In [4]:
```
import numpy as np
import pandas as pd
import math
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import norm
from scipy.stats import t
from statsmodels.distributions.empirical_distribution import ECDF
%matplotlib inline
```

$N(\theta, 1)$

In [5]:
```
alpha = 0.05
theta = np.linspace(-10, 10, 100)
#print(theta)
N = np.array([10**i for i in range(2,7)])
print(N)
```

```
[    100    1000   10000  100000 1000000]
```

t-Критерий Стьюдента: Применяется для проверки основной гипотезы $H_0 : E(X) = \theta$.Очевидно, при принятии основной гипотезы $E(\bar{X}) = \theta$. Используя несмещенную оценку дисперсии s_X получаем t-критерий: $t_n = \frac{\bar{X} - E_\theta X}{s_X \sqrt{n}}$

Построим функцию мощности критерия Стьюдента проверки гипотезы $H_0 : \theta = 0$ vs $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 \in [-10, 10]$.$t_n = \sqrt{n}\frac{\bar{X} - E_\theta(X)}{s_x}$
z_α - квантиль распределения Стьюдента.
1)$\theta_0 = 0 < \theta_1$:

$$P_{\theta_0}(t_{\theta_0} > z_{1-\alpha}) = \alpha$$
$$S = \{t_{\theta_0} > z_{1-\alpha}\}, \text{где}$$
$$\beta(\theta_1, S) = P_{\theta_1}(t_{\theta_0} > z_{1-\alpha}) = P_{\theta_1}\left(t_{\theta_1} > z_{1-\alpha} - \frac{E_{\theta_1}(X) - E_{\theta_0}(X)}{s_x}\sqrt{n}\right) = 1 - F_{T_n}\left(z_{1-\alpha} - \frac{E_{\theta_1}(X) - E_{\theta_0}}{s_x}\right.$$

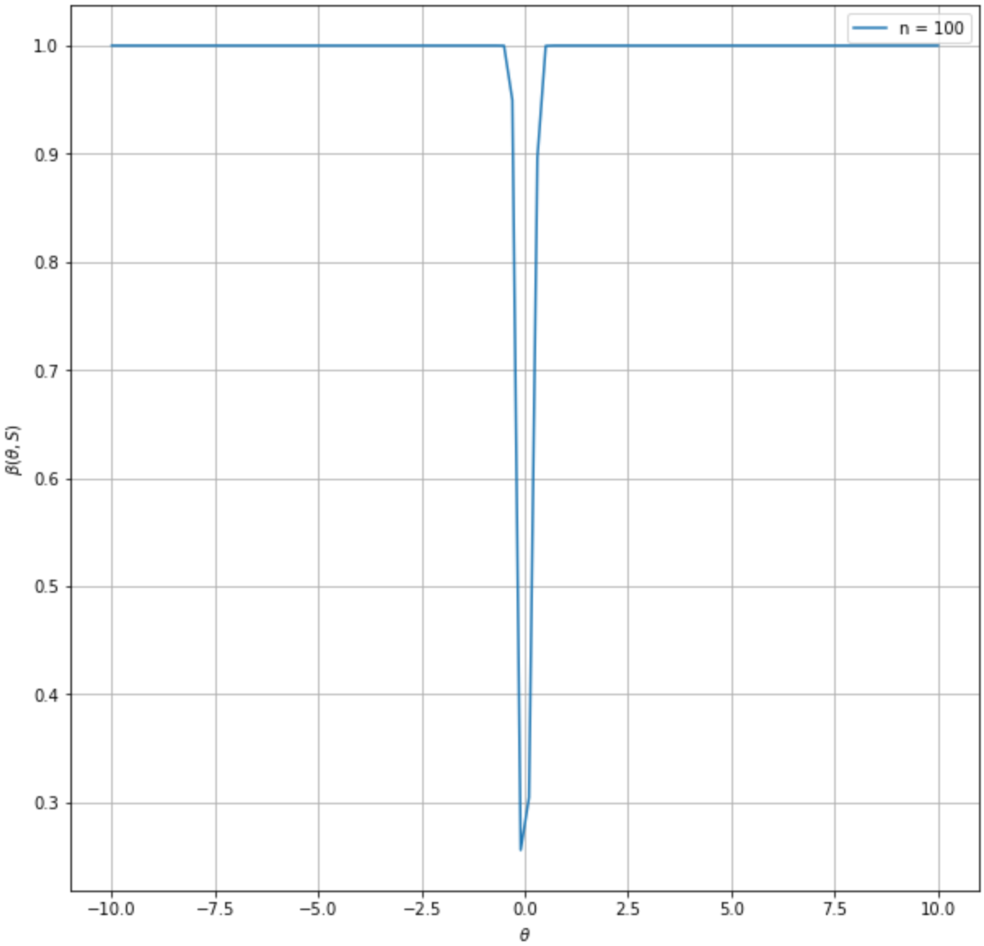
где T_n— распределение Стьюдента.
2)$\theta_0 = 0 > \theta_1$:

