Семинар 2

Алексеев Василий

10 + 14 февраля (♥) 2022

Содержание

1. Системы линейных уравнений

Пример на пальцах номер 1. Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Два уравнения, две неизвестных. Как можно решить систему? Её можно решить методом Крамера (см. первый семинар прошлого семестра). Или подстановкой (выразить из одного уравнения одну переменную через другую, подставить в оставшееся уравнение, решить, ...). Или "манипуляцией уравнениями" ("вычесть из одного другое", ...).

Решим "манипуляцией":

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x \quad\;\; = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y = 1 \\ x \quad\;\; = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} \quad\;\; y = 0 \\ x \quad\;\; = 1 \end{cases}$$

Ожидаемо, получили единственное решение.

Метод Гаусса решения системы линейных уравнений $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ — это и есть последовательность таких "манипуляций" над уравнениями системы, но которая совершается в виде последовательности элементарных преобразований строк *расширенной матрицы* системы $(A \mid \boldsymbol{b})$. Каждое элементарное преобразование строк — переход к другой расширенной матрице, которая, в свою очередь, соответствует новой системе уравнений, получаемой из исходной соответствующим действием над уравнениями системы.

Пример на пальцах номер 2. Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} x + z = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Два уравнения, три неизвестных. Очевидно, решение будет не одно...

Можно выразить y и z через x:

$$\begin{cases} z = -x + 1 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

Таким образом, произвольный x плюс рассчитанные *указанным образом* y и z дают решение системы:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t - 1 \\ z = -t + 1 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Можно переписать решение в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t, \quad t \in \mathbb{R}$$

2. Задачи

2.1. # 17.1(4)

Выписать расширенную матрицу. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} y + 3z = -1 \\ 2x + 3y + 5z = 3 \\ 3x + 5y + 7z = 6 \end{cases}$$

Решение.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(3)=(3)-5\cdot(1)]{(2)=(2)-3\cdot(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & 6 \\ 3 & 0 & -8 & 11 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(2)=(2)/2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -8 & 11 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(3)=(3)-3\cdot(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(3)=-1/2\cdot(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(2)=(2)+2\cdot(3)]{(1)=(1)-3\cdot(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Упрощённой матрице соответствует система

$$\begin{cases} \quad y \quad = 2 \\ x \qquad = 1 \\ \qquad z = -1 \end{cases}$$

решение которой — $(1, 2, -1)^T$. □

2.2. # 19.6(20)

Решить систему с расширенной матрицей

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -7 & -3 & -3 \\ -5 & 4 & 63 & 29 & 71 \\ 5 & 24 & -7 & -1 & 41 \end{array}\right)$$

Решение. Расширенной матрице соответсвует система:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 7x_3 - 3x_4 = -3 \\ -5x_1 + 4x_2 + 63x_3 + 29x_4 = 71 \\ 5x_1 + 24x_2 - 7x_3 - x_4 = 41 \end{cases}$$

Для её решения снова воспользуемся методом Гаусса приведения расширенной матрицы к упрощённому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -7 & -3 & -3 \\ -5 & 4 & 63 & 29 & 71 \\ 5 & 24 & -7 & -1 & 41 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(3)=(3)-5\cdot(1)]{(2)=(2)+5\cdot(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -7 & -3 & -3 \\ 0 & 14 & 28 & 14 & 56 \\ 0 & 14 & 28 & 14 & 56 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[(2)=(2)/14]{(3)=(3)-(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(1)=(1)-2\cdot(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -11 & -5 & -11 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Упрощённой матрице соответствует система

$$\begin{cases} x_1 \qquad - 11x_3 - 5x_4 = -11 \\ \qquad x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

