Лабораторная работа 1.2.4
Определение главных моментов инерции твердых тел с помощью крутильных колебаний

Красоткина Виктория

28 ноября 2022 г.

Цель: Измерить периоды крутильных колебаний рамки при различных положениях закрепленного в ней тела, проверить теоретическую зависимость между периодами крутильных колебаний тела относительно различных осей, определить моменты инерции относительно нескольких осей для каждого тела, по ним найти главные моменты инерции тела и посторить эллипсоид инерции.

Приборы:

- установка для получения крутильных колебаний
- набор исследуемых твердых тел
- секундомер

Теоретическая часть

Инерционные свойства твердого тела при вращении определяется пространственным распределением. Оно характеризуется тензором инерции тела. Тензор инерции твердога тела является симметричным тензором 2-ого ранга $J \in T_2^0(V)$ и имеет 6 независимых компонент, которые в прямоугольной декартовой системе координат выражаются как:

$$J_{ij} = \int (\delta_{ij} r^2 - r_i r_j)\ dm = J_{ji}, \quad J = J_{ij} \cdot h^i \otimes h^j \tag{1}$$

где r — расстояния от точек до центра, относительно которого вычисляется тензор инерции, а r_i — координатные компоненты соответствующих отрезков, i и j — номера координат (от 1 до 3).
Если для какой либо системы координат все 6 компонент известны, то момент инерции тела относительно произвольной оси l, проходящей через начало координат может быть вычислен по формуле:

$$J_l = n^j n^i J_{ij} = \overrightarrow{n}^T J \overrightarrow{n} \tag{2}$$

где $\overrightarrow{n}$ - единичный вектор-столбец который задает направление оси, J - тензор инерции.
А момент импульса $\vec{L}$ и вращательная энергия тела $E_{\text{вращ}}$ тогда будут выражаться как:

$$E_{\text{вращ}} = \frac{1}{2}\ \vec{\omega}^T \cdot J \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{ij} \omega^i J_{ij} \omega^j \tag{3}$$

$$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}, \qquad L_i = \sum_j J_{ij} \omega^j \tag{4}$$

Отложим вдоль оси l из начала координат радиус-вектор r равный по длине $1/\sqrt{J_l}$. Проведем множество таких отрезков, соответствующих различным направлениям оси l. Геометрическое место концов указанных отрезков, является поверхность второго порядка - эллипсоид. Этот эллипсоид принято называть эллипсоидом инерции. Он жестко связан с телом для которого он постоен. Знание эллипсоида инерции позволяет найти момент инерции тела относительно любой оси, проходящей через центр эллипсоида. Длина отрезка r будет определять момент инерции тела относительно оси l:

$$J_l = \frac{1}{r^2} \tag{5}$$

Как и всякий симметричный тензор второго ранга может быть диагонализован некоторой заменой координат. Пусть система координат, в которой он диагонализован имеет оси Ox, Oy, Oz, тогда эти оси совпадают с главными осями тела. Полученные диагональные элементы J_x, J_y, J_z называются главными моментами инерции тела, а ур-ие эллипсоида инерции в этих координатах примит вид:

$$1 = J_x r_x^2 + J_y r_y^2 + J_z r_z^2 \tag{6}$$

Крутильные колебания рамки с телом описываются уравнением:

$$(I + I_p)\frac{d^2\phi}{dt^2} = -f \cdot \phi \tag{7}$$

Здесь I и I_p - моменты инерции тела и рамки относительно оси вращения, φ - угол поворота рамки, меняющийся со временем t, f - модуль кручения проволоки. Период крутильных колебаний рамки с телом определяется формулой:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I + I_p}{f}} \tag{8}$$

На рисунке показано, как проходят оси вращения в параллелепипеде. Оси AA', BB' и CC' являются главными. Моменты инерции относительно этих осией обозначим соотственно J_x, J_y, J_z.

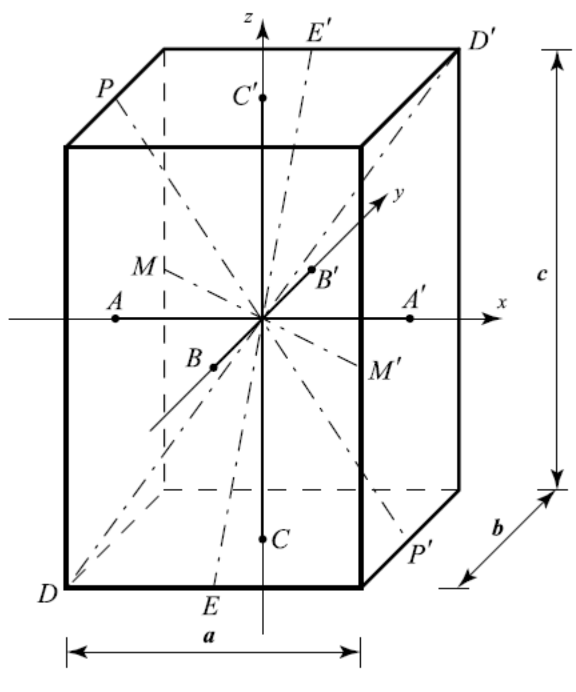

Рис. 1: Оси вращения прямоугольного параллелепипеда

Момент инерции I_D при вращении относительно диагонали DD' выражается через главные моменты с помощью формулы:

$$I_d = I_x \frac{a^2}{d^2} + I_y \frac{b^2}{d^2} + I_z \frac{c^2}{d^2} \tag{9}$$

Используя связь момента инерции с периодом крутильных колебаний получаем соотношение между периодами колебаний относительно осей DD', EE', MM' и PP' с периодами крутильных колебаний относительно главных осей.

$$(a^2 + b^2 + c^2)T_D^2 = a^2 T_x^2 + b^2 T_y^2 + c^2 T_z^2$$

$$(b^2 + c^2)T_E^2 = b^2 T_y^2 + c^2 T_z^2$$

$$(a^2 + c^2)T_P^2 = a^2 T_x^2 + c^2 T_z^2$$

$$(a^2 + b^2)T_M^2 = a^2 T_x^2 + b^2 T_y^2$$

Эти соотношения также необходимо проверить экспериментально.

Экспериментальная установка

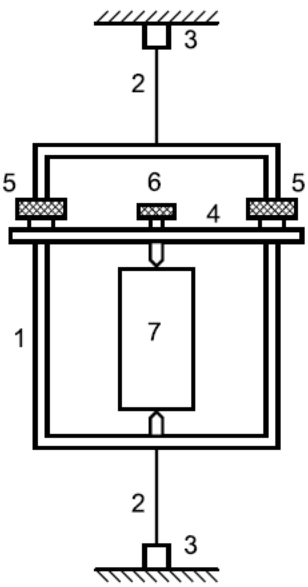

Рис. 2: Схема установки

В данной работе используется устройство для получения крутил- ных колебаний, изображенное на рисунке. Рамка 1 жестко соединена с проволокой 2, закрепленной вертикально в специальных зажимах 3, позволяющих сообщить начальное закручивание для возбуждения крутильных колебаний вокруг вертикальной оси. В рамке с помощью планки 4, гаек 5 и винта 6 закрепляется твердое тело 7. На теле имеются специальные выемки, позволяющие его закрепить так, чтобы ось вращения проходила в теле под различными углами через центр масс.