

Kategorientheoretische Struktur einer doppelten Buchhaltung mit Colimits

für Viktor

April 3, 2025

1. Formale Kategorientheorie der Buchhaltung

Wir definieren eine Kategorie \mathcal{A} , in der:

- **Objekte** $L_i \in \mathcal{A}$ sind *MicroLedger*, d.h. Agenten mit interner Buchhaltung:

$$L_i = (A_i, L_i) \quad \text{mit Assets und Liabilities}$$

- **Morphismen** $b_{ij} : L_i \rightarrow L_j$ sind *MicroBookings*, also Buchungen mit:

$$b_{ij} = \text{Übertrag von Konto } A_i \text{ (debit) nach } L_j \text{ (credit)}$$

Pattern: Ein Diagramm aus Morphismen,

$$L_i \xrightarrow{b_{ij}} L_j$$

Binding: Die konkrete Ausführung mit Betrag $a \in \mathbb{R}$, z.B.

$$b_{ij}(a) : \quad \text{Sollbuchung } a \text{ bei } A_i, \quad \text{Habenbuchung } a \text{ bei } L_j$$

Colimit: Gegeben ein Diagramm $D : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{A}$, der Colimit $\text{colim}(D)$ ist der konsistente aggregierte Ledger:

$$\sum_i \mu_i = 0 \quad \text{mit } \mu_i = \text{microledger_balance}(L_i)$$

Natürliche Transformation:

$$\mu : F \Rightarrow G \quad \text{mit } \mu_i : L_i \rightarrow L_i \quad \text{und } \mu_i(x) = \text{Bilanz}(x)$$

2. Beispiel: Zwei Buchungen

Buchung 1: Waren gegen Warenschein

- L_1 : Händler liefert Ware
- L_2 : Kunde erhält Warenschein

$$L_1 \xrightarrow{b_1(100)} L_2 \quad \mu_1 = +100, \quad \mu_2 = -100, \quad \sum \mu_i = 0$$

Buchung 2: Geld gegen Kredit

- L_3 : Bank vergibt Geld
- L_4 : Kunde erhält Kredit

$$L_3 \xrightarrow{b_2(50)} L_4 \quad \mu_3 = +50, \quad \mu_4 = -50, \quad \sum \mu_i = 0$$

3. Interpretation

Buchhalter: Jede b_{ij} ist ein Buchungssatz: Soll/Haben mit identischem Betrag.

Programmierer: Jede b_{ij} ist eine Mutation von Zustandsobjekten mit Constraints.

Kategorientheoretiker: Objekte + Morphismen + Colimit = konsistentes Finanzsystem.

Investor: Jeder Fluss ist bilanziell transparent und nachvollziehbar.