Работа М2

Нам потребуются следующие законы сохранения:

- Закон сохранения импульса:

$$\sum_i p_i = \text{const}$$

- Закон сохранения энергии:

$$E_\text{к} + E_\text{п} = \text{const}$$

1. Идеально упругий удар шара с бесконечно тяжёлой стенкой
   Закон сохранения импульса в нашем случае превращается в

$$p_\text{шара} + p_\text{стенки} = \text{const}$$

А так как у нас $p_\text{стенки}$ не меняется (она же бесконечно тяжёлая), то наш инвариант принимает ещё более простой вид:

$$p_\text{шара} = \text{const}$$

Закон сохранения энергии (из-за того, что у нас нет никакой силы поля) упрощается до

$$E_\text{к} = \text{const}$$

В нашем случае, это

$$\frac{m_\text{шара} v_\text{шара}^2}{2} = \text{const}$$

Хорошо, теперь мы знаем, что в нашей ситуации выполняется:

$$\begin{cases} p_\text{шара} = \text{const} \\ \frac{m_\text{шара} v_\text{шара}^2}{2} = \text{const} \end{cases}$$

Теперь поймём, как конкретно меняется вектор скорости

Разложение скорости

Пусть у нас есть единичный вектор нормали к стенке - $\vec{n}$,

Разложим вектор скорости нашего шара на тангенциальную - $\vec{v_\tau}$ и нормальную - $\vec{v_n}$ части (относительно стенки).

$$\vec{v} = \vec{v_\tau} + \vec{v_n}$$

При этом нормальная часть — это просто проекция на нормаль:

$$\vec{v_n} = (\vec{v}, \vec{n}) \cdot \vec{n}$$

а тангенциальная часть — это остаток (Он, конечно, будет ортогонален $\vec{n}$):

$$\vec{v_\tau} = \vec{v} - \vec{v_n}$$

Также введём соответствующие обозначения для вектора скорости после удара:

$$\vec{v'} = \vec{v'_\tau} + \vec{v'_n}$$

Рассмотрение тангенциальной

Стоит также уточнить, что удар об стенку происходит без трения $\Rightarrow$ стенка не передаёт импульс вдоль своей плоскости $\Rightarrow$ вообще нет никаких сила, влиявших бы на тангенциальную скорость. Получаем:

$$\overrightarrow{v,(\tau)} = \vec{v_\tau}$$

Рассмотрение нормальной

Так как удар идеально упругий, то кинетическая энергия шара сохраняется полностью:

$$\frac{mv_n^2}{2} = \frac{mv_n'^2}{2}$$
$$v_n^2 = v_n'^2$$
$$|v_n|^2 = |v_n'|^2$$
$$|\vec{v_n}| = \left|\vec{v_n'}\right|$$

То есть по модулю нормальная составляющая такая же, как была до удара.

Учтём здравый смысл: шар сквозь стенку пролететь не может, но модуль скорости должен остаться тем же, значит, единственный вариант - это поменять знак нормальной составляющей. Имеем:

$$\vec{v_n'} = -\vec{v_n}$$

Собираем итог

Мы имеем следующее соотношение:

$$\begin{cases} \vec{v_\tau'} = \vec{v_\tau} \\ \vec{v_n'} = -\vec{v_n} \end{cases}$$

Тогда

$$\vec{v'} = \vec{v_\tau'} + \vec{v_n'} = \vec{v_\tau} - \vec{v_n}$$

Но

$$\vec{v_\tau} = \vec{v} - \vec{v_n}$$

значит

$$\vec{v'} = (\vec{v} - \vec{v_n}) - \vec{v_n} = \vec{v} - 2\vec{v_n}$$

Вспомним, что

$$\vec{v_n} = (\vec{v}, \vec{n}) \cdot \vec{n}$$

после чего получаем окончательное:

$$\vec{v'} = \vec{v} - 2(\vec{v}, \vec{n}) \cdot \vec{n}$$

2. Идеально упругий удар с другим шаром

Теперь рассмотрим случай, когда у нас есть два шара с произвольными массами, которые могут сталкиваться друг с другом.

Пусть

$$\vec{r_1} \text{ — радиус-вектор центра первого шара,}$$
$$\vec{r_2} \text{ — радиус-вектор центра второго шара.}$$

В момент удара выполняется

$$|\vec{r_2} - \vec{r_1}| = R_1 + R_2$$

(шары касаются друг друга).

