. Чулков). Представим, что в то время, пока первый ел свой кусок торта, второй едок не отдыхал, а съел $\frac{1}{4}$ торта, а когда второй

ел свою часть торта, первый съел $\frac{3}{4}$ торта. Таким образом, первый и второй при последовательной работе съели 1 торт, а при совместной работе за то же самое время съели 2 торта. Следовательно, при совместной работе они работали в 2 раза быстрее.

В книге П.В. Чулкова «Арифметические задачи» (2009) имеется такая задача.

12.24. Трое рабочих роют яму. Они работают по очереди, причем каждый работает столько времени, сколько нужно двоим другим, чтобы вырыть половину ямы. Работая так, они вырыли яму. Во сколько раз быстрее они закончили бы работу, если бы работали одновременно?

12.25. «Кенгуру», 2010. Зная, Незная, Винтик и Шпунтик съели торт. Они ели по очереди, и каждый из них ел столько времени, сколько понадобилось бы трем другим едокам, чтобы, «работая» вместе, съесть половину торта. Во сколько раз быстрее они съели бы торт, если бы ели его не по очереди, а все вместе?

Рассмотрим задачу, аналогичную которой мы уже решали методом подобия. Попробуйте решить ее без уравнений.

12.26. Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда ве-

лосипедист и мотоциклист находились в одной точке, пешеход был на расстоянии 10 км впереди них. В тот момент, когда мотоциклист догнал пешехода, велосипедист отставал от них на 5 км. На сколько километров мотоциклист будет обогнать пешехода в тот момент, когда пешехода настигнет велосипедист?

12.27. Три гонщика A , B и C , стартовав одновременно, движутся с постоянными скоростями в одном направлении по кольцевому шоссе. В момент старта гонщик B находился перед гонщиком A на расстоянии $\frac{1}{3}$ длины шоссе, а гонщик C перед гонщиком B — на таком же расстоянии. Гонщик A впервые догнал гонщика B в тот момент, когда гонщик B закончил свой первый круг, а еще через 10 мин гонщик A впервые догнал гонщика C . Гонщик B тратит на круг на 2,5 мин меньше, чем гонщик C . Сколько времени тратит на круг гонщик A ?

Здесь можно ввести четыре неизвестных: три скорости и расстояние (длину трассы), составить 3 уравнения и из полученной системы выразить 3 неизвестных через четвертое, а ответ получить как отношение величин. Но задачу можно решить с помощью одного уравнения.

12.28. Три гонщика стартуют одновременно из одной точки шоссе, имеющего форму окружности, и едут в одном направлении с постоянными скоростями. Первый гонщик впервые после старта догнал второго, делая свой пятый круг, в точке, диаметрально противоположной точке старта, а через полчаса после этого он вторично (не считая момента старта) обогнал третьего гонщика. Второй гонщик впервые догнал третьего через 3 ч после старта. Сколько кругов в час делает первый гонщик, если второй гонщик проходит круг не менее, чем за 20 мин?

12.29. Когда товарный поезд проходил мимо станции A , пассажирский поезд только начал равноускоренное движение (начальная скорость равна нулю). Поезда поравнялись в тот момент, когда они прошли треть пути от станции A до следующей станции B . В этот момент пассажирский поезд, набравший некоторую скорость, начал движение с постоянной скоростью. Во сколько раз больше времени затратил на путь от A до B товарный поезд, чем пассажирский, если скорость товарного поезда на всем пути была постоянной?

Пусть расстояние, время и скорость измеряются в согласованных единицах (км, ч, км/ч) и пусть скорость товарного поезда равна v_1 , а t_0 — момент времени, когда поезда поравнялись и пассажирский поезд на-

чал равномерное движение со скоростью v_2 . Пусть ускорение пассажирского поезда — a . Так как расстояния, пройденные поездами к моменту t_0 , равны, то $v_1 t_0 = \frac{at_0^2}{2} = \frac{at_0 \cdot t_0}{2} = \frac{v_2 \cdot t_0}{2}$, откуда следует, что $v_2 = 2v_1$.

Тот же результат можно получить из рассмотрения графиков движения. Так как расстояния, пройденные поездами к моменту t_0 , равны (на рис. 16 им соответствуют равные площади прямоугольника $OMGD$ и треугольника OCD), то площади подобных треугольников OMN и CGN равны. Следовательно, эти треугольники равны, поэтому $OM = CG$, то есть $v_2 = 2v_1$.

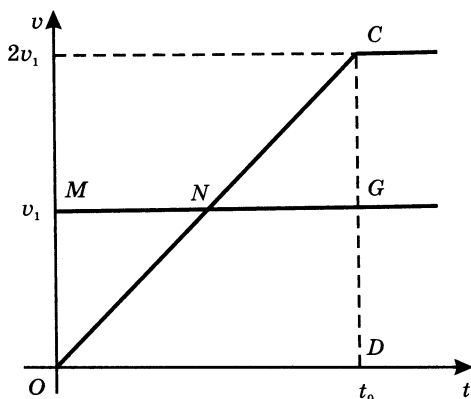


Рис. 16

Так как расстояние $v_1 t_0$ — третья часть расстояния AB , то остаток пути, равный $2v_1 t_0$, пассажирский поезд со скоростью $2v_1$ пройдет за t_0 ч. Весь путь пассажирский поезд пройдет за $2t_0$ ч, а товарный поезд — за $3t_0$ ч. Тогда товарный поезд затратил на путь от A до B в 1,5 раза больше времени, чем пассажирский.

12.30. Из пункта A в пункт B отправились одновременно два поезда. Каждый из них вначале двигался равноускоренно (ускорения поездов различны, начальные скорости равны нулю), а затем, набрав некоторую скорость, — равномерно. Отношение скоростей равномерного движения поездов равно 2. Пройдя четверть пути от A до B , поезда поравнялись, причем в этот момент скорость одного была в 1,5 раза больше скорости другого. Найдите отношение промежутков времени, за которые поезда прошли путь от A до B .

ОТВЕТЫ И СОВЕТЫ

1.5. За 8 ч. 1.6. За 20 дней. 1.7. Через 18 мин. 1.11. Через 2 ч. 1.12. За 6 дней.

1.13. 1) $5 : 15 = \frac{1}{3}$ (заказа) выполнит первый рабочий за 5 ч;

2) $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ (заказа) выполнят рабочие при совместной работе;

3) $\frac{1}{15} + \frac{1}{15} = \frac{2}{15}$ (заказа) выполнят рабочие за 1 ч при совместной работе;

4) $\frac{2}{3} : \frac{2}{15} = 5$ (ч) — время совместной работы;

5) $5 + 5 = 10$ (ч) — время выполнения заказа.

Но задачу можно решить без дробей.

Первый рабочий за 5 ч выполнил $\frac{1}{3}$ заказа, а при совместной работе два рабочих выполнили оставшиеся $\frac{2}{3}$ заказа. Каждый из них выполнил

$\frac{1}{3}$ заказа, так как они работали с одинаковой производительностью. Тогда вместе они работали еще 5 ч, а весь заказ выполнили за $5 + 5 = 10$ (ч).

1.15. За 21 день.

1.16. Так как скорость первого автобуса в 2 раза больше скорости второго автобуса, то весь путь первый автобус проедет в 2 раза быстрее, чем второй. А по условию задачи время движения первого автобуса на 1 ч меньше, чем время движения второго автобуса. Следовательно, первый автобус был в пути 1 ч, а второй — 2 ч. Тогда в час они проходят всего $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ расстояния и встретятся через $1 : \frac{3}{2} = \frac{2}{3}$ (ч).

Если же второй автобус увеличит скорость в 2 раза, то весь путь пройдет за 1 час и встретит первый автобус через $\frac{1}{2}$ ч. В этом случае встреча произошла бы раньше на $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ (ч), то есть на 10 мин.

1.17. За $\frac{6}{11}$ ч.

1.18. На 40 дней. Эту задачу можно решить без дробей, если знать, что стопа содержала 480 листов бумаги.

1.20. а) За 21 ч; б) за 18 ч.

1.21. Приведем старинное решение задачи. Пусть лошадь, коза и овца едят сено 6 месяцев. Тогда лошадь съест 6 возов, коза — 3, а овца — 2. Всего 11 возов, значит, в месяц они съедают $\frac{11}{6}$ воза, а один воз съедят за

$$1 : \frac{11}{6} = \frac{6}{11} \text{ (месяца).}$$

1.23. За $\frac{8}{9}$ недели или за 5 дней и 4 часа.

1.24. За $\frac{12}{25}$ года. Старинное решение этой задачи построено на подсчете числа дворов, которые 4 человека построят за 12 лет совместной работы.

1.25. Из условий задачи следует, что за 1 ч Маша и Настя могут вымыть 3 окна, Настя и Лена — 4 окна, Маша и Лена — 5 окон. Если бы окна мыли две Маши, две Насти и две Лены (и девочки с одинаковыми именами работали бы с одинаковой производительностью), то все 6 девочек за 1 ч вымыли бы $3 + 4 + 5 = 12$ (окон). Тогда за 60 мин Маша, Настя и Лена вымыли бы 6 окон. Это означает, что, работая втроем, Маша, Настя и Лена вымыли бы одно окно за $60 : 6 = 10$ (мин).

1.26. За 80 мин. **1.27.** $1\frac{11}{13}$ ч. **1.28.** За 120 дней.

1.30. На каждый километр пути при движении туда и обратно расходуется $\frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{1}{12}$ (бака) топлива, значит, наибольшее расстояние, на

которое может отплыть рыбак, равно $1 : \frac{1}{12} = 12$ (км).

1.31. Если бы задние колеса меняли с передними через каждую тысячу километров, то на 2 тыс. км расходовалось бы $\frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{5}{24}$ ресурса каждого колеса. То есть 2 тыс. км составляют $\frac{5}{24}$ наибольшего пути, который равен $2 : \frac{5}{24} = 9,6$ (тыс. км).

2.2. 48 км/ч. **2.5.** 53 км/ч. **2.6.** 50 км/ч. **2.8.** 60 км/ч.

2.9. Пусть длина участка пути s км. Тогда в оба конца автомобиль проехал $2s$ км, затратив на весь путь $\frac{s}{a} + \frac{s}{b} = \frac{s(a+b)}{ab}$ (ч). Вычислим среднюю скорость движения:

$$2s : \frac{s(a+b)}{ab} = \frac{2ab}{a+b} \text{ (км/ч)}.$$

2.10. 12 км/ч. **2.11.** 48 км/ч.

2.12. Пусть в гору и с горы велосипедист проехал по s км, всего $2s$ км. Так как средняя скорость равна 12 км/ч, то на путь туда и обратно затрачено $\frac{2s}{12} = \frac{s}{6}$ (ч). Пусть скорость движения с горы равна b км/ч, тогда на путь туда и обратно затрачено $\frac{s}{10} + \frac{s}{b}$ ч. Составим уравнение:

$$\frac{s}{10} + \frac{s}{b} = \frac{s}{6}.$$

Разделив обе части уравнения на s ($s \neq 0$), получим равносильное ему уравнение:

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{b} = \frac{1}{6},$$

имеющее единственный корень $b = 15$. Велосипедист ехал с горы со скоростью 15 км/ч.

2.13. 84 км/ч. **2.14.** $\frac{ax}{2a-x}$ км/ч. **2.15.** $58\frac{94}{107}$ км/ч. **2.16.** 16 км. **3.2.** 9 ч.

3.3. а) 3 ч; б) 6 ч. **3.4.** 4 ч. **3.5.** 5 ч. **3.7.** За 35 суток. **3.8.** 12 ч.

3.10. Сначала решим задачу для $a = 5, x = 35$. Пусть расстояние AB равно s км, тогда скорость теплохода по течению $\frac{s}{5}$ км/сут., а скорость течения $\frac{s}{35}$ км/сут.

$$1) \frac{s}{5} - \frac{2s}{35} = \frac{s}{7} \text{ (км/сут.)} — \text{ скорость теплохода против течения;}$$

$$2) s : \frac{s}{7} = 7 \text{ (сут.)} — \text{ время движения теплохода против течения.}$$

Теперь решим задачу в общем виде. Пусть расстояние AB равно s км, тогда скорость теплохода по течению равна $\frac{s}{a}$ км/сут., скорость течения равна $\frac{s}{x}$ км/сут., а скорость теплохода против течения равна $\frac{s}{a} - \frac{2s}{x} = \frac{s(x-2a)}{ax}$ (км/сут.). Тогда время движения теплохода против течения

$$\text{равно } s : \frac{s(x-2a)}{ax} = \frac{ax}{x-2a} \text{ (сут.).}$$

$$3.11. \frac{bx}{x+2b} \text{ сут. } 3.12. \frac{u^2 - v^2}{u} \text{ км/ч.}$$

3.13. *И способ.* Пусть собственная скорость пловца x м/мин, скорость течения y м/мин. Тогда время движения по течению равно $\frac{150}{x+y}$ мин, а против течения $\frac{50}{y-x}$ мин. По условию задачи $\frac{150}{x+y} = \frac{50}{y-x}$, откуда $y = 2x$, то есть скорость течения в 2 раза больше скорости пловца.

II способ. Пусть собственная скорость пловца x м/мин, скорость течения y м/мин. Так как за одно и то же время путь по течению был в 3 раза больше, чем путь против течения, то скорость пловца по течению в 3 раза больше, чем его скорость против течения. Составим уравнение:

$$x + y = 3(y - x),$$

откуда $y = 2x$, то есть скорость течения в 2 раза больше скорости пловца.

3.14. Пусть собственная скорость лодки x км/ч, а скорость течения y км/ч. Тогда скорость удаления лодки и шляпы равна $(x - y) + y = x$ (км/ч), а скорость сближения равна $(x + y) - y = x$ (км/ч). Удаление и сближение лодки и шляпы происходило с одной и той же скоростью, на одно и то же расстояние, значит, время движения туда и обратно одинаково, то есть шляпу догонят через 20 мин.

3.15. Я догонял шляпу столько же времени, сколько удалялся от нее (см. решение задачи **3.14**). Следовательно, шляпа, плывшая со ско-

ростью течения, проплыла 1 км за 20 мин, то есть скорость течения реки равна 3 км/ч.

4.3. Если в 1997 г. из каждых 100 р. реальных расходов на оплату жилья население оплачивало примерно 35 р., а в 1998 г. должно было оплачивать уже 50 р., то разница 15 р. от 35 р. составляет не 15%, а $\frac{15 \cdot 100\%}{35} \approx 42,86\%$. Это при условии, что за год стоимость содержания

жилья не изменится.

Такое решение приемная комиссия серьезного вуза может посчитать неполным, так как ответ получен лишь для частного случая (100 р.) и не показано, что ответ не зависит от первоначальной суммы. Получите полное решение, заменив число 100 буквой.

4.4. 30%. **4.6.** 30%.

4.7. «Сухое вещество» имеет массу $(1 - 0,13) \cdot 500 = 435$ (г). При влажности 25% на него приходится 75% массы, то есть масса вермишели при влажности 25% составляет $435 : 0,75 = 580$ (г).

4.8. 2 т.

4.9. Пусть зимой на 50 р. можно было купить 1 единицу некоторого товара стоимостью 50 р. Летом этот товар стоил на 20% дороже, то есть $1,2 \cdot 50 = 60$ (р.). На 90 р. можно купить $90 : 60 = 1,5$ единицы того же товара. То есть покупательная способность денег, вложенных в акции, увеличилась на 50%.

