

## Лабораторная работа 1.2.4

### Определение главных моментов инерции твердых тел с помощью крутильных колебаний

Красоткина Виктория

28 ноября 2022 г.

**Цель:** Измерить периоды крутильных колебаний рамки при различных положениях закрепленного в ней тела, проверить теоретическую зависимость между периодами крутильных колебаний тела относительно различных осей, определить моменты инерции относительно нескольких осей для каждого тела, по ним найти главные моменты инерции тела и построить эллипсоид инерции.

### Приборы:

- установка для получения крутильных колебаний
- набор исследуемых твердых тел
- секундомер

### Теоретическая часть

Инерционные свойства твердого тела при вращении определяется пространственным распределением. Оно характеризуется тензором инерции тела. Тензор инерции твердого тела является симметричным тензором 2-ого ранга  $J \in T_2^0(V)$  и имеет 6 независимых компонент, которые в прямоугольной декартовой системе координат выражаются как:

$$J_{ij} = \int (\delta_{ij} r^2 - r_i r_j) dm = J_{ji}, \quad J = J_{ij} \cdot h^i \otimes h^j$$

где  $r$  – расстояния от точек до центра, относительно которого вычисляется тензор инерции, а  $r_i$  – координатные компоненты соответствующих отрезков,  $i$  и  $j$  – номера координат (от 1 до 3).

Если для какой либо системы координат все 6 компонент известны, то момент инерции тела относительно произвольной оси  $l$ , проходящей через начало координат может быть вычислен по формуле:

$$J_l = n^j n^i J_{ij} = \vec{n}^T J \vec{n}$$

где  $\vec{n}$  – единичный вектор-столбец который задает направление оси,  $J$  – тензор инерции.

А момент импульса  $\vec{L}$  и вращательная энергия тела  $E_{\text{вращ}}$  тогда будут выражаться как:

$$E_{\text{вращ}} = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \cdot J \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{ij} \omega^i J_{ij} \omega^j$$

$$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}, \quad L_i = \sum_j J_{ij} \omega^j$$

Отложим вдоль оси  $l$  из начала координат радиус-вектор  $r$  равный по длине  $1/\sqrt{J_l}$ . Проведем множество таких отрезков, соответствующих различным направлениям оси  $l$ . Геометрическое место концов указанных отрезков, является поверхность второго порядка – эллипсоид. Этот эллипсоид принято называть эллипсоидом инерции. Он жестко связан с телом для которого он постояен. Знание эллипсоида инерции позволяет найти момент инерции тела относительно любой оси, проходящей через

центр эллипсоида. Длина отрезка  $r$  будет определять момент инерции тела относительно оси  $l$ :

$$J_l = \frac{1}{r^2} \quad (1)$$

Как и всякий симметричный тензор второго ранга может быть диагонализирован некоторой заменой координат. Пусть система координат, в которой он диагонализирован имеет оси  $Ox, Oy, Oz$ , тогда эти оси совпадают с главными осями тела. Полученные диагональные элементы  $J_x, J_y, J_z$  называются главными моментами инерции тела, а уравнение эллипсоида инерции в этих координатах примет вид:

$$1 = J_x r_x^2 + J_y r_y^2 + J_z r_z^2$$

Крутильные колебания рамки с телом описываются уравнением:

$$(I + I_p) \frac{d^2 \phi}{dt^2} = -f \cdot \phi$$

Здесь  $I$  и  $I_p$  – моменты инерции тела и рамки относительно оси вращения,  $\phi$  – угол поворота рамки, меняющийся со временем  $t$ ,  $f$  – модуль кручения проволоки. Период крутильных колебаний рамки с телом определяется формулой:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I + I_p}{f}}$$

На рисунке показано, как проходят оси вращения в параллелепипеде. Оси  $AA', BB'$  и  $CC'$  являются главными. Моменты инерции относительно этих осей обозначим соответственно  $J_x, J_y, J_z$ .

