Семинар 6

Алексеев Василий

10 марта + 14 марта 2022

Содержание

1. Линейные отображения 2

1.1. Сюжет 1: Матрица линейного отображения

Пусть есть линейное отображение $\phi\colon X \to Y$, где X и Y — линейные пространства (см. Рис. 1). Выберем базисы в X и Y: $e = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \subset X$, $f = (\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m) \subset Y$, при этом будем считать $n > 0$ и $m > 0$. Рассмотрим действие отображения ϕ на вектор $\boldsymbol{x} \in X$ с компонетнами $(x_1, \ldots, x_n)$ в базисе e:

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \phi(x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n) = x_1\phi(\boldsymbol{e}_1) + \ldots + x_n\phi(\boldsymbol{e}_n) = \underbrace{\big(\phi(\boldsymbol{e}_1), \ldots, \phi(\boldsymbol{e}_n)\big)}_{\text{строка векторов}} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{столбец координат}}$$

Каждый из векторов $\phi(\boldsymbol{e}_i) \in Y$ можно разложить по базису f. Например

$$\phi(\boldsymbol{e}_1) = (\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m)\phi(e_1)$$

где как $\phi(e_1) \in \mathbb{R}^m$ обозначен вектор-столбец вектора $\phi(\boldsymbol{e}_1) \in Y$[1]. Таким образом,

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \ldots = (\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m)\underbrace{\big(\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n)\big)}_{\in\mathbb{R}^{m\times n}}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

С другой стороны, так как вектор $\phi(\boldsymbol{x}) \in Y$, то он раскладывается по базису f с некоторыми коэффициентами $y_1, \ldots, y_m$:

$$\phi(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Получили, что

$$(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m)\big(\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n)\big)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Так как $(\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m)$ базис, то:

$$\big(\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n)\big)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

Если ввести обозначения $\big(\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n)\big) \equiv A$ — *матрица линейного отображения*, $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{smallmatrix}\right) \equiv \xi$ — вектор-столбец прообраза, $\left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{smallmatrix}\right) \equiv \eta$ — вектор-столбец образа, то выражение выше будет выглядеть как

$$\boxed{\eta = A\xi}$$

[1] В обозначениях Рис. 1 $\phi(e_1)$ это $\widetilde{\phi}\big(h_X(\boldsymbol{e}_1)\big)$.

$$
\begin{array}{ccc}
X \ni \boldsymbol{x} & \overset{\phi}{\mapsto} & \boldsymbol{y} \in Y \\
h_X \Big\downarrow & & \Big\downarrow h_Y \\
\mathbb{R}^n \ni \xi & \underset{\widetilde{\phi}}{\mapsto} & \eta \in \mathbb{R}^m
\end{array}
$$

Рис. 1: Линейное отображение $\phi\colon\ X \to Y$, действующее из линейного пространства X размерности n в линейное пространство Y размерности m. Выбор базиса $e = (e_1, \dots, e_n)$ в пространстве X порождает отображение h_X, переводящее вектор $x \in X$ в его координатный столбец $\xi \in \mathbb{R}^n$. Аналогично, выбор базиса $f = (f_1, \dots, f_m)$ в пространстве Y порождает отображение h_Y, переводящее вектор $y \in Y$ в его координатный столбец $\eta \in \in \mathbb{R}^m$. (Можно заметить, что h_X и h_Y — биекции, причём такие, которые сохраняют линейные операции: суммы и умножения на число.) Таким образом, выбор пары базисов e и f в пространствах X и Y порождает отображение $\widetilde{\phi}$, переводящее вектор-столбец ξ в вектор-столбец η ($\widetilde{\phi} = h_Y \phi h_X^{-1}$). При этом $\boxed{\eta = A\xi}$, где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ — *матрица линейного отображения* ϕ. (Матрица определяется выбором базисов в пространствах X и Y.)

1.2. Сюжет 2: Ранг матрицы линейного отображения

Пусть в X и Y выбраны базисы, и матрица A — матрица отображения ϕ. Множество столбцов

$$I = \{\eta \in \mathbb{R}^m \mid \eta = A\xi,\ \xi \in \mathbb{R}^n\}$$

будет линейным подпространством $\mathbb{R}^m$ и представляет совокупность вектор-столбцов элементов из $\operatorname{Im}\phi$. Размерности I и $\operatorname{Im}\phi$ совпадают, потому что сумма векторов $\boldsymbol{y}_1$ и $\boldsymbol{y}_2$ из $\operatorname{Im}\phi$ есть вектор, координатный столбец которого есть сумма координатных столбцов векторов $\boldsymbol{y}_1$ и $\boldsymbol{y}_2$. Аналогично с умножением на число. То есть линейные операции "проходят одинаково": между векторами в $\operatorname{Im}\phi$ и их координатными столбцами в I.

