

Лабораторная работа 1.2.4

Определение главных моментов инерции твёрдых тел с помощью крутильных колебаний

Красоткина Виктория

28 ноября 2022 г.

Цель: Измерить периоды крутильных колебаний рамки при различных положениях закрепленного в ней тела, проверить теоретическую зависимость между периодами крутильных колебаний тела относительно различных осей, определить моменты инерции относительно нескольких осей для каждого тела, по ним найти главные моменты инерции тела и построить эллипсоид инерции.

Приборы:

- установка для получения крутильных колебаний
- набор исследуемых твердых тел
- секундомер

Теоретическая часть

Инерционные свойства твердого тела при вращении определяется пространственным распределением. Оно характеризуется тензором инерции тела. Тензор инерции твердого тела является симметричным тензором 2-ого ранга $J \in T_2^0(V)$ и имеет 6 независимых компонент, которые в прямоугольной декартовой системе координат выражаются как:

$$J_{ij} = \int (\delta_{ij} r^2 - r_i r_j) dm = J_{ji}, \quad J = J_{ij} \cdot h^i \otimes h^j$$

где r – расстояния от точек до центра, относительно которого вычисляется тензор инерции, а r_i – координатные компоненты соответствующих отрезков, i и j – номера координат (от 1 до 3).

Если для какой либо системы координат все 6 компонент известны, то момент инерции тела относительно произвольной оси l , проходящей через начало координат может быть вычислен по формуле:

$$J_l = n^j n^i J_{ij} = \vec{n}^T J \vec{n}$$

где \vec{n} – единичный вектор-столбец который задает направление оси, J – тензор инерции.

А момент импульса \vec{L} и вращательная энергия тела $E_{\text{вращ}}$ тогда будут выражаться как:

$$E_{\text{вращ}} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \cdot J \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{ij} \omega^i J_{ij} \omega^j$$

$$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}, \quad L_i = \sum_j J_{ij} \omega^j$$

Отложим вдоль оси l из начала координат радиус-вектор r равный по длине $1/\sqrt{J_l}$. Проведем множество таких отрезков, соответствующих различным направлениям оси l . Геометрическое место концов указанных отрезков, является поверхность второго порядка – эллипсоид. Этот эллипсоид принято называть эллипсоидом инерции. Он жестко связан с телом для которого он постояен. Знание эллипсоида инерции позволяет найти момент инерции тела относительно любой оси, проходящей через

центр эллипсоида. Длина отрезка r будет определять момент инерции тела относительно оси l :

$$J_l = \frac{1}{r^2} \quad (1)$$

Как и всякий симметричный тензор второго ранга может быть диагонализирован некоторой заменой координат. Пусть система координат, в которой он диагонализирован имеет оси Ox, Oy, Oz , тогда эти оси совпадают с главными осями тела. Полученные диагональные элементы J_x, J_y, J_z называются главными моментами инерции тела, а уравнение эллипсоида инерции в этих координатах примет вид:

$$1 = J_x r_x^2 + J_y r_y^2 + J_z r_z^2$$

Крутильные колебания рамки с телом описываются уравнением:

$$(I + I_p) \frac{d^2 \phi}{dt^2} = -f \cdot \phi$$

Здесь I и I_p – моменты инерции тела и рамки относительно оси вращения, ϕ – угол поворота рамки, меняющийся со временем t , f – модуль кручения проволоки. Период крутильных колебаний рамки с телом определяется формулой:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I + I_p}{f}}$$

На рисунке показано, как проходят оси вращения в параллелепипеде. Оси AA', BB' и CC' являются главными. Моменты инерции относительно этих осей обозначим соответственно J_x, J_y, J_z .

