1.4.1 Изучение физического маятника

Выполнила Красоткина Виктория, Б01-203

Цель: исследовать зависимость периода колебаний физического маятника от его момента инерции, проверить справедливость формулы для периода колебаний физического маятника и определить значение ускорения свободного падения и убедиться в справедливости теоремы Гюйгенса об обратимости точек опоры и центра качания маятника.

Приборы:

- физический маятник (однородный стальной стержень)
- опорная призма
- математический маятник
- счетчик числа колебаний
- линейка
- секундомер

Теоретическая часть

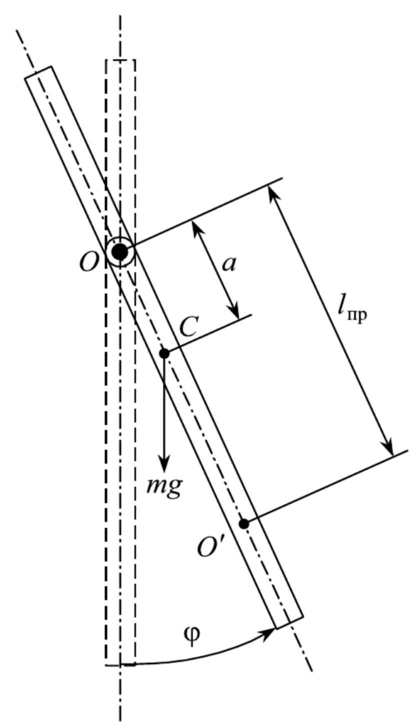


Рис. 1: Физический маятник

Физический маятник — любое твердое тело, которое под действием силы тяжести может свободно качаться вокруг неподвижной горизонтальной оси. Движение маятника описывается уравнением

$$I\frac{d^2\phi}{dt^2} = M, \tag{1}$$

где I — момент инерции маятника, ϕ — угол отклонения маятника от пложения равновесия, t — время, M — момент сил, действующих на маятник.

В работе используется однородный стальной стержень длиной l, на котором закреплена опорная призма, ее острое ребро является осью качания маятника. Расстояние $OC = a$ (см. рис. 1) — расстояние от точки опоры до центра масс. которое можно менять передвижением призмы. Подвесная призма остаётся неподвижной ($a = const$), а на стержень маятника насаживается дополнительное тело небольшого размера, положение которого можно изменять, изменяя таким образом момент инерции маятника. Период колебаний маятника в этой схеме измеряется электронным счетчиком импульсов, расположенном у нижнего конца стержня.

По теореме Гюйгенса-Штейнера момент инерции маятника

$$I = \frac{ml^2}{12} + ma^2,$$

где m — масса маятника. Момент силы, действующей на маятник:

$$M = -mga\sin\varphi \approx -mga\varphi$$

Приближенное равенство работает при малых значениях угла.

Подставляя выражения для моментов инерции и сил в уравнение (1), получаем уравнение колебаний:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0,$$

где

$$\omega^2 = \frac{ga}{a^2 + \frac{l^2}{12}}$$

Решение уравнения колебаний:

$$\varphi(t) = A\sin(\omega t + \alpha),$$

где A — амплитуда колебаний, α — начальная фаза маятника.

Период колебаний физического маятника:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + \frac{l^2}{12}}{ag}} \tag{2}$$

Период колебаний математического маятника:

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}},$$

где l' — длина математического маятника. Величину $a^2 + \frac{l^2}{12} = l_{\text{пр}}$ называют приведенной длиной физического маятника.

В качестве подвижного груза в работе используется металлический цилиндр или «чечевица». Поскольку размер груза мал по сравнению с длиной стержня, его можно считать закреплённой на стержне точечной массой. Обозначим за y расстояние от точки подвеса O до центра масс груза (см. рис. 2). Тогда момент инерции маятника будет равен

$$I = I_0 + m_{\text{г}}y^2$$

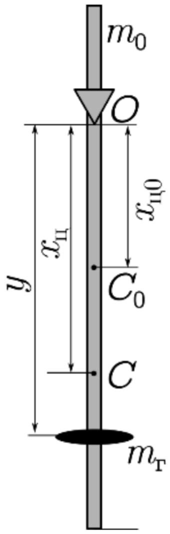


Рис. 2: Маятник с дополнительным грузом

Пусть $x_{ц0}$ — расстояние от точки подвеса (острия призмы) до центра масс маятника без груза. Тогда центр масс маятника с грузом находится в точке

$$x_ц = \frac{m_0 x_{ц0} + m_г y}{M}, \tag{3}$$

где m_0 — масса маятника без груза (стержня вместе с призмой), $M = m_0 + m_г$ — полная масса маятника. Положения центра масс $x_ц$ и $x_{ц0}$ могут быть измерены с помощью подставки. Отсюда находим формулу для вычисления положения центра масс груза:

$$y = \frac{M x_ц - m_0 x_{ц0}}{m_г}$$

Период колебаний маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + m_г y^2}{g M x_ц}} \tag{4}$$

Отсюда видно, что если построить зависимость величины $u = T^2 x_ц$ от $v = y^2$, то график должен иметь вид прямой линии. По её наклону можно определить ускорение свободного падения g, а по вертикальному смещению — момент инерции I_0 маятника.