Запись $\eta = A\xi$ означает, что η есть линейная комбинация столбцов A с коэффициентами, записанными в столбец ξ. Пусть столбцовый ранг матрицы A равен $r \le n$. Тогда все оставшиеся $n - r$ столбцов A можно выразить через базисные, и произвольный $\eta \in I$ окажется представленным как линейная комбинация r линейно независимых вектор-столбцов из I. Таким образом, $\dim I = r = \operatorname{Rg} A$. В то же время $\dim I = \dim \operatorname{Im}\phi = \operatorname{Rg}\phi$. Получаем, что

$$\boxed{\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg}\phi}$$

то есть ранг матрицы линейного отображения равен рангу этого отображения. Матрица A зависит от выбора базисов в пространствах X и Y, но ранг её не меняется и равен рангу отображения.

1.3. Сюжет 3: Пространство отображений

Рассмотрим множество всех линейных отображений из X в Y:

$$\mathscr{F} = \{\phi \mid \phi\colon\ X \to Y,\ \phi \text{ — линейное}\}$$

где линейность ϕ обозначает выполнение следующих двух свойств:

- $\phi(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \phi(\boldsymbol{x}_1) + \phi(\boldsymbol{x}_2), \quad \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in X$
- $\phi(\alpha \boldsymbol{x}_1) = \alpha\phi(\boldsymbol{x}_1), \quad \alpha \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{x}_1 \in X$

Введём на $\mathscr{F}$ операции сложения отображений и умножения отображения на число. За сумму $\phi_1 + \phi_2$ двух линейных отображений ϕ_1 и ϕ_2 будем считать отображение из X в Y, которое действует на произвольный $\boldsymbol{x} \in X$ как:

$$(\phi_1 + \phi_2)(\boldsymbol{x}) \equiv \phi_1(\boldsymbol{x}) + \phi_2(\boldsymbol{x})$$

За отображение $\alpha\phi$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\phi \in \mathscr{F}$, будет считать отображение из X в Y, действующее на произвольный $\boldsymbol{x} \in X$ по правилу:

$$(\alpha\phi)(\boldsymbol{x}) \equiv \alpha\phi(\boldsymbol{x})$$

Проверим, что сумма линейных отображений — это тоже линейное отображение:

$$\begin{aligned}(\phi_1 + \phi_2)(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) &= \phi_1(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) + \phi_2(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = \phi_1(\boldsymbol{x}_1) + \phi_1(\boldsymbol{x}_2) + \phi_2(\boldsymbol{x}_1) + \phi_2(\boldsymbol{x}_2) \\ &= \big(\phi_1(\boldsymbol{x}_1) + \phi_2(\boldsymbol{x}_1)\big) + \big(\phi_1(\boldsymbol{x}_2) + \phi_2(\boldsymbol{x}_2)\big) = (\phi_1 + \phi_2)(\boldsymbol{x}_1) + (\phi_1 + \phi_2)(\boldsymbol{x}_2)\end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что $(\phi_1 + \phi_2)(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha(\phi_1 + \phi_2)(\boldsymbol{x})$. Таким образом, линейные операции над линейными отображениями из $\mathscr{F}$ дают также линейные отображения из $\mathscr{F}$, то есть "$+$" $: \mathscr{F} \times \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ и "$\cdot$" $: \mathbb{R} \times \mathscr{F} \to \mathscr{F}$.

Множество $\mathscr{F}$ с введёнными операциями "$+$" и "$\cdot$" образует линейное пространство. Чтобы в этом убедиться, можно проверить выполнение "8 свойств", связынных с операциями сложения и умножения на число. Например, коммутативность: $(\phi_1 + \phi_2)(\boldsymbol{x}) = \phi_1(\boldsymbol{x}) + \phi_2(\boldsymbol{x}) = \phi_2(\boldsymbol{x}) + \phi_1(\boldsymbol{x}) = (\phi_2 + \phi_1)(\boldsymbol{x})$ для произвольного $\boldsymbol{x} \in X$. Нулевым же, очевидно, будет отображение $\phi_0 : \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{0} \in Y$.