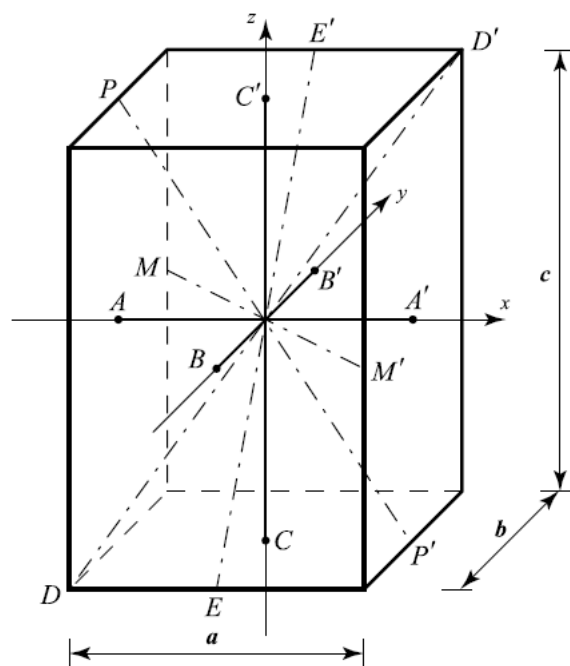


Рис. 1: Оси вращения прямоугольного параллелепипеда

Момент инерции I_D при вращении относительно диагонали DD' выражается через главные моменты с помощью формулы:

$$I_d = I_x \frac{a^2}{d^2} + I_y \frac{b^2}{d^2} + I_z \frac{c^2}{d^2} \quad (2)$$

Используя связь момента инерции с периодом крутильных колебаний получаем соотношение между периодами колебаний относительно осей DD', EE', MM' и PP' с периодами крутильных колебаний относительно главных осей.

$$(a^2 + b^2 + c^2)T_D^2 = a^2T_x^2 + b^2T_y^2 + c^2T_z^2 \quad (3)$$

$$(b^2 + c^2)T_E^2 = b^2T_y^2 + c^2T_z^2 \quad (4)$$

$$(a^2 + c^2)T_P^2 = a^2T_x^2 + c^2T_z^2 \quad (5)$$

$$(a^2 + b^2)T_M^2 = a^2T_x^2 + b^2T_y^2 \quad (6)$$

Эти соотношения также необходимо проверить экспериментально.

Экспериментальная установка

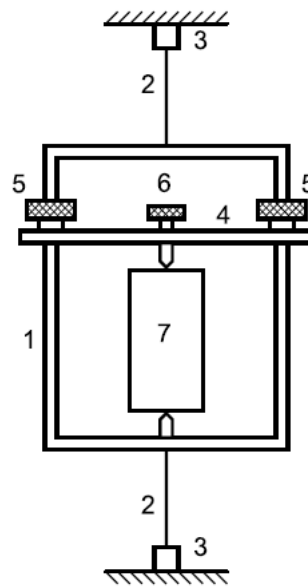


Рис. 2: Схема установки

В данной работе используется устройство для получения крутильных колебаний, изображенное на рисунке 2. Рамка 1 жестко соединена с проволокой 2, закрепленной вертикально в специальных зажимах 3, позволяющих сообщить начальное закручивание для возбуждения крутильных колебаний вокруг вертикальной оси. В рамке с помощью планки 4, гаек 5 и винта 6 закрепляется твердое тело 7. На теле имеются специальные выемки, позволяющие его закрепить так, чтобы ось вращения проходила в теле под различными углами через центр масс.

Ход работы

Сперва определим погрешности приборов:

- штангенциркуль: $2 \cdot \frac{\text{цена деления}}{2} = 0.1 \text{ мм}$
- весы: из описания прибора 0.1 г
- секундомер: с учетом реакции человека 0.5 с

Случайную погрешность будем определять по формуле

$$\sigma_{\text{случ}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2}$$

Общую погрешность найдем как среднеквадратичную величину из всех погрешностей:

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{\text{случ}}^2 + \sigma_{\text{пр}}^2 + \dots}$$

1. Ознакомимся с установкой для получения крутильных колебаний. Проволока натянута хорошо, рамка жестко закреплена, устройство для возбуждения крутильных колебаний работает нормально, колебаний в вертикальной плоскости не возникает.
2. Научимся закреплять тела в рамке по инструкции, описанной в теоретической части.
3. Выберем амплитуду колебаний 7.0° . Через время $t = 23.50 \text{ с}$, равное 10 колебаниям, амплитуда стала равна 6.5° . Следовательно, амплитуда уменьшилась на $\frac{7.0^\circ - 6.5^\circ}{7.0^\circ} \cdot 100\% = 7\%$. Изменение амплитуды мало, следовательно будем использовать амплитуду $A = 7.0^\circ$.
4. Для пустой рамки и для тел при различных их положениях определим периоды колебаний по времени 10 колебаний, повторяя каждое измерение по 3 раза.

