Szegedi Tudományegyetem

Informatikai Intézet

Dirichlet-Laplace mátrixok legkisebb sajátértékeiről

Diplomamunka

Készítette:
Nagy Viktória
programtervező informatikus szakos hallgató

Témavezető:
Vinkó Tamás Dr.
egyetemi docens

Szeged
2022

Tartalomjegyzék

Feladatkiírás

A témavezető által megfogalmazott feladatkiírás. Önálló oldalon szerepel.

Tartalmi összefoglaló

Egy n csúcsú, m élű $G = (V, E)$ összefüggő gráfra és L Laplace-mátrixra G egy Dirichlet-Laplace mátrixa az az $L(S)$ $(n-k) \times (n-k)$ méretű részmátrixa L-nek, amit úgy kapunk, hogy L-ből kitöröljük a k-elemű $S \subseteq V$ csúcshalmazhoz tartozó sorokat és oszlopokat. $L(S)$ legkisebb $\lambda(S)$ sajátértéke kintüntetett szerepet játszik különböző G-n definiált dinamikus folyamatokban. Például a $\lambda(S)$ leírja a leader-follower consensus konvergenciáját, illetve egy elrendezés hatásosságát a pinning control problémánál, nagyobb $\lambda(S)$-hez gyorsabb konvergencia és jobb hatásosság tartozik. A dolgozatban megpróbálunk egy optimális $k \ll n$ elemű S csúcshalmazt találni, hogy maximalizáljuk a $\lambda(S)$ legkisebb sajátértékét az $L(S)$ Dirichlet-Laplace-mátrixnak. Megmutatjuk, hogy ez az optimalizálási probléma NP-nehéz. Az optimális megoldás megtalálásának nehézségéből kifolyólag, először mutatunk egy naiv algoritmust, amely minden k-adik iterációban az optimális csúcsot választja. Ezután különböző, a fokszámon és a Gersgorin-körtételen alapuló módszereket vizsgálunk a megfelelő csúcshalmaz kiválasztására.

A tartalmi összefoglalónak tartalmaznia kell (rövid, legfeljebb egy oldalas, összefüggő megfogalmazásban) a következőket: a téma megnevezése, a megadott feladat megfogalmazása - a feladatkiíráshoz viszonyítva-, a megoldási mód, az alkalmazott eszközök, módszerek, az elért eredmények, kulcsszavak (4-6 darab).

Az összefoglaló nyelvének meg kell egyeznie a dolgozat nyelvével. Ha a dolgozat idegen nyelven készül, magyar nyelvű tartalmi összefoglaló készítése is kötelező (külön lapon), melynek terjedelmét a TVSZ szabályozza.

Bevezetés

Itt kezdődik a bevezetés, mely nem kap sorszámot.

1. fejezet

Alapfogalmak

1.1. Definíció (Gráf). *Gráfnak nevezzük azokat a (V, E, I) hármasokat, ahol V és E tetszőleges diszjunkt halmazok, $I \subseteq V \times E$ illeszkedési reláció. A V halmazt a gráf csúcshalmazának, E-t élhalmaznak nevezzük. Azt mondjuk, hogy a v csúcs illeszkedik az e élre, ha $(v, e) \in I$. Az illeszkedési reláció olyan, hogy minden élre egy vagy két csúcs illeszkedik.*

1.2. Definíció (Összefüggő gráf). *G összefüggő gráf, ha minden $u, v \in V$-re létezik u-ból v-be menő séta.*

1.3. Definíció (Szomszédsági mátrix). *Egy n csúcsú G gráf szomszédsági mátrixa egy olyan $n \times n$-es A mátrix, aminek i-edik sorának j-edik eleme megfelel a gráf i-edik csúcsából a j-edik csúcsába induló élnek.*

1.4. Definíció (Laplace-mátrix). *Legyen G egy egyszerű, n csúcsú gráf, melynek szomszédsági mátrixa A. Ekkor G Laplace-mátrixa $L = D - A$, ahol D egy diagonális mátrix, mely a csúcsok fokszámát tartalmazza; vagyis $D_{ii} = d(v_i) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}$ és $D_{ij} = 0$, ha $i \neq j$.*

1.5. Definíció (Pozitív definit mátrix). *A szimmetrikus $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixot pozitív definitnek nevezzük, ha minden $\vec{0} \neq \vec{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T \in \Re^n$ vektorra fennáll az*

$$\vec{x}^T A \vec{x} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_j x_k > 0$$

egyenlőtlenség. A kettős szummával jelölt összeget kvadratikus alaknak nevezzük.