1.4. Сюжет 4: Изоморфизм

В выбранной паре базисов пространств X и Y устанавливается взаимно однозначное соответствие $h_{\mathscr{F}}$ между линейными отображениями $\mathscr{F}$ и матрицами $\mathbb{R}^{m\times n}$ (см. Раздел 1.1). Множество матриц $\mathbb{R}^{m\times n}$ — очевидно, линейное пространство (размерности mn). Множество линейных отображений $\mathscr{F}$ — также линейное пространство (см. Раздел 1.3). При этом сумме отображений ϕ_1 и ϕ_2 из $\mathscr{F}$ с матрицами соответственно A_1 и A_2 соответствует отображение, матрица которого является суммой $A_1 + A_2$. Умножению отображения ϕ с матрицей A на число α соответствует отображение с матрицей αA. Таким образом, отображение $h_{\mathscr{F}} : \mathscr{F} \to \mathbb{R}^{m\times n}$ линейно, *сохраняет линейные операции*. Взаимно однозначное линейное отображение называется *изоморфизмом*[2]. Про пространства $\mathscr{F}$ и $\mathbb{R}^{m\times n}$ в таком случае говорят, что они *изоморфны*. Из изоморфности $\mathscr{F}$ и $\mathbb{R}^{m\times n}$, в частности, следует, что размерность $\mathscr{F}$ равна также mn.

1.5. Последний сюжет: Линейные функции (тема семинара)

Пусть $Y \equiv \mathbb{R}$. То есть будем теперь рассматривать линейные отображения, действующие из X в $\mathbb{R}$:

$$\mathscr{F}_1 = \{\phi \mid \phi : X \to \mathbb{R},\ \phi - \text{линейное}\}$$

Такие отображения ещё называют *линейными функциями*.

С выбранным базисом в X[3] каждой линейной функции из $\mathscr{F}_1$ ставится в соответствие матрица отображения A размера $1 \times n$, то есть матрица отображения в случае линейной

[2] В общем случае изоморфизм — биекция, *сохраняющая структуру*. В случае отображений между линейными пространствами изоморфизм должен сохранять линейные зависимости между векторами: сумма прообразов — сумма образов, аналогично с умножением на число.

[3] В $Y = \mathbb{R}$ тоже можно бы было "выбрать" базис, но обычно базисом в $\mathbb{R}$ по умолчанию считают единицу.

функции — это одна строка. Эта строка ещё называется *координатной строкой* линейной функции.

Пространство линейных функций $\mathscr{F}_1$ изоморфно пространству строк $\mathbb{R}^n$ длины n (см. Раздел 1.4). В пространстве строк можно очевидным образом выбрать базис: $(1, 0, \ldots, 0, 0)$; …; $(0, 0, \ldots, 0, 1)$. Пусть базисной строчке из $\mathbb{R}^n$ с единицей на i-ой позиции соотвествует функция $\phi_i \in \mathscr{F}_1$:

$$\mathbb{R}^n \ni \left\{\begin{matrix} (1, 0, \ldots, 0, 0) & \leftrightarrow & \phi_1 \\ (0, 1, \ldots, 0, 0) & \leftrightarrow & \phi_2 \\ & \ldots & \\ (0, 0, \ldots, 1, 0) & \leftrightarrow & \phi_{n-1} \\ (0, 0, \ldots, 0, 1) & \leftrightarrow & \phi_n \end{matrix}\right\} \in \mathscr{F}_1$$

В совокупности функции $(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)$ дадут базис в $\mathscr{F}_1$. Этот базис называется базисом, *взаимным* к базису e пространства X. Само пространство линейных функций, действующих на пространстве X, называется пространством, *сопряжённым* к X, и может обозначаться как X^*. Таким образом, $\dim X^* = \dim X$, а смысл *координатной строки* функции ϕ также в том, что она — это коэффициенты разложения ϕ по взаимному базису.

2. Задачи

2.1. # 23.9(2)

Найти матрицу следующего преобразования $\phi\colon\ \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ векторов трёхмерного геометрического пространства: ϕ —ортогональное проектирование на $\mathscr{L}_1 = \{\boldsymbol{v} \in \mathscr{E} \mid \boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{a},\ \alpha \in \in \mathbb{R}\}$, где $\boldsymbol{a} = (1, 1, 1)^T$.

Решение. Формула, задающая преобразование:

$$\phi(\boldsymbol{v}) = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v})}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}) \in \mathscr{E}$$

Преобразование задаёт связь между векторами, матрица преобразования связывает координатные столбцы. Распишем координатный столбец образа $\phi(v) \in \mathbb{R}^3$, где $v = = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ — координатный столбец прообраза:

$$\phi(v) = \frac{(1, 1, 1)^T}{3} \cdot (x_1 + x_2 + x_3) = \underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Можно бы было искать по отдельности столбцы A:

$$A = \big(\phi(e_1), \phi(e_2), \phi(e_3)\big) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Если же бы ϕ рассматривалось не как преобразование, а как отображение $\widetilde{\phi}\colon\ \mathscr{E} \to \mathscr{L}_1$ (и пусть при этом за базис в $\mathscr{L}_1$ естественным образом выбран вектор $\boldsymbol{a}$), то матрица $\widetilde{A}$ была бы такой (индексом a обозначен базис, в котором составлен координатный столбец)

$$\widetilde{A} = \big(\phi(e_1)_a, \phi(e_2)_a, \phi(e_3)_a\big) = (1/3, 1/3, 1/3)$$

□

2.2. # 23.15(1)

Пусть линейное пространство $\mathscr{L}$ представимо как прямая сумма двух ненулевых подпространств: $\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 \oplus \mathscr{L}_2$.