Введём единичный вектор, направленный от первого шара ко второму:

$$\vec{n} = \frac{\vec{r_2} - \vec{r_1}}{|\vec{r_2} - \vec{r_1}|}$$

Скорости шаров до удара обозначим через

$$\vec{v_1} \text{ и } \vec{v_2},$$

а после удара — через

$$\vec{v_1'} \text{ и } \vec{v_2'}.$$

Разложение скоростей на нормальную и тангенциальную составляющие (относительно $\vec{n}$

Ровно как и в случае со стенкой, разложим каждую скорость на нормальную и тангенциальную части (относительно вектора $\vec{n}$):

$$\begin{gathered} \vec{v_1} = \overrightarrow{v_{1,\tau}} + \overrightarrow{v_{1,n}} \\ \vec{v_2} = \overrightarrow{v_{2,\tau}} + \overrightarrow{v_{2,n}} \end{gathered}$$

Тангенциальные составляющие — проекции на $\vec{n}$:

$$\begin{gathered} \overrightarrow{v_{1,\tau}} = (\vec{v_1}, \vec{n}) \cdot \vec{n} \\ \overrightarrow{v_{2,\tau}} = (\vec{v_2}, \vec{n}) \cdot \vec{n} \end{gathered}$$

Нормальные — остаток:

$$\begin{gathered} \overrightarrow{v_{1,n}} = \vec{v_1} - \overrightarrow{v_{1,\tau}} \\ \overrightarrow{v_{2,n}} = \vec{v_2} - \overrightarrow{v_{2,\tau}} \end{gathered}$$

Аналогично для скоростей после удара:

$$\begin{gathered} \vec{v_1'} = \overrightarrow{v_{1,\tau}'} + \overrightarrow{v_{1,n}'} \\ \vec{v_2'} = \overrightarrow{v_{2,\tau}'} + \overrightarrow{v_{2,n}'} \end{gathered}$$

Нормальные составляющие

Так как шары считаются гладкими, то и трения в точке контакта нет. Значит, сила контакта направлена строго вдоль $\vec{n}$.

Отсюда:

- вдоль касательной никакой силы нет,
- $\Rightarrow$ импульс вдоль касательной не меняется,
- $\Rightarrow$ нормальные компоненты скоростей сохраняются.

$$\overrightarrow{v_{1,n}'} = \overrightarrow{v_{1,n}},$$

$$\overrightarrow{v_{2,n}'} = \overrightarrow{v_{2,n}}$$

Нормальные составляющие

Теперь разберёмся только с проекциями. Введём обозначения:

$$v_{1,\tau} = (\vec{v_1}, \vec{n}),$$

$$v_{2,\tau} = (\vec{v_2}, \vec{n}),$$

$$v_{1,\tau}' = \left(\vec{v_1'}, \vec{n}\right),$$

$$v_{2,\tau}' = \left(\vec{v_2'}, \vec{n}\right)$$

— это скалярные скорости вдоль $\vec{n}$ до и после удара.

Массы шаров обозначим как m_1 и m_2.

Так как силы действуют только вдоль $\vec{n}$, можем применять законы сохранения вдоль этой оси:

1. Закон сохранения импульса:

$$m_1 v_{1,\tau} + m_2 v_{2,\tau} = m_1 v'_{1,\tau} + m_2 v'_{2,\tau}$$

2. Идеально упругий удар $\Rightarrow$ сохраняется кинетическая энергия:

$$\frac{m_1 v_{1,\tau}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2,\tau}^2}{2} = \frac{m_1 v'^2_{1,\tau}}{2} + \frac{m_2 v'^2_{2,\tau}}{2}$$

Получилась система из двух уравнений. Выразим из неё $v'_{1,\tau}$ и $v'_{2,\tau}$.

$$v'_{1,\tau} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1,\tau} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2,\tau},$$
$$v'_{2,\tau} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1,\tau} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2,\tau}$$