$$P_{\theta_0}(t_{\theta_0} \le z_\alpha) = \alpha$$
$$S = \{t_{\theta_0} \le z_\alpha\}, \text{где}$$
$$\beta(\theta_1, S) = P_{\theta_1}(t_{\theta_0} \le z_\alpha) = P_{\theta_1}\left(t_{\theta_1} \le z_\alpha - \frac{E_{\theta_1}(X) - E_{\theta_0}(X)}{s_x}\sqrt{n}\right) = F_{T_n}\left(z_\alpha - \frac{E_{\theta_1}(X) - E_{\theta_0}(X)}{s_x}\sqrt{n}\right)$$

In [6]:
```
def var(Y):
    return ((len(Y)*np.var(Y)/(len(Y) - 1))**(1/2))
```

In [7]:
```
plt.figure(figsize = (10,10))
power = []
for th in theta:
    X = norm.rvs(size=100)
    if th < 0:
        z = t.ppf(alpha, df = len(X))
        power.append(t.cdf(z - th*np.sqrt(len(X)) / var(X), df = len(X)))
    else:
        z = t.ppf(1-alpha, df = len(X))
        power.append(1-t.cdf(z - th*np.sqrt(len(X)) / var(X), df = len(X)))
plt.plot(theta, power, label='n = 100')
plt.xlabel(r'$\theta$')
plt.ylabel(r'$\beta(\theta, S)$')
plt.grid()
plt.legend()
```

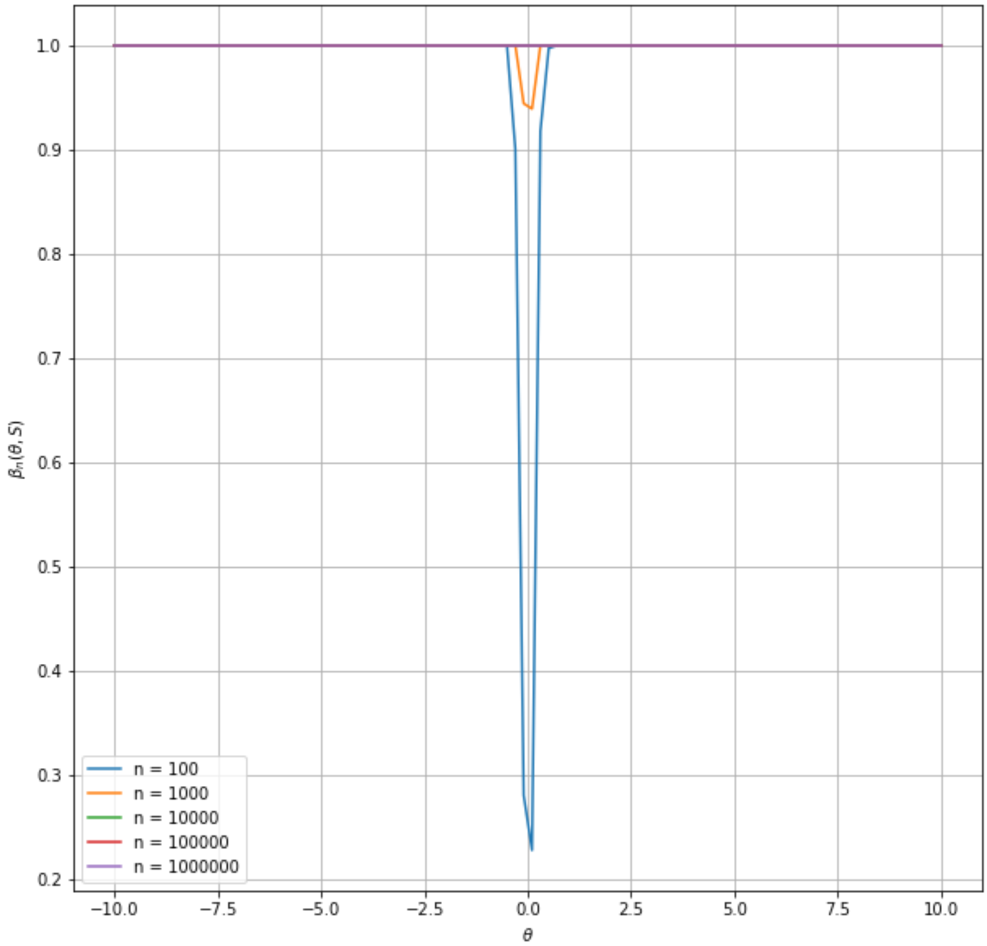
Out[7]: <matplotlib.legend.Legend at 0x7efe2e311c88>



Построили функцию мощности критерия Стьюдента проверки гипотезы $H_0 : \theta = 0$ vs $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 \in [-10, 10]$ для размера выборки 100. Теперь исследуем поведение функции мощности при разных размерах выборки.