4.10. За 4 ч рядовой Иванов почистит 1 ведро и получит 0,8 ведра очищенной картошки. Тогда целое ведро он начистит за $4 : 0,8 = 5$ (ч).

4.11. За 3 ч 20 мин.

4.12. I способ. За 3 ч рядовой Сидоров почистит 1 ведро картошки, а за 4 ч он почистит $1 : 3 \cdot 4 = \frac{4}{3}$ (ведра), а начистит за 4 ч ровно 1 ведро, то есть

очисток будет $\frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$ (ведра), от ведра они составляют $\frac{1}{3} : \frac{4}{3} \cdot 100\% = 25\%$.

II способ. Пусть за 1 ч рядовой Сидоров начистит x кг картошки, тогда за 3 и 4 ч он начистит $3x$ и $4x$ кг соответственно (ведро вмещает $4x$ кг картошки). Отходы составят $4x - 3x = x$ (кг) картошки, то есть $\frac{1}{4}$ ведра. Так как,

почистив ведро картошки, рядовой Сидоров получил $\frac{1}{4}$ ведра очисток, то 25% картошки у него идет в отходы.

4.13. Сначала узнаем, за сколько часов совместной работы рядовые Иванов и Петров почистят котел картошки — за $1 : \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} \right) = 2,4$ (ч). При

этом Иванов почистит $2,4 : 4 = 0,6$ всей картошки, $0,6 \cdot 0,1 = 0,06$ которой уйдет в очистки, а Петров почистит $1 - 0,6 = 0,4$ всей картошки, $0,4 \cdot 0,15 = 0,06$ которой уйдет в очистки. Всего в очистки у них уйдет $0,06 + 0,06 = 0,12$, или 12% всей картошки.

4.15. Пусть у гр. Владимирова акций компании «Ока» на x р. и акций компании «Киржач» на $2x$ р., всего на $3x$ р. После увеличения цен акций они будут стоить $1,6 \cdot x + 1,3 \cdot 2x = 4,2x$ (р.). Стоимость акций увеличилась на $\frac{4,2x - 3x}{3x} \cdot 100\% = 40\%$.

4.16. На 30%. **4.19.** На 11%.

4.21. *II способ.* За 1 ч совместной работы три насоса выкачивают $1 : 2 \frac{5}{60} = \frac{12}{25}$, или 48% объема бассейна, поэтому за $\frac{3}{4}$ ч три насоса выкачали бы $\frac{3 \cdot 48}{4} = 36$ (%) объема бассейна. Но совместная производитель-

ность первого и третьего насосов составляет $\frac{1+7}{1+4+7} = \frac{2}{3}$ совместной производительности трех насосов, поэтому за 45 мин совместной работы первого и третьего насосов будет откачено $\frac{36 \cdot 2}{3} = 24$ (%) объема бассейна.

4.22. 72%. **4.24.** $\frac{1}{6}$.

4.26. Выручка магазина уменьшится на 1%.

4.28. Задачу можно решить тем же способом, что и предыдущую, ведь стоимость картофеля — это произведение цены и массы (как площадь прямоугольника — это произведение его длины и ширины).

Приведем решение этой задачи из книги П.В. Чулкова «Арифметические задачи». Картофель подешевел на 20%. Следовательно, весь ранее купленный картофель можно приобрести, истратив 80% денег (рис. 17). Сложим этот картофель в мешок. Останется 20% от прежней суммы денег, значит, на оставшиеся деньги можно купить еще четверть мешка картошки, то есть 25% дополнительно.

4.29. Эта задача аналогична предыдущей. Пусть скорость поезда по расписанию v км/ч, а время движения t ч, тогда длина участка равна vt км. После уменьшения скорости на 25% она равна $\frac{3}{4}v$ км/ч. Так как расстояние одно и то же, то время движения поезда должно быть равно $\frac{4t}{3}$ ч, то есть должно увеличиться на $\frac{1}{3}t$ ч, или на $33\frac{1}{3}\%$.

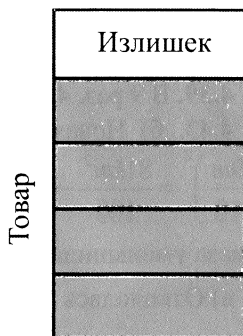


Рис. 17.

4.30. На 20%.

4.31. Пусть 1 доллар стоил a р., тогда 1 р. стоил $\frac{1}{a}$ доллара. После увеличения цены доллара в рублях на 25% он стал стоить $\frac{5a}{4}$ р. и теперь 1 р. стоит $1 : \frac{5a}{4} = \frac{4}{5a}$ (доллара). Стоимость 1 р. в долларах при этом уменьшилась на $\frac{1}{5}$ от $\frac{1}{a}$ доллара, или на 20%.

4.32. На 9%. **4.34.** На 10%.

4.36. Пусть в школе x учащихся, тогда в ней $0,45x$ мальчиков и $0,55x$ девочек. Без «троек» учатся $0,3 \cdot 0,45x = 0,135x$ (мальчиков) и $0,4 \cdot 0,55x = 0,22x$ (девочек), а всего $0,135x + 0,22x = 0,355x$, или 35,5% всех учащихся школы.

4.37. Пусть в голосовании приняли участие g женщин и m мужчин. Постановление поддержали $0,94g$ женщин и $0,41m$ мужчин, а всего $0,69(g + m)$ человек. Составим уравнение:

$$0,94g + 0,41m = 0,69(g + m),$$

из которого получим: $g = 1,12m$. Это означает, что среди голосовавших женщин было на 12% больше, чем мужчин.

4.38. Пусть год назад в школе было m мальчиков и d девочек. Теперь их $1,05m$ мальчиков и $0,96d$ девочек соответственно. По условию задачи число учащихся школы за год не изменилось. Составим уравнение:

$$m + d = 1,05m + 0,96d.$$

Выразим из этого уравнения d через m :

$$d = 1,25m.$$

Это означает, что год назад девочек в школе было на 25% больше, чем мальчиков.

4.39. В 9 раз. **4.41.** В 6 раз. **4.42.** 26%.

4.43. б) Новая стоимость куска алмаза (без осколка) составляет $k\left(\frac{9m}{10}\right)^2 = \frac{81km^2}{100}$ — это 81% его первоначальной стоимости. Стоимость алмаза уменьшилась на $100 - 81 = 19$ (%).

в) Откололась $\frac{1}{5}$ алмаза.

4.46. На 36%.

4.47. Пусть на рынке брюки стоят x р., а пиджак y р., тогда в магазине брюки стоят $1,3x$ р., а пиджак $1,15y$ р. Костюм на рынке стоил $(x + y)$ р., а в магазине $(1,3x + 1,15y)$ р., или $1,2(x + y)$ р. Составим уравнение:

$$1,3x + 1,15y = 1,2(x + y),$$

из которого получим, что $y = 2x$, то есть на рынке брюки дешевле пиджака в 2 раза.

4.50. а) На 50%; б) На 50%.

4.51. Пусть моторная лодка проплыла по реке s км, тогда по озеру она проплыла на 30% больше, то есть $1,3s$ км; пусть ее скорость в озере v км/ч, тогда ее скорость в реке на 10% меньше, то есть $0,9v$ км/ч. Время движения по реке равно $\frac{s}{0,9v}$ ч, а по озеру $\frac{1,3s}{v}$ ч. Время движения по озеру больше времени движения по реке на

$$\left(\frac{1,3s}{v} - \frac{s}{0,9v}\right) : \frac{s}{0,9v} \cdot 100\% = 17\%.$$

4.52. Пусть масса Карабаса-Барабаса равна m кг, тогда масса его бороды составляла $0,4m$ кг, а его масса без бороды — $0,6m$ кг. Пусть Буратино остриг часть бороды массой x кг, после чего масса оставшейся части бороды $(0,4m - x)$ кг стала составлять 10% его массы $(m - x)$ кг. Составим уравнение:

$$0,4m - x = 0,1(m - x),$$

из которого получим $x = \frac{1}{3}m$.

Итак, Буратино остриг $\frac{1}{3}m : 0,4m = \frac{5}{6}$ бороды Карабаса-Барабаса.

5.5. В среду.

5.6. Поскольку в задаче не сказано, что Сидор или Карп что-то выиграли, то нужно считать, что они проиграли деньги другим участникам игры. Пусть первоначально у Сидора и у Карпа было по x р. Составим уравнение:

$$x - 12 = 4(x - 57),$$

которое имеет единственный корень $x = 72$. Следовательно, первоначально у Сидора и Карпа было по 72 р.

5.7. 6 дней. **5.8.** 300 пряников и 48 учеников. **5.9.** 5 десятин и 100 р.

5.10. Галок 20 и берез 15. **5.11.** 9 и 7 шашек. **5.12.** 15 дней. **5.13.** 12 гостей. **5.14.** 70 мин и 95 мин.

5.15. Пусть первый работал x мин, тогда второй работал $(x + 11)$ мин.

При этом первый сделал $\frac{3x}{2}$ самолетика, второй — $\frac{2(x+11)}{3}$ самолетика, а вместе они сделали 29 самолетиков. Составим уравнение:

$$\frac{3x}{2} + \frac{2(x+11)}{3} = 29.$$

Оно имеет единственный корень $x = 10$. Следовательно, первый сделал $\frac{3 \cdot 10}{2} = 15$, а второй $29 - 15 = 14$ (самолетиков).

5.16. 80 км.

5.17. Пусть у торговца было первоначально x фунтов стерлингов. Тогда у него стало:

через 1 год $\frac{4}{3}(x - 100)$,

через 2 года $\frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}(x - 100) - 100\right)$,

через 3 года $\frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}(x - 100) - 100\right) - 100\right)$,

или $2x$ фунтов стерлингов. Составим уравнение:

$$\frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}(x - 100) - 100\right) - 100\right) = 2x,$$

имеющее единственный корень $x = 1480$.

Итак, у торговца было первоначально 1480 фунтов стерлингов.

5.18. Примем за единицу объем воды, налитой в бассейн за 6 ч, тогда за 1 ч в бассейн поступала $\frac{1}{6}$, а откачивалась $\frac{1}{2}$ этого объема воды. Пусть через x ч насос откачает воду из бассейна при условии, что идет дождь. Составим уравнение:

$$1 + \frac{x}{6} = \frac{x}{2},$$

откуда $x = 3$. Итак, насос откачает воду из бассейна за 3 ч при условии, что идет дождь.

5.20. Пусть сын до отдыха скошил x соток, тогда отец скошил $2x$ соток. После отдыха отец скошит оставшиеся на меньшем участке x соток, а сын в два раза меньше: $0,5x$ соток. По условию задачи известно, что один из участков больше другого на 1 сотку. Составим уравнение:

$$(2x + 0,5x) - 2x = 1,$$

откуда $x = 2$. Меньший участок имеет площадь $2 \cdot 2 = 4$ (сотки), больший $4 + 1 = 5$ (соток).

5.21. Пусть объем половины меньшего кувшина x л и сначала Сулико поставила меньший кувшин под слабую струю, а больший — под сильную. Тогда до перестановки кувшинов в меньший кувшин налилось x л, а в больший — $3x$ л воды, так как большая струя дает в 3 раза больше воды, чем меньшая за одно и то же время. На рис. 18 (а) закрашены части объемов кувшинов, заполненные до перестановки кувшинов.

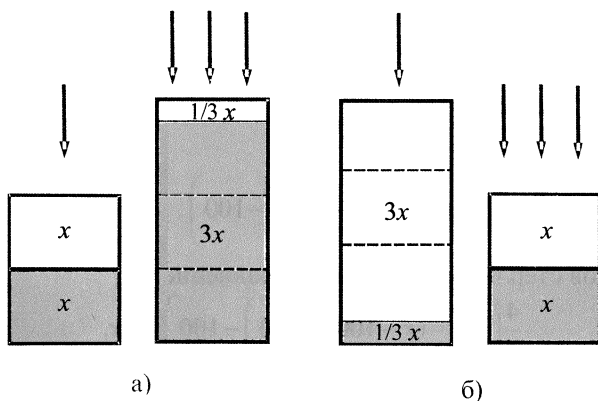


Рис. 18.

Сулико поменяла местами кувшины, и под сильной струей в меньший кувшин налилось x л воды, а в больший — в 3 раза меньше: $\frac{1}{3}x$ л.

Кувшины наполнились одновременно, их общий объем 8 л. Составим уравнение:

$$2x + 3\frac{1}{3}x = 8.$$

Его единственный корень $x = 1,5$. Следовательно, меньший кувшин вмещает $1,5 \cdot 2 = 3$ (л), а больший $8 - 3 = 5$ (л).

Убедитесь, что если сначала под слабую струю поставить больший кувшин (рис. 18 (б)), то при тех же обозначениях получится то же уравнение и тот же ответ. Но если не рассмотреть этот второй случай, то решение задачи будет неполным.

5.22. Пусть велосипедист проехал от A до B и обратно с некоторой постоянной скоростью и затратил на путь в каждый конец по t ч, а на весь путь $2t$ ч. Так как пешеход шел путь от A до B со скоростью в 2 раза меньшей скорости велосипедиста, то он затратил в 2 раза больше времени: $2t$ ч. Возвращался он со скоростью в 4 раза большей скорости велосипедиста и затратил на обратный путь в 4 раза меньше времени: $0,25t$ ч. Тогда пешеход был в пути $2t + 0,25t = 2,25t$ (ч). Так как $2,25t$ ч больше $2t$ ч на $0,5$ ч, то $2,25t - 2t = 0,5$, откуда $t = 2$, то есть велосипедист затратил на путь туда и обратно $2t = 4$ (ч), а пешеход $4 + 0,5 = 4,5$ (ч).

5.23. Ответ. 8, 12, 5, 20 р.

Для решения задачи нужно обозначить через x число рублей, которое оказалось бы у каждого студента, если бы деньги первого студента увеличить на 2 р., деньги второго уменьшить на 2 р., деньги третьего увеличить вдвое, а деньги четвертого уменьшить вдвое. Выразите через x первоначальные суммы денег, составьте уравнение и решите задачу.

5.24. Примерно 436 миль. **5.25.** Ответ. 57 яблок.

Здесь удобно обозначить через x число яблок, данных младшему брату. Заполним таблицу:

	Дано	Съели	Осталось
Младший брат	x	$3x - 12 - 42$	6
Средний брат	$3x - 12$	$2x$	
Старший брат	$3x$	$2x + 9$	

Составьте уравнение и решите задачу.

5.27. $\frac{q}{p-1}$ и $\frac{pq}{p-1}$ открыток; а) 30 и 90 открыток; б) 15 и 60 открыток.

5.28. $\frac{a}{c+1} + b$ и $\frac{ac}{c+1} - b$ книг; а) 21 и 39 книг; б) 26 и 22 книг. 5.29. $\frac{a-b}{n+1}$

$+ b + c$ и $a - b - c - \frac{a-b}{n+1}$ рабочих; а) 26 и 22 рабочих; б) 17 и 12 рабочих.