$t, \text{ с}$	$T, \text{ с}$
23.50	2.350
25.23	2.523
24.98	2.498
$\overline{T} = 2.46 \text{ с}$	
$\sigma_T^{\text{сл}} = 0.08 \text{ с}$	
$\sigma_T = 0.09 \text{ с}$	

Таблица 1: Пустая рамка

5. Штангенциркулем измерим геометрические размеры тел. Вычислим главные моменты инерции тел. Их погрешность определяется погрешностями штангенциркуля и весов.

- параллелепипед

$$I_z = \frac{m}{12}(a^2 + b^2) \Rightarrow \sigma_{I_z} = \frac{1}{12} \sqrt{(a^2 + b^2)^2 \sigma_m^2 + (2ma)^2 \sigma_a^2 + (2mb)^2 \sigma_b^2}$$

CC'		AA'		BB'		DD'	
$t, \text{с}$	$T, \text{с}$	$t, \text{с}$	$T, \text{с}$	$t, \text{с}$	$T, \text{с}$	$t, \text{с}$	$T, \text{с}$
32.34	3.234	38.04	3.804	40.83	4.083	34.79	3.479
32.39	3.239	37.84	3.784	40.88	4.088	34.74	3.474
32.28	3.280	37.87	3.787	40.75	4.075	34.87	3.487
$\bar{T} = 3.25 \text{ с}$ $\sigma_T^{\text{с.л}} = 0.02 \text{ с}$ $\sigma_T = 0.05 \text{ с}$		$\bar{T} = 3.79 \text{ с}$ $\sigma_T^{\text{с.л}} = 0.01 \text{ с}$ $\sigma_T = 0.05 \text{ с}$		$\bar{T} = 4.08 \text{ с}$ $\sigma_T^{\text{с.л}} = 0.01 \text{ с}$ $\sigma_T = 0.05 \text{ с}$		$\bar{T} = 3.48 \text{ с}$ $\sigma_T^{\text{с.л}} = 0.01 \text{ с}$ $\sigma_T = 0.05 \text{ с}$	

Таблица 2: Параллелепипед

EE'		MM'		PP'	
$t, \text{с}$	$T, \text{с}$	$t, \text{с}$	$T, \text{с}$	$t, \text{с}$	$T, \text{с}$
33.43	3.343	38.44	3.844	34.38	3.438
33.54	3.354	38.37	3.837	34.54	3.454
33.57	3.357	38.65	3.865	34.49	3.449
$\bar{T} = 3.35 \text{ с}$ $\sigma_T^{\text{с.л}} = 0.01 \text{ с}$ $\sigma_T = 0.05 \text{ с}$		$\bar{T} = 3.85 \text{ с}$ $\sigma_T^{\text{с.л}} = 0.01 \text{ с}$ $\sigma_T = 0.05 \text{ с}$		$\bar{T} = 3.45 \text{ с}$ $\sigma_T^{\text{с.л}} = 0.01 \text{ с}$ $\sigma_T = 0.05 \text{ с}$	

Таблица 3: Параллелепипед

центр		ребо		угол	
30.80	3.080	30.72	3.072	30.70	3.070
30.84	3.084	30.63	3.063	30.77	3.077
30.76	3.076	30.77	3.077	30.80	3.080
$\bar{T} = 3.08 \text{ с}$ $\sigma_T^{\text{с.л}} = 0 \text{ с}$ $\sigma_T = 0.05 \text{ с}$		$\bar{T} = 3.07 \text{ с}$ $\sigma_T^{\text{с.л}} = 0.01 \text{ с}$ $\sigma_T = 0.05 \text{ с}$		$\bar{T} = 3.08 \text{ с}$ $\sigma_T^{\text{с.л}} = 0 \text{ с}$ $\sigma_T = 0.05 \text{ с}$	

Таблица 4: Куб

центр		диаметр	
32.46	3.246	30.63	3.063
32.35	3.235	30.76	3.076
32.34	3.234	30.78	3.078
$\bar{T} = 3.24 \text{ с}$ $\sigma_T^{\text{с.л}} = 0.01 \text{ с}$ $\sigma_T = 0.05 \text{ с}$		$\bar{T} = 3.07 \text{ с}$ $\sigma_T^{\text{с.л}} = 0.01 \text{ с}$ $\sigma_T = 0.05 \text{ с}$	

Таблица 5: Цилиндр

параллелепипед			куб	цилиндр	
2082.0, г			1086.9, г	2263.7, г	
$AA', \text{см}$	$BB', \text{см}$	$CC', \text{см}$	$a, \text{см}$	$h, \text{см}$	$d, \text{см}$
10.02 ± 0.01	5.05 ± 0.01	15.01 ± 0.01	9.26 ± 0.01	4.91 ± 0.01	8.80 ± 0.01