In [8]:
```
plt.figure(figsize = (10,10))
for n in N:
    power = []
    for th in theta:
        X = norm.rvs(size=n)
        if th < 0:
            z = t.ppf(alpha, df = n)
            power.append(t.cdf(z - th*np.sqrt(n) / var(X), df = n))
        else:
            z = t.ppf(1-alpha, df = n)
            power.append(1-t.cdf(z - th*np.sqrt(n) / var(X), df = n))
    plt.plot(theta, power, label='n = '+str(n))
plt.xlabel(r'$\theta$')
plt.ylabel(r'$\beta_n(\theta, S)$')
plt.grid()
plt.legend()
```

Out[8]: <matplotlib.legend.Legend at 0x7efe2e570978>



Из графиков видно, что при $n \geq 10000$ мощность критерия Стьюдента равна единице, значит, вероятность совершить ошибку 2 рода практически нулевая. Это обьясняется тем, что при увеличении обьема выборки улучшается качество проверки гипотезы.

Теперь найдем такое минимальное n, что при проверке гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$ против альтернативы $H_1 : \theta = \theta_1$, где $|\theta_0 - \theta_1| = 1$, критерием Стьюдента уровня значимости 0.05 вероятность ошибки 1 рода меньше вероятности ошибки 2 рода.
1)$H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta = \theta_1 = \theta_0 + 1$

$$\beta(\theta, S) = P_{\theta_1}(t_{\theta_0} > z_{1-\alpha}) = P_{\theta_1}\left(t_{\theta_1} > z_{1-\alpha} - \frac{E_{\theta_1}(X) - E_{\theta_0}(X)}{s_x}\sqrt{n}\right) = 1 - F_{T_n}\left(z_{1-\alpha} - \frac{\sqrt{n}}{s_x}\right),$$

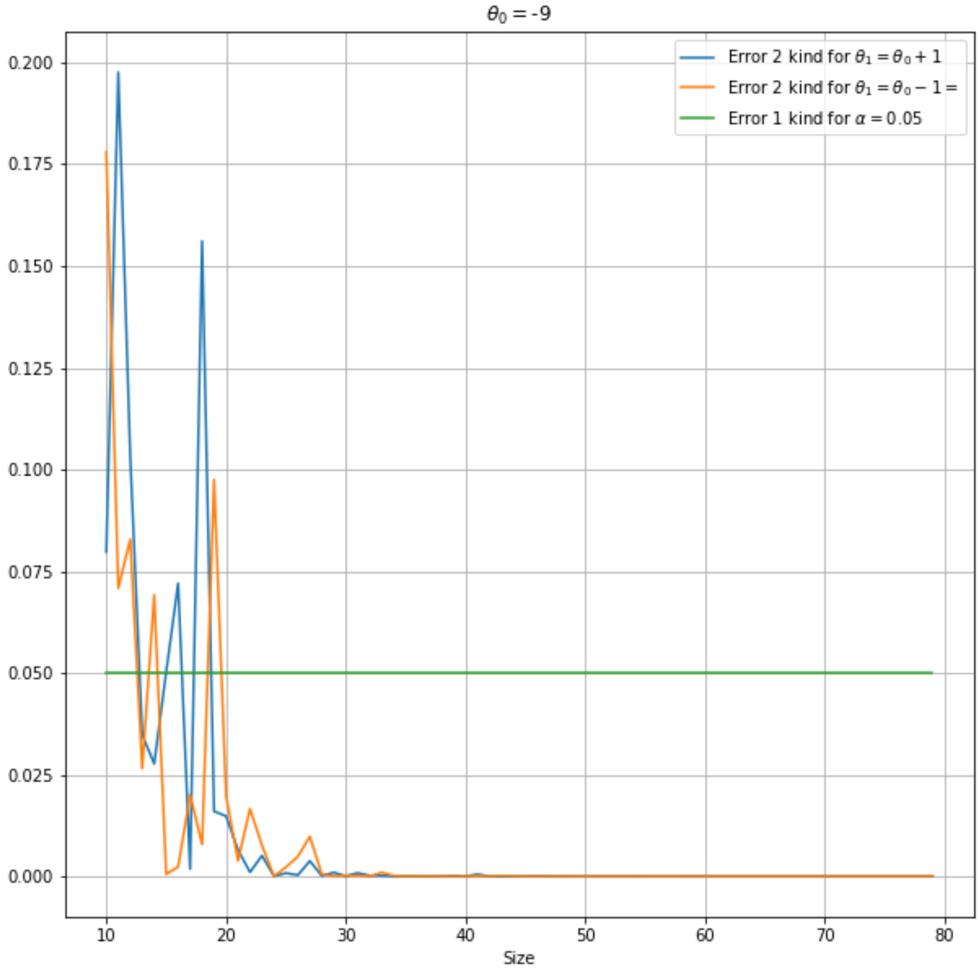
где $T_n -$ распределение Стьюдента. 2)$H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta = \theta_1 = \theta_0 - 1$