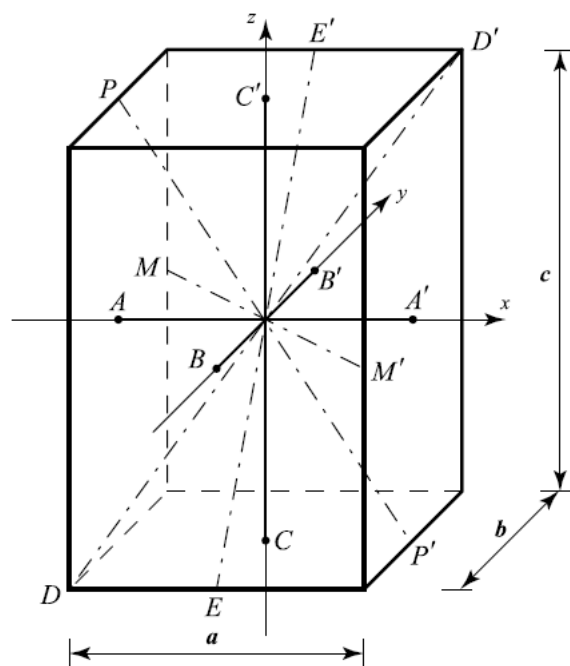


Рис. 1: Оси вращения прямоугольного параллелепипеда

Момент инерции  $I_D$  при вращении относительно диагонали DD' выражается через главные моменты с помощью формулы:

$$I_d = I_x \frac{a^2}{d^2} + I_y \frac{b^2}{d^2} + I_z \frac{c^2}{d^2} \quad (2)$$

Используя связь момента инерции с периодом крутильных колебаний получаем соотношение между периодами колебаний относительно осей DD', EE', MM' и PP' с периодами крутильных колебаний относительно главных осей.

$$(a^2 + b^2 + c^2)T_D^2 = a^2T_x^2 + b^2T_y^2 + c^2T_z^2 \quad (3)$$

$$(b^2 + c^2)T_E^2 = b^2T_y^2 + c^2T_z^2 \quad (4)$$

$$(a^2 + c^2)T_P^2 = a^2T_x^2 + c^2T_z^2 \quad (5)$$

$$(a^2 + b^2)T_M^2 = a^2T_x^2 + b^2T_y^2 \quad (6)$$

Эти соотношения также необходимо проверить экспериментально.

### Экспериментальная установка

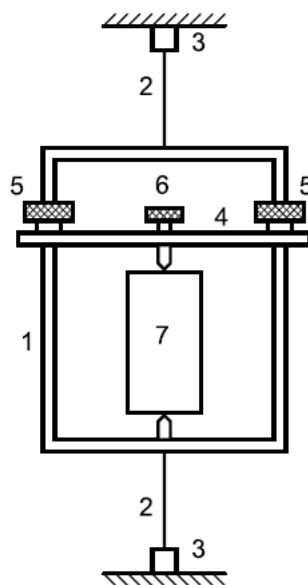


Рис. 2: Схема установки

В данной работе используется устройство для получения крутильных колебаний, изображенное на рисунке 2. Рамка 1 жестко соединена с проволокой 2, закрепленной вертикально в специальных зажимах 3, позволяющих сообщить начальное закручивание для возбуждения крутильных колебаний вокруг вертикальной оси. В рамке с помощью планки 4, гаек 5 и винта 6 закрепляется твердое тело 7. На теле имеются специальные выемки, позволяющие его закрепить так, чтобы ось вращения проходила в теле под различными углами через центр масс.

## Ход работы

Сперва определим погрешности приборов:

- штангенциркуль:  $2 \cdot \frac{\text{цена деления}}{2} = 0.1 \text{ мм}$
- весы: из описания прибора 0.1 г

Систематическую погрешность будем определять по формуле

$$\sigma_{\text{сист}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2}$$

Общую погрешность найдем как среднеквадратичную величину из всех погрешностей:

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{\text{случ}}^2 + \sigma_{\text{пр}}^2 + \dots}$$

1. Ознакомимся с установкой для получения крутильных колебаний. Проволока натянута хорошо, рамка жестко закреплена, устройство для возбуждения крутильных колебаний работает нормально, колебаний в вертикальной плоскости не возникает.
2. Научимся закреплять тела в рамке по инструкции, описанной в теоретической части.
3. Выберем амплитуду колебаний  $7.0^\circ$ . Через время  $t = 23.50 \text{ с}$ , равное 10 колебаниям, амплитуда стала равна  $6.5^\circ$ . Следовательно, амплитуда уменьшилась на  $\frac{7.0^\circ - 6.5^\circ}{7.0^\circ} \cdot 100\% = 7\%$ . Изменение амплитуды мало, следовательно будем использовать амплитуду  $A = 7.0^\circ$ .
4. Для пустой рамки и для тел при различных их положениях определим периоды колебаний по времени 10 колебаний, повторяя каждое измерение по 3 раза.