Показать, что преобразование $\phi\colon\ X \to Y$, где $X = Y = \mathscr{L}$, проектирования на $\mathscr{L}_1$ параллельно $\mathscr{L}_2$ линейно. Найти ядро и множество значений ϕ. Найти матрицу преобразования ϕ в базисе $\mathscr{L}$, составленном из базисов подпространств $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$.

Решение. **Линейность.** Раз $\mathscr{L}$ выражено прямой суммой $\mathscr{L}_1$ и $\mathscr{L}_2$, то любой вектор $\boldsymbol{x}$ из $\mathscr{L}$ единственным образом раскладывается в сумму двух, один из которых в $\mathscr{L}_1$, а другой в $\mathscr{L}_2$:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 \oplus \mathscr{L}_2 \Leftrightarrow \underbrace{\boldsymbol{x}}_{\in\mathscr{L}} = \underbrace{\boldsymbol{x}_1}_{\in\mathscr{L}_1} + \underbrace{\boldsymbol{x}_2}_{\in\mathscr{L}_2}$$

В таком представлении

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_1$$

И можно проверить линейность преобразования:

$$\phi(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \phi(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2) = \phi\big((\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{y}_1)+(\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{y}_2)\big) = \boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{y}_1 = \phi(\boldsymbol{x})+\phi(\boldsymbol{y})$$

Аналогично $\phi(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha\phi(\boldsymbol{x})$.

Ядро преобразования определяется как

$$\phi(\boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}_1 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_2 \in \mathscr{L}_2$$

то есть $\operatorname{Ker}\phi = \mathscr{L}_2$.

Множество значений есть подмножество $\mathscr{L}$ векторов $\boldsymbol{y}$, которые могут быть получены с помощью преобразования ϕ. То есть рассматриваем $\boldsymbol{y} \in \mathscr{L}$ и проверяем, при каких условиях его можно получить с помощью ϕ. Очевидно, если существует $\boldsymbol{x}$, являющийся прообразом $\boldsymbol{y}$, то

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} \Rightarrow \boldsymbol{y} \in \mathscr{L}_1$$

То есть $\operatorname{Im}\phi \subseteq \mathscr{L}_1$. Но верно и в другую сторону:

$$\boldsymbol{y} \in \mathscr{L}_1 \Rightarrow \exists \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \in \mathscr{L}\ :\ \phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$$

Поэтому $\mathscr{L}_1 \subseteq \operatorname{Im}\phi$, и в итоге $\operatorname{Im}\phi = \mathscr{L}_1$.

Можно заметить, что выполняется тождество[4]:

$$\boxed{\dim\operatorname{Im}\phi + \dim\operatorname{Ker}\phi = \dim X}$$

Матрица отображения. Пусть размерность $\mathscr{L}_1$ равна l, а размерность $\mathscr{L}_2$ равна k. Пусть $a = (\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_l)$ — базис в $\mathscr{L}_1$, а $b = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_k)$ — базис в $\mathscr{L}$. Тогда за базис в $\mathscr{L}$ предлагается взять $a \cup b = (\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_l, \boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_k)$[5].

В общем случае, столбцы матрицы отображения $\phi\colon\ X \to Y$ — это координатные столбцы базиса X в базисе Y. В случае преобразования, X и Y — одно и то же, и базис один.

[4]Верно и в общем случае для линейного отображения $\phi\colon\ X \to Y$. Доказательство можно свести к рассмотрению системы линейных уравнений $\eta_m = A_{m\times n}\xi_n$. В фундаментальной матрице соответствующей однородной системы будет $n - r$ столбцов, где $r = \operatorname{Rg} A$. Это и есть “то самое” тождество.

[5]Так можно сделать, потому что $\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 \oplus \mathscr{L}_2$.

Поэтому столбцы матрицы преобразования ϕ — это координатные столбцы образов базисных векторов в том же базисе (индексом $a \cup b$ обозначено, в каком базисе компоненты)

$$A = \left(\phi(\boldsymbol{a}_1)_{a\cup b}, \ldots, \phi(\boldsymbol{a}_l)_{a\cup b}, \phi(\boldsymbol{b}_1)_{a\cup b}, \ldots, \phi(\boldsymbol{b}_k)_{a\cup b}\right) = \begin{pmatrix} E_{l\times l} & 0_{l\times k} \\ 0_{k\times l} & 0_{k\times k} \end{pmatrix}$$

так как $\phi(\boldsymbol{a}_i) = 1 \cdot \boldsymbol{a}_i$, а $\phi(\boldsymbol{b}_i) = \mathbf{0}$.