$$\beta(\theta, S) = P_{\theta_1}(t_{\theta_0} \le z_\alpha) = P_{\theta_1}\left(t_{\theta_1} \le z_\alpha - \frac{E_{\theta_1}(X) - E_{\theta_0}(X)}{s_x}\sqrt{n}\right) = F_{T_n}\left(z_\alpha + \frac{\sqrt{n}}{s_x}\right)$$

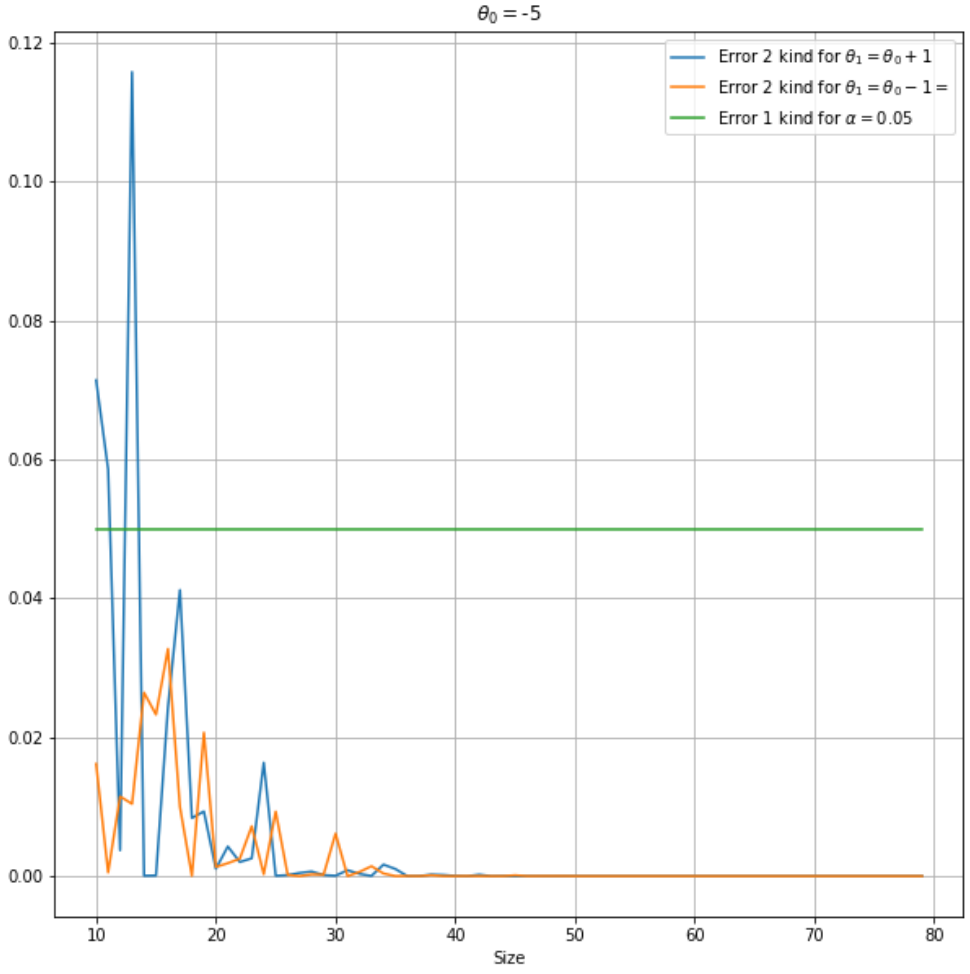
Ошибка 1 рода = α
Ошибка 2 рода = $1 - \beta(\theta, S)$