5.30. Сестре и брату $\frac{(m-1)a}{n-m}$ и $\frac{(m-1)an}{n-m}$ лет соответственно; а) 4 и 12 лет;

б) 9 и 27 лет. 5.31. $\frac{(m-1)nk}{m-n}$ лет; а) 42 года; б) 45 лет. 5.32. $\frac{a+b}{n-m}$ учащихся,

$\frac{an+bm}{n-m}$ тетрадей. 5.33. $\frac{a-b}{n-m}$ кг, $\frac{an-bm}{a-b}$ дней. 5.35. 6 ч.

5.36. В этом месте обычно раскрывают скобки и решают квадратное уравнение, хотя по смыслу задачи ясно, что x — число натуральное и существует только два соседних натуральных числа, произведение которых равно 30. Итак, $x = 6$, то есть было 6 подруг.

Если же мы решим квадратное уравнение, то получим и второй его корень (-5) , не отвечающий условию « x — натуральное число».

5.37. Пусть было x приятелей, тогда каждый должен сыграть с остальными по $(x-1)$ партии. Чтобы найти число всех партий, произведение $x(x-1)$ нужно разделить на 2, так как в нем каждая партия учтена дважды. Составим уравнение:

$$\frac{x(x-1)}{2} = 36,$$

имеющее единственный положительный корень $x = 9$. Было 9 приятелей.

5.38. Пусть в турнире участвовало x шахматистов. Они сыграли $x(x-1)$ партий и набрали $x(x-1)$ очков. Подсчитаем это количество очков иначе: $24 + 24 \cdot 2 = 72$ (очка). Составим уравнение:

$$x(x-1) = 72,$$

имеющее единственный положительный корень $x = 9$. Значит, в турнире участвовало 9 шахматистов.

5.39. Пусть даме было x лет. Составим уравнение по условию задачи:

$$x^2 = 53x - 696$$

и решим его. Беря (из вежливости) перед радикалом нижний знак, полу-

чим: $x_1 = \frac{53 - \sqrt{25}}{2} = 24$.

Итак, даме было 24 года.

5.40. 44 стопы. **5.41.** 40 стоп. **5.43.** 12. (Сравните задачи **5.42** и **5.43.**)

5.45. $5\frac{2}{3}$ локтя. **5.46.** 140 волков.

5.48. Пусть пешеходы встретились через x дней ($x > 0$). Первый прошел $10x$ миль, а второй $1 + 2 + \dots + (x - 1) + x = \frac{(1+x)x}{2}$ (миль). Сказано, что один из них прошел одну шестую берега, а другой — пять шестых, то есть один прошел в 5 раз больше, чем другой. Но мы не знаем, кто прошел больше, поэтому надо рассмотреть два случая.

$$1) 5 \cdot \frac{(1+x)x}{2} = 10x \quad \text{и} \quad 2) \frac{(1+x)x}{2} = 5 \cdot 10x.$$

Первое уравнение имеет два корня $x_1 = 0$ и $x_2 = 3$, из них только корень x_2 удовлетворяет условию $x > 0$. В этом случае пешеходы были в пути 3 дня и прошли $10 \cdot 3 + \frac{(1+3) \cdot 3}{2} = 36$ (миль).

Второе уравнение имеет два корня $x_3 = 0$ и $x_4 = 99$, из них только корень x_4 удовлетворяет условию $x > 0$. В этом случае пешеходы были в пути 99 дней и прошли $10 \cdot 99 + \frac{(1+99) \cdot 99}{2} = 5940$ (миль).

Заметим, что во втором случае пешеходы находились в пути больше трех месяцев и второй пешеход в последние дни проходил около 100 миль в день, а весь пройденный путь лишь немного меньше радиуса Земли. Возможно, составитель задачи имел в виду только первый случай, но условия задачи не позволяют исключить второй случай.

Итак, 36 миль пройдено за 3 дня или 5940 миль — за 99 дней.

5.50. 15 р.

5.51. Пусть лимон стоит x р., тогда 4 лимона стоят $4x$ р. На 25 р. можно купить $\frac{25}{x}$ лимонов. По условию задачи $4x = \frac{25}{x}$, откуда $x^2 = 6,25$. Так как $x > 0$, то $x = 2,5$, то есть лимон стоит 2,5 р.

5.52. Половина задания составляет 12 га. Пусть до дождя тракторист вспахивал по x га пашни в день. Тогда после дождя он вспахивал по $(x + 1)$ га пашни в день. До дождя он пахал $\frac{12}{x}$ дней, а после дождя $\frac{12}{x+1}$ дней — ровно на 1 день меньше, чем до дождя. Составим уравнение:

$$\frac{12}{x} - \frac{12}{x+1} = 1.$$

Это уравнение имеет лишь один положительный корень $x = 3$, поэтому после дождя тракторист вспахивал по $3 + 1 = 4$ (га) в день.

5.53. 10 км/ч. **5.54.** 10 л. **5.55.** 9 км/ч.

5.58. Пусть торговец покупает книги за x р. Тогда доход от продажи одной книги равен $(11 - x)$ р., или $\frac{(11-x) \cdot 100}{x} \%$. По условию зада-

чи $x = \frac{(11-x) \cdot 100}{x}.$

Решив это уравнение, получим его единственный положительный корень 10, то есть оптовая цена книги равна 10 р.

5.59. 24 и 20 попаданий. **5.62.** 40 мин.

5.64. I способ. Пусть второй пешеход шел до встречи t ч, он прошел $\frac{7}{16}$ всего пути. Тогда на весь путь он затратит $\frac{16}{7} t$ ч, что по условию задачи равно 7 ч. Составим уравнение:

$$\frac{16}{7} t = 7,$$

откуда $t = \frac{49}{16}$. Первый пешеход до встречи прошел $\frac{9}{16}$ пути за $t + 2 = \frac{49}{16} + 2 =$

$= \frac{81}{16}$ (ч). Значит, весь путь он пройдет за $\frac{81}{16} : \frac{9}{16} = 9$ (ч).

II способ. Построим графики движения пешеходов (рис. 19).

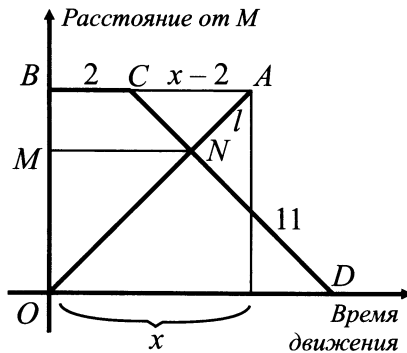


Рис. 19.

Пусть первый пешеход был в пути x ч, тогда $AB = x$, $CA = x - 2$. Второй пешеход был в пути 7 ч, значит, $OD = 7 + 2 = 9$. Из подобия треугольников ACN и ODN следует, что $\frac{CA}{OD} = \frac{BM}{MO} = \frac{7}{9}$. Составим уравнение:

$$\frac{x-2}{9} = \frac{7}{9},$$

откуда $x = 9$.

Первый пешеход пройдет весь путь за 9 ч.

5.65. В 4 раза.

5.66. Построим графики движения автомобиля AKD и мотоцикла BCM от 0 ч (рис. 20). Из условия задачи следует, что $AM = 23$, $AN = 16,5$, $CP = 3$, $KF = 7,5$, тогда $MN = 6,5$. Пусть $PD = FN = x$. Тогда из подобия двух пар треугольников CEP и MEF , DEP и KEF следует, что $\frac{CP}{MF} = \frac{DP}{KF}$. Составим уравнение:

$$\frac{3}{x+6,5} = \frac{x}{7,5}.$$

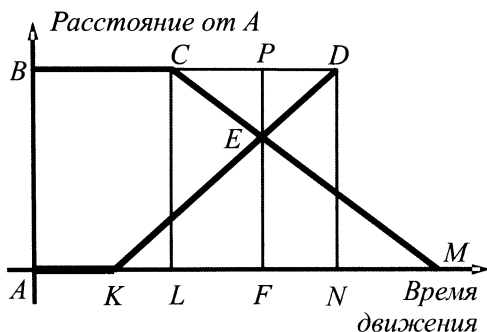


Рис. 20.

Это уравнение имеет единственный положительный корень: $x = 2,5$. Тогда время выезда мотоцикла из города A есть $16,5 - 2,5 - 3 = 11$ (ч).

5.67. Рассмотрим случаи встречи в месте соединения шоссе и грунтовой дороги, на грунтовой дороге и на шоссе.

Предположим, что машины встретились в точке C — в месте соединения шоссе и грунтовой дороги (рис. 21). Тогда за 1,5 ч они проехали $1,5 \cdot 80 + 1,5 \cdot 50 = 195$ (км). То есть через 1,5 ч после начала движения автомобили еще не встретились, следовательно, этот случай не соответствует условиям задачи.

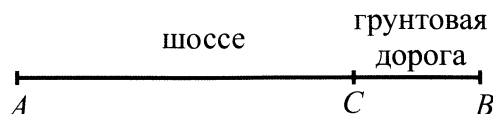


Рис. 21.

Предположим теперь, что машины встретились на грунтовой дороге в точке D (рис. 22). Тогда за 1,5 ч первая машина проехала меньше 120 км, так как часть пути (CD) она ехала со скоростью, меньшей, чем в рассмотренном выше случае, а второй автомобиль за 1,5 ч проехал 75 км. То есть через 1,5 ч после начала движения автомобили еще не встретились, следовательно, и этот случай не соответствует условиям задачи.



Рис. 22.

Осталось рассмотреть последний случай. Пусть машины встретились на шоссе в точке D (рис. 23). Тогда за 1,5 ч первая машина проехала $1,5 \cdot 80 = 120$ (км). Обозначим через x км расстояние DC , тогда расстояние CB равно $200 - 120 - x = 80 - x$ (км).

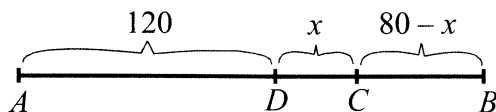


Рис. 23.

Составим уравнение, вычислив время движения второй машины до встречи:

$$\frac{80 - x}{50} + \frac{x}{60} = \frac{3}{2}.$$

Решив его, получим единственный корень $x = 30$. Теперь ответим на вопрос задачи. Первый автомобиль был в пути $\frac{3}{2} + \frac{30}{80} + \frac{50}{60} = 2\frac{17}{24}$ (ч), а второй $\frac{3}{2} + \frac{120}{60} = 3\frac{1}{2}$ (ч). Второй автомобиль был в пути дольше первого на $3\frac{1}{2} - 2\frac{17}{24} = \frac{19}{24}$ (ч).

5.69. Кувшины I, II, III наполнялись равномерно, изобразим графики этих процессов (рис. 24). Когда количества воды в двух первых кувшинах сравнивались (графики I и II пересекались в точке A), в третьем кувшине было на 3 л воды меньше, чем во втором. Когда же количества воды в первом и в третьем кувшинах сравнивались (графики I и III пересекались в точке B), в первом кувшине было на 1 л воды меньше, чем во втором. Пусть в тот момент, когда количества воды во втором и в третьем кувшинах сравнивались, в первом кувшине было на x л воды меньше, чем в третьем.

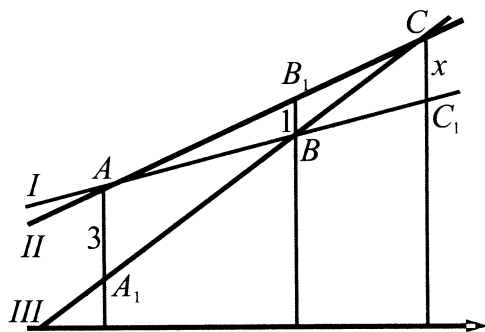


Рис. 24.

Из подобия треугольников ACC_1 и AB_1B следует, что $\frac{AC_1}{AB} = \frac{x}{1}$, тогда
$$x = \frac{AB + BC_1}{AB} = 1 + \frac{BC_1}{AB}.$$

А из подобия треугольников ABA_1 и C_1BC следует, что $\frac{BC_1}{AB} = \frac{x}{3}$. Составим уравнение:

$$x = 1 + \frac{x}{3},$$

откуда $x = 1,5$.

Итак, когда количества воды во втором и в третьем кувшинах сравнялись, в первом кувшине было на 1,5 л воды меньше, чем в третьем.

5.72. Умножив уравнение на отличное от нуля произведение $y(2-x)$, получим квадратное уравнение:

$$x^2 - 2x + 2y - y^2 = 0.$$

Решив его относительно x , получим: $x_1 = y$, $x_2 = 2 - y$, но x_1 не удовлетворяет условию $x > y$. Поэтому $x = 2 - y$, откуда $x + y = 2$.

Но проще сначала выполнить такие преобразования:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 2y - y^2 &= 0, \\ (x - y)(x + y) - 2(x - y) &= 0, \\ (x - y)(x + y - 2) &= 0. \end{aligned}$$

Из условия задачи следует, что $x - y \neq 0$, тогда $x + y - 2 = 0$, откуда $x + y = 2$. Мы получили ответ на вопрос задачи: до обмена бидонами ребята собрали 2 л ягод.

Ученик школы № 679 г. Москвы Просин Д. решил эту задачу без уравнения. Брат должен поменяться с сестрой бидонами в тот момент, когда ему останется собрать ровно столько ягод, сколько к этому моменту собрала сестра. Тогда после обмена бидонами каждый из них соберет столько же ягод, сколько и до обмена, а вместе — ровно половину от объема двух бидонов, т.е. 2 л.

5.73. Это редкая текстовая задача, в которой вообще нет числовых данных. Рассуждая, как в предыдущей задаче, приходим к выводу: дед должен поменяться с внуком лукошками в тот момент, когда ему останется собрать ровно столько ягод, сколько к этому моменту собрал внук.

5.74. Пусть сначала брат собрал x , а сестра 2 л ягод. Из условия задачи следует, что $x > 2$. После обмена корзинами брат набрал еще 2 л, а сестра $(5 - x)$ л ягод. Брат собирал ягоды быстрее сестры в одно и то же число раз до и после обмена корзинами, поэтому

$$\frac{x}{2} = \frac{2}{5 - x}.$$

Это уравнение имеет два корня: $x_1 = 4$ и $x_2 = 1$, но число x_2 не удовлетворяет условию $x > 2$, поэтому сначала брат собрал 4 л ягод. Всего брат собрал $4 + 2 = 6$ (л) ягод.

5.75. Сестра до обмена бидонами собрала $\frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}$ (л) малины. Пусть до обмена бидонами брат собрал x л малины ($x > \frac{4}{3}$), тогда после обмена бидонами брат собрал $1 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$ (л), а сестра $(3 - x)$ л малины. Так как брат работал быстрее сестры в одно и то же число раз, то верно равенство:

$$x : \frac{4}{3} = \frac{2}{3} : (3 - x).$$

Решив это уравнение, получим два его корня: $x_1 = \frac{8}{3}$ и $x_2 = \frac{1}{3}$. Число x_2 не удовлетворяет условию $x > \frac{4}{3}$. Тогда брат работает быстрее сестры в $\frac{8}{3} : \frac{4}{3} = 2$ раза.

5.76. Пусть площади лугов пропорциональны числам 8 и 7 с коэффициентом k и равны $8k$ и $7k$ некоторых единиц площади. Пусть сначала сын скошил y тех же единиц площади ($y > 3,5k$), из условия задачи следует, что сначала отец скошил $6k$ ед. После отдыха отец скошил $(7k - y)$ ед., а сын — оставшиеся $2k$ ед. Отец косил в $\frac{6k}{y}$, или в $\frac{7k - y}{2k}$ раза быстрее сына. Приравняв дроби и решив полученное уравнение относительно y , получим корни: $y_1 = 3k$ и $y_2 = 4k$. Корень y_1 не удовлетворяет условию $y > 3,5k$. Значит, $y = 4k$. Теперь получим ответ: отец работает в $\frac{6k}{y} = \frac{6k}{4k} = 1,5$ раза быстрее сына.