Таблица 6: Геометрические размеры тел

$$I_x = (4.351 \pm 0.006) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad I_y = (5.651 \pm 0.007) \cdot 10^{-2} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$I_z = (2.184 \pm 0.004) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

- Куб

$$I = \frac{ma^2}{6} \Rightarrow \sigma_I = \frac{1}{6} \sqrt{a^4 \sigma_m^2 + (2ma)^2 \sigma_a^2}$$

$$I = (1.553 \pm 0.022) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

- Цилиндр

$$I_h = \frac{mr^2}{2} \Rightarrow \sigma_{I_h} = \frac{1}{2} \sqrt{a^4 \sigma_m^2 + (2mr)^2 \sigma_r^2}$$

$$I_h = (2.191 \pm 0.010) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$I_d = \frac{mr^2}{4} + \frac{mh^2}{12} \Rightarrow \sigma_{I_d} = \sqrt{\frac{1}{4}(r^4 \sigma_m^2 + (2mr)^2 \sigma_r^2) + \frac{1}{12}(h^4 \sigma_m^2 + (2mh)^2 \sigma_h^2)}$$

$$I_d = (1.550 \pm 0.012) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Проверим справедливость формул (3) – (6).

$$(a^2 + b^2 + c^2)T_D^2 = 0.425 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^2, \quad a^2 T_x^2 + b^2 T_y^2 + c^2 T_z^2 = 0.425 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^2$$

$$(b^2 + c^2)T_E^2 = 0.282 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^2, \quad b^2 T_y^2 + c^2 T_z^2 = 0.281 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^2$$

$$(a^2 + c^2)T_P^2 = 0.387 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^2, \quad a^2 T_x^2 + c^2 T_z^2 = 0.382 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^2$$

$$(a^2 + b^2)T_M^2 = 0.187 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^2, \quad a^2 T_x^2 + b^2 T_y^2 = 0.187 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^2$$

Видно, что значения правой и левой части совпадают. Тогда рассчитаем значения периодов для диагоналей:

$$T_D = \sqrt{\frac{a^2 T_x^2 + b^2 T_y^2 + c^2 T_z^2}{a^2 + b^2 + c^2}} = 3.48 \text{ с}$$

$$T_E = \sqrt{\frac{b^2 T_y^2 + c^2 T_z^2}{b^2 + c^2}} = 3.35 \text{ с}$$

$$T_P = \sqrt{\frac{a^2 T_x^2 + c^2 T_z^2}{a^2 + c^2}} = 3.43 \text{ с}$$

$$T_M = \sqrt{\frac{a^2 T_x^2 + b^2 T_y^2}{a^2 + b^2}} = 3.85 \text{ с}$$

Как видно, в пределах погрешностей теоретические и экспериментальные значения периодов совпадают.

6. Рассчитаем величину $r = \frac{1}{\sqrt{T^2 - T_P^2}}$ для каждой оси параллелепипеда, куба и цилиндра.

Погрешность величины r находим по формуле

$$\sigma_r = \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial T}\right)^2 \cdot \sigma_T^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial T_P}\right)^2 \cdot \sigma_{T_P}^2} = \sqrt{\left(\frac{T}{(T^2 - T_P^2)^{3/2}}\right)^2 \cdot \sigma_T^2 + \left(\frac{T_P}{(T^2 - T_P^2)^{3/2}}\right)^2 \cdot \sigma_{T_P}^2}$$

	AA'	BB'	CC'	DD'
$T, \text{ с}$	3.79 ± 0.05	4.085 ± 0.05	3.25 ± 0.05	3.48 ± 0.05
$\frac{1}{\sqrt{T^2 - T_P^2}}, 1/\text{с}$	0.346 ± 0.012	0.307 ± 0.009	0.470 ± 0.029	0.406 ± 0.019

Таблица 7: Параллелепипед

	EE'	PP'	MM'
$T, \text{ с}$	3.35 ± 0.05	3.45 ± 0.05	3.85 ± 0.05
$\frac{1}{\sqrt{T^2 - T_P^2}}, 1/\text{с}$	0.439 ± 0.018	0.414 ± 0.018	0.338 ± 0.011

