Семинар 1

Алексеев Василий

3 + 7 февраля 2022

Содержание

1. “Refresher”

Матрица $A \in \mathbb{R}^{m \times n} \equiv M$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R},\ i = 1 \dots m,\ j = 1 \dots n$$

Операции:

- сложения матриц ($"+" :\ M \times M \to M$):

$$C = A + B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

- умножения матрицы на число ($" \cdot " :\ \mathbb{R} \times M \to M$):

$$C = \alpha \cdot A \Leftrightarrow c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$$

Свойства операций ($A, B, C \in M$, $\alpha, \beta \in R$):

1. $A + B = B + A$
   (коммутативность сложения)
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
   (ассоциативность сложения)
3. $\exists 0_{m \times n} \in M\ :\ A + 0_{m \times n} = 0_{m \times n} + A = A$
   (существование “нейтральной” матрицы относительно сложения)
4. $\forall A\ \exists (-A)\ :\ A + (-A) = (-A) + A = 0_{m \times n}$
   (существование “обратной” матрицы относительно сложения[1])
5. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
6. $1 \cdot A = A$
7. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
   (дистрибутивность умножения относительно сложения матриц)
8. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
   (дистрибутивность умножения относительно сложения чисел)

Умножение матриц:

$$A_{m \times p} B_{p \times n} = C_{m \times n} \Leftrightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj},\ i = 1 \dots m,\ j = 1 \dots n$$

Свойства (некоторые) операции умножения матриц (если не указано отдельно, то размеры матриц такие, чтоб операция была определена):

[1]Противоположная матрица.

1. $\cancel{A \cdot B = B \cdot A}$

   (в общем случае некоммутативна; даже может быть не определена, если матрицы переставить)

2. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

   (ассоциативность умножения)

3. $\exists E_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n} \,:\, A_{n\times n} \cdot E_{n\times n} = E_{n\times n} \cdot A_{n\times n} = A_{n\times n}$

   (существование "нейтральной" матрицы относительно умножения в пространстве квадратных матриц $\mathbb{R}^{n\times n}$)[2]

4. для любой квадратной *невырожденной*[3] матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ найдётся матрица $A^{-1} \in$ $\in \mathbb{R}^{n\times n}$, такая что $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

   (существование "обратной" матрицы относительно умножения)

Определитель матрицы:

$$\det:\ \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$$

Вычисление определителя:

$$|a| = a$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

Разложение по первой строке при $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 2$ (M_{1j} — дополнительный минор элемента a_{1j}):

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j}$$

2. Ранг матрицы

Если квадратная матрица невырождена, то её строки линейно независимы. В общем же случае (вырожденная квадратная матрица или прямоугольная матрица) строки могут быть линейно зависимы. При этом, очевидно, можно (если матрица не нулевая) выбрать некоторое *максимальное по количеству* подмножество строк матрицы так, чтобы выбранные строки оставались линейно независимы (*строчный ранг*). Можно найти и максимальное по количеству подмножество линейно независимых столбцов матрицы (*столбцовый ранг*). А можно найти максимальную по размеру невырожденную квадратную подматрицу ("просто" *ранг*).

Теорема 2.1 (О ранге матрицы). *Ранг матрицы совпадает с её строчным и столбцовым рангами.*

Поэтому можно ввести единое обозначение для ранга матрицы. Например:

$$\mathrm{Rg}:\ \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$$

Почему теорема "работает"? Очевидно, строчный ранг матрицы равен столбцовому транспонированной. Поэтому можно сказать, что если доказать равенство строчного ранга и просто ранга, то со столбцовым будет "аналогично". Равенство же строчного ранга и "просто" ранга, возможно, поможет лучше понять картинка (1).

[2]Единичная матрица: $E = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1)$.

[3]Матрица, строки которой линейно независимы.

