

Лабораторная работа №2

Конспект по теме “Математические объекты и их представления”

Шандыбиной Виктории

ИВТ, 2 курс, 1 подгруппа

Вопрос №1

Компьютерная алгебра — область математики, лежащая на стыке алгебры и вычислительных методов. Для нее, как и для любой области, лежащей на стыке различных наук, трудно определить четкие границы. Часто говорят, что к компьютерной алгебре относятся вопросы, слишком алгебраические, чтобы содержаться в учебниках по вычислительной математике и слишком вычислительные, чтобы содержаться в учебниках по алгебре. [\[1\]](#)

Компьютерная алгебра есть та часть информатики, которая занимается разработкой, анализом, реализацией и применением алгебраических алгоритмов. [\[2\]](#)

Компьютерная алгебра, называемая также символьными вычислениями, — научная дисциплина, ставящая целью разработку алгоритмов и программного обеспечения для решения с помощью компьютера задач, в которых исходные данные и результаты имеют вид математических выражений, формул. [\[3\]](#)

Вопрос №2-3

Базовые объекты компьютерной алгебры, особенности работы и особенности представления целых и дробных чисел

Целые числа

Возможны различные способы представлений целых чисел: (1) ограниченной точности, когда количество цифр в целом числе задано. К таковым относятся все стандартные арифметики в языках программирования. (2) произвольно заданной точности, когда количество цифр в заданном числе можно менять, но только один раз — задавать перед вычислениями. (3) неограниченной точности, когда количество цифр в числе не ограничивается никаким наперед заданным числом, кроме ограничений, связанных с размером памяти машины. В системах компьютерной алгебры целые числа неограниченной точности, реализуются программным путем, (этот тип данных считается базовым).

Рациональные числа

Возможны различные способы представлений рациональных чисел произвольной точности : (1) отношение числителя и знаменателя (оба - числа произвольной точности)

(более точно, в виде записи, хранящей ссылку на список – числитель и ссылку на список – знаменатель). Такое представление является нормальным. Проблема - для нормального представления необходимо распознавание идентичных чисел. Пример. Записи вида $-2/3$, $2/-3$, $4/-6$, $-10/15$ и т.п. представляют одно и то же число. (2) Так же, как в (1), но выполнив дополнительные условия : (а) числитель и знаменатель числа должны быть сокращены на наибольший общий делитель (НОД); (б) знаменатель должен быть положительным числом. Такое представление является каноническим. Проблема - требуется вычисление НОД двух целых чисел произвольной точности. При большом количестве цифр в числах эта процедура является алгоритмически сложной. Тем более, её надо производить на одном из самых низких уровнях вычислений – при каждом вычислении чисел. Замечание. В системах компьютерной алгебры обычно используется каноническое представление рациональных чисел произвольной точности.

Полиномы от одной переменной

Полином от одной переменной представляет собой сумму мономов, иными словами – последовательность (или список). Коэффициенты мономов могут быть числами разных типов, в том числе целыми числами произвольной точности. (Степени переменных – короткие целые числа). Представление полинома является каноническим, если последовательность мономов упорядочена по возрастанию (или по убыванию) степени мономов. Полином можно хранить как в плотном, так и в разреженном представлении. В плотном представлении хранится: число мономов (определяемое как максимальная степень старшего монома плюс единица), и все, в том числе, нулевые коэффициенты мономов. Такое представление эффективно для алгоритмов преобразования полиномов, в которых (1) число членов рядов для вычислений с повышением точности вычислений растет быстро и (2) мало число нулевых членов. В разреженном представлении хранится последовательность (список), в каждом блоке которой хранится запись об одном ненулевом мономе, содержащая коэффициент монома и его степень. Пример. Полином $A(x) = x^{1000} - 1$ требует существенно различные ресурсы при хранении в плотном и в разреженном представлениях.

Полиномы от нескольких переменных

Полином от нескольких переменных представляет собой сумму мономов, иными словами – последовательность (или список), а моном – произведение термов (тоже последовательность). Различают две формы канонического представления полинома от нескольких переменных: (1) форма с упорядочением последовательности мономов; (2) рекурсивная форма. Рекурсивная форма получается с помощью представления полинома от нескольких (N) переменных в виде полинома от одной переменной с коэффициентами – полиномами от других (N-1) переменных. При таком представлении на заданном порядке переменных полином представляется в виде иерархического списка, где в качестве коэффициентов хранятся ссылки на списки – полиномы меньших степеней.

Рациональные функции

Дробно-рациональные функции, представляющие отношение полиномов, эффективно хранить в виде записи, содержащей ссылку на полином - числитель и ссылку на полином – знаменатель. При этом полиномы должны находиться в одной канонической форме.

Представление рациональной функции будет каноническим, если дополнительно ввести следующие условия : (1) числитель и знаменатель должны быть сокращены на полином – наибольший общий делитель (НОД) этих двух полиномов; (2) числовые коэффициенты числителя и знаменателя должны быть сокращены на общий множитель; (3) старший коэффициент знаменателя должен быть положительным. Поиск НОД для двух полиномов от нескольких переменных является вычислительно трудоемкой операцией. Кроме того, она должна выполняться на низком уровне вычислений (т.е. очень часто). Поэтому необходимо предусмотреть две формы представления дробно-рациональных функций: (1) каноническую и (2) нормальную (без сокращения на НОД). Замечание. Как правило, в системах компьютерной алгебры реализуется несколько и канонических, и нормальных форм представления полиномов от нескольких переменных.

Вопрос №4

Алгебраическая функция — элементарная функция, которая в окрестности каждой точки области определения может быть неявно задана с помощью алгебраического уравнения.

Вопрос №6

Различают две формы представления матриц:

Двумерный массив:

$$\begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn} \end{pmatrix}$$

Список списков:

$$((a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}))$$

Для представления матриц обычно используется плотное представление (т.е. хранятся все элементы матриц, включая нулевые). В некоторых особых случаях для матриц специального вида (диагональных, ленточных и т.п.) применяется разреженное представление. Замечание. В случае использования разреженного представления требуются специальные алгоритмы преобразований матриц.