| $t, \text{ с}$                           | $T, \text{ с}$ |
|--|----------------|
| 23.50                                    | 2.350          |
| 25.23                                    | 2.523          |
| 24.98                                    | 2.498          |
| $\bar{T} = 2.457 \text{ с}$              |                |
| $\sigma_T^{\text{сл}} = 0.076 \text{ с}$ |                |

Таблица 1: Пустая рамка

5. Штангенциркулем измерим геометрические размеры тел. Вычислим главные моменты инерции тел. Их погрешность определяется погрешностями штангенциркуля и весов.
  - параллелепипед

$$I_z = \frac{m}{12}(a^2 + b^2) \Rightarrow \sigma_{I_z} = \frac{1}{12} \sqrt{(a^2 + b^2)^2 \sigma_m^2 + (2ma)^2 \sigma_a^2 + (2mb)^2 \sigma_b^2}$$

$$I_x = (4.351 \pm 0.006) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad I_y = (5.651 \pm 0.007) \cdot 10^{-2} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$I_z = (2.184 \pm 0.004) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

| $CC'$  |                | $AA'$  |                | $BB'$  |                | $DD'$  |                |
|--|----------------|--|----------------|--|----------------|--|----------------|
| $t, \text{ с}$   | $T, \text{ с}$ | $t, \text{ с}$   | $T, \text{ с}$ | $t, \text{ с}$   | $T, \text{ с}$ | $t, \text{ с}$   | $T, \text{ с}$ |
| 32.34  | 3.234          | 38.04  | 3.804          | 40.83  | 4.083          | 34.79  | 3.479          |
| 32.39  | 3.239          | 37.84  | 3.784          | 40.88  | 4.088          | 34.74  | 3.474          |
| 32.28  | 3.280          | 37.87  | 3.787          | 40.75  | 4.075          | 34.87  | 3.487          |
| $\bar{T} = 3.251 \text{ с}$<br>$\sigma_T^{\text{с.л}} = 0.021 \text{ с}$ |                | $\bar{T} = 3.792 \text{ с}$<br>$\sigma_T^{\text{с.л}} = 0.009 \text{ с}$ |                | $\bar{T} = 4.082 \text{ с}$<br>$\sigma_T^{\text{с.л}} = 0.005 \text{ с}$ |                | $\bar{T} = 3.480 \text{ с}$<br>$\sigma_T^{\text{с.л}} = 0.005 \text{ с}$ |                |

Таблица 2: Параллелепипед

| $EE'$  |                | $MM'$  |                | $PP'$  |                |
|--|----------------|--|----------------|--|----------------|
| $t, \text{ с}$   | $T, \text{ с}$ | $t, \text{ с}$   | $T, \text{ с}$ | $t, \text{ с}$   | $T, \text{ с}$ |
| 33.43  | 3.343          | 38.44  | 3.844          | 34.38  | 3.438          |
| 33.54  | 3.354          | 38.37  | 3.837          | 34.54  | 3.454          |
| 33.57  | 3.357          | 38.65  | 3.865          | 34.49  | 3.449          |
| $\bar{T} = 3.351 \text{ с}$<br>$\sigma_T^{\text{с.л}} = 0.006 \text{ с}$ |                | $\bar{T} = 3.849 \text{ с}$<br>$\sigma_T^{\text{с.л}} = 0.011 \text{ с}$ |                | $\bar{T} = 3.447 \text{ с}$<br>$\sigma_T^{\text{с.л}} = 0.007 \text{ с}$ |                |

Таблица 3: Параллелепипед

| центр  |       | ребо   |       | угол   |       |
|--|-------|--|-------|--|-------|
| 30.80  | 3.080 | 30.72  | 3.072 | 30.70  | 3.070 |
| 30.84  | 3.084 | 30.63  | 3.063 | 30.77  | 3.077 |
| 30.76  | 3.076 | 30.77  | 3.077 | 30.80  | 3.080 |
| $\bar{T} = 3.080 \text{ с}$<br>$\sigma_T^{\text{с.л}} = 0.003 \text{ с}$ |       | $\bar{T} = 3.071 \text{ с}$<br>$\sigma_T^{\text{с.л}} = 0.006 \text{ с}$ |       | $\bar{T} = 3.076 \text{ с}$<br>$\sigma_T^{\text{с.л}} = 0.004 \text{ с}$ |       |