5.77. Задачу нетрудно свести к квадратному уравнению. Два корня уравнения соответствуют двум возможностям — поставить меньший кувшин сначала под сильную струю или под слабую. Но в обоих случаях ответ на вопрос задачи один и тот же: одна струя дает в 2 раза больше воды, чем другая.

5.79. Пусть скорость теплохода x м/с, тогда катер приближался к носу теплохода со скоростью $(v - x)$ м/с, а потом приближался к корме

со скоростью $(v + x)$ м/с, затратив на путь туда и обратно $\frac{l}{v - x} + \frac{l}{v + x}$,

или t с. Составим уравнение:

$$\frac{l}{v - x} + \frac{l}{v + x} = t,$$

которое нужно решить относительно x . Перепишем уравнение в виде:

$$\frac{tv^2 - tx^2 - 2lv}{v^2 - x^2} = 0.$$

Числитель дроби в левой части уравнения равен нулю при

$x = \pm \sqrt{\frac{tv^2 - 2lv}{t}}$, при этом знаменатель этой дроби отличен от нуля,

так как $v > x$. Но по смыслу задачи скорость положительна, поэтому

$$x = \sqrt{\frac{tv^2 - 2lv}{t}}.$$

Итак, скорость теплохода равна $\sqrt{\frac{tv^2 - 2lv}{t}}$ м/с.

5.80. Заметим, что в задаче не сказано, в каком направлении движется теплоход (по течению или против течения реки). Убедимся, что ответ от этого не зависит.

В самом деле, пусть скорость теплохода x м/с, а скорость течения y м/с. Если теплоход движется по течению, то катер сначала приближался к носу теплохода со скоростью $(v + y) - (x + y) = v - x$ (м/с), а потом приближался к корме со скоростью $(v - y) + (x + y) = v + x$ (м/с).

Если же теплоход движется против течения, то катер сначала приближался к носу теплохода со скоростью $(v - y) - (x - y) = v - x$ (м/с), а потом приближался к корме со скоростью $(v + y) + (x - y) = v + x$ (м/с). Это означает, что дальше решение задачи полностью повторяет решение задачи **5.79**.

5.82. Эта задача уже решена в общем виде (см. **5.81**), остается в полученную формулу подставить $l = 5$ и $s = 12$.

Итак, связной прошел $l + \sqrt{l^2 + s^2} = 5 + \sqrt{5^2 + 12^2} = 18$ (км).

6.2. 6 к. **6.5.** 45%. **6.6.** 5%. **6.7.** $42\frac{2}{3}$ градуса. **6.8.** 80-й пробы.

6.9. Сначала определим массу цинка в полученном сплаве: $\frac{3}{7} \cdot 140 + \frac{3}{5} \cdot 150 = 150$ (кг). По условию задачи меди он содержал на 20 кг больше, то есть 170 кг. Тогда масса полученного сплава равна $150 + 170 = 320$ (кг).

6.11. Если сплавить первый слиток со вторым, то процент меди в полученном сплаве будет в 2 раза меньше, чем он был в первом слитке. Так как во втором сплаве меди нет, то уменьшение процентного содержания меди в 2 раза возможно лишь при условии, что масса нового сплава в 2 раза больше массы первого слитка. Тогда массы двух первых слитков равны, обозначим их m г.

Если сплавить второй слиток с третьим, то процент никеля в полученном сплаве будет в 3 раза меньше, чем он был во втором слитке. Так как в третьем сплаве никеля нет, то уменьшение процентного содержания никеля в 3 раза возможно лишь при условии, что масса нового сплава в 3 раза больше массы второго слитка. Тогда масса третьего слитка в 2 раза больше массы второго, обозначим массу третьего слитка $2m$ г.

Теперь можно определить, какой процент цинка будет содержать слиток, полученный при сплавлении всех трех слитков:

$$\frac{(0,1m + 0,07 \cdot 2m) \cdot 100\%}{m + m + 2m} = 6\%.$$

6.15. 1,5 кг. **6.16.** 100 г.

6.18. Чтобы уменьшить процентное содержание уксуса в растворе в $40 : 10 = 4$ (раза), надо массу раствора увеличить в 4 раза. Масса нового раствора должна составить $1,5 \cdot 4 = 6$ (кг). Нужно добавить $6 - 1,5 = 4,5$ (кг) воды.

6.19. 400 г. **6.20.** $9\frac{3}{8}$ фунта меди. **6.21.** 64 г. **6.23.** $\frac{(p - p_2)m}{p_1 - p_2}$ г и

$\frac{(p_1 - p)m}{p_1 - p_2}$ г. **6.24.** 24 и 8 фунтов. **6.25.** 20 кг по 90 центов и 30 кг по

60 центов. **6.30.** 40°C . **6.31.** 55°C . **6.32.** От 35°C до 50°C .

6.34. Пусть масса второго сплава x кг, тогда масса первого сплава $(x + 3)$ кг. В двух сплавах было $0,1(x + 3) + 0,4x = 0,5x + 0,3$ (кг) цинка, а в новом сплаве $0,2(x + 3 + x) = 0,4x + 0,6$ (кг) цинка. Составим уравнение:

$$0,5x + 0,3 = 0,4x + 0,6.$$

Решив это уравнение, получим его единственный корень $x = 3$. Масса нового сплава равна $x + 3 + x = 9$ (кг).

6.36. Пусть было взято x л второго раствора. Тогда в новом растворе содержалось $0,1 \cdot 20 + 0,3x = 2 + 0,3x$ (л) щелочи и $0,9 \cdot 20 + 0,7x + 10 = 28 + 0,7x$ (л) воды.

Так как объем воды был в 2,5 раза больше объема щелочи, то

$$2,5 \cdot (2 + 0,3x) = 28 + 0,7x.$$

Решив полученное уравнение, найдем значение $x = 460$.

Итак, второго раствора надо было взять 460 л.

6.37. Пусть надо взять x л 60%-го раствора кислоты, тогда, приравняв количества кислоты во взятых растворах и в полученном растворе, составим уравнение:

$$0,6x + 0,4 \cdot 12 = 0,36 \cdot (x + 12 + 4).$$

Это уравнение имеет единственный корень $x = 4$. Следовательно, надо взять 4 л 60%-го раствора кислоты.

6.38. Раствор содержал $0,4 \cdot 4 + 0,6 \cdot 6 = 5,2$ (л) кислоты, а концентрация кислоты в растворе составляла $\frac{5,2 \cdot 100\%}{4 + 6} = 52\%$. Пусть было вылит

x л раствора, содержащего 0,52 x л кислоты, и добавлено x л воды. Новый раствор содержал $5,2 - 0,52x$, или $0,39 \cdot 10 = 3,9$ (л) кислоты. Составим уравнение:

$$5,2 - 0,52x = 3,9.$$

Это уравнение имеет единственный корень $x = 2,5$. Следовательно, было добавлено 2,5 л воды.

6.39. Пусть нужно взять x кг первого и $(8 - x)$ кг второго сплава. Выразим через x массу золота в новом сплаве: $\frac{2}{5}x + \frac{3}{10}(8 - x) = 0,1x + 2,4$ (кг).

Выразим через x массу серебра в новом сплаве:

$$\frac{3}{5}x + \frac{7}{10}(8 - x) = 5,6 - 0,1x \text{ (кг)}.$$

Пользуясь тем, что массы золота и серебра в новом сплаве находятся в отношении 5 : 11, составим уравнение:

$$\frac{0,1x + 2,4}{5} = \frac{5,6 - 0,1x}{11},$$

имеющее единственный корень $x = 1$.

Тогда от первого сплава надо взять 1 кг, а от второго 7 кг.

7.2. Поровну.

7.4. Пусть цена 1 л вина в первом бочонке a р., а во втором — b р. и пусть из каждого бочонка перелили в другой по x л вина. Тогда цена 1 л вина в первом бочонке составит $\frac{a(40-x) + bx}{40}$ р., а во втором бочонке $\frac{ax + b(10-x)}{10}$ р. По условию задачи цены вина в бочонках после перели-

вания сравнялись. Составим уравнение:

$$\frac{a(40-x) + bx}{40} = \frac{ax + b(10-x)}{10}.$$

Умножив уравнение на 40, после преобразований получим уравнение

$$x(a-b) = 8(a-b),$$

равносильное исходному.

Так как по условию задачи цены a и b различны, то $a-b \neq 0$, и поэтому $x = 8$. Следовательно, чтобы цены вина за литр в двух бочонках сравнялись, нужно взять из каждого бочонка и перелить в другой по 8 л вина.

И здесь уравнение могло бы быть более простым, если бы мы одну из дробей в уравнении заменили числом $\frac{40a+10b}{40+10} = \frac{4a+b}{5}$, выражающим (в рублях) цену 1 л вина после переливания.

7.5. $\frac{mn}{m+n}$ л.

7.7. Пусть первый раз отлили x л спирта, осталось $20-x = 20\left(1-\frac{x}{20}\right)$

(л) спирта. Когда сосуд долили водой, доля оставшегося спирта (по объему) составляла $1-\frac{x}{20}$. Во второй раз вместе с x л раствора вылили

$x\left(1-\frac{x}{20}\right)$ л спирта, а в сосуде осталось

$$20\left(1-\frac{x}{20}\right) - x\left(1-\frac{x}{20}\right) = (20-x)\left(1-\frac{x}{20}\right) = 20\left(1-\frac{x}{20}\right)^2.$$

Когда сосуд еще раз долили водой, то доля спирта (по объему) составила $\left(1-\frac{x}{20}\right)^2$, или 0,64. Составим уравнение: $\left(1-\frac{x}{20}\right)^2 = 0,64$.

Так как по смыслу задачи $1 - \frac{x}{20} > 0$, то $1 - \frac{x}{20} = 0,8$, откуда $x = 4$.

Итак, из сосуда в первый раз отлили 4 л спирта.

7.8. 16 л. **7.10.** 4 л. **7.12.** 20 или 30 л.

7.15. В баке содержалось $0,75 \cdot 20 = 15$ (л) спирта, а в ведре и в баке вместе содержалось $10 + 15 = 25$ (л) спирта. После двух переливаний в ведре оказалось $0,9 \cdot 10 = 9$ (л) спирта, а в баке $25 - 9 = 16$ (л) спирта.

Доля спирта в баке составляла $\frac{16}{20}$, поэтому перелитый в ведро раствор содержал $0,8x$ л спирта. Тогда после двух переливаний в баке осталось $15 + x - 0,8x = 15 + 0,2x$ (л) спирта. Составим уравнение:

$$15 + 0,2x = 16,$$

откуда $x = 5$, следовательно, из ведра в бак перелили 5 л спирта.

7.16. Пусть V — объем первого бака ($V > 2$), тогда $4V$ — объем второго бака. Объем глицерина, оставшегося после первого переливания в первом баке, равен $V - 2$, доля глицерина в первом баке составляла $\frac{V-2}{V}$, а во втором баке — $\frac{2}{4V}$, поэтому во второй раз из первого бака взяли $\frac{2(V-2)}{V} = 2 - \frac{4}{V}$ (л), а из второго бака — $\frac{2 \cdot 2}{4V} = \frac{1}{V}$ (л).

Объем глицерина, оказавшегося после двух переливаний в первом баке, равен $V - 2 - 2 + \frac{4}{V} + \frac{1}{V} = \frac{V^2 - 4V + 5}{V}$ (л), или $0,4V$ л. Составим уравнение: $\frac{V^2 - 4V + 5}{V} = 0,4V$.

Это уравнение имеет два корня: $\frac{5}{3}$ и 5, но так как $V > 2$, то $V = 5$, тогда

$$V + 4V = 25.$$

Итак, суммарный объем баков 25 л.

8.3. Пусть оба раза выпуск продукции увеличивался на $p\%$. Тогда справедливо равенство:

$$600 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^2 = 726.$$

Учитывая, что выражение в скобках положительное, имеем:

$$1 + \frac{p}{100} = 1,1,$$

откуда $p = 10$, то есть оба раза выпуск продукции увеличивался на 10%.

8.4. Рассуждая, как и в предыдущем случае, мы приходим к уравнению:

$$8000 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 = 6480,$$

откуда получим, что $p = 10$. Цену холодильника уменьшали оба раза на 10%.

8.5. На 25%.

8.6. Пусть зарплату повышали первый раз на $p\%$, тогда во второй — на $2p\%$. После первого повышения зарплата составила $7000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) p.$,

а после второго — $7000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \left(1 + \frac{2p}{100}\right) p.$, что составляет 9240 p.

Составим уравнение:

$$7000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \left(1 + \frac{2p}{100}\right) = 9240.$$

Разделив уравнение на 7000 и введя новое неизвестное $x = \frac{p}{100}$, перепишем уравнение в виде

$$(1 + x)(1 + 2x) = 1,32.$$

Это уравнение имеет единственный положительный корень $x = 0,1$, следовательно, $p = 10$.

Итак, заработная плата повышалась в первый раз на 10%.

8.7. На 20%, на 30%.

8.8. Пусть акции компании A , стоившие a p., в понедельник подорожали на $p\%$, а во вторник подешевели на $p\%$. Тогда они стали стоить

$a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \left(1 - \frac{p}{100}\right) = a \cdot \left(1 - \frac{p^2}{10000}\right) (p.).$ По условию задачи они стали

стоить на 16% дешевле, то есть $a \cdot \left(1 - \frac{16}{100}\right) p.$ Составим уравнение:

$$a \cdot \left(1 - \frac{p^2}{10000}\right) = a \cdot \left(1 - \frac{16}{100}\right).$$

Разделив обе части уравнения на неравное нулю число a , получим уравнение

$$1 - \frac{p^2}{10000} = 1 - \frac{16}{100},$$

имеющее единственный положительный корень $p = 40$.

Следовательно, акции компании A подорожали в понедельник на 40%.

8.9. 4%. **8.10.** 6%.

8.12. Если первоначальная стоимость товара a р., то справедливо неравенство:

$$a \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \left(1 - \frac{q}{100}\right) \geq a \cdot \left(1 + \frac{d}{100}\right),$$

из которого следует, что $q \leq \frac{100(p-d)}{100+p}$. Поэтому $q_{\text{наиб}} = \left\lfloor \frac{100(p-d)}{100+p} \right\rfloor$.

а) Если $p = 30$, $d = 10$, то $q_{\text{наиб}} = \left\lfloor \frac{100(p-d)}{100+p} \right\rfloor = 15$ (%).

б) $p = 25$, $d = 10$, то $q_{\text{наиб}} = \left\lfloor \frac{100(p-d)}{100+p} \right\rfloor = 12$ (%).

8.14. Стоимость акций за 5 месяцев увеличилась в $1,15^5$ или примерно в 2 раза.

8.16. Нужно внести изменение в строке 20 программы **8.15**:

20 IF 1.03^N>=2 GOTO 40

После запуска программы получим

Ответ: число лет для удвоения суммы 24.

Задачу можно решить и с помощью калькулятора.

8.17. Через 5 лет.