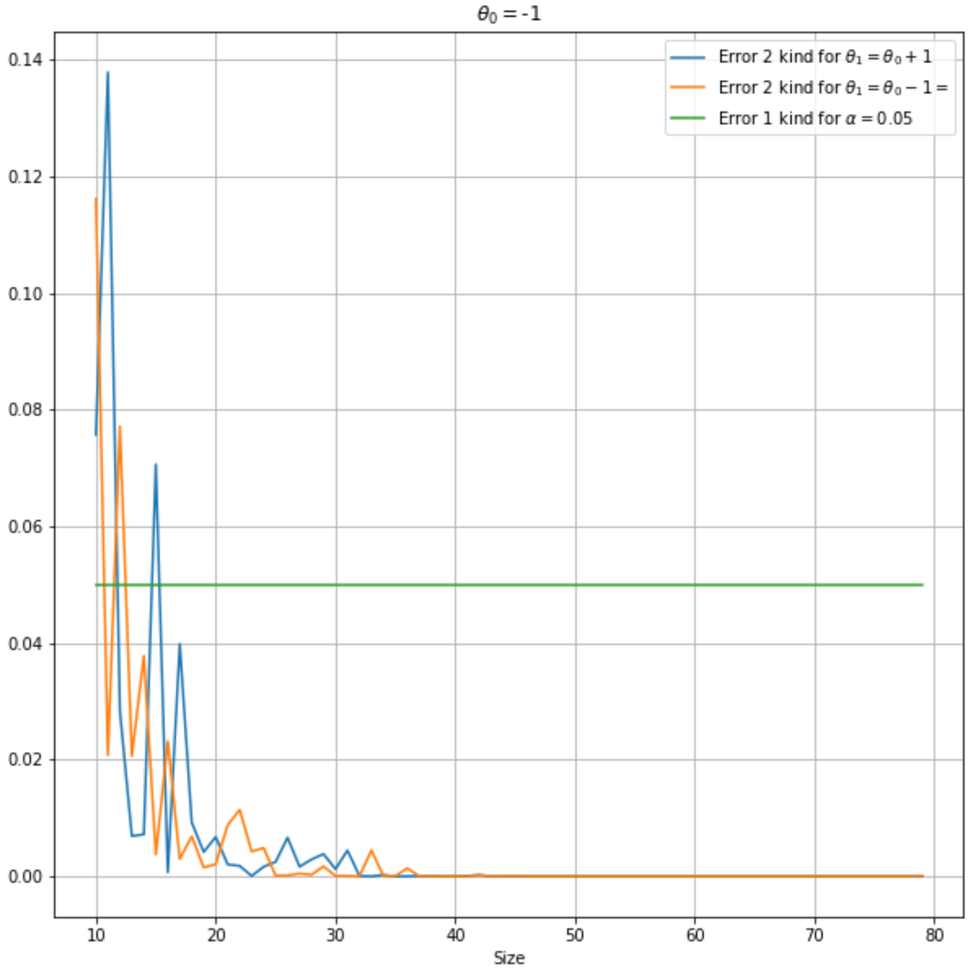
In [9]:
```
theta = np.array([-9, -5, -1, 0, 1, 5, 9])
K = 80
```