Базисные переменные — которым соответствовали базисные столбцы в упрощённой матрице — можно выразить через *свободные*:

$$\begin{cases} x_1 = 11x_3 + 5x_4 - 11 \\ x_2 = -2x_3 - x_4 + 4 \end{cases}$$

То есть при произвольных x_3 и x_4 рассчитанные по формулам выше x_1 и x_2 дадут в совокупности с x_3 и x_4 решение системы. Общий вид решения ($x_3 \equiv t_1 \in \mathbb{R}$, $x_4 \equiv t_2 \in \mathbb{R}$):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11t_1 + 5t_2 - 11 \\ -2t_1 - t_2 + 4 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t_2}_{\substack{\text{Общее решение однородной системы} \\ \text{(решение при нулевом столбце свободных членов)}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -11 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Частное решение неоднородной системы} \\ \text{(решение при нулевых свободных переменных)}}}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 11 & 5 \\ -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Фундаментальная матрица} \\ \text{(её столбцы — базис в пространстве} \\ \text{решений однородной системы)}}} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -11 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

□

2.3. # 18.17(1)

Найти однородную систему, для которой фундаментальной является матрица Φ следующего вида:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение.

Способ 1: "Решение наоборот". Размер фундаментальной матрицы 3×2. Значит, неизвестных в системе всего 3. А ранг самой матрицы A равен $3 - 2 = 1$. То есть в матрице всего "одна строчка" (может быть и больше — главное, чтоб ранг был равен одному, то есть чтоб "информативная" была всего одна строчка).

При данной фундаментальной матрице Φ общее решение однородной системы выражается как линейная комбинация её столбцов:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x} = \Phi \boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = h_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + h_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad h_1, h_2 \in \mathbb{R}$$

Это значит, что при определённом наборе чисел (x_1, x_2, x_3) коэффициенты разложения h_1 и h_2 по столбцам фундаментальной матрицы Φ найдутся тогда и только тогда, когда вектор (x_1, x_2, x_3) будет решением системы $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Перепишем выражение для общего решения выше в виде системы:

$$\begin{cases} x_1 = 3h_1 + h_2 \\ x_2 = 2h_1 + h_2 \\ x_3 = h_1 \end{cases}$$

Таким образом, можно попытаться решить эту систему относительно h_1 и h_2. И в процессе решения получить условие на компоненты x_1, x_2, x_3, при которых система будет разрешима. Можно воспользоваться методом Гаусса. Либо просто "поиграть с уравнениями" (что в принципе одно и то же):

$$\begin{cases} x_1 = 3h_1 + h_2 \\ x_2 = 2h_1 + h_2 \\ x_3 = h_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = h_1 \\ x_2 = 2h_1 + h_2 \\ x_3 = h_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = x_3 \\ h_2 = x_2 - 2h_1 = x_2 - 2x_3 \\ h_1 = x_3 \end{cases}$$

Условие разрешимости, которое мы получили в процессе решения: $\boxed{x_1 - x_2 = x_3}$. Если указанное соотношение между $(x_1, x_2, x_3) = \boldsymbol{x}$ не выполняется, коэффициенты h_1 и h_2 найти нельзя ($\boldsymbol{x}$ — не решение $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$). Иначе — коэффициенты h_1 и h_2 найти можно и $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — решение $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. В итоге матрицу A можно взять в виде:

$$A = (1, -1, -1)$$

Очевидно, ответ не однозначен: строчку можно несколько раз продублировать, даже с некоторым ненулевым коэффициентом (см. задачу далее (2.4)).

Способ 2: “В лоб”. В условии дана фундаментальная матрица. То есть её столбцы — решения однородной системы. Это значит, что в уравнение $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ можно подставить вместо $\boldsymbol{x}$ поочерёдно столбцы Φ, и это будет давать верные числовые равенства. Пусть в матрице A всего m строк (и 3 столбца). Тогда $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ в виде системы можно записать так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 = 0 \end{cases}$$

Подставляем сюда вместо $x_1, \ldots, x_3$ компоненты первого столбца Φ:

$$\begin{cases} 3a_{11} + 2a_{12} + a_{13} = 0 \\ 3a_{21} + 2a_{22} + a_{23} = 0 \\ \ldots \end{cases}$$

И компоненты второго столбца Φ:

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} \qquad = 0 \\ a_{21} + a_{22} \qquad = 0 \\ \ldots \end{cases}$$