Таблица 8: Параллелепипед

	центр	ребро	угол
$T, \text{ с}$	3.08 ± 0.05	3.07 ± 0.05	3.08 ± 0.05
$\frac{1}{\sqrt{T^2 - T_P^2}}, 1/\text{с}$	0.538 ± 0.042	0.543 ± 0.043	0.540 ± 0.042

Таблица 9: Куб

	центр	ребро
$T, \text{ с}$	3.24 ± 0.05	3.07 ± 0.05
$\frac{1}{\sqrt{T^2 - T_P^2}}, 1/\text{с}$	0.474 ± 0.029	0.542 ± 0.042

Таблица 10: Цилиндр

Построим проекции эллипсоида инерции параллелепипеда на плоскости XOY , XOZ и YOZ (рисунки 3, 4 и 5).

Для построения нам необходимо знать углы между осями. Найденные углы будут аргументами, которые мы подставим в параметрическое уравнение эллипса, чтобы найти координаты точек

- XOY

Между MM' и AA' :

$$\alpha = \arctan \frac{b}{a} = 26.7^\circ$$

- XOZ

Между PP' и AA' :

$$\alpha = \arctan \frac{c}{a} = 56.3^\circ$$

- YOZ

Между EE' и BB' :

$$\alpha = \arctan \frac{C}{b} = 71.4^\circ$$

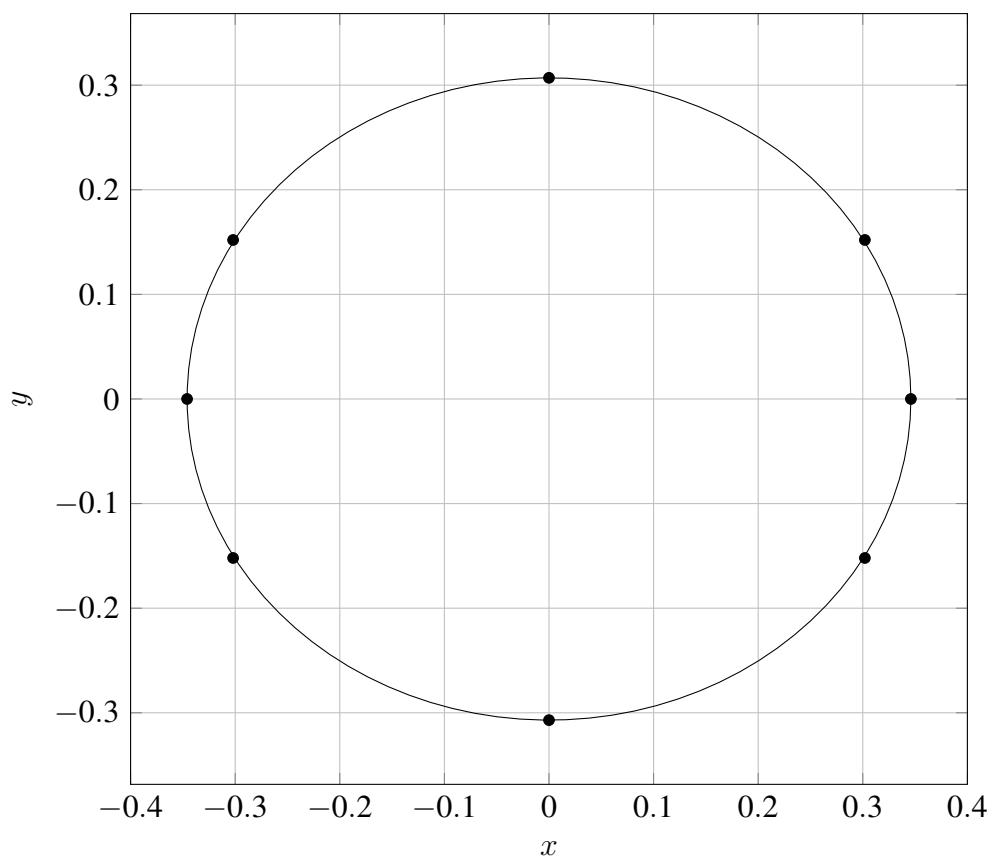


Рис. 3: Плоскость XOY

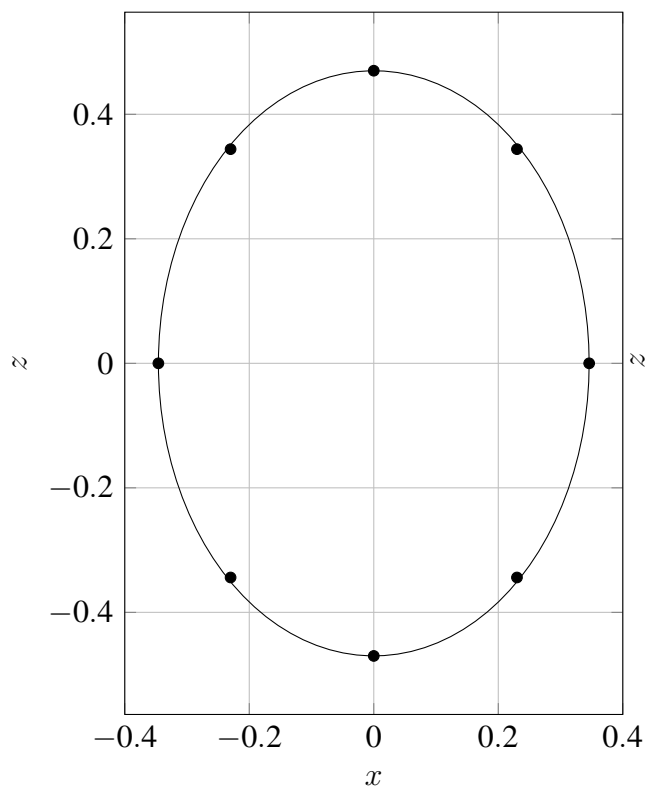


Рис. 4: Плоскость XOZ

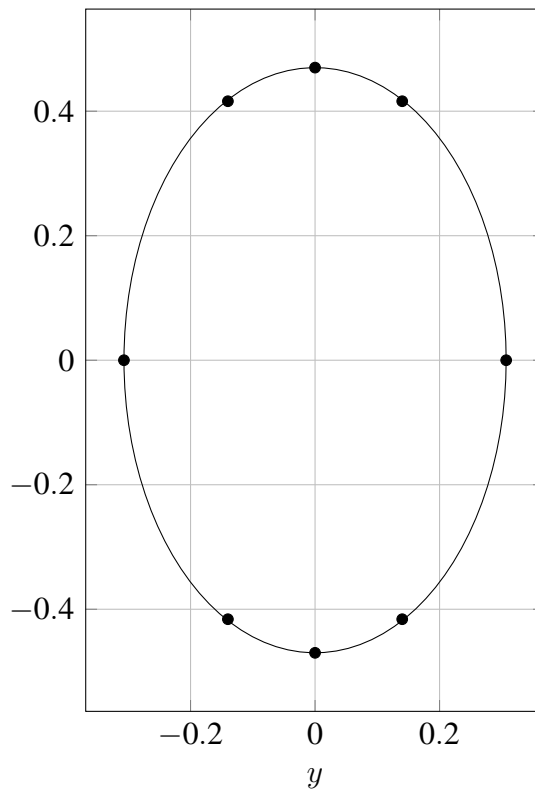


Рис. 5: Плоскость YOZ

Уравнение эллипса XOY :

$$\left(\frac{x}{0.346}\right)^2 + \left(\frac{y}{0.307}\right)^2 = 1$$

или

$$x = 0.346 \cos x, \quad y = 0.307 \sin x$$

Уравнение эллипса XOZ :

$$\left(\frac{x}{0.346}\right)^2 + \left(\frac{y}{0.470}\right)^2 = 1$$

или

$$x = 0.346 \cos x, \quad y = 0.470 \sin x$$

Уравнение эллипса YOZ :

$$\left(\frac{x}{0.307}\right)^2 + \left(\frac{y}{0.470}\right)^2 = 1$$

или

$$x = 0.307 \cos x, \quad y = 0.470 \sin x$$

Теперь построим проекцию эллипсоида инерции для куба (рис. 6). Т.к. куб в нашем предположении симметричен, представим только один график.