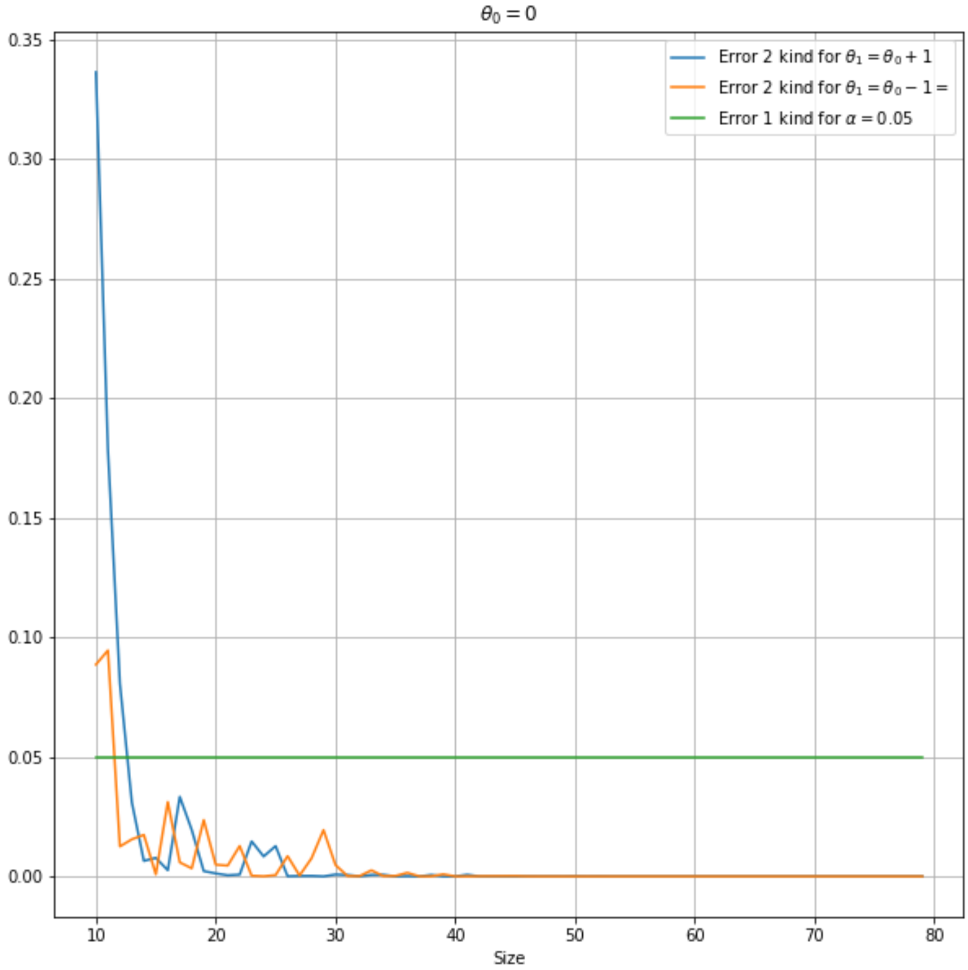
In [10]:
```
grid = [i for i in range(10,K)]
a = [alpha for i in range(10,K)]
for th in theta:
    plt.figure(figsize = (10,10))
    error2_1 = []
    error2_2 = []
    for n in grid:
        X_1 = norm.rvs(loc=th, size=n)
        X_2 = norm.rvs(loc=th, size=n)
        z_1 = t.ppf(1-alpha, df=n)
        error2_1.append(t.cdf(z_1 - np.sqrt(n) / var(X_1) ,df=n))
        z_2 = t.ppf(alpha, df=n)
        error2_2.append(1 - t.cdf(z_2 + np.sqrt(n) / var(X_2) ,df=n))
    plt.plot(grid, error2_1, label=r'Error 2 kind for $\theta_1 = \theta_0 +
1$')
    plt.plot(grid, error2_2, label=r'Error 2 kind for $\theta_1 = \theta_0 -
1 = $')
    plt.plot(grid, a, label = 'Error 1 kind for $\\alpha = 0.05$')
    plt.legend()
    plt.grid()
    plt.title(r'$\theta_0 = $' + str(th))
    plt.xlabel("Size")
    plt.show()
```