8.22. Сначала следует выступить в газете, а уж потом увеличивать число своих сторонников (1000) с каждым выступлением на радио и телевидении в 1,4 и в 1,8 раз соответственно (последовательность не важна).

Пусть кандидат в депутаты выступит в любом порядке r раз по радио и t раз по телевидению. От этого число его сторонников увеличится в $n = 1,4^r \cdot 1,8^t$ раз, но расходы за всю кампанию не должны превысить 112 тыс. р., то есть должно выполняться неравенство:

$$32r + 47t \leq 112.$$

Вычислим «показатель эффективности» избирательной кампании n , выбирая наибольшее значение r для каждого из трех возможных значений t :

$t = 0$	$r = 3$	$n = 1,8^0 \cdot 1,4^3 = 2,744$
$t = 1$	$r = 2$	$n = 1,8^1 \cdot 1,4^2 = 3,528$
$t = 2$	$r = 0$	$n = 1,8^2 \cdot 1,4^0 = 3,24$

Как видно из таблицы, наибольшее значение n получится при $t = 1$ и $r = 2$, то есть после выступления в газете нужно в любом порядке 1 раз выступить по телевидению и 2 раза по радио.

8.23. Сначала следует сделать рекламную акцию на телевидении, а затем в любом порядке 2 раза увеличить зарплату налоговой полиции и 1 раз увеличить штат налоговых инспекторов.

9.3. Пусть было m мальчиков и d девочек, составим уравнения:

$$3m + 2d + 2 = 35 \text{ и } 3,5m + 1,5d + 1,5 = 35.$$

Решив систему двух уравнений с двумя неизвестными, получим единственное ее решение: $m = 7$; $d = 6$.

Итак, было 7 мальчиков и 6 девочек.

9.4. 8 мужчин и 15 женщин. **9.5.** 6 собак и 4 кошки. **9.7.** 75 аршин черного и 63 аршина синего сукна. **9.8.** 400 г. **9.9.** 1 м³ березовых дров весит 0,72 т, 1 м³ сосновых дров весит 0,48 т. **9.10.** 1 фунт первого и 1 фунт второго сорта стоят 2,7 дая и 3,9 дая. **9.11.** Слиток золота весит 35,75 лана, а слиток серебра — 29,25 лана. **9.12.** 18 коров по 18 р. и 26 коров по 26 р. **9.13.** 100 старых баранов и 12 молодых. **9.14.** 5 человек.

9.16. Пусть в мехах у осла x ведер вина, а у ослицы y ведер. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x - 1 = y + 1, \\ x + 1 = 2(y - 1). \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем ее единственное решение: $x = 7$, $y = 5$.

Следовательно, у осла было 7 ведер вина, а у ослицы 5 ведер.

9.17. Пусть мама сначала дала детям по 4 конфеты. Если она станет раздавать оставшиеся 3 конфеты, то трем детям хватит еще по одной (пятой) конфете, а двум — не хватит, значит, всего детей: $3 + 2 = 5$.

9.18. Начнем с арифметического решения. Пусть детям раздали по 1 тетради, осталось 36. Если добавить еще 12 тетрадей, то можно будет раздать еще $36 + 12 = 48$ (тетрадей) — по 2 тетради каждому ребенку ($3 - 1 = 2$). Всего детей было $48 : 2 = 24$, а тетрадей $24 + 36 = 60$.

Алгебраическое решение приводит к уравнению $x + 36 = 3x - 12$, где x — число учащихся, или к системе

$$\begin{cases} y - x = 36, \\ 3x - y = 12, \end{cases}$$

где x — число учащихся, y — число тетрадей.

9.19. Было 7 человек, 53 — стоимость вещи. **9.20.** 11 бедных.

9.21. Пусть было x убогих и y пенязей. Составим два уравнения:

$$3x - y = 3 \cdot 3 \text{ и } y - 2x = 4 \cdot 2.$$

Решив систему двух уравнений с двумя неизвестными, получим ее единственное решение: $x = 17$, $y = 42$.

Итак, было 17 убогих, 42 пенязя, каждому досталось по 2 пенязя.

9.22. Было 9 человек, 70 — стоимость курицы. **9.23.** Было 126 семей, 3750 — стоимость буйвола. **9.24.** 650 р. **9.25.** 18 р. 20 к. **9.26.** За 1 день.

9.27. Пусть машинистка должна печатать по x листов в день в течение y дней. Тогда всех листов было xy . Подсчитаем это количество другими способами: $(x + 2)(y - 3)$ и $(x + 4)(y - 5)$. Составим систему:

$$\begin{cases} (x + 2)(y - 3) = xy, \\ (x + 4)(y - 5) = xy. \end{cases}$$

После упрощения получим систему линейных уравнений, единственное решение которой: $x = 8$, $y = 15$. Так как $xy = 120$, то за 15 дней машинистка должна напечатать 120 листов.

9.28. Пусть для x коров заготовлено сена на y дней. Запишем коротко условие задачи:

Число коров	Число дней
x	y
$x - 20$	$y + 10$
$x + 30$	$y - 10$

Так как при постоянном запасе сена число дней обратно пропорционально числу коров, то справедливы равенства:

$$\frac{x}{x - 20} = \frac{y + 10}{y} \text{ и } \frac{x + 30}{x} = \frac{y}{y - 10}.$$

Решив систему двух уравнений, получим ее единственное решение: $x = 120$, $y = 50$.

Итак, для 120 коров было запасено сена на 50 дней.

9.29. Пусть для x коров на y дней запасено по z кг сена на день, то есть всего $x y z$ кг. Весь запас сена (в килограммах) подсчитаем еще двумя способами:

$$(x - 20) \cdot (y + 20) \cdot z \text{ и } x \cdot (y + 15) \cdot 0,8z.$$

Составим систему из двух уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} (x - 20)(y + 20)z = x y z, \\ x(y + 15)0,8z = x y z. \end{cases}$$

Разделив первое уравнение на z , а второе уравнение на xz ($xz \neq 0$), получим систему:

$$\begin{cases} (x - 20)(y + 20) = xy, \\ (y + 15)0,8 = y, \end{cases}$$

имеющую единственное решение $x = 80, y = 60$.

Следовательно, для 80 коров было запасено сена на 60 дней.

9.31. 1,2 кг и 2,4 кг. **9.32.** В 1,5 раза.

9.33. Дворники получили по одному предмету и осталось 14 метел. Если бы было еще 10 грабель, то всех 24 предметов ($14 + 10 = 24$) хватило бы, чтобы раздать каждому дворнику еще по одному предмету. Это означает, что дворников было 24. Так как при второй раздаче предметов каждому дворнику хватило бы по метле (и метел не осталось бы), то метел было столько же, сколько дворников — 24. Тогда грабель было $24 - 10 = 14$.

9.35. Пусть у первого было x р., у второго y р., у третьего z р. Составим систему уравнений

$$\begin{cases} x + \frac{2}{4}y + \frac{3}{5}z = 150, \\ \frac{5}{7}x + y + \frac{3}{5}z = 150, \\ \frac{5}{7}x + \frac{2}{4}y + z = 150. \end{cases}$$

Решив систему уравнений, получим: $x = 87\frac{1}{2}, y = 50, z = 62\frac{1}{2}$. Следовательно-

но, у первого, второго и третьего было $87\frac{1}{2}$ р., 50 р., $62\frac{1}{2}$ р. соответственно.

9.36. 5, 11 и 13 р.

9.37. Пусть у первого, второго и третьего было x, y и z флоринов соответственно.

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 12, \\ \frac{1}{3}x + y + \frac{1}{3}z = 12, \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + z = 12. \end{cases}$$

Решив систему уравнений, получим: $x = 3\frac{9}{17}$, $y = 7\frac{13}{17}$, $z = 9\frac{3}{17}$. Следовательно, у первого, второго и третьего были $3\frac{9}{17}$, $7\frac{13}{17}$ и $9\frac{3}{17}$ флоринов соответственно.

9.38. Пусть мера пшеницы, ячменя и овса стоит соответственно x , y , z шиллингов (1 фунт = 20 шиллингам). Составим систему уравнений по условиям задачи:

$$\begin{cases} 40x + 24y + 20z = 312, \\ 26x + 30y + 50z = 320, \\ 24x + 120y + 100z = 680. \end{cases}$$

Решив систему, получим ее единственное решение: $x = 5$, $y = 3$, $z = 2$. Это означает, что 1 мера пшеницы, ячменя и овса стоит 5, 3 и 2 шиллинга соответственно.

9.40. В 5 раз.

9.41. Пусть c р. — цена 1 кг бананов, а m кг — масса купленных бананов. Составим систему уравнений по условиям задачи:

$$\begin{cases} [c] \cdot [m] = 8, \\ [c] \cdot \{m\} = 2, \\ \{c\} \cdot [m] = 1. \end{cases}$$

В системе три уравнения и четыре неизвестных, нужно найти cm .

$$\begin{aligned} cm &= ([c] + \{c\}) \cdot ([m] + \{m\}) = \\ &= [c] \cdot [m] + [c] \cdot \{m\} + \{c\} \cdot [m] + \{c\} \cdot \{m\} = \\ &= 8 + 2 + 1 + \{c\} \cdot \{m\} = 11 + \{c\} \cdot \{m\}. \end{aligned}$$

Осталось найти $\{c\} \cdot \{m\}$. Перемножив почленно второе и третье уравнения системы и учитывая, что $[c] \cdot [m] = 8$, получим:

$$\begin{aligned} [c] \cdot \{c\} \cdot \{m\} \cdot [m] &= 2, \\ 8 \cdot \{c\} \cdot \{m\} &= 2, \\ \{c\} \cdot \{m\} &= 0,25. \end{aligned}$$

Теперь найдем стоимость покупки: $cm = 11 + 0,25 = 11,25$.

Итак, стоимость купленных бананов 11,25 р.

9.42. 52,8. **9.45.** 10 коров.

9.46. Пусть первоначальный объем травы на лугу t ед., ежедневно прирастает x ед. травы, каждая корова съедает в день y ед. травы (объем травы измеряется некоторой общей для всех величин единицей). Чтобы коровы могли пастись на лугу постоянно, они должны съедать каждый день столько травы, сколько ее вырастает за день. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} t + 14x = 14 \cdot 60 \cdot y, \\ t + 28x = 28 \cdot 50 \cdot y. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получим: $14x = 560y$, откуда $x = 40y$.

Последнее равенство показывает, что за 1 день вырастает столько травы, сколько ее съедают за это время 40 коров. Итак, 40 коров могут пастись на лугу постоянно, пока растет трава. Если коров будет больше, то они будут съедать за день не только прирастающую траву, но и некоторую часть первоначального запаса травы. И через некоторое время травы станет не хватать.

9.47. Пусть первоначальный запас травы на каждом югере равен t ед. (здесь и далее объем травы измеряется некоторой общей для всех величин единицей). В день вырастает на каждом югере x ед., а 1 бык съедает в день y ед. травы. Пусть b быков за 18 недель съедят всю траву на лугу в 24 югера. На лугу в $3\frac{1}{3}$ югера первоначальный запас травы

составлял $3\frac{1}{3}t$ ед., выросло за 4 недели $3\frac{1}{3} \cdot 4x = 13\frac{1}{3}x$ ед., весь этот объем

травы быки съели. Но 12 быков за 4 недели съели $12 \cdot 4y = 48y$ ед. травы. Составим уравнение:

$$3\frac{1}{3}t + 13\frac{1}{3}x = 48y.$$

Аналогично составим уравнения для второго и третьего лугов, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3\frac{1}{3}t + 13\frac{1}{3}x = 48y, \\ 10t + 90x = 189y, \\ 24t + 432x = 18by. \end{cases}$$

Решая систему трех уравнений с четырьмя неизвестными, мы не сможем найти значения всех неизвестных, но это и не требуется. Преобразуем уравнения системы:

$$\begin{cases} 10t + 40x = 144y, \\ 10t + 90x = 189y, \\ 10t + 180x = 7,5by. \end{cases}$$

Вычитая второе уравнение системы из первого, а затем из третьего, получим:

$$\begin{cases} 50x = 45y, \\ 90x = (7,5b - 189)y. \end{cases}$$

Так как по смыслу задачи $x > 0$ и $y > 0$, то разделив почленно второе уравнение на первое, получим: $\frac{9}{5} = \frac{7,5b - 189}{45}$, откуда $b = 36$.

Итак, 36 быков съедят траву на 24 югерах пастбища за 18 недель.

9.48. 80 р. и 120 р. **9.50.** 35%. **9.51.** 20 и 12 км/ч. **9.52.** За 16 дней.

9.53. Пусть линий первого, второго и третьего типов было x , y и z соответственно. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 100x + 400y + 30z = 1030, \\ 19x + 69y + 5z = 181. \end{cases}$$

Нас интересуют натуральные решения системы, удовлетворяющие условию $x + y + z \leq 10$. Разделим первое уравнение системы на 10, получим: $10x + 40y + 3z = 103$. Так как x, y, z — натуральные числа, то z может быть равно только 1 (так как $z < 10$). Перепишем систему, полагая $z = 1$.

$$\begin{cases} x + 4y = 10, \\ 19x + 69y = 176. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение: $x = 2, y = 2$. Итак, линий первого, второго и третьего типов было 2, 2 и 1.

9.54. Пусть 1 кг картофеля, свеклы, моркови и капусты стоят x, y, z и k р. соответственно. По условиям задачи составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 10x + 15y + 10z + 14k = 528, \\ 15x + 6y + 4z + 21k = 550. \end{cases}$$

Очевидно, что найти все решения этой системы не удастся, так как неизвестных больше, чем уравнений, но можно найти такие два числа a и b , что умножив первое уравнение системы на a , вто-

рое уравнение системы на b , получим после сложения полученных уравнений такое уравнение, левая часть которого равна $20x + 12y + 8z + 28k$. Тогда в правой части этого уравнения будет стоять искомая стоимость покупки. Для поиска a и b решим систему:

$$\begin{cases} 10a + 15b = 20, \\ 15a + 6b = 12. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение: $a = \frac{4}{11}$, $b = \frac{12}{11}$. Так как

после умножения первого уравнения системы на a , второго уравнения на b и сложения полученных уравнений верно равенство

$$20x + 12y + 8z + 28k = 792,$$

то 20 кг картофеля, 12 кг свеклы, 8 кг моркови и 28 кг капусты стоят 792 р.

9.55. 1293 кг. **9.57.** 12, 24 и 48%.

9.60. Пусть x , y и z — расстояния, которые пароход проходит по первой реке, по второй реке и по озеру соответственно. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x}{v+v_1} + \frac{z}{v} + \frac{y}{v-v_2} = t, \\ \frac{x}{v-v_1} + \frac{z}{v} + \frac{y}{v+v_2} = t, \\ x + y + z = S. \end{cases}$$

Умножив на положительные знаменатели дробей первое и второе уравнения, перепишем систему в виде:

$$\begin{cases} xv^2 - xvv_2 + zv^2 + zvv_1 - zvv_2 - zv_2v_2 + yv^2 + yvv_1 = vt(v^2 + vv_1 - vv_2 + v_2v_2), \\ xv^2 + xvv_2 + zv^2 - zvv_1 + zvv_2 - zv_2v_2 + yv^2 - yvv_1 = vt(v^2 - vv_1 + vv_2 - v_2v_2), \\ x + y + z = S. \end{cases}$$

Сложим первые два уравнения системы и заменим $x + y + z$ на S :

$$2Sv^2 - 2zv_1v_2 = tv(2v^2 - 2v_1v_2),$$

откуда имеем: $z = \frac{sv^2 - tv^3}{v_1v_2} + tv$.

