

# Statistiek en Gegevensverwerking met Python: Opdracht 1

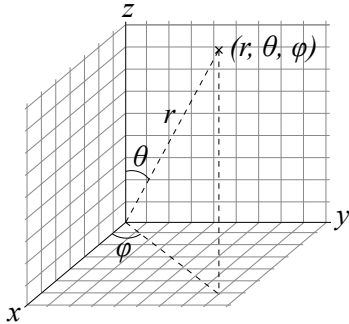
## Coördinatentransformaties en foutenpropagatie

20 November 2018

### 1 Inleiding

Deze opdracht gaat over het propageren van fouten bij overgang van sferische naar cartesische coördinaten. In het bestand `punten_sferisch.dat` vinden jullie een lijst van punten, met hun bolcoördinaten  $r$ ,  $\theta$  en  $\phi$  gegeven door respectievelijk de eerste, tweede en derde kolom (met de hoeken in radialen).

Om naar cartesische coördinaten over te gaan, worden de volgende formules toegepast:



$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad (1)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi \quad (2)$$

$$z = r \cos \theta \quad (3)$$

### 2 Implementeer de foutenpropagatie

1. Schrijf een functie die deze coördinatentransformatie uitvoert, en bestudeer de xyz-verdeling van de punten.
2. Neem aan dat voor alle punten in `punten_sferisch.dat`, de fouten op de bolcoördinaten dezelfde zijn, en dat er geen correlaties zijn:

$$\sigma_r = 0.001 \quad (4)$$

$$\sigma_\theta = 0.003 \quad (5)$$

$$\sigma_\phi = 0.005 \quad (6)$$

Deze fouten worden doorheen de transformatie gepropageerd, en er ontstaan correlaties tussen de bekomen  $x$ ,  $y$  en  $z$ . Implementeer een functie die de algemene formule voor foutenpropagatie toepast.

$$C_{X,ij} = \sum_{kl} \frac{\partial X_i}{\partial R_k} \frac{\partial X_j}{\partial R_l} C_{R,kl} \quad (7)$$

Hier staan de  $X_i$  voor  $x$ ,  $y$ , en  $z$ , en de  $R_i$  voor  $r$ ,  $\theta$ , en  $\phi$ .  $C_R$  is de covariantiematrix voor de bolcoördinaten, welke direct volgt uit de gegevens.  $C_X$  is de covariantiematrix die we willen bekomen. Aangezien er in deel 4 van deze opdracht wél correlaties tussen de bolcoördinaten zullen zijn, implementeer je deze formule het best zo algemeen mogelijk:

- Implementeer de afgeleiden van  $x$ ,  $y$ , en  $z$ , naar  $r$ ,  $\phi$ , en  $\theta$ , zoals ze voorkomen in de foutenpropagatieformule in de cursus (9 formules in totaal dus).

- Gebruik deze dan om te volledige formule te implementeren, die de volledige covariantiematrix teruggeeft. Om de implementatie beknopt te houden, is het aangeraden om de formule 7 eerst als matrixvermenigvuldiging te schrijven.
  - Let ook op het feit dat alle afgeleiden individueel geëvalueerd moeten worden voor elk punt uit de dataset. M.a.w. deze hele formule is een functie van de gegeven coördinaten.
3. Pas deze functie toe op de gegeven datapunten, en houd de resultaten bij zodat ze je deze kan plotten in de volgende opgave.
- Ofwel sla je alles gewoon op in een aantal variabelen en zet je je plotinstructies in hetzelfde script.
  - Ofwel, als je liever aparte plotscripts maakt, kan je opteren om alles uit te schrijven naar bestanden, welke je dan in elk plotscript opnieuw inleest. Zo hoeft je de foutenpropagatie niet opnieuw uit te voeren telkens als je iets aan je plots wil veranderen.

### 3 Maak plots van de bekomen fouten en correlaties

Maak de volgende plots voor de gegeven dataset, om het gedrag van de foutenpropagatie te bestuderen:

- **Plot de fout** op  $x$ ,  $y$  en  $z$  in functie van elk van de bolcoördinaten (Zet gerust meerdere curven op dezelfde figuur indien ze dezelfde x-as gebruiken. Zo kan je alles in 3 plots krijgen.)
- **Plot de correlatiecoëfficiënten** tussen  $x$  en  $y$ ,  $y$  en  $z$ ,  $z$  en  $x$ , opnieuw als functie van elke bolcoördinaat.

### 4 Bestudeer het effect van een systematisch fout

Stel nu dat er iets mis is met onze metingen van de hoeken  $\theta$  en  $\phi$ , waardoor deze met een systematische fout van  $S = \pm 0.01$  over- of onderschat werden:

$$C_R = \begin{pmatrix} \sigma_r^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\phi^2 \end{pmatrix} \Rightarrow C_R = \begin{pmatrix} \sigma_r^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta^2 + S^2 & S^2 \\ 0 & S^2 & \sigma_\phi^2 + S^2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

De fouten op  $\theta$  en  $\phi$  zijn dus bemerkelijk groter geworden. Herhaal de analyse uit de vorige opgave met deze aangepaste covariantiematrix. Hoe veranderen de groottes en trends van de fouten en correlaties?

### 5 Indienen

Schrijf een kort verslag bestaande uit de omschrijving van jouw code, de plots, en de interpretatie. Dien dit in samen met de Python bronbestanden. Dien het verslag met de plots in als een .pdf file. Dien de code in als een .py file.

**Opmerking plots** - Zorg ervoor dat de nodige assenlabels en legendes aanwezig zijn. Let erop dat de lettergroottes nog leesbaar zijn indien de figuur herschaald wordt. Plaats een onderschrift bij elke figuur om uit te leggen wat er getoond wordt. De interpretatie van de figuur hoort niet in het onderschrift, maar in de hoofdtekst.

**Opmerking code** - Zorg ervoor dat deze netjes is (duidelijke namen van variabelen, commentaar wanneer nodig), en dat deze werkt uiteraard. Beschrijf op een beknopte manier wat elk script precies doet. Indien je analyse uit meerdere stappen bestaat, met tussenresultaten, leg dan uit hoe je de analyse en het plotten precies uitvoert (bvb. volgorde van scripts).

Met de plots erbij wordt er een verslag van 3 à 5 pagina's in totaal verwacht. Probeer de hoeveelheid tekst onder de 2 pagina's te houden. De deadline voor elke opdracht ligt op twee weken na het ontvangen van de opgave. Dus in dit geval moet er ingediend worden **vóór 17 November, 23u59**.