Отсюда надо найти коэффициенты a_{ij}, составляющие матрицу A. Чтобы это сделать, можно сгруппировать уравнения из двух систем по строчкам:

$$\begin{cases} \begin{cases} 3a_{11} + 2a_{12} + a_{13} = 0 \\ \ \ a_{11} + \ \ a_{12} \qquad = 0 \end{cases} \\ \ldots \end{cases}$$

В каждой такой паре уравнений можно принять первую и вторую переменные за базисные (выразить через третью). В итоге строки матрицы A должны выглядеть так:

$$A = \begin{pmatrix} -a_{13} & a_{13} & a_{13} \\ -a_{23} & a_{23} & a_{23} \\ \ldots \end{pmatrix}$$

Три столбца линейно зависимы: например, первый и второй очевидным образом выражаются через третий. Поэтому максимальное число линейно независимых строк в матрице A — одна строчка (строчный ранг совпадает со столбцовым). Поэтому остаётся составить подходящую строку коэффициентов. Например,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

И тогда “система” уравнений:

$$\left\{ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right.$$

□

2.4. # 18.18

Найти *все* однородные системы уравнений, эквивалентные данной системе $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Решение. Надо найти совокупность матриц B, таких что $B\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Очевидно, столбцов в матрице B столько же, сколько и в данной в условии A (число неизвестных). Пусть размер матрицы A есть m строк на n столбцов. А размер матрицы B пусть l строк на n столбцов. Сколько строк l должно быть в матрице B, дающей такое же множество решений, что и A?

"Информативные" строки матрицы A должны сохраниться (их количество — ранг матрицы r). И к ним можно добавить сколько угодно "лишних" (или убрать из исходной системы, если строки A линейно зависимы). Таким образом, $l \geq r$. При этом r "информативных" строк B — это преобразованные r базисных (каких-то) строк матрицы A. Остальные строки B (если есть) — это произвольные линейные комбинации базисных строк A (1).

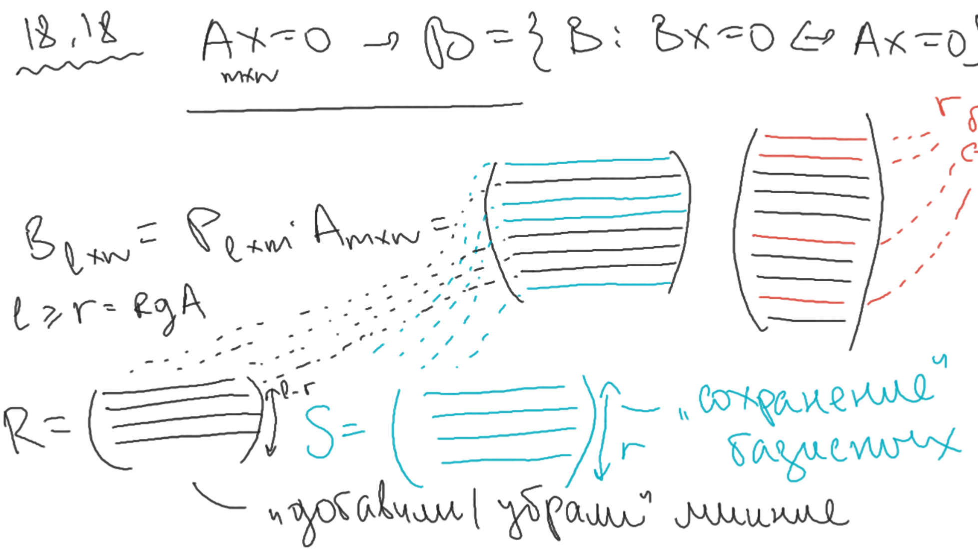

Рис. 1: Подходит любая матрица B вида $B = PA$, где строчный ранг P такой же, как у A (равный r). И подматрица S матрицы P, расположенная в r базисных строках — это матрица, которая преобразует r базисных строк матрицы A.

P.S. В конце задачника ответ сформулирован немного по-другому. Видимо, там считали, что строки матрицы A линейно независимы (хотя в условии задачи про это не сказано). Если же строки A линейно зависимы, то среди столбцов P могут быть хоть нулевые (например, столбец, который во всех строках B зануляет строку A, являющуюся линейной комбинацией базисных). $\square$