Итак, пароход идет по озеру в одном направлении $\left(\frac{sv^2 - tv^3}{v_1v_2} + tv \right)$ км.

9.62. 6 месяцев. **9.64.** 15 км/ч. **9.66.** 30%. **10.3.** Блокнот стоит 24 р., книга — 35 р.

10.5. Пусть купили x воробьев, y горлиц, $40 - x - y$ голубей. Здесь x и y — натуральные числа. Составим уравнение:

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + 2 \cdot (40 - x - y) = 40.$$

Рассуждая как при решении задачи **10.4**, получим уравнение, равносильное исходному уравнению:

$$x_1 + 3y_1 = 8,$$

где $x = 3x_1$, $y = 10y_1$, x_1 и y_1 — натуральные числа.

Это уравнение имеет два решения $(x_1; y_1)$ в натуральных числах: $(5; 1)$ и $(2; 2)$. Исходное уравнение имеет два решения $(x; y)$ в натуральных числах: $(15; 10)$ и $(6; 20)$.

Задача имеет 2 решения: купили воробьев, голубей и горлиц: 6, 20, 14 или 15, 10, 15.

10.6. Задача имеет одно решение: 3 куропатки, 5 голубей и 22 воробья. **10.7.** Петухов, кур и цыплят было: 4, 18, 78, или 8, 11, 81, или 12, 4, 84. **10.8.** 5 мужчин, 1 женщина, 6 детей. **10.11.** Мужчин, женщин и детей было: 2, 30, 68, или 5, 25, 70, или 8, 20, 72, или 11, 15, 74, или 14, 10, 76, или 17, 5, 78. **10.13.** Задача имеет 26 решений.

10.18. Необязательно целое число x таково, что числа $0,15x = \frac{3}{20}x$ и

$0,33x = \frac{33}{100}x$ — натуральные числа. Тогда число $k = \frac{3}{20}x$ — натуральное,

откуда $x = \frac{20}{3}k$ и число $\frac{33}{100}x = \frac{33}{100} \cdot \frac{20}{3}k = \frac{11}{5}k$ — натуральное. Очевидно,

что это возможно при наименьшем $k = 5$. Тогда наименьшее число $x = 33 \frac{1}{3}$.

10.20. Пусть первоначально в первой коробке было k красных карандашей, а во второй коробке было s синих карандашей ($k < s$). После первого перекалывания в первой коробке стало $0,6k$ карандашей, а во второй коробке — $(s + 0,4k)$ карандашей. После второго перекалывания карандашей в первой коробке стало $0,6k + 0,2(s + 0,4k) = 0,68k + 0,2s$, а во второй коробке $0,8(s + 0,4k) = 0,8s + 0,32k$.

После второго перекалывания красных карандашей в первой коробке стало $0,6k + 0,1(s + 0,4k) = 0,64k + 0,1s$, а во второй коробке их стало $0,4k - 0,1(s + 0,4k) = 0,36k - 0,1s$. Причем $0,64k + 0,1s$ на 26 больше, чем $0,36k - 0,1s$. Составим уравнение:

$$0,64k + 0,1s - (0,36k - 0,1s) = 26,$$

которое перепишем в виде:

$$7k + 5s = 650, \quad (1)$$

откуда $s = \frac{650 - 7k}{5} = 130 - \frac{7k}{5}$. Так как s — число натуральное, то число k делится на 5.

После второго переключивания общее количество карандашей во второй коробке увеличилось по сравнению с первоначальным более чем на 5%, следовательно,

$$0,8s + 0,32k > 1,05s,$$

откуда

$$s < \frac{32k}{25}. \quad (2)$$

Найдем все решения уравнения (1), удовлетворяющие неравенствам $k < s$ и (2), то есть удовлетворяющие двойному неравенству

$$k < 130 - \frac{7k}{5} < \frac{32k}{25}.$$

Этому двойному неравенству и условию « k делится на 5» удовлетворяет единственное значение $k = 50$. Тогда $s = 130 - 70 = 60$.

Итак, было 60 синих карандашей.

10.21. Пусть Роман купил вчера x , а сегодня у раков и переплата составила p к. Тогда справедливо равенство:

$$51x + 99y + p = 2520.$$

Так как 51, 99, 2520 делятся на 3, то и p делится на 3. Но по условию задачи $16 \leq p \leq 20$, следовательно, $p = 18$. Тогда справедливо равенство:

$$51x + 99y = 2502.$$

Разделив уравнение на 3, получим уравнение

$$17x + 33y = 834,$$

$$\text{откуда } x = \frac{834 - 33y}{17} = 49 - 2y + \frac{y+1}{17}.$$

Неизвестное x является натуральным числом лишь при $y = 16$ (при $y = 16 + 17k$, где $k \in \mathbb{N}$, неизвестное x принимает отрицательные значения). Следовательно, $y = 16$ и $x = 18$ — единственная пара значений x и y , удовлетворяющая условиям задачи.

Итак, Роман купил вчера 18, а сегодня — 16 раков.

10.24. 150 студентов. **10.26.** 12 книг. **10.28.** 4 подберезовика.

10.30. Из уравнения

$$n(n-1) = 15 + a(n-2) \quad (1)$$

выразим a через n :

$$a = \frac{n^2 - n - 15}{n - 2} = n + 1 - \frac{13}{n - 2}.$$

Число $n - 2$ натуральное, так как при $n = 1$ или $n = 2$ уравнение (1) не имеет решений ни при каком натуральном a . Так как число 13 имеет только два натуральных делителя 1 и 13, то, решив уравнения

$$n - 2 = 1 \text{ и } n - 2 = 13,$$

получим два значения n : 3 и 15. Для первого из них $a < 0$, что не отвечает условиям задачи. Следовательно, пастуху 15 лет.

10.32. Пусть было m мальчиков и d девочек, составим уравнение:

$$m^2 + d^2 = 25m,$$

которое перепишем в виде:

$$m^2 - 25m + d^2 = 0.$$

Так как это квадратное уравнение имеет целые корни, то его дискриминант $D = 625 - 4d^2$ — точный квадрат. При условии $d > 10$ это возможно лишь при $d = 12$. Тогда $D = 49$, $m = 16$ ($m = 9$ не удовлетворяет условию $m > d$). Следовательно, в классе 16 мальчиков.

10.33. Пусть x деталей делает мастер за 1 ч ($x > 5$) и выполняет весь заказ за t ч, тогда ученик за 1 ч делает $(x - 2)$ детали, а весь заказ состоит из tx или $2(x - 2)(t - 1)$ деталей. Составим уравнение:

$$tx = 2(x - 2)(t - 1),$$

из которого получим: $t = \frac{2x - 4}{x - 4} = 2 + \frac{4}{x - 4}$.

Так как $x > 5$, то t является натуральным числом только при $x = 6$ или при $x = 8$. В том и другом случае $tx = 24$. Итак, заказ состоит из 24 деталей.

10.34. Из 36 деталей.

10.37. Пусть из 9 «а» класса в турнире участвовало x человек, тогда из 9 «б» класса — $(x + 3)$ человека, а всех участников турнира было $(2x + 3)$ человек. Все участники турнира набрали $(2x + 3)(2x + 2)$ очков, а учащиеся 9 «б» класса набрали $(2x + 3)(2x + 2) - 26 = 4x^2 + 10x - 20$ (очков).

Так как они набрали очков поровну, то многочлен $4x^2 + 10x - 20$ делится на $(x + 3)$, то есть количество очков, набранных каждым учащимся 9 «б» класса, равно

$$\frac{4x^2 + 10x - 20}{x + 3} = 4x - 2 - \frac{14}{x + 3}$$

и является натуральным числом. Это возможно лишь при $x = 4$ или при $x = 11$.

Второй случай не удовлетворяет условию задачи, так как 11 человек только в играх друг с другом наберут $11 \cdot 10 = 110$ (очков), что больше 26 очков. Значит, из 9 «а» класса в турнире приняли участие 4 человека, а всех участников турнира было $2 \cdot 4 + 3 = 11$.

10.39. Пусть было x рейсов по 5 парт, тогда было $(x + 1)$ рейсов по 7 парт. Пусть в каждом классе было по p парт ($p > 1$). Тогда числа $5x + 2$ и $7(x + 1) + 4 = 7x + 11$ делятся на p и разность $5(7x + 11) - 7(5x + 2) = 41$ делится на p . Так как $p > 1$, то $p = 41$.

Итак, в каждом классе было по 41 парте (видимо, одноместных).

10.40. Пусть у Андрея было x карасей, а у Бориса y других рыб, тогда у Андрея было $\frac{3}{4}y$ других рыб, а у Бориса $\frac{3}{4}x$ карасей. Так как любое количество рыб выражается натуральным числом, то числа x и y делятся на 4. Составим уравнение:

$$x + \frac{3}{4}y = 0,55(x + \frac{3}{4}y + \frac{3}{4}x + y),$$

из которого получим: $3x = 17y$. Этому равенству и условию $y + \frac{3}{4}x \leq 100$ удовлетворяют лишь числа $x = 68$ и $y = 12$. Тогда Андрей поймал $x + \frac{3}{4}y = 77$ (рыб).

11.4. Пусть общее дело приносит постоянный доход, то есть вложенная сумма увеличивается ежемесячно в x раз. Доход первого компаньона составил $(40x - 40)x$, а второго — $(60x^2 - 60)$ тыс. р. Составим уравнение:

$$(40x - 40)x + 60x^2 - 60 = 17,$$

имеющее единственный положительный корень $x = 1,1$.

Доход первого компаньона составил $40 \cdot (1,1 - 1) \cdot 1,1 = 4,4$, а второго $17 - 4,4 = 12,6$ (тыс. р.). Если бы мы решили задачу старинным способом — без учета дохода на прибыль, то первый и второй компаньоны должны были бы получить 4,25 и 12,75 тыс. р. соответственно.

11.5. Пусть вложенная сумма увеличивается ежемесячно в x раз ($x > 1$). Составим уравнение:

$$(9x - 9)x = 2,5(2x^2 - 2),$$

имеющее единственный корень $x = 1,25$, больший 1, то есть сумма ежемесячно увеличивалась в 1,25 раза.

11.6. Пусть вложенная сумма увеличивается ежемесячно в x раз ($x > 1$). Составим уравнение:

$$(91x^2 - 91)x = 66x^3 - 66,$$

$$(x - 1)(25x^2 + 25x - 66) = 0.$$

Так как по смыслу задачи $x > 1$, то $x - 1 \neq 0$, поэтому

$$25x^2 + 25x - 66 = 0,$$

откуда $x = 1,2$ (второй корень уравнения не удовлетворяет условию $x > 1$). Итак, ежемесячная прибыль составляет 20%.

11.7. На 30%.

11.8. Пусть вложенная сумма увеличивается ежемесячно в x раз ($x > 1$). Составим уравнение:

$$(60x^2 - 60)x^2 + 40x^4 - 40 = 33,81,$$

откуда $x^2 = 1,21$, тогда $x = 1,1$, то есть ежемесячно вложенная сумма увеличивается в 1,1 раза, или на 10%.

11.10. Старинное решение задачи приведем по книге В. Евтушевского: «Если бы прибыль 1710 р. была получена не в 2 года (24 месяца), а в 1 месяц, то капиталы купцов должны быть следующие:

1-го купца	$1000 \cdot 6 = 6000$ р.,
2-го »	$2700 \cdot 14 = 37800$ р.,
3-го »	$1300 \cdot 24 = 31200$ р.

Теперь разделим 1710 р. в отношении

$$6000 : 37800 : 31200 = 10 : 63 : 52.$$

Получим 136,8 р., 861,84 р. и 711,36 р.

Решим задачу с учетом дохода на прибыль. Пусть вложенная сумма увеличивается каждые два месяца в x раз ($x > 1$), тогда доходы купцов (в рублях) за два года составят:

1-го купца	$(1000x^3 - 1000) \cdot x^9 = 1000x^{12} - 1000x^9,$
2-го »	$(2700x^7 - 2700) \cdot x^5 = 2700x^{12} - 2700x^5,$
3-го »	$1300x^{12} - 1300,$

а всего 1710 р. Составим уравнение и решим его приближенно:

$$1000x^{12} - 1000x^9 + 2700x^{12} - 2700x^5 + 1300x^{12} - 1300 = 1710,$$

$$500x^{12} - 100x^9 - 270x^5 - 301 = 0.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = 500x^{12} - 100x^9 - 270x^5 - 301$. Она возрастает и непрерывна на отрезке $[1; 2]$, так как $f'(x) = 50x^4(120x^7 - 18x^4 - 27) > 0$ при $x > 1$. $f(1) < 0, f(2) > 0, a = 1, b = 2$. Внесем изменения в строках 40, 80, 100 и 110 программы **11.9**, получим новую программу.

```

1 'ПРОГРАММА 11.10
10 A=1: B=2
20 X=(A+B)/2
30 IF B-A<.000002 THEN GOTO 80
40 F=500*X^12-100*X^9-270*X^5-301
50 IF F=0 THEN GOTO 80
60 IF F<0 THEN A=X: GOTO 20
70 B=X: GOTO 20
80 I=1000*X^12-1000*X^9: II=2700*X^12-2700*X^5: III=1300*
X^12-1300
90 PRINT "Ответ: x ="; X
100 PRINT "I получим"; I: PRINT "II получим"; II: PRINT "III
получим"; III
110 PRINT "Всего:"; I+II+III
120 END

```

После запуска программы получим

Ответ: x = 1.035403
 I получим 150.4648
 II получим 885.9965
 III получим 673.5932
 Всего: 1710.0544

Как мы и предполагали, старинный способ решения дает результат, невыгодный для первого купца.

11.11. Программа для решения задачи имеет вид:

```

1 'ПРОГРАММА 11.11
10 A=1: B=2
20 X=(A+B)/2
30 IF B-A<.000002 THEN GOTO 80
40 F=11*X^12-5*X-10
50 IF F=0 THEN GOTO 80
60 IF F<0 THEN A=X: GOTO 20
70 B=X: GOTO 20
80 I=45*X^12-45*X: II=54*X^12-54
90 PRINT "Ответ: x ="; X
100 PRINT "I получим"; I: PRINT "II получим "; II

```

```
110 PRINT "Всего: "; I+II
120 END
```

После запуска программы получим

Ответ: $x = 1.026948$

I получим 15.70205

II получим 20.29765

Всего: 35.9997

12.1. Заметим, что продавая половину всех яблок и еще пол-яблока, садовник каждый раз, кроме последнего, продавал на 1 яблоко больше, чем у него оставалось. В последний раз он продал одно яблоко. Теперь подсчитаем число яблок «обратным ходом».

Перед седьмой покупкой было 1 яблоко,

перед шестой — $1 \cdot 2 + 1 = 3$ яблока,

перед пятой — $3 \cdot 2 + 1 = 7$ яблок,

перед четвертой — $7 \cdot 2 + 1 = 15$ яблок,

перед третьей — $15 \cdot 2 + 1 = 31$ яблоко,

перед второй — $31 \cdot 2 + 1 = 63$ яблока,

перед первой — $63 \cdot 2 + 1 = 127$ яблок.