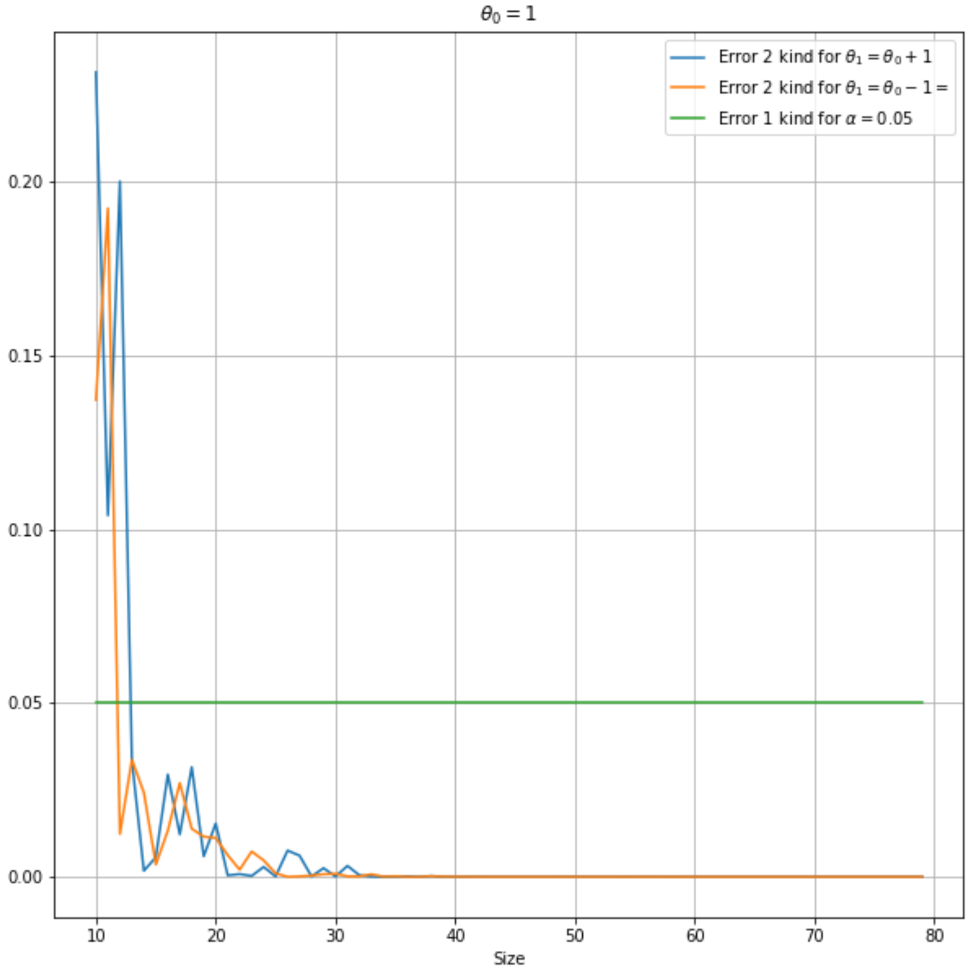


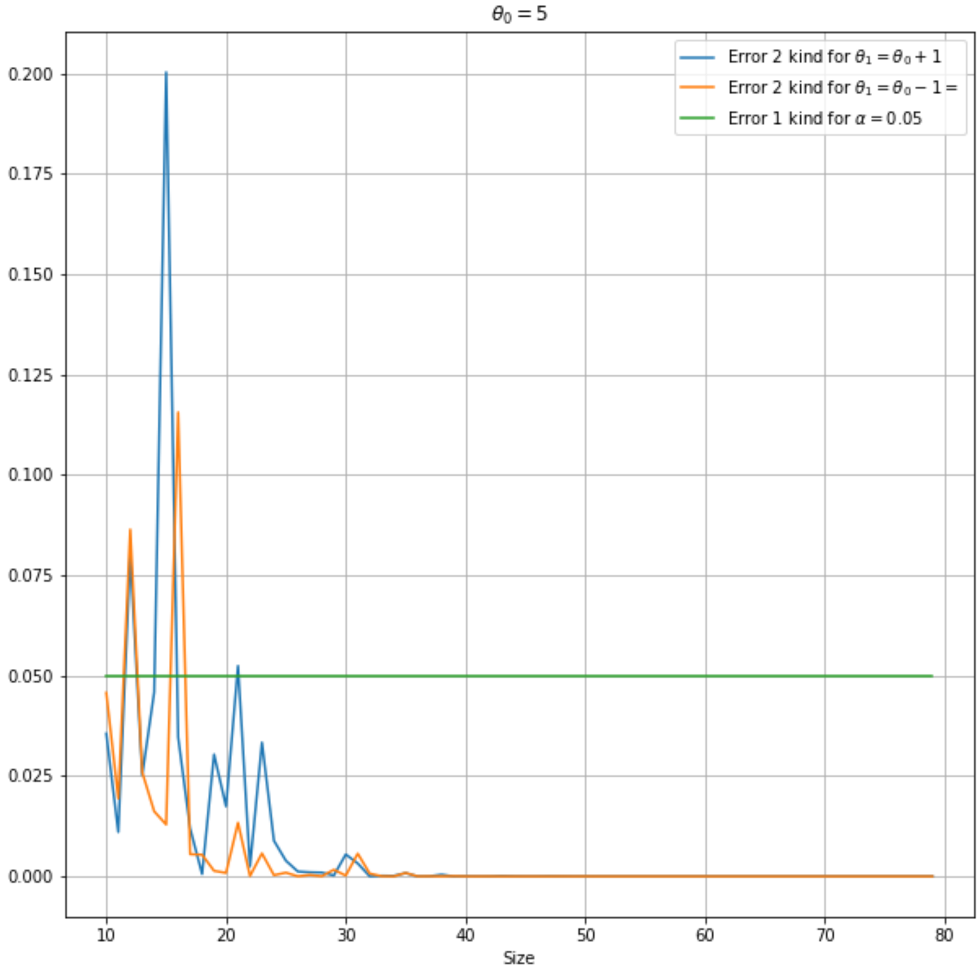
$\theta_0 = $ -9
Error 2 kind for $\theta_1 = \theta_0 + 1$
Error 2 kind for $\theta_1 = \theta_0 - 1 =$
Error 1 kind for $\alpha = 0.05$
0.200
0.175
0.150
0.125
0.100
0.075
0.050
0.025
0.000
10
20
30
40
50
60
70
80
Size