Таблица 4: Куб

| центр  |       | диаметр  |       |
|--|-------|--|-------|
| 32.46  | 3.246 | 30.63  | 3.063 |
| 32.35  | 3.235 | 30.76  | 3.076 |
| 32.34  | 3.234 | 30.78  | 3.078 |
| $\bar{T} = 3.238 \text{ с}$<br>$\sigma_T^{\text{с.л}} = 0.005 \text{ с}$ |       | $\bar{T} = 3.072 \text{ с}$<br>$\sigma_T^{\text{с.л}} = 0.007 \text{ с}$ |       |

Таблица 5: Цилиндр

| параллелепипед    |                   |                   | куб             | цилиндр         |                 |
|-------------------|-------------------|-------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 2082.0, г         |                   |                   | 1086.9, г       | 2263.7, г       |                 |
| $AA', \text{ см}$ | $BB', \text{ см}$ | $CC', \text{ см}$ | $a, \text{ см}$ | $h, \text{ см}$ | $d, \text{ см}$ |
| 10.02             | 5.05              | 15.01             | 9.26            | 4.91            | 8.80            |

Таблица 6: Геометрические размеры тел

- Куб

$$I = \frac{ma^2}{6} \Rightarrow \sigma_I = \frac{1}{6} \sqrt{a^4 \sigma_m^2 + (2ma)^2 \sigma_a^2}$$

$$I = (1.553 \pm 0.022) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

- Цилиндр

$$I_h = \frac{mr^2}{2} \Rightarrow \sigma_{I_h} = \frac{1}{2} \sqrt{a^4 \sigma_m^2 + (2mr)^2 \sigma_r^2}$$

$$I_h = (2.191 \pm 0.010) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$I_d = \frac{mr^2}{4} + \frac{mh^2}{12} \Rightarrow \sigma_{I_d} = \sqrt{\frac{1}{4}(r^4 \sigma_m^2 + (2mr)^2 \sigma_r^2) + \frac{1}{12}(h^4 \sigma_m^2 + (2mh)^2 \sigma_h^2)}$$

$$I_d = (1.550 \pm 0.012) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Проверим справедливость формул (3) – (6).

$$(a^2 + b^2 + c^2)T_D^2 = 0.425 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^2, \quad a^2 T_x^2 + b^2 T_y^2 + c^2 T_z^2 = 0.425 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^2$$

$$(b^2 + c^2)T_E^2 = 0.282 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^2, \quad b^2 T_y^2 + c^2 T_z^2 = 0.281 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^2$$

$$(a^2 + c^2)T_P^2 = 0.387 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^2, \quad a^2 T_x^2 + c^2 T_z^2 = 0.382 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^2$$

$$(a^2 + b^2)T_M^2 = 0.187 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^2, \quad a^2 T_x^2 + b^2 T_y^2 = 0.187 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^2$$

Видно, что значения правой и левой части совпадают.

6. Рассчитаем величину  $\frac{1}{\sqrt{T^2 - T_P^2}}$  для каждой оси параллелепипеда, куба и цилиндра.

|  | $AA'$ | $BB'$ | $CC'$ | $DD'$ | $EE'$ | $PP'$ | $MM'$ |
|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $T, \text{ с}$                             | 3.792 | 4.082 | 3.251 | 3.480 | 3.351 | 3.447 | 3.849 |
| $\frac{1}{\sqrt{T^2 - T_P^2}}, 1/\text{с}$ | 0.346 | 0.307 | 0.470 | 0.406 | 0.439 | 0.414 | 0.338 |

Таблица 7: Параллелепипед

Построим проекции эллипсоида инерции на плоскости  $XOY$ ,  $XOZ$  и  $YOZ$ .

| $t, \text{ с}$                            | $T, \text{ с}$ |
|---|----------------|
| 23.50                                     | 2.350          |
| 25.23                                     | 2.523          |
| 24.98                                     | 2.498          |
| $\bar{T} = 2.457 \text{ с}$               |                |
| $\sigma_T^{\text{с.л}} = 0.076 \text{ с}$ |                |

Таблица 8: Пустая рамка

| $t, \text{ с}$                            | $T, \text{ с}$ |
|---|----------------|
| 23.50                                     | 2.350          |
| 25.23                                     | 2.523          |
| 24.98                                     | 2.498          |
| $\bar{T} = 2.457 \text{ с}$               |                |
| $\sigma_T^{\text{с.л}} = 0.076 \text{ с}$ |                |

Таблица 9: Пустая рамка

,C,,P,,Π,



,c,,p,,Π,,c,,p,,Π,