12.2. Сначала определимся с числом гусей, севших на последнее озеро. Из условия «на каждом садилась половина гусей и еще полгуся, остальные летели дальше» следует, что на седьмое озеро могли сесть 1 гусь или любое четное число гусей. В этих случаях продолжить процесс деления стаи по заданному правилу невозможно. Нечетного числа гусей, большего 1, быть не могло, так как в этом случае гуси могли продолжить полет и сесть больше, чем на семи озерах. Изобразим схематически процесс разделения стаи согласно условиям задачи (рис. 25).

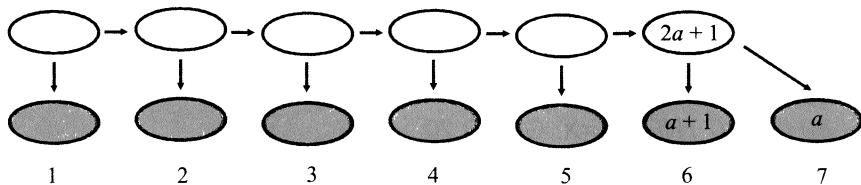


Рис. 25.

Если на седьмое озеро село a гусей, то на шестое — $(a + 1)$ гусь, а перед последним делением в стае было $(2a + 1)$ гусь. Рассуждая обратным ходом, получим, что первоначально в стае было $(64a + 63)$ гуся.

Итак, в стае было $(64a + 63)$ гуся, где a — единица или любое четное натуральное число.

12.3. Пусть вторая крестьянка принесла в n раз больше яиц, чем первая. Так как их выручки были одинаковыми, то у первой крестьянки каждое яйцо стоило в n раз дороже, чем у второй. Если бы крестьянки поменялись яйцами, то первая крестьянка выручила бы денег в n^2 раз больше, чем вторая. То есть $n^2 = 15: \frac{20}{3} = \frac{9}{4}$. Так как $n > 0$, то $n = \frac{3}{2}$. Итак,

у первой крестьянки каждое яйцо стоило в $\frac{3}{2}$ раза дороже, чем у второй, поэтому у первой крестьянки яиц было в $\frac{3}{2}$ раза меньше, чем у второй.

Разделим 100 яиц в отношении 2 : 3 и получим тот же ответ: 40 и 60 яиц.

12.4. I способ. Решение задачи с помощью системы получить несложно. Пусть x платков были куплены за y р. Тогда при продаже их по 6 р. получено прибыли 24 р., поэтому верно равенство

$$6x = y + 24.$$

А при продаже их по 3 р. получено 12 р. убытка, поэтому верно равенство

$$3x = y - 12.$$

Решив систему из двух уравнений, найдем: $x = 12$, $y = 48$. Следовательно, платков было 12 и куплены они были по $48 : 12 = 4$ (р.).

Это задача из книги С.А. Рачинского «1001 задача для умственного счета», она предназначалась для устного решения. Например, такого.

II способ. Если цену каждого платка увеличить с 3 р. до 6 р., то есть на 3 р., то стоимость всех платков увеличится на $12 + 24 = 36$ (р.). Следовательно, платков было $36 : 3 = 12$. Так как при продаже 12 платков убыток составил 12 р. (по 1 р. на платке), то лавочник закупал платки по цене $3 + 1 = 4$ (р.).

12.7. Запишем в таблице время работы тракторов в двух случаях.

	4 гусеничных трактора	2 колесных трактора
I	4 ч	2 ч
II	3 ч	3 ч

Как видим, 1 ч работы четырех гусеничных тракторов заменяет 1 ч работы двух колесных тракторов, то есть 4 гусеничных трактора можно заменить на 2 колесных (а 2 гусеничных трактора — на 1 колесный). Тогда $2 + 2 = 4$ колесных трактора могли вспахать поле за 3 ч, а 1 колесный трактор мог бы вспахать поле за $3 \cdot 4 = 12$ (ч).

Все поле могли вспахать при совместной работе 2 гусеничных и 2 колесных тракторов за то же время, что и 3 колесных трактора. Так как 1 колесный трактор мог бы вспахать поле за 12 ч, то 3 колесных трактора могли бы вспахать поле за $12 : 3 = 4$ (ч). Поэтому 2 гусеничных и 2 колесных трактора вместе вспашут поле за 4 ч.

12.8. Первый мастер шьет 1 шубу 5 дней, а 3 шубы 15 дней. Второй мастер шьет 1 шубу 3 дня, а 5 шуб 15 дней. Значит, за пятнадцать дней совместной работы они сошьют 8 шуб. Оставшуюся девятую шубу лучше отдать шить второму мастеру, тогда заказ будет выполнен в минимальный срок. Первому мастеру нужно дать 3 шубы, второму — 6 шуб.

12.10. 133 и 54 рабочих.

12.11. II способ. Пусть грузовая машина ехала до встречи t ч, тогда вдвое меньший путь она проехала за $\frac{t}{2}$ ч и была в пути $\frac{3t}{2}$ ч. Легковая машина ехала до встречи $(t - 2)$ ч, тогда вдвое больший путь она проехала за $2(t - 2)$ ч и была в пути $3(t - 2)$ ч, что на 1 ч меньше времени движения грузовой машины. Составим уравнение:

$$\frac{3t}{2} - 3(t - 2) = 1,$$

откуда $t = \frac{10}{3}$. Время движения грузовой машины равно $\frac{3t}{2} = 5$ (ч).

III способ. Воспользуемся методом подобия. Построим графики движения машин OF и GCD (рис. 26). Пусть грузовая машина была в пути x ч. Тогда $OE = x$, $OD = x + 1$, $CF = x - 2$. Из подобия треугольников OMD и FMC следует, что $\frac{OD}{CF} = \frac{MK}{MN}$, но $\frac{MK}{MN} = \frac{2}{1}$ (это отношение расстояний, пройденных грузовой и легковой машинами до встречи). Составим уравнение:

$$\frac{x + 1}{x - 2} = \frac{2}{1},$$

откуда $x = 5$, то есть время движения грузовой машины равно 5 ч.

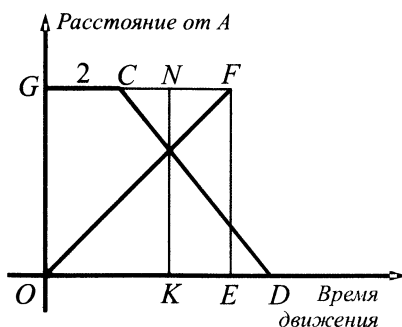


Рис. 26.

12.12. II способ. Пусть относительно ступеней эскалатора человек движется со скоростью u , а скорость самого эскалатора v . Так как при подъеме против хода эскалатора человек прошел в $150 : 30 = 5$ раз больше ступенек, чем при спуске по ходу эскалатора, то скорость подъема человека $(u - v)$ в 5 раз меньше скорости спуска $(u + v)$. Составим уравнение:

$$u + v = 5(u - v),$$

из которого получим, что $u = 1,5v$ (окончание решения аналогично).

III способ. Пусть человек проходит n ступенек за 1 мин и длина эскалатора x м. Тогда он спускается по эскалатору, едущему вниз, за $\frac{30}{n}$ мин, а

поднимается по опускающемуся эскалатору за $\frac{150}{n}$ мин. При этом ско-

рость спуска равна $x : \frac{30}{n} = \frac{xn}{30}$ (м/мин), а скорость подъема равна $x : \frac{150}{n} = \frac{xn}{150}$ (м/мин).

Мы получили аналоги скорости движения по течению и против течения реки. Найдем теперь и аналог скорости движения в стоячей воде — скорость движения человека по стоящему эскалатору. Она равна

$\left(\frac{xn}{30} + \frac{xn}{150} \right) : 2 = \frac{xn}{50}$ (м/мин). Тогда время спуска человека по стоящему

эскалатору равно $x : \frac{xn}{50} = \frac{50}{n}$ (мин). Так как за 1 минуту человек насчитывает

n ступенек, то за $\frac{50}{n}$ мин он насчитает $n \cdot \frac{50}{n} = 50$ (ступенек).

12.13. 60 ступенек.

12.14. *II способ (Муравин Г.К., Романовский В.И.).* При заполнении последней трети бассейна второй насос работал на 11 мин дольше, чем при заполнении второй трети, и за эти «лишние» 11 мин заполнил такую же часть объема бассейна, как и первый насос за 1 мин. Значит, производительность первого насоса в 11 раз больше, чем второго.

Последняя треть бассейна заполнялась на 20 мин дольше, чем первая. Поскольку время и производительность обратно пропорциональны (при заполнении одного и того же объема, равного трети объема бассейна), то обозначив искомое время буквой t , получим уравнение:

$$\frac{t+20}{t} = 11,$$

откуда находим, что $t = 2$. Итак, первая треть бассейна была заполнена за 2 мин.

III способ (Романовский В.И.). Согласно условию задачи, на заполнение трети бассейна второму насосу требуется времени на 20 мин больше, чем первому. Следовательно, 30-минутное увеличение продолжительности заполнения бассейна объясняется тем, что второй насос заполнил бассейн наполовину $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)$. Первый насос, наполнивший вторую половину бассейна, в последнюю минуту перед поломкой подал в бассейн $\frac{1}{6}$ всего количества воды. Для заполнения трети бассейна потребуется вдвое больше времени, то есть 2 мин.

IV способ (Ефремов А., лицей № 1500, Москва). Излишек времени наполнения второй и третьей третей бассейна (по сравнению со временем наполнения первой трети) образовался за счет более медленной работы второго насоса. Этот излишек пропорционален объему работы, выполненной вторым насосом. Так как излишек в 20 мин в 2 раза больше излишка в 10 мин, то во второй трети бассейна второй насос наполнил только половину этой второй трети ($\frac{1}{6}$ всего бассейна). Следовательно, первый насос за 1 мин заполнил $\frac{1}{6}$ бассейна, а первую треть бассейна он заполнил за 2 мин $\left(\frac{1}{3} : \frac{1}{6} = 2\right)$.

12.15. II способ. (Кобзев И., 8 класс). Пусть трактор проехал x м за то время, пока мальчик сделал 60 шагов. Тогда длину трубы можно вычислить двумя способами:

$$120 \cdot 0,75 - 2x \text{ и } 30 \cdot 0,75 + 0,5x.$$

Решив уравнение $120 \cdot 0,75 - 2x = 30 \cdot 0,75 + 0,5x$, получим его единственный корень $x = 27$. Тогда длина трубы равна

$$120 \cdot 0,75 - 0,5 \cdot 27 = 36 \text{ (м)}.$$

III способ. (Дьячков А.В., школа № 103). Пусть l — длина шага, x — перемещение трубы за один шаг, L — длина трубы, N — количество шагов в направлении движения трубы, M — количество шагов в противоположном направлении.

Тогда $\frac{L}{N} = l - x$ и $\frac{L}{M} = l + x$. Складывая, получаем:

$$L \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{M} \right) = 2l \text{ или } L = \frac{2l}{\frac{1}{N} + \frac{1}{M}} = \frac{1,5}{\frac{1}{120} + \frac{1}{30}} = 36.$$

Итак, длина трубы равна 36 м.

IV способ. (Романовский В.И.) Догоня трактор, мальчик, стартовавший от начала трубы (назовем это место исходной точкой), прошел до ее конца 120 шагов. На обратном пути он поравнялся с началом трубы, пройдя 30 шагов и оказавшись на расстоянии $120 - 30 = 90$ (шагов) от исходной точки. Таким образом, за то время, что мальчик успел пройти 150 шагов, трактор удалился от исходной точки на расстояние 90 шагов мальчика. Отношение скорости трактора к скорости мальчика равно $90 : 150 = 0,6$. Мальчик, догоняя конец трубы, прошел 120 шагов; трактор за это время продвинулся на расстояние, равное $120 \cdot 0,6 = 72$ шагам мальчика. Длина трубы равна $120 - 72 = 48$ шагов мальчика или $0,75 \cdot 48 = 36$ (м).

Замечание. Третий способ решения выглядит громоздко (много букв), но эти буквы заменяют данные числа, то есть задача сначала решена в общем виде, а потом найден ответ для данных значений букв. Приведенное решение интересно тем, что, используя формулу для вычисления L , можно подобрать другие числовые данные для второго варианта той же задачи. А четвертый способ решения показывает, что здесь можно было обойтись вообще без уравнений.

12.16. Рассмотрим более простое решение задачи, идею которого предложил ученик 10 класса школы № 679 г. Москвы Злотников Ю.

От продажи акций второй брат получил в $(100 + 140) : 100 = 2,4$ раза больше, чем первый брат. Разделим сумму 3927 долларов в отношении $1 : 2,4$ или $5 : 12$. От продажи акций первый брат получил $\frac{3927 \cdot 5}{5 + 12} = 1155$ (долл.), а второй — $3927 - 1155 = 2772$ (долл.). Теперь определим новую стоимость всех акций после повышения цены: $1155 : 0,75 + 2772 : 0,8 = 5005$ (долл.).

Таким образом, стоимость всех акций (а значит, и цена каждой акции) возросла на $\frac{(5005 - 3640) \cdot 100\%}{3640} = 37,5\%$.

12.17. 35%.

12.18. II способ. Рассмотрим иной вариант того же самого решения. Если иметь целью введение по возможности меньшего числа обозначений и не стремиться к быстрейшему сведению решения к системе, то, обозначив через k и m скорости катера и моторной лодки, получим для расстояния AB выражение $2k + m$. Из сравнения времени прохождения расстояния AB катером и моторной лодкой составим уравнение:

$$\frac{2k + m}{k} - \frac{2k + m}{m} = \frac{10}{3},$$

которое перепишем в виде:

$$\frac{m}{k} - \frac{2k}{m} = \frac{7}{3},$$

Обозначив через x отношение $\frac{m}{k}$, получим уравнение:

$$x^2 - \frac{7}{3}x - 2 = 0.$$

Учитывая, что $x > 0$, получим $x = 3$. Тогда искомая величина равна $\frac{2k + m}{k + m} = \frac{2 + x}{1 + x} = \frac{5}{4}$ (ч).

III способ. Воспользуемся методом подобия. Построим графики движения AF и BCE катера и моторной лодки соответственно (рис. 27). Согласно условию задачи, $BC = CN = 1$, тогда $AK = 2$, $ED = \frac{7}{3}$. Пусть катер был в пути после встречи x ч. Тогда $NF = x$, $KE = x - \frac{7}{3}$. Из подобия двух пар треугольников следует, что $\frac{NF}{AK} = \frac{CN}{KE}$. Составим уравнение:

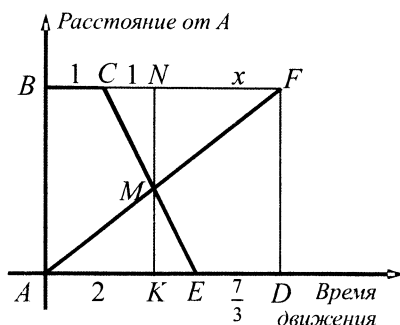


Рис. 27.

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{x - \frac{7}{3}},$$

которое имеет единственный положительный корень $x = 3$.

Итак, катер проходит расстояние AB за $3 + 2 = 5$ (ч), а моторная лодка за $5 - 1 - \frac{7}{3} = \frac{5}{3}$ (ч). Теперь определим время их движения до встречи в случае,

если они одновременно выйдут из A и B : $1 : \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{5} \right) = \frac{5}{4}$ (ч).