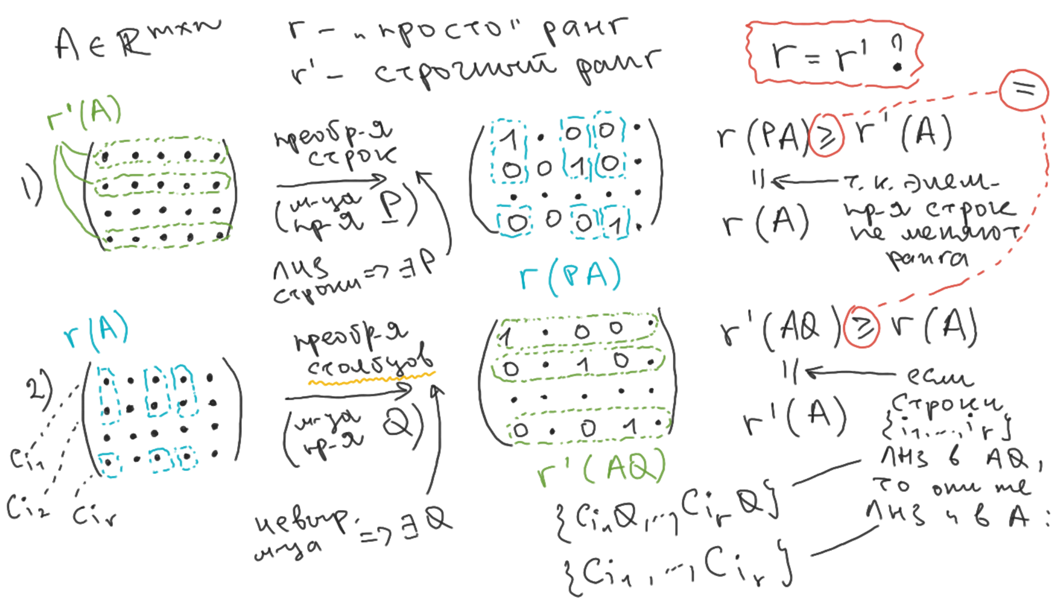

Рис. 1: Картинка-пояснение к теореме о ранге матрицы: как можно "понять почему равны строчный и просто ранги (почему в системе строк, которая максимальная по количеству система ЛНЗ строк, можно выбрать базисную подматрицу; и почему строки, в которых находится базисная подматрица, ЛНЗ — хотя про это, наверно, можно было и попроще догадаться...).

Замечание. Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях её строк (столбцов).

3. Задачи

3.1. # 15.45(2)

Вычислить обратную для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. Найдём обратную с помощью метода Гаусса. В основе метода лежат следующие понятия и “наблюдения”.

Определение 3.1. Элементарные преобразования строк матрицы $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

- умножение строки на число, отличное от нуля;
- прибавление к строке другой строки;
- перестановка строк;
- прибавление к строке линейной комбинации других строк.

Замечание. Каждое элементарное преобразование строк матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ можно задать в виде невырожденной матрицы $S \in \mathbb{R}^{m\times m}$, которую надо умножить слева на A, чтобы провести преобразование. При этом матрица S не зависит от A.

Замечание. Если строки матрицы были линейно зависимы (независимы), то после элементарного преобразования строк они останутся линейно зависимы (независимы).

Замечание. Для любой невырожденной матрицы A существует последовательность элементарных преобразований строк $\{S_i\}_{i=1}^N$, такая что она переводит матрицу A в единичную:

$$S_N \dots S_1 A = E$$

Вернёмся к решению задачи. Далее фиолетовым цветом будем выделять элемент в столбце, с помощью которого будем занулять другие элементы в том же столбце. Те, которые зануляем на данном шаге, будем отмечать красным цветом. Когда столбец "готов" (остался один ненулевой — фиолетовый), переходим к другому столбцу и снова выбираем ненулевой элемент для "зачищения столбца", но *из строчек, откуда ещё не выбирали*. Сначала можно занулять все элементы ниже главное диагонали (*прямой ход* метода Гаусса), а потом — выше главной диагонали (*обратный ход* метода Гаусса).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\widetilde{(1) \leftrightarrow (3)} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\widetilde{(3) = (3) + 2 \cdot (1)} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\widetilde{(2) = (2)/2} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\widetilde{(3) = (3) + 3 \cdot (2)} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 & 3/2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\overset{\sim}{\substack{(1)=(1)-2\cdot(3) \\ (2)=(2)+(3)}} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 0 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 & 3/2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\overset{\sim}{\substack{(1)=(1)+(2) \\ (3)=2\cdot(3)}} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\widetilde{(1) = -1 \cdot (1)} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

Таким образом,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Можно (стоит) проверить:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Почему преобразования строк у “сдвоенной” матрицы позволило найти A^{-1}? Каждый шаг метода Гаусса можно рассматривать как умножение слева на некоторую невырожденную матрицу S_i, задающую соответствующее элементарное преобразование строк:

$$\left(A \mid E\right) \to \left(S_1 A \mid S_1 E\right) \to \ldots \to \left(\overbrace{S_N \ldots S_1 A}^{E} \mid \overbrace{S_N \ldots S_1 E}^{B}\right)$$

где единичная матрица $E = S_N \ldots S_1 A$ — то, что стремимся получить слева, справа же получается матрица $B = S_N \ldots S_1 E = S_n \ldots S_1$. Выходит, $E = BA$, что равносильно[4] тому, что $B = A^{-1}$.

Отступление. Найдём интереса ради какую-нибудь S_i. Например, S_1, которая задаёт перестановку строк. Правда, перестановка строк — не совсем элементарное преобразование. Разложим его сначала на элементарные.

Мы хотим задать преобразование перестановки строк (первой и третьей):

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Это преобразование можно представить как композицию преобразований (над-под каждой стрелочкой обозначено элементарное преобразование и его матрица[5]):

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
\xrightarrow[(3)=(3)+(1)]{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}} &\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\
\xrightarrow[(1)=(1)-(3)]{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} &\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\
\xrightarrow[(3)=(3)+(1)]{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}} &\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
\xrightarrow[(1)=-1\cdot(1)]{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} &\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

И в итоге, S_1, задающая первую перестановку строк:

$$S_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \ldots$$

□

[4] Можно показать, что при $BA = E$ обязательно выполняется также и $AB = E$

[5] Матрица, которую можно получить,например, из единичной, проведя над её строками аналогичное преобразование.