Если же рассмотреть ϕ не как преобразование, а как отображение $\widetilde{\phi} \colon \mathscr{L} \to \mathscr{L}_1$, то в данном случае базисы в пространствах "из" и "куда" уже отличаются. Столбцов в матрице отображения останется $l + k$, но строк уже будет всего l (потому что базис в пространстве "куда" $\mathscr{L}_1$ есть $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_l)$). То есть матрица отображения $\phi \colon \mathscr{L} \to \mathscr{L}_1$ равна (индексом a обозначено, в каком базисе компоненты)

$$\widetilde{A} = \left(\widetilde{\phi}(\boldsymbol{a}_1)_a, \ldots, \widetilde{\phi}(\boldsymbol{a}_l)_a, \widetilde{\phi}(\boldsymbol{b}_1)_a, \ldots, \widetilde{\phi}(\boldsymbol{b}_k)_a\right) = \begin{pmatrix} E_{l\times l} & 0_{l\times k} \end{pmatrix}$$

□

2.3. # 23.29(5)

Линейное отображение $\phi \colon X \to Y$ задано матрицей $A_{m\times n}$ в базисах $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ в X и $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m)$ в Y:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

Надо найти ядро, множество значений отображения. Выяснить, является ли оно инъективным, сюръективным.

Решение. Из размера матрицы A видно, что $\dim X = 3$ и $\dim Y = 5$.

Найдём **ядро** ϕ (за $x \in \mathbb{R}^3$ обозначен координатный столбец вектора $\boldsymbol{x} \in X$):

$$\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker}\phi \Leftrightarrow \phi(x) = Ax = 0$$

Надо решить однородную систему, упростив матрицу A:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Сразу видно, что ранг матрицы отображения (он же ранг самого отображения) $\operatorname{Rg}\phi = 2$. Ранг отображения — размерность множества значений. Поэтому $\dim \operatorname{Im}\phi = 2 < 5 = \dim Y$. Что означает, что отображение ϕ не сюръективно.

Произвольный вектор из ядра представим как

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что размерность ядра $\dim \operatorname{Ker}\phi = 1$. Ядро не нулевое. Это значит, что отображение не инъективно (можно подобрать два различных вектора (отличающихся на ненулевой вектор из ядра) которые ϕ переводит в один и тот же вектор).

Остаётся найти **множество значений** ϕ (у которого размерность, уже известно, равна двум):

$$y \in \operatorname{Im}\phi \Leftrightarrow \exists x \in X \,:\, Ax = y$$

Получается, надо рассмотреть расширенную матрицу $(A \mid y)$, упростить её, и выписать ограничения на y, чтобы система была совместна. Упрощение матрицы A уже проведено в (1). Остаётся проделать те же самые преобразования со столбцом y:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -y_1/2 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -y_1/2 \\ y_2 - y_1 \\ y_3 - 3y_1/2 \\ y_4 + 4y_1/2 \\ y_5 + 6y_1/2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -y_1/2 - \left(y_3 - 3y_1/2\right) \\ y_2 - y_1 \\ y_3 - 3y_1/2 \\ y_4 + 4y_1/2 + 5\left(y_3 - 3y_1/2\right) \\ y_5 + 6y_1/2 + \left(y_3 - 3y_1/2\right) \end{pmatrix}$$

Зануляем компоненты, соответствующие нулевым строкам в упрощённой A:

$$\begin{cases} y_2 - y_1 = 0 \\ y_4 + \dfrac{4y_1}{2} + 5\left(y_3 - \dfrac{3y_1}{2}\right) \\ y_5 + \dfrac{6y_1}{2} + \left(y_3 - \dfrac{3y_1}{2}\right) \end{cases}$$

Уравнений 3 (очевидно, линейно независимых). Переменных 5. Значит, какие-то три можно выразить через другие две. Например,

$$\begin{cases} y_2 = y_1 \\ y_4 = \dfrac{1}{2}(11y_1 - 10y_3) \\ y_5 = \dfrac{1}{2}(-3y_1 - 2y_3) \end{cases}$$

Поэтому общий вид y из множества значений ($y_1 = t_1 \in \mathbb{R}$, $y_3 = t_2 \in \mathbb{R}$):

$$y = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 \\ t_2 \\ \frac{1}{2}(11t_1 - 10t_2) \\ \frac{1}{2}(-3t_1 - 2t_2) \end{pmatrix} = \underbrace{2t_1}_{\tilde{t}_1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 11 \\ -3 \end{pmatrix} + \underbrace{2t_2}_{\tilde{t}_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Базис в $\operatorname{Im}\phi$ “виден”. Векторов в нём, ожидаемо, два...