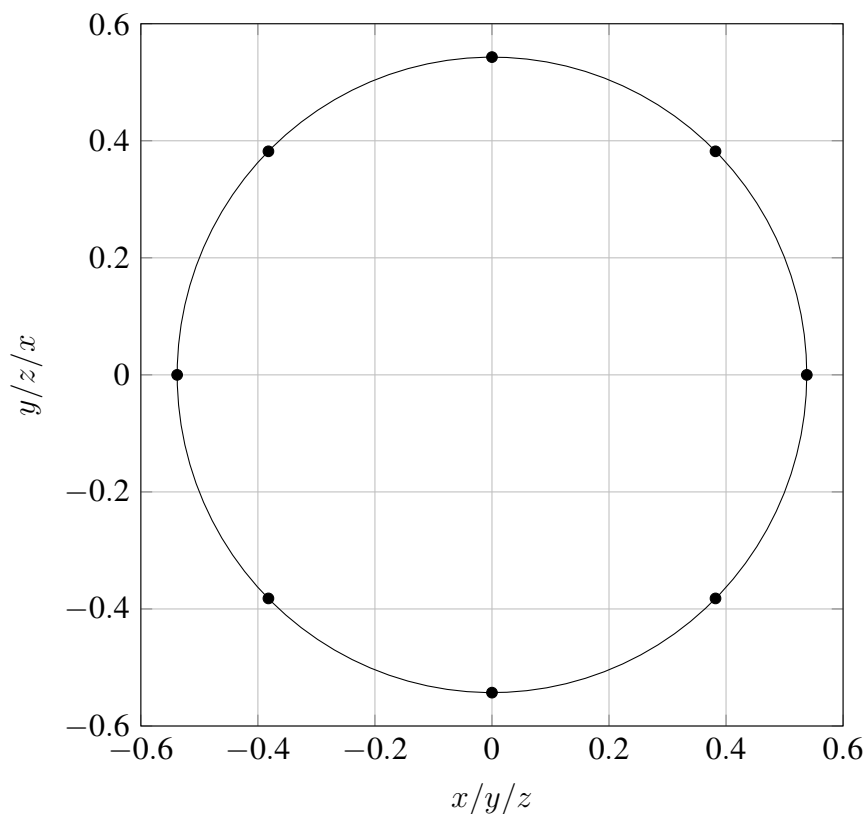


Рис. 6: Куб

Как видно, для куба эллипсоид инерции представляет собой окружность, что подтверждает теоретические данные.

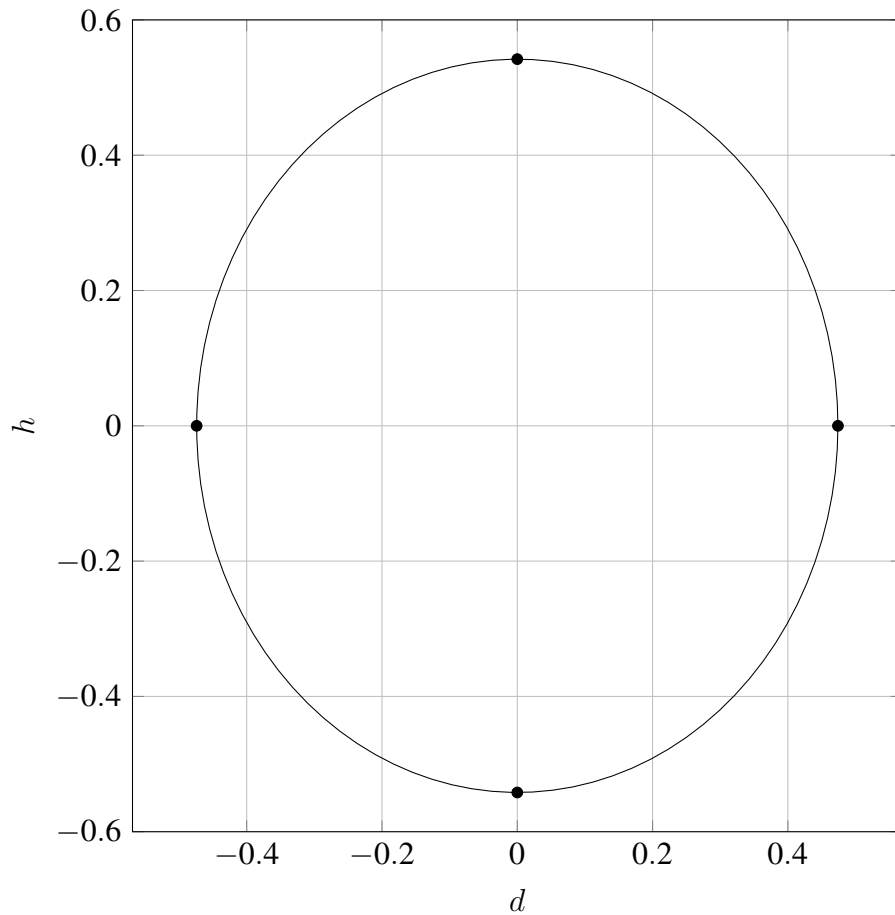


Рис. 7: Цилиндр

Также построим такой же график для цилиндра (рис. 7).