1.6. Definíció (Sajátérték, sajátvektor). *Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak az $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ vektor sajátvektora a $\lambda \in \mathbb{R}$ sajátértékkel, ha $\vec{x} \neq \vec{0}$ és*

$$A\vec{x} = \lambda \vec{x}.$$

Az esetünkben csak a legkisebb sajátérték meghatározására van szükség. Tegyük fel, hogy A reguláris mátrix, ekkor minden sajátértéke nullától különböző. Ekkor az $Ax = \lambda x$ egyenletből

$$x = A^{-1}(\lambda x) = \lambda A^{-1} x$$

adódik, és innen

$$\lambda^{-1} x = \lambda^{-1} \lambda A^{-1} x = A^{-1} x.$$

Eszerint ha az A mátrix sajátértéke λ, és az ehhez tartozó sajátvektor x, akkor az A^{-1} mátrix egy sajátértéke λ^{-1} az x sajátvektorral. Ezen felismerésen alapul az inverz hatványmódszer, vagy más néven a Wieland-féle inverz iteráció:

$$Ay = x^k, x^{k+1} = y/||y||,$$

amely tehát a legkisebb abszolút értékű sajátértéket és a hozzá tartozó sajátértéket és a hozzátartozó sajátvektort közelíti meg.

2. fejezet

A Probléma

A legkisebb $\lambda(S)$ sajátértéke a $L(S)$ Dirichlet-Laplace mátrixnak sok alkalmazás szempontjából fontos. A $\lambda(S)$ érték segítségével jellemezhetjük a különböző rendszerek teljesítményét, mint például a konvergencia mértékét a leader-follower rendszerekben, vagy a pinning control hatásosságát. Ezeknél a rendszereknél a nagyobb $\lambda(S)$ jobb teljesítményt jelent.

Belátható, hogy $\lambda(S)$ az S halmaz elemszáma szerint monoton növekvő. Ez a motivációnk arra, hogy megvizsgáljuk azt a problémát, hogy hogyan tudunk kiválasztani k darab csúcsot S megalkotásához, ha azt szeretnénk, hogy a $\lambda(S)$ függvény értéke maximális legyen.

2.1. Probléma (A Dirichlet-Laplace-mátrix legkisebb sajátértékének maximalizálása (Maximization of the Smallest Eigenvalue of Grounded Laplacian, MaxSEGL))**.** Adott egy súlyozatlan, irányítatlan és összefüggő gráf, $G = (V, E)$. Találjunk egy olyan $0 < k \ll \ll |V|$ elemű $S \subset V$ csúcshalmazt, hogy az $L(S)$ Dirichlet-Laplace-mátrix legkisebb sajátértéke maximális legyen. Formálisan:

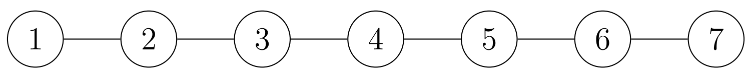
$$S^* = \arg \max_{S \subset V, |S|=k} \lambda(S).$$

A fenti probléma egy kombinatorikus optimalizálási feladat, amit megpróbálhatunk megoldani teljes leszámlálással, megvizsgálva mind az $\binom{n}{k}$ lehetőséget. Minden lehetséges k-elemű S-re kiszámoljuk az $L(S)$ Dirichlet-Laplace-mátrix legkisebb $\lambda(S)$ sajátértékét, majd visszaadjuk az optimális S^* halmazt, amire a legkisebb sajátérték maximális. Ez az algoritmus $O(\binom{n}{k}m)$ időigényű, ami azt jelenti, hogyha az n vagy a k kicsit nagyobb, akkor az algoritmus nem fut le.

2.1. Grounded cúcs csoport centralitás

A legkisebb $\lambda(S)$ sajátérték leírja különböző dinamikus hálózatok teljesítményét, amely az S-ben lévő csúcsok által meghatározott érték. Ebben az értelemben $\lambda(S)$-re tekinthetünk úgy, mint az S-ben lévő csúcsok csoportja által meghatározott centralitásra, amit grounded csúcs csoport centralitásnak nevezünk. Minél nagyobb a $\lambda(S)$ értéke, annál fontosabbak a csúcsok az adott dinamikus rendszerben. Így a Dirichlet-Laplace-mátrix legkisebb sajátértékének maximalizálásának problémája megegyezik azzal a feladattal, hogy találjuk meg azt a k csúcsot, amiből összerakva az S halmazt, a $\lambda(S)$ értéke maximális lesz.