Другой способ нахождения $\operatorname{Im}\phi$. Видно, что в матрице A первые два столбца линейно независимы, а третий выражается через второй. Поэтому $\operatorname{Im}\phi$ — это линейная оболочка первых двух столбцов матрицы A. □

2.4. # 23.40(1в)

Пусть $\mathscr{P}^{(m)}$ — линейное пространство линейных многочленов степени не выше m. Проверить, что дифференцирование, рассматриваемое как преобразование $D \colon \mathscr{P}^{(m)} \to \mathscr{P}^{(m)}$, линейно. Найти его ядро и множество значений. Вычислить матрицу в базисе

$$\left(1, \frac{t}{1!}, \dots, \frac{t^m}{m!}\right)$$

Решение. **Линейность** ($p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_m t^m$ и $q(t) = b_0 + b_1 t + \ldots + b_m t^m$):

$$\begin{aligned} D(p(t) + q(t)) =& D\big((a_0 + a_1 t + \ldots + a_m t^m) + (b_0 + b_1 t + \ldots b_m t^m)\big) \\ =& a_1 + \ldots + a_m t^{m-1} + b_1 + \ldots + b_m t^{m-1} = D(p(t)) + D(q(t)) \end{aligned}$$

Аналогично с $D(\alpha p(t)) = \alpha D(t(t))$.

Ядро:

$$p(t) \in \operatorname{Ker} D \Leftrightarrow D(p(t)) = a_1 + \ldots + a_m t^{m-1} = 0 \Leftrightarrow a_1 = \ldots = a_m = 0$$

Поэтому $p(t) \in \operatorname{Ker} D \Leftrightarrow p(t) = a_0$. То есть ядро дифференцирования — все константные многочлены. Размерность ядра, очевидно, равно одному.

Множество значений — это $\mathscr{P}^{(m-1)}$. Потому что, с одной стороны, при дифференцировании многочлена степени не выше m получается многочлен степени не выше $m-1$. С другой стороны, для многочлена $h(t)$ степени не выше $m-1$ можно подобрать многочлен $p(t)$ степени не выше m, дифференцирование которого даёт данный (например, $p(t) = \int h(t)$).

Матрица преобразования. Стобцы матрицы — координаты образов векторов пространства $\mathscr{P}^{(m)}$ в том же базисе. Так как

$$\begin{aligned} &D(1) = 0 \\ &D\left(\frac{1}{1!}t\right) = \mathbf{1} \cdot \frac{1}{1!} \\ &D\left(\frac{1}{2!}t^2\right) = \mathbf{1} \cdot \frac{1}{1!}t \\ &\ldots \\ &D\left(\frac{1}{m!}t^m\right) = \mathbf{1} \cdot \frac{1}{(m-1)!}t^{m-1} \end{aligned}$$

то матрица преобразования получается равной

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Размер матрицы A равен $(m+1) \times (m+1)$.

Если бы дифференцирование рассматривалось как отображение $D : \mathscr{P}^{(m)} \to \mathscr{P}^{(m-1)}$ (и в $\mathscr{P}^{(m-1)}$ базис бы был такой же, как в $\mathscr{P}^{(m)}$, только без последнего вектора), то строк в матрице отображения стало бы меньше на одну (столбцов столько же, потому что базис исходного пространства такой же, строк же меньше, потому что меняется базис пространства, куда отображаем):

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

И размер матрицы A' равен $m \times (m+1)$. □

2.5. # 23.82(1)

Преобразование ϕ переводит линейно независимые векторы a_i в b_i. Преобразование ψ переводит линейно независимые векторы b_i в c_i. То есть

$$(a_1, a_2, a_3) \xrightarrow{\phi} (b_1, b_2, b_3)$$
$$(b_1, b_2, b_3) \xrightarrow{\psi} (c_1, c_2, c_3)$$

Надо найти матрицу $A_{\psi\phi}$ преобразования $\psi\phi$ в исходном базисе.