Построим график $T^2(I)$ (I – теоретически рассчитанные главные моменты инерции) для всех значений.

Как видно, точки легли на прямую. С помощью МНК рассчитаем коэффициенты этой прямой (вида $y = kx + b$).

$$k = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} = 1.76 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - k \sum_{i=1}^n x_i}{n} = 6.70 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Перейдем к оценке ошибок. Запишем формулу погрешностей коэффициентов МНК:

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{1}{n-2} \left(\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} - k^2 \right)} = 0.04 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2}$$

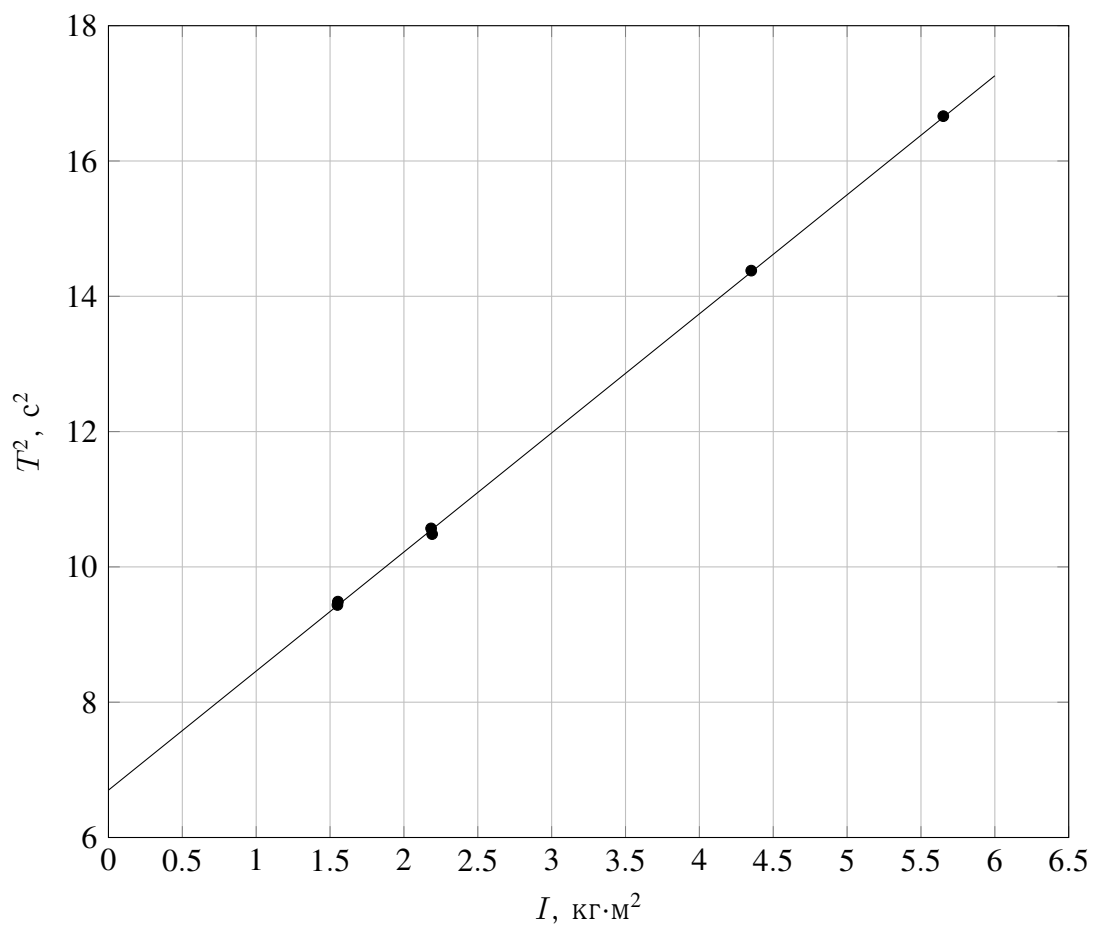


Рис. 8: Зависимость периода от момента инерции

$$\sigma_b = \sigma_k \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right)^2} = 0.06 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Итого:

$$T^2 = (1.76 \pm 0.04)I + (6.70 \pm 0.06) \text{ с}^2$$