Fontos megemlíteni, hogy a csúcsok egy S csoportjára, a $\lambda(S)$ grounded cúcs csoport centralitás nem gyakran egyezik meg az S-ben lévő csúcsok saját centralitásainak összegével, az S-beli csúcsok közötti összefüggések miatt. Azaz $\lambda(S) \neq \sum_{i \in S} \lambda(\{i\})$. Így a fentebb definiált kombinatorikai optimalizálási feladat nem oldható meg hatékonyan annyival, hogy kiválasztjuk a k darab legnagyobb centralitással rendelkező csúcsot. Például az ábrán lévő útgráfra a csúcsok grounded centralitása 1-től 7-ig rendre a következő: 0.058, 0.081, 0.121, 0.198, 0.121, 0.081, és 0.058. Ha S három csúcsból áll, könnyen meghatározható, hogy az optimális S^* halmaz a $\{2, 4, 6\}$, nem pedig a három legnagyobb grounded centralitással rendelkező csúcsokból álló $\{3, 4, 5\}$ halmaz ($\lambda(\{2, 4, 6\}) = 1$, $\lambda(\{3, 4, 5\}) = 0.39$).



2.1. ábra. Útgráf 7 csúccsal és 6 éllel

Külön-külön nézve a csúcsokra a grounded centralitás eléggé különböző fontossági sorrendet ad a többi csúcs centralitási mértékhez képest, úgy mint a fokszám centralitás, köztiség centralitás, sajátérték centralitás vagy a közelség centralitás. Ez a különbözőség fennáll csúcs csoportok esetén is.

2.2. A feladat nehézsége

Korábban már láttuk, hogy a probléma egy kombinatorikus optimalizálási feladat, így megoldható teljes leszámlálással. Ebben a részben belátjuk, hogy a probléma NP-nehéz, úgy, hogy visszavezetjük a 3-reguláris gráfok csúcsfedésére, amiről tudjuk, hogy NP-teljes. 3-reguláris gráfnak nevezünk egy olyan gráfot, amelynek az összes csúcsának a fokszáma 3. Egy $G = (V, E)$ gráfra G lefogó ponthalmaznak nevezünk egy olyan $C \subset \subset V$ halmazt, ha minden E-beli élnek legalább egy végpontja benne van C-ben. Egy I csúcshalmazt függetlennek nevezünk, ha I csúcsait nem köti össze él. A definícióból adódik, hogy ha C lefogó ponthalmaza G-nek, akkor a $V \setminus C$ független.

A döntési verziója a csúcsfedésnek a következő:

2.2. Probléma (Csúcsfedés 3-reguláris gráfokon (Vertex Cover on a 3-Regular Graph, VC3GR))**.** Adott egy 3-reguláris gráf $G = (V, E)$ és egy k pozitív egész szám. Döntsük el, hogy létezik, vagy nem egy $S \subset V$ csúcshalmaz úgy, hogy $|S| = k$ és S csúcsfedése G-nek.

Most pedig megfogalmazzuk MaxSEGL feladatot eldöntési problémaként.

2.3. Probléma (MaxSEGL eldöntési probléma (MaxSEGL Decision Version, MaxSEGLD))**.** Adott egy $G = (V, E)$ összefüggő gráf, egy k pozitív egész szám és egy $r \in \mathbb{R}^+$ pozitív valós szám. Döntsük el, hogy létezik-e $S \subset V$ csúcshalmaz, hogy $|S| = k$ és $\lambda(S) \geq r$.

Mielőtt megadnánk a probléma visszavezetését, tekintsük a következő lemmát.

2.4. Lemma. *Legyen $G = (V, E)$ egy összefüggő 3-reguláris gráf, és legyen S a V egy nem üres részhalmaza. Ekkor az $L(S)$ Dirichlet-Laplace mátrixra, $\lambda(S) \leq 3$ és pontosan akkor áll fenn egyenlőség, ha S lefogó ponthalmaza G-nek.*

Az előző lemma segítségével beláthatjuk az alábbi tételt.