Решение. Пусть матрицы A_ϕ и A_ψ — матрицы преобразований ϕ и ψ соответсвенно. Тогда условие задачи можно переписать в виде

$$\begin{cases} A_\phi(a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3) \\ A_\psi(b_1, b_2, b_3) = (c_1, c_2, c_3) \\ A_{\psi\phi}(a_1, a_2, a_3) = (c_1, c_2, c_3) \end{cases}$$

Если положить $A \equiv (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{B} \equiv (b_1, b_2, b_3)$ и $\boldsymbol{C} \equiv (c_1, c_2, c_3)$, то условие можно переписать в ещё более сжатой форме:

$$\begin{cases} A_\phi A = \boldsymbol{B} \\ A_\psi \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} \\ A_{\psi\phi} A = \boldsymbol{C} \end{cases}$$

Отсюда (так как по условию существуют A^{-1} и $\boldsymbol{B}^{-1}$):

$$\begin{cases} A_\phi = \boldsymbol{B}A^{-1} \\ A_\psi = \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1} \\ A_{\psi\phi} = \boldsymbol{C}A^{-1} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{B}A^{-1} = A_\psi A_\phi \end{cases}$$

А как бы, например, выглядела матрица преобразования ϕ в базисе (a_1, a_2, a_3)? На данном этапе известно, что

$$A_{\psi\phi}\xi_{\boldsymbol{e}} = \nu_{\boldsymbol{e}}$$

где индекс $\boldsymbol{e}$ показывает, в каком базисе даны компоненты. При замене старого базиса $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, e_3)$ на новый $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ векторы базисов связаны соотношением (коэффициенты разложения векторов нового базиса $\boldsymbol{a}$ по старому $\boldsymbol{e}$ образуют столбцы матрицы перехода S):

$$(a_1, a_2, a_3) = (e_1, e_2, e_3)S$$

Координатные же столбцы произвольного вектора $\boldsymbol{x}$ в старом $\xi_{\boldsymbol{e}}$ и новом $\xi_{\boldsymbol{a}}$ базисах связаны следующим образом:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}\xi_{\boldsymbol{e}} \\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}\xi_{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{e}S\xi_{\boldsymbol{a}} \end{cases} \Rightarrow \xi_{\boldsymbol{e}} = S\xi_{\boldsymbol{a}}$$

Итак, пока известно, что в базисе $\boldsymbol{e}$:

$$A_{\psi\phi}\xi_{\boldsymbol{e}} = \nu_{\boldsymbol{e}} \tag{2}$$

Надо же найти матрицу $A'_{\psi\phi}$ преобразования в базисе $\boldsymbol{a}$:

$$A'_{\psi\phi}\xi_{\boldsymbol{a}} = \nu_{\boldsymbol{a}} \tag{3}$$

Чтобы найти $A'_{\psi\phi}$, можно выразить в формуле (2) координатные столбцы в старом базисе через столбцы соответствующих векторов в новом базисе (чтобы получить формулу, "похожую" на (3), только с $A_{\psi\phi}$ вместо $A'_{\psi\phi}$):

$$A_{\psi\phi}S\xi_{\boldsymbol{a}} = S\nu_{\boldsymbol{a}} \Leftrightarrow S^{-1}A_{\psi\phi}S\xi_{\boldsymbol{a}} = \nu_{\boldsymbol{a}} \tag{4}$$

Подставляя вместо $\xi_{\boldsymbol{a}}$ базисные столбцы в последнюю формулу (4) и в (3) получаем, что

$$S^{-1}A_{\psi\phi}S = A'_{\psi\phi}$$

Остаётся понять, чему равна матрица S перехода от базиса $\boldsymbol{e}$ к базису $\boldsymbol{a}$. Столбцы матрицы A — координаты новых базисных векторов $\boldsymbol{a}$ в старом базисе $\boldsymbol{e}$. Поэтому A и есть S, и матрица преобразования в новом базисе в итоге выглядит так:

$$A'_{\psi\phi} = A^{-1}A_{\psi\phi}A$$

□

2.6. # 31.21

Пусть $t_0 \in \mathbb{R}$ — фиксированное число.

Показать, что сопоставление f каждому многочлену степени не выше n его значения в t_0 есть линейная функция:

$$f: \mathscr{P}^{(n)} \ni p(t) \mapsto p(t_0) \in \mathbb{R}$$

Вычислить координатную строку функции в базисах $(1, t, \dots, t^n)$ и $(1, t - t_0, \dots, (t - t_0)^n)$.

Решение. Линейность:

$$\begin{aligned} f\left(p(t) + q(t)\right) &= f\left((a_{0p} + a_{1p}t + \dots + a_{np}t^n) + (a_{0q} + a_{1q}t + \dots + a_{nq}t^n)\right) \\ &= (a_{0p} + a_{1p}t_0 + \dots + a_{np}t_0^n) + (a_{0q} + a_{1q}t_0 + \dots + a_{nq}t_0^n) = f\left(p(t)\right) + f\left(q(t)\right) \end{aligned}$$

Аналогично и

$$f\left(\alpha p(t)\right) = f(\alpha a_{0p} + \alpha a_{1p}t + \dots + \alpha a_{np}t^n) = \alpha a_{0p} + \alpha a_{1p}t_0 + \dots + \alpha a_{np}t_0^n = \alpha f\left(p(t)\right)$$

Координатная строка функции — как матрица отображения, только в случае с функцией $\phi: X \to \mathbb{R}$ она становится строкой. То есть надо вычислить образы базисных векторов и разложить их "по базису в $\mathbb{R}$" (который принимается равным просто 1).