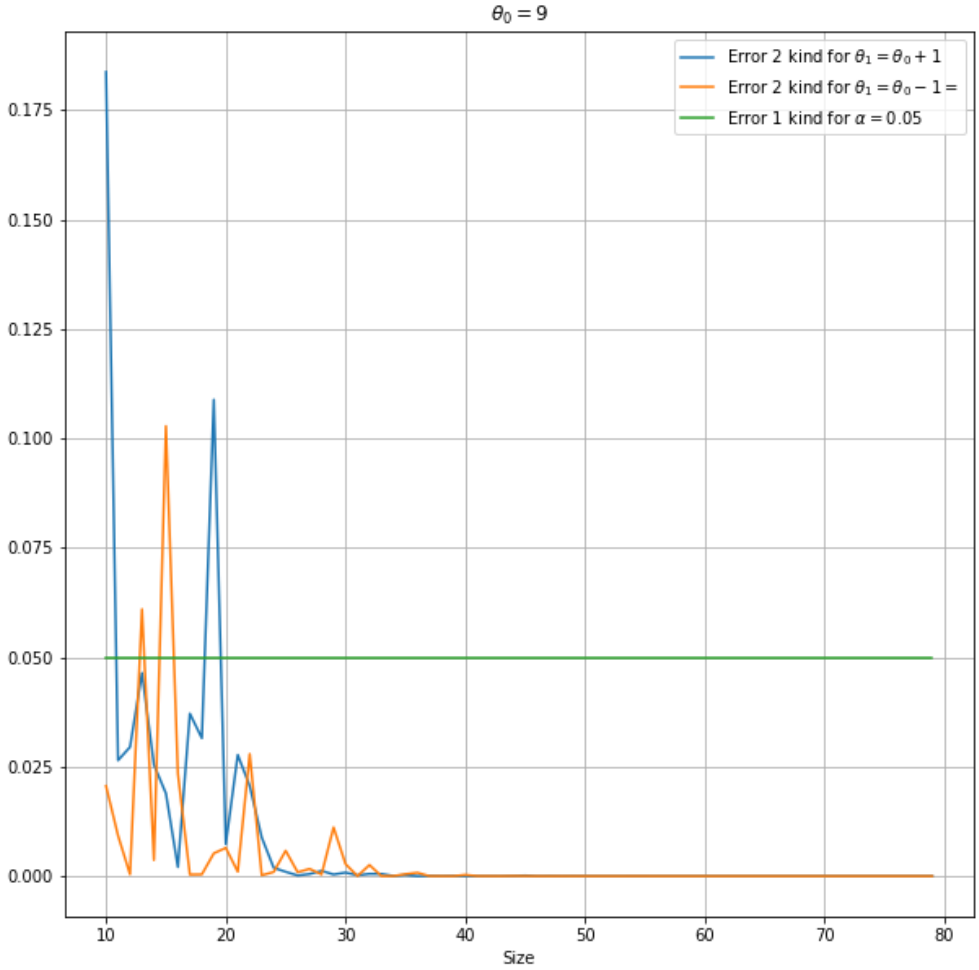

$\theta_0 =$ -5
Error 2 kind for $\theta_1 = \theta_0 + 1$
Error 2 kind for $\theta_1 = \theta_0 - 1 =$
Error 1 kind for $\alpha = 0.05$
0.12
0.10
0.08
0.06
0.04
0.02
0.00
10
20
30
40
50
60
70
80
Size


$\theta_0 = -1$
Error 2 kind for $\theta_1 = \theta_0 + 1$
Error 2 kind for $\theta_1 = \theta_0 - 1 =$
Error 1 kind for $\alpha = 0.05$
0.14
0.12
0.10
0.08
0.06
0.04
0.02
0.00
10
20
30
40
50
60
70
80
Size


$\theta_0 = 0$
Error 2 kind for $\theta_1 = \theta_0 + 1$
Error 2 kind for $\theta_1 = \theta_0 - 1 =$
Error 1 kind for $\alpha = 0.05$
0.35
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
10
20
30
40
50
60
70
80
Size


$\theta_0 = 1$
Error 2 kind for $\theta_1 = \theta_0 + 1$
Error 2 kind for $\theta_1 = \theta_0 - 1 =$
Error 1 kind for $\alpha = 0.05$
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
10
20
30
40
50
60
70
80
Size


$\theta_0 = 5$
Error 2 kind for $\theta_1 = \theta_0 + 1$
Error 2 kind for $\theta_1 = \theta_0 - 1 =$
Error 1 kind for $\alpha = 0.05$
0.200
0.175
0.150
0.125
0.100
0.075
0.050
0.025
0.000
10
20
30
40
50
60
70
80
Size



Вывод: n = 25 достаточно, чтобы вероятность ошибки 1 рода стала больше вероятности ошибки 2 рода.

```
In [ ]:
```