2.5. Tétel. *A Laplace-Dirichlet mátrix legkisebb sajátértékének maximalizálása NP-nehéz feladat.*

Bizonyítás. Először megadunk egy hatékony visszavezetést VC3RD esetekről MaxSEGLD esetekre:

$$p : \{G = (V, E), k\} \to \{G = (V, E), k, 3\}$$

$\square$

3. fejezet

Megoldási módszerek

4. fejezet

Futtatási eredmények

5. fejezet

Összefoglalás

5.1. Alcím

Ebben alfejezetek is lehetnek

5.1.1. Al-al cím

Sőt al-al fejezetek is.

5.1.2. Másik

Na lássunk egy másodikat is.

5.1.3. Harmadik

Meg egy harmadikat is.

5.2. Mindjárt vége a fejezetnek

Tényleg, itt valóban vége.

6. fejezet

Hosszú

6.1. Részletek

Ebbe a fejezetbe pedig írunk sok sok szöveget. Szöveg, szöveg, szöveg, szöveg, szöveg, szöveg, szöveg, szöveg, szöveg szöveg,

szöveg, szöveg,

7. fejezet

Egyebek

7.1. Környezetek

7.1. Tétel. *Ez itt egy tétel.*

Bizonyítás. Ez pedig a bizonyítása, melyben szerepel egy képlet:

$$\begin{aligned} E^{\text{globális}} &= \text{tét}_1 \cdot E_1^{\text{elemi}} + \text{tét}_2 \cdot E_2^{\text{elemi}} + \ldots + \text{tét}_n \cdot E_n^{elemi} \\ &= E^{\text{elemi}} \left(\text{tét}_1 + \text{tét}_2 + \ldots + \text{tét}_n \right) \\ &= E^{\text{elemi}} \cdot \text{össztét} \end{aligned} \tag{7.1}$$

A második egyenlőségnél azt használtunk ki, hogy ...

Ezzel a bizonyítást befejeztük. □

7.2. Definíció. *Ez egy definíció. Számozása a tételekkel együtt történik.*

7.3. Állítás. *A következő négy állítás egymással ekvivalens:*

(i) M *és* N *gyengén ekvivalensek.*

(ii) Minden n *nemnegatív egész számra* $|L_M \cap \Sigma_1^n| = |L_N \cap \Sigma_2^n|$ *teljesül.*

(iii) Minden n *nemnegatív egész szám esetén létezik* $\pi_n : L_M \cap \Sigma_1^n \to L_N \cap \Sigma_2^n$ *kölcsönösen egyértelmű leképezés.*

(iv) Minden nemnegatív n*-re* $xA^n y^T = x' A'^n y'^T$.

7.4. Következmény. *Ez pedig egy következmény.*

7.5. Példa. Ez lesz a példa, ezt nem szedjük dőlten.

7.6. Megjegyzés. A fejezetet pedig egy megjegyzés zárja.

7.2. Listák

Ez egy felsorolás:

- első
- második
    - első
    - második
- harmadik
- ♣ saját jel is alkalmazható

Ez pedig egy számozott lista:

1. hétfő
2. kedd
3. szerda

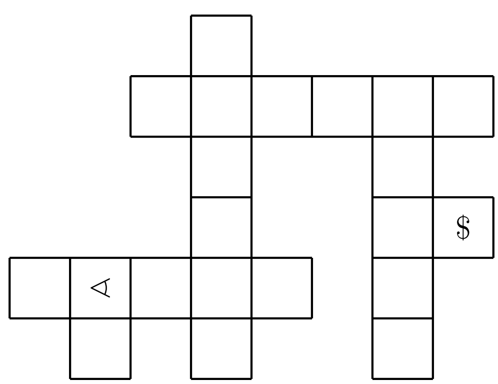
7.3. Egy táblázat és egy ábra

A táblázat itt következik.