Итак, в случае, если в $\mathscr{P}^{(n)}$ выбран базис $(1, t, \dots, t^n)$, то координатная строка функции f равна:

$$\left(f(1), f(t), \dots, f(t^n)\right) = (1, t_0, \dots, t_0^n)$$

Если же в $\mathscr{P}^{(n)}$ выбран базис $(1, t - t_0, \dots, (t - t_0)^n)$, то координатная строка функции f будет равна:

$$\left(f(1), f(t), \dots, f(t^n)\right) = (1, 0, \dots, 0)$$

□

2.7. # 31.35(1)

Пусть базису $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ пространства $\mathscr{L}$ биортогонален базис (f_1, f_2, f_3) сопряжённого пространства $\mathscr{L}^*$. Надо найти базис, биортогональный базису

$$\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}'_2 = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{e}'_3 = \boldsymbol{e}_3$$

Решение. Биортогональный базис f — это такой базис в $\mathscr{L}^*$, функции f_i которого обладают следующим свойством:

$$f_i(\boldsymbol{e}_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}$$

То есть для неизвестных пока линейных функций f'_1, f'_2, f'_3 нового биортогонального базиса уже известно, что, во-первых (выписываем соотношения для f'_1):

$$\begin{cases} 1 = f'_1(\boldsymbol{e}'_1) = f'_1(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) = f'_1(\boldsymbol{e}_1) + f'_1(\boldsymbol{e}_2) \\ 0 = f'_1(\boldsymbol{e}'_2) = f'_1(\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) = f'_1(\boldsymbol{e}_2) + f'_1(\boldsymbol{e}_3) \\ 0 = f'_1(\boldsymbol{e}'_3) = f'_1(\boldsymbol{e}_3) \end{cases}$$

То есть f'_1 в точности такая же, как f_1 (ведь линейная функция из $\mathscr{L}^*$ однозначно определяется значениями на векторах базиса $\mathscr{L}$).

Далее, аналогичные соотношения для f'_2:

$$\begin{cases} 0 = f'_2(\boldsymbol{e}'_1) = f'_2(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) = f'_2(\boldsymbol{e}_1) + f'_2(\boldsymbol{e}_2) \\ 1 = f'_2(\boldsymbol{e}'_2) = f'_2(\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) = f'_2(\boldsymbol{e}_2) + f'_2(\boldsymbol{e}_3) \\ 0 = f'_2(\boldsymbol{e}'_3) = f'_2(\boldsymbol{e}_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'_2(\boldsymbol{e}_1) = -1 \\ f'_2(\boldsymbol{e}_2) = 1 \\ f'_2(\boldsymbol{e}_3) = 0 \end{cases}$$

И для f'_3:

$$\begin{cases} 0 = f'_3(\boldsymbol{e}'_1) = f'_3(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) = f'_3(\boldsymbol{e}_1) + f'_3(\boldsymbol{e}_2) \\ 0 = f'_3(\boldsymbol{e}'_2) = f'_3(\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) = f'_3(\boldsymbol{e}_2) + f'_3(\boldsymbol{e}_3) \\ 1 = f'_3(\boldsymbol{e}'_3) = f'_3(\boldsymbol{e}_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'_3(\boldsymbol{e}_1) = 1 \\ f'_3(\boldsymbol{e}_2) = -1 \\ f'_3(\boldsymbol{e}_3) = 1 \end{cases}$$

Чему равны f'_2 и f'_3? Линейные действия над функциями из $\mathscr{L}^*$ равносильны таким же линейным действиям над их координатными строками: пространство $\mathscr{L}^*$ изоморфно пространству строк размера $\dim \mathscr{L}$. Функции f'_2, например, (при базисе $\boldsymbol{e}$ в $\mathscr{L}$) соответствует строка $(-1, 1, 0)$. Можно разложить эту строку в линейную комбинацию базисных строк (соответствующих функциям, из которого состоит биортогональный базис f):

$$(-1, 1, 0) = -1 \cdot (1, 0, 0) + 1 \cdot (0, 1, 0)$$

Это значит, что с самой функцией f'_2 будет “то же самое”:

$$f'_2 = -1 \cdot f_1 + 1 \cdot f_2$$

Аналогично с f'_3:

$$f'_3 = 1 \cdot f_1 - 1 \cdot f_2 + 1 \cdot f_3$$

Итого, новый биортогональный базис:

$$f = (f_1, -f_1 + f_2, f_1 - f_2 + f_3)$$

□