3.2. # 15.65(3)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Решение. Пусть $A \equiv \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ и $b \equiv \left(\begin{smallmatrix} 10 \\ 17 \end{smallmatrix}\right)$.

Какая размерность у матрицы X? Обозначим размерность матрицы X за $m \times n$ (число строк и число столбцов). Тогда имеем:

$$A_{2\times\mathbf{2}} X_{\boldsymbol{m}\times n} = b_{2\times 1}$$

Поэтому $m = 2$ и $n = 1$.

Также можно заметить, что матрица A, которая левый множитель, невырождена.

Как искать X?

Способ I: "По-простому". Пусть $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$. Тогда матричное уравнение $AX = b$ равносильно системе из двух скалярных уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ x + y = 17 \end{cases}$$

Которую можно решить, например, методом Крамера (матрица системы невырождена):

$$\begin{cases} x = \dfrac{\left|\begin{smallmatrix} 10 & 1 \\ 17 & 1 \end{smallmatrix}\right|}{\left|\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right|} = \dfrac{10 - 17}{\det(A)} \\ y = \dfrac{\left|\begin{smallmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 17 \end{smallmatrix}\right|}{\left|\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right|} = \dfrac{2 \cdot 17 - 10}{\det(A)} \end{cases}$$

Способ II: "В контексте темы". Чтобы найти X, можно умножить *слева* обе части уравнения на обратную к матрице-множителю:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{E} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \end{pmatrix}$$

В итоге, после нахождения обратной, например, по формуле, получаем:

$$X = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} 10 - 17 \\ 2 \cdot 17 - 10 \end{pmatrix}$$

□

Заметка на полях 1. Можно было не умножать обе части уравнения на A^{-1}, а представить правую часть как $b = AA^{-1}b$ и перенести влево, вынеся потом A за скобку. (Почему можно потом приравнять нулю то, что останется в скобках: $X - A^{-1}b$?)

Заметка на полях 2. Матрица A была невырожденной. Посмотрим, что могло бы быть, если бы A была вырожденной. Например, так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Очевидно, в таком случае решений нет.
Или так (поменяем ещё столбец справа):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Сводя к системе скалярных уравнений, получаем следующее решение:

$$X = \begin{pmatrix} t \\ 10 - t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t, \quad t \in \mathbb{R}$$

То есть очевидно, что в данном случае решение не просто есть, а их бесконечно много[6].

3.3. # 16.19(3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Rg} A = ?$$

Решение. Рассмотрим пару способов решения.

Способ I: “Наблюдения”. В матрице A есть ненулевые элементы, поэтому $\operatorname{Rg} A \geq 1$. Второй и третий столбцы матрицы A линейно зависимы, то есть матрица A вырождена, поэтому $\operatorname{Rg} A < 3$. Имеет смысл далее рассмотреть систему из первого и, например, второго столбцов матрицы A. Они линейно зависимы при $\alpha = 1$ (то есть $\operatorname{Rg} A = 1$). При всех других α они линейно независимы (то есть $\operatorname{Rg} A = 2$).

Способ II: “Ещё раз метод Гаусса”. Чтобы найти ранг матрицы, можно методом Гаусса привести её к упрощённому виду (то есть “пытаться” преобразованиями строк привести матрицу $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ к единичной: если матрица квадратная и вырожденная или прямоугольная, то некоторые строки в общем случае могут оказаться нулевыми, то есть на очередном шаге метода Гаусса может не получиться найти ненулевой элемент, с помощью которого надо было бы занулять “лишние”). Первым преобразованием можно вычесть первую строку из второй и третьей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha - 1 & \alpha - 1 \\ 0 & \alpha^2 - 1 & \alpha^2 - 1 \end{pmatrix}$$

[6] Умножение матрицы A справа на столбец X равносильно составлению столбца, являющегося линейной комбинацией столбцов A с коэффициентами, записанными в столбец X. Очевидно, в рассматриваемом случае столбец b можно разложить по столбцам A, хоть они и линейно зависимы.

Далее метод Гаусса продолжать сразу нельзя, потому что не понятно, нулевые вторая и третья строки или нет. Например, следующим шагом метода Гаусса могла бы быть "чистка второго столбца", но для этого во второй или третьей строчке должен быть ненулевой элемент во втором столбце.

$$\alpha = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Rg} A = 1$$

Пусть $\alpha \neq 1$. Тогда вторая строчка ненулевая, и можно её (и третью строчку тоже) поделить на $\alpha - 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha - 1 & \alpha - 1 \\ 0 & \alpha^2 - 1 & \alpha^2 - 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha + 1 & \alpha + 1 \end{pmatrix}$$

Вне зависимости от того, нулевая третья строчка или нет, её можно занулить, вычтя с нужным коэффициентом вторую. То есть

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha + 1 & \alpha + 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Привели матрицу A к упрощённому виду (в первых строках можно найти подматрицу единичной матрицы, а остальные строки — нулевые). Ранг у упрощённой матрицы равен двум. Поэтому и $\operatorname{Rg} A = 2$ (при $\alpha \neq 1$). $\square$