

Kategorientheorie der Buchhaltung: Mikro- und Makroinvarianzen als Colimits

Generated for Viktor

April 3, 2025

1. Kategorientheoretische Struktur

Wir modellieren ein System von Agenten mit doppelter Buchhaltung durch folgende Konstruktionen:

- **Objekte:** $L_i = (\text{Assets}_i, \text{Liabilities}_i) = \text{MicroLedger}$ eines Agenten
- **Morphismen:** $b_{ij} : L_i \rightarrow L_j = \text{MicroBooking}$
- **Pattern:** Diagramm von Morphismen, z. B. $L_1 \xrightarrow{b_1} L_2$
- **Binding:** konkreter Betrag, z. B. $b_1(100)$
- **Colimit:** konsistente Verklebung aller Morphismen zu einem makroökonomischen Zustand mit:

$$\sum_i \mu_i = 0, \quad \mu_i = \text{Saldo von } L_i$$

- **Natürliche Transformation:** $\mu : F \Rightarrow G$, wobei

$$\mu_i : L_i \rightarrow L_i, \quad \mu_i(x) = \text{microledger.balance}(x)$$

2. Beispiel: Drei Makrobuchungen

Buchung 1: Waren gegen Warenschein

- Agent A: Typ = Händler, Konto = Waren (`:goods`)
- Agent B: Typ = Kunde, Konto = Verbindlichkeit (`:credit`)
- Pattern: $A \xrightarrow{b_1} B$
- Binding: Betrag 100

$$A_{\text{goods}} \xrightarrow{b_1(100)} B_{\text{credit}}$$

$$\mu_A = +100, \quad \mu_B = -100, \quad \sum \mu_i = 0 \Rightarrow \text{Makroinvarianz erfüllt}$$

Buchung 2: Geld gegen Kredit

- Agent C: Typ = Bank, Konto = Geld (:money)
- Agent D: Typ = Kunde, Konto = Kredit (:credit)
- Pattern: $C \xrightarrow{b_2} D$
- Binding: Betrag 50

$$C_{\text{money}} \xrightarrow{b_2(50)} D_{\text{credit}}$$

$$\mu_C = +50, \quad \mu_D = -50, \quad \sum \mu_i = 0 \Rightarrow \text{Makroinvarianz erfüllt}$$

Buchung 3: Investition gegen Eigenkapital

- Agent E: Typ = Startup, Konto = Investition (:goods)
- Agent F: Typ = Investor, Konto = Beteiligung (:equity)
- Pattern: $F \xrightarrow{b_3} E$
- Binding: Betrag 200

$$F_{\text{equity}} \xrightarrow{b_3(200)} E_{\text{goods}}$$

$$\mu_E = -200, \quad \mu_F = +200, \quad \sum \mu_i = 0 \Rightarrow \text{Makroinvarianz erfüllt}$$

3. Interpretation nach Rolle

Buchhalter

Jede Buchung ist ein Soll-Haben-Satz zwischen zwei Konten mit gleichem Betrag.

Programmierer

Jede Buchung ist eine Funktion:

$$\text{post!}(\text{debit}, : \text{debit}, a); \quad \text{post!}(\text{credit}, : \text{credit}, a)$$

Investor

Erkennt Flüsse zwischen Agenten und kann die Kapitalbewegung nachvollziehen.

Volkswirt

Erkennt aus den μ_i -Werten, ob das System makroökonomisch konsistent ist.