Возврат к векторной записи

Получаем:

$$\vec{v'_1} = \overrightarrow{v'_{1,n}} + \overrightarrow{v'_{1,\tau}} = \overrightarrow{v_{1,n}} + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\overrightarrow{v_{1,\tau}} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\overrightarrow{v_{2,\tau}} = (\vec{v_1} - (\vec{v_1}, \vec{n}) \cdot \vec{n}) + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v_1}, \vec{n}) \cdot \vec{n} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v_2}, \vec{n}) \cdot \vec{n},$$
$$\vec{v'_2} = \overrightarrow{v'_{2,n}} + \overrightarrow{v'_{2,\tau}} = \overrightarrow{v_{2,n}} + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\overrightarrow{v_{1,\tau}} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\overrightarrow{v_{2,\tau}} = (\vec{v_2} - (\vec{v_2}, \vec{n}) \cdot \vec{n}) + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}(\vec{v_1}, \vec{n}) \cdot \vec{n} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}(\vec{v_2}, \vec{n}) \cdot \vec{n}$$

3. Модель взаимодействия шаров по закону Гука

В данном подходе шары рассматриваются как деформируемые объекты, подчиняющиеся закону Гука: при перекрытии возникает упругая сила, пропорциональная величине деформации.

Модель силы взаимодействия

Пусть $\vec{r_1}$ и $\vec{r_2}$ — радиус-векторы центров шаров, а их радиусы равны R_1 и R_2. Величина взаимного перекрытия определяется как

$$\Delta = (R_1 + R_2) - |\vec{r_2} - \vec{r_1}|$$

При $\Delta > 0$ шары перекрываются и возникает сила отталкивания. Введём единичный вектор

$$\vec{n} = \tfrac{\vec{r_2} - \vec{r_1}}{|\vec{r_2} - \vec{r_1}|}$$

направленный от первого шара ко второму. Тогда сила, действующая на первый шар, запишется как

$$\overrightarrow{F_{12}} = -k\Delta\vec{n}$$

где k — коэффициент жёсткости (упругости контакта). Сила, действующая на второй шар,

$$\overrightarrow{F_{21}} = -\overrightarrow{F_{12}} = k\Delta\vec{n}$$

Если разложить по осям, при обозначениях

$$\vec{r_i} = (x_i, y_i)$$

получаем

$$F_x = -k\Delta \frac{x_2 - x_1}{|\vec{r_2} - \vec{r_1}|}$$
$$F_y = -k\Delta \frac{y_2 - y_1}{|\vec{r_2} - \vec{r_1}|}$$

Система дифференциальных уравнений

Используем второй закон Ньютона для каждого шара:

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2\vec{r_1}}{dt^2} = \overrightarrow{F_{12}} \\ m_2 \frac{d^2\vec{r_2}}{dt^2} = \overrightarrow{F_{21}} = -\overrightarrow{F_{12}} \end{cases}$$

Покомпонентно это:

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = F_x \\ m_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} = F_y \\ m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = -F_x \\ m_2 \frac{d^2y_2}{dt^2} = -F_y \end{cases}$$

Начальные условия

В момент первого контакта ($t = 0$, $\Delta = 0$):

$$\vec{r_1}(0) = \overrightarrow{r_{1,0}}, \quad \vec{v_1}(0) = \overrightarrow{v_{1,0}}$$
$$\vec{r_2}(0) = \overrightarrow{r_{2,0}}, \quad \vec{v_2}(0) = \overrightarrow{v_{2,0}}$$

То есть мы задаём начальные положения и скорости шаров в момент, когда они только соприкасаются.

Условие окончания взаимодействия

Будем считать столкновени по Гуку завершённым, когда шары больше не перекрываются:

$$\Delta \leq 0$$

Взаимодействие со стенками по закону Гука

Аналогично можно описать взаимодействие шар–стенка. Рассмотрим, например, левую стенку, которую считаем вертикальной прямой $x = 0$, и пусть шар радиуса R имеет координаты центра $\vec{r} = (x, y)$.

Если центр шара подошёл к стенке ближе чем на R, то есть

$$x < R$$

вводим глубину “вдавливания” в стенку

$$\Delta_{\text{wall}} = R - x > 0$$

Тогда на шар действует сила

$$\overrightarrow{F_{\text{wall}}} = k\Delta_{\text{wall}} \cdot (1, 0)^T$$

где $(1, 0)$ — единичный вектор, направленный внутрь стола, а k — жёсткость стенки.