12.19. Если заметить, что $\frac{3}{16}$ массы первых двух сплавов приходится

на олово и что новый сплав должен содержать такую же часть олова, а в третьем сплаве олова меньше, то для выполнения условия задачи относительно олова первые два сплава можно сплавлять в любых пропорциях, а третий сплав добавлять нельзя, так как в противном случае получится сплав с меньшим содержанием олова, чем требуется.

Остается найти, в каком отношении должны находиться массы двух первых сплавов, чтобы отношение масс серебра и меди было равно $4 : 9$. Для этого достаточно найти отношение $x : y$ из уравнения

$$\frac{12}{16}x + \frac{1}{16}y = \frac{4}{16}(x + y),$$

где x и y — массы первого и второго сплавов соответственно. Это отношение равно $3 : 8$, то есть надо взять 3 части первого сплава и 8 частей второго сплава.

12.20. (Чечин С., 8 класс ФМШ № 2007). Так как скорости велосипедиста и пешехода постоянны, то и вторую половину пути велосипедист проедет на $\frac{3}{4}$ ч быстрее, чем пешеход, а на $\frac{3}{8}$ всего пути пешеход затратит $\frac{3}{8}$ от времени, затраченного им на движение от пункта A до пункта B . Тогда $\frac{3}{4}$ ч составляют $\frac{3}{8}$ от времени движения пешехода от пункта A до пункта B , которое равно $\frac{3}{4} : \frac{3}{8} = 2$ (ч).

12.21. (Д. Алексеев, школа № 679 Москвы). Изобразим схематически условия задачи (рис. 28).

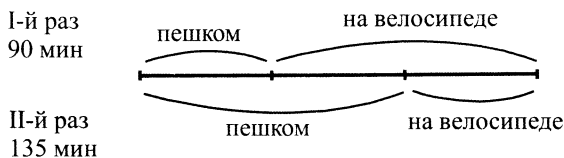


Рис. 28.

Как видно из условия задачи, турист во второй раз вместо того, чтобы $\frac{1}{3}$ пути проехать на велосипеде, прошел этот путь пешком. Эта замена привела к увеличению времени движения на 45 мин. Следовательно, если в следующий раз вместо того, чтобы $\frac{1}{3}$ пути проехать на велосипеде, турист пройдет этот путь пешком (то есть весь путь пройдет пешком), то время движения (135 мин) увеличится еще на 45 мин и составит 180 мин, или 3 ч.

12.22. За 4 ч.

12.24. Представим теперь, что они работают вместе. Сколько всего ям они выкопают в этом случае? Сначала первый рабочий выкопает свою долю от «общей» ямы, а двое других за это время выкопают половину ямы. Затем второй рабочий сделает свою часть работы, а остальные выкопают еще половину ямы. Наконец, третий рабочий доделает свою часть работы, а остальные выкопают еще половину ямы. Итого

будет выкопано 2,5 ямы. Поэтому, работая вдвоем, они закончили бы работу в 2,5 раза быстрее.

12.25. В 3 раза.

12.26. I способ. Построим графики движения пешехода, велосипедиста и мотоциклиста (рис. 29). Из условия задачи следует, что $AD = 10$ км, $BE = 5$ км, а FC требуется найти. Из подобия треугольников ACD и ECB следует, что $\frac{AC}{EC} = \frac{DA}{BE} = \frac{10}{5} = \frac{2}{1}$, то есть $AE = EC$. Из теоремы Фалеса следует, что $DB = BC$ и $AB = BF$. Тогда треугольники ABD и FBC равны и $FC = AD = 10$ км.

Как видим, здесь удалось обойтись без уравнения, но можно обойтись и без метода подобия.

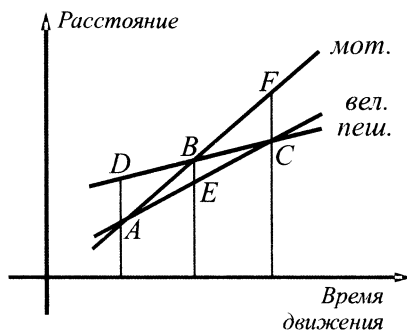


Рис. 29.

II способ. Когда велосипедист продвинулся относительно пешехода на 5 км, мотоциклист продвинулся относительно пешехода на 10 км (догнав его); поэтому, когда велосипедист продвинется относительно пешехода еще на 5 км (догнав его), мотоциклист относительно пешехода продвинется еще на 10 км вперед — это и есть ответ задачи.

12.27. Пусть гонщик B проходит круг за x мин, за это время гонщик A проходит $\frac{4}{3}$ круга, то есть гонщик A в минуту проходит $\frac{4}{3x}$ круга и тратит на круг $\frac{3x}{4}$ мин. Гонщик C проходит круг за $(x + 2,5)$ мин, тогда в минуту он проходит $\frac{1}{x + 2,5}$ круга.

За $(x + 10)$ мин гонщик A приблизился к гонщику C на $\frac{2}{3}$ круга. Составим уравнение

$$\frac{4(x+10)}{3x} - \frac{x+10}{x+2,5} = \frac{2}{3},$$

имеющее единственный положительный корень $x = 20$. Тогда гонщик А тратит на круг $\frac{3x}{4} = 15$ мин.

12.28. Первый гонщик делает 3 круга за 1 ч.

12.30. Пусть расстояние, время и скорость измеряются в согласованных единицах (км, ч, км/ч). Пусть скорость второго поезда при равномерном движении равна v_1 , t_0 — момент времени, когда поезда поравнялись (в этот момент скорость первого поезда была равна $1,5v_1$); t_1 — момент времени, когда первый поезд начал равномерное движение со скоростью $2v_1$ (рис. 30).

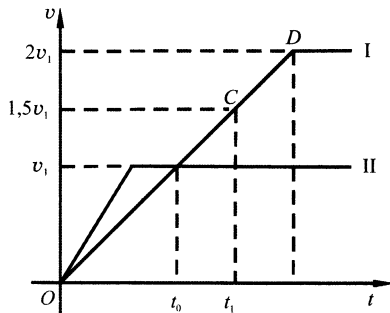


Рис. 30.

Так как $\frac{2v_1}{1,5v_1} = \frac{4}{3}$, то $t_1 = \frac{4}{3}t_0$. В момент t_0 поезда прошли одинаковые расстояния, равные $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} v_1 \cdot t_0 = \frac{3}{4} v_1 t_0$ и составляющие четвертую часть расстояния AB . Следовательно, расстояние $AB = 3v_1 t_0$.

После момента t_0 второму поезду, идущему со скоростью v_1 , осталось пройти расстояние $3v_1 t_0 - \frac{3}{4} v_1 t_0 = \frac{9}{4} v_1 t_0$. Остаток пути второй поезд будет идти $\frac{9}{4} t_0$ ч, а на все расстояние AB затратит $t_0 + \frac{9}{4} t_0 = \frac{13}{4} t_0$ (ч).

К моменту времени $t_1 = \frac{4}{3}t_0$ первый поезд пройдет расстояние $\frac{1}{2} \cdot 2v_1 \times \frac{4}{3}t_0 = \frac{4}{3}v_1t_0$ и ему останется пройти расстояние $3v_1t_0 - \frac{4}{3}v_1t_0 = \frac{5}{3}v_1t_0$ со скоростью $2v_1$. Остаток пути первый поезд будет идти $\frac{5}{6}t_0$ ч, а на все расстояние AB затратит $\frac{4}{3}t_0 + \frac{5}{6}t_0 = \frac{13}{6}t_0$ (ч).

Отношение промежутков времени, за которые поезда прошли путь от A до B , равно $\frac{13t_0}{4} : \frac{13t_0}{6} = 3 : 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аничков Д. Начальные основания алгебры, или арифметики лите-
ральной... — М., 1781.
2. Баврин И.И. Сельский учитель С.А. Рачинский и его задачи для
умственного счета. — М., 2003.
3. Байиф Ж.-К. Логические задачи. — М., 1983.
4. Варианты вступительных экзаменов по математике в МГУ (2000
год). — М., 2001.
5. Варианты вступительных экзаменов по математике в МГУ (2004
год). — М., 2005.
6. Галанин Д.Д. Леонтий Филиппович Магницкий и его арифмети-
ка. Вып. II и III. — М., 1914.
7. Евтушевский В. Методика арифметики. Изд. 5-е. — СПб, 1874.
8. ЕГЭ 2009. Математика. Типовые тестовые задания / Т.А. Кореш-
кова, Ю.А. Глазков, В.В. Мирошин, Н.В. Шевелева. — М., 2009.
9. ЕГЭ 2010. Математика. Типовые тестовые задания / И.Р. Высоц-
кий, Д.Д. Гущин, П.И. Захаров и др.; под ред. А.Л. Семенова, И.В.
Ященко. — М., 2010. (Серия «ЕГЭ 2010. Типовые тестовые задания»).
10. Интервью с В.И. Арнольдом // Квант. — М., 1990, № 7.
11. Киселев А.П. Арифметика. Изд. 9-е. — М., 1896.
12. Курганов Н.Г. Арифметика или числовик, содержащий в себе
все правила... — СПб., 1791.
13. Ларичев П.А. Сборник задач по алгебре. Часть II. Для 8–10 клас-
сов средней школы. Изд. 14-е. — М., 1963.
14. Магницкий Л.Ф. Арифметика.
15. Мельников И.И., Сергеев И.Н. Как решать задачи на вступитель-
ных экзаменах. Учебное пособие. — 5-е изд. — М., 2007.
16. Ньютон И. Всеобщая арифметика или книга об арифметических
синтезе и анализе / Пер. А.П. Юшкевича. — М., 1948.
17. Перельман Я.И. Занимательная алгебра. — М., 1967.

18. Пойа Д. Математическое открытие. — М., 1976.
19. Пособие по математике для подготовки к вступительному экзамену в Государственную академию управления / В.В. Лебедев, П.А. Михайлов, М.В. Ефимова. — М., 1998.
20. Романовский В.И. Арифметика помогает алгебре. — М., 2007. — 376 с.
21. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ: 2010: ЕГЭ: Математика / И.Р. Высоцкий, Д.Д. Гущин, П.И. Захаров и др.; под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. — М., 2010. — 93.
22. Самые новые реальные задания: ЕГЭ–2009. Математика / В.И. Ишина, Л.О. Денищева, Ю.А. Глазков и др. — М., 2009.
23. Смаллиан Р.М. Принцесса или тигр? — М., 1985.
24. Чулков П.В. Арифметические задачи. — М., 2009.
25. Шагин В.Л. Вступительные экзамены по математике в Высшей школе экономики, 1995–1996. — М., 1998.
26. Шагин В.Л. Вступительные экзамены по математике в Высшей школе экономики, 1997. — М., 1998.

СПРАВОЧНАЯ ТАБЛИЦА

Старинные российские денежные единицы

Первоначально основной денежной единицей была гривна, затем ее стали рубить на 2 равные части — их называли рублями. Позднее гривной или гривенником называли десятую часть рубля, то есть 10 копеек.

1 рубль = 100 копеек

1 гривна = 10 копеек

1 алтын = 3 копейки

1 деньга = $\frac{1}{2}$ копейки

1 полушка = $\frac{1}{2}$ деньга

Старинные российские меры длины

1 миля = 7 верст $\approx 7,468$ км

1 верста = 500 саженей $\approx 1,067$ км

1 сажень = 3 аршина = 7 футов $\approx 2,13$ м

1 аршин = 16 вершков ≈ 71 см

1 фут = 12 дюймов $\approx 30,48$ см

1 дюйм = 10 линий $\approx 2,54$ см

1 линия = 10 точек $\approx 2,54$ мм

Старинные российские меры веса

1 пуд = 40 фунтов $\approx 16,38$ кг

1 фунт = 32 лота $\approx 409,512$ г

1 лот = 3 золотника $\approx 12,797$ г

1 золотник = 96 долей $\approx 4,266$ г

Английские денежные единицы, меры длины, веса

1 фунт = 20 шиллингам (мера денег)

1 миля = 1760 ярдов $\approx 1,609$ км (мера длины)

1 ярд = 3 фута $\approx 91,4$ см (мера длины)

1 фут = 12 дюймов $\approx 30,48$ см (мера длины)

1 унция = $\frac{1}{16}$ фунта (мера веса)

СПИСОК ПРИНЯТЫХ СОКРАЩЕНИЙ

АФСБ — Академия ФСБ России,

ВШЭ — Высшая школа экономики,

ГАУ — Государственная академия управления им. С. Орджоникидзе,

МАДИ — Московский автомобильно-дорожный институт,

МГУ — Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,

биол. ф. — биологический факультет,

биол.-почв. ф. — биолого-почвенный факультет,

ВМиК — факультет вычислительной математики и кибернетики,

геол. ф. — геологический факультет,

ФНМ — факультет наук о материалах,

мех.-мат. ф., — механико-математический факультет,

социол. ф., — социологический факультет,

экон. ф., — экономический факультет,

филол. ф., — филологический факультет,

хим. ф., — химический факультет.

МГИЭМ — Московский государственный институт электронного машиностроения (технический университет),

МГИЭТ — Московский государственный институт электронной техники (технический университет),

МГТУ — Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,

МИСиС — Московский институт стали и сплавов,

МИФИ — Московский государственный инженерно-физический институт (технический университет),

МПГУ — Московский педагогический государственный университет,

МТУСИ — Московский технический университет связи и информатики,

НГУ — Новосибирский государственный университет,

РЭА — Российская экономическая академия им. Г.В. Плеханова,
СГУ — Самарский государственный университет,
УГАТУ — Уфимский государственный авиационный технический
университет.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
1. Задачи на совместную работу («на бассейны»)	5
2. Задачи на среднюю скорость движения	14
3. Задачи на движение по реке.	17
4. Задачи на проценты	20
5. Решение задач с помощью уравнения	32
6. Задачи на сплавы и смеси	57
7. Задачи на переливания	69
8. Задачи на проценты (продолжение)	75
9. Решение задач с помощью системы уравнений	85
10. Задачи, решаемые в натуральных числах	107
11. Задачи о дележе прибыли.	125
12. Решайте задачи проще!	132
Ответы и советы	151
Литература	202
Справочная таблица	204
Список сокращений	205

Шевкин Александр Владимирович

**Текстовые задачи по математике
7–11 классы**

Подписано в печать 16.05.2011
Формат 60х88/16. Усл. печ. л. 12,71
Тираж 3000 экз. Заказ

ООО «Илекса», 105187, г. Москва, Измайловское шоссе, 48а,
сайт: www.ilexa.ru, E-mail: real@ilexa.ru,
факс 8(495) 365-30-55, телефон 8(495) 984-70-83



А.В. Шевкин

ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ

**Эта книга — дополнительное учебное пособие
по алгебре для учащихся 7–11 классов.**

**Интересный задачный материал дает новую жизнь
старой, незаслуженно забытой идее обобщения
решений арифметических задач — связующему
мостику между арифметикой и алгеброй.**

**В книге рассмотрены задачи, начиная от простых
и заканчивая конкурсными задачами
прошлых лет.**

**Пособие может быть использовано на уроках
алгебры, для подготовки к итоговой аттестации
(ГИА-9 и ЕГЭ-11), а также для самостоятельной
работы учащихся.**

ISBN 978-5-89237-339-5



9 785892 373395