7.1. táblázat. Példa stratégiatáblára a Black Jack esetében

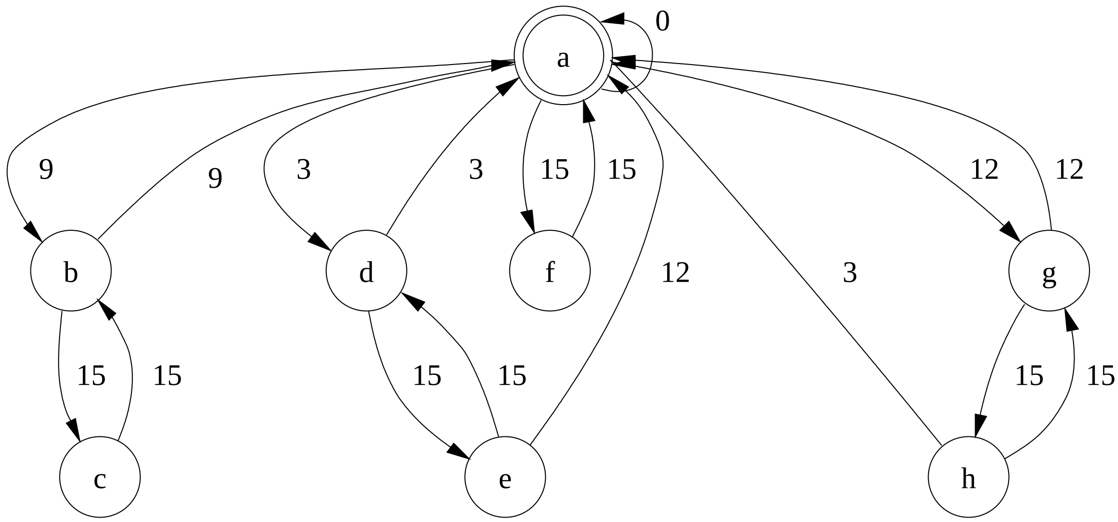
	ász	2	3	4	5	6	7	8	9	10
21	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n
20	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n
19	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n
18	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n
17	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n
16	h	n	n	n	n	n	h	h	b	b
15	h	n	n	n	n	n	h	h	h	b
14	h	n	n	n	n	n	h	h	h	b
13	h	n	n	n	n	n	h	h	h	h
12	h	n	n	n	n	n	h	h	h	h
11	h	D	D	D	D	D	D	D	D	h

Lássunk egy ábrát is!



7.1. ábra. Labirintus bejárása

Külön fájlban elkészített grafika beillesztését a 7.2 ábra szemlélteti.



7.2. ábra. A $4 \times m$-es tábla lefedéseinek mátrixreprezentációit felismerő automata

8. fejezet

Függelék

8.1. A program forráskódja

A függelékbe kerülhetnek a hosszú táblázatok, vagy mondjuk egy programlista:

```
while (ujkmodosito[i]<0)
{
   if (ujkmodosito[i]+kegyenletes[i]<0)
   {
      j=i+1;
      while (j<14)
      if (kegyenletes[i]+ujkmodosito[j]>-1) break;
      else j++;
      temp=ujkmodosito[j];
      for (l=i;l<j;l++) ujkmodosito[l+1]=ujkmodosito[l];
      ujkmodosito[i]=temp;
   }
   i++;
}
```

Nyilatkozat

Alulírott . . . . szakos hallgató, kijelentem, hogy a dolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem, Informatikai Intézet . . . . Tanszékén készítettem, ... diploma megszerzése érdekében.

Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy szakdolgozatomat / diplomamunkámat a Szegedi Tudományegyetem Diplomamunka Repozitóriumában tárolja.

Szeged, 2022. április 26. . . . .

aláírás

Alulírott . . . . szakos hallgató, kijelentem, hogy a dolgozatomat a Szegedi Tudományegyetem, Informatikai Intézet . . . . Tanszékén készítettem, ... diploma megszerzése érdekében.

Kijelentem, hogy a dolgozatot más szakon korábban nem védtem meg, saját munkám eredménye, és csak a hivatkozott forrásokat (szakirodalom, eszközök, stb.) használtam fel.

Tudomásul veszem, hogy szakdolgozatomat / diplomamunkámat a TVSZ 4. sz. mellékletében leírtak szerint kezelik.

Szeged, 2022. április 26. . . . .

aláírás

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani **X. Y-nak** ezért és ezért …

Irodalomjegyzék

[1] J. L. Gischer, The equational theory of pomsets. *Theoret. Comput. Sci.*, **61**(1988), 199–224.

[2] Csendes Tibor, *Közelítő és szimbólikus számítások*, Szegedi Egyedtemi Kiadó POLYGON, Szeged, 2007.