Ход работы

1. Погрешность

- линейки — 1 мм
- штангенциркуля — 0.1 мм
- секундомера — 0.03 с
- весов — 0.1 г

2. Запишем измеренные данные о стержне, призме и грузе:

- Длина стержня $l = 100.1 \pm 0.1$ см
- Масса призмы $m_п = 75.6 \pm 0.1$ г
- Масса стержня $m = 944.0 \pm 0.1$ г
- Масса груза $m_г = 312.6 \pm 0.1$ г

3. Центра масс призмы расположен на расстоянии 50.1 ± 0.1 см. Положение призмы (расстояние между остриём призмы и центром масс стержня):

$$a = 30.3 \pm 0.1 \text{ см}$$

Положение центра масс конструкции (расстояние между остриём призмы и центром масс конструкции):

$$x_ц = 28.1 \pm 0.1 \text{ см}$$

Кроме цены деления на погрешность определения величин влияет то, что достичь точного равновесия очень сложно.

4. Проведем первый предварительный опыт по измерению периода колебаний без дополнительного груза: измерим время 20 колебаний и найдем период. Получим $T = 1.529$ с. При таком значении периода $g = 9.75\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. После этого проведем серию измерений для экспериментального определения случайной погрешности измерения времени с помощью секундомера. Запишем в таблицу 1 данные, полученные в этом опыте. Рассчитаем среднее значение периода:

№	t, с	T, с
1	30.58	1.529
2	30.59	1.5295
3	30.57	1.5285
4	30.57	1.5285
5	30.59	1.5295
6	30.58	1.529
7	30.57	1.5285
8	30.57	1.5285

Таблица 1: предварительный опыт

$$T = 1.53 \text{ с}$$

Рассчитаем погрешность полученного результата:

$$\sigma_{пр} = 0.03 \text{ с},\ \sigma_{сл} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(T_i - \overline{T}\right)^2} = 4.6 \cdot 10^{-4} \approx 0 \text{ с},\ \sigma_T = \sqrt{\sigma_{пр}^2 + \sigma_{сл}^2} = 0.03 \text{ с}$$

Тогда

$$T = 1.53 \pm 0.03 \text{ с},\ \varepsilon = 2\%$$

Теперь по формуле (2) рассчитаем значение g:

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{x_ц^2 + \frac{l^2}{12}}{x_ц} = 9.75\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Погрешность рассчитаем следующим образом:

$$\sigma_g = g \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x_ц}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial l}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)^2} \approx 0.38,\ \varepsilon = 4\%$$

Полученное значение попадает в ворота точности 10%.

5. Чтобы погрешность измерений соответствовала точности измерений $\varepsilon_{max} = 0.1\%$, необходимое число колебаний, по которому следует измерять период, равно

$$n = \frac{0.03 \cdot 100}{0.1} \cdot \frac{1}{T} \approx 20$$

6. Проведем измерение периода колебаний маятника по 20 полным колебаниям 10 раз. Для каждого опыта будем менять значение y — положение центра масс груза и расчитывать по формуле (3) $x_{\text{ц}}$ — положение центра масс стержня с грузом. Все результаты запишем в таблицу 2.

№	y, мм	$x_{\text{ц}}$, мм	n	t_n, с	T, с	g, м/с^2	$\sigma_{\text{пр}}$, м/с^2	$T^2 x_{\text{ц}}$, с^2·м	y^2, м^2
1	650.0	372.8	20	31.45	1.5725	9.68	0.48	0.92	0.4225
2	600.0	360.4	20	30.87	1.5435	9.68	0.48	0.86	0.3600
3	550.0	347.9	20	30.34	1.5170	9.67	0.48	0.80	0.3025
4	500.0	335.5	20	29.87	1.4935	9.66	0.48	0.75	0.2500
5	450.0	323.0	20	29.42	1.4710	9.68	0.48	0.70	0.2025
6	400.0	310.6	20	29.06	1.4530	9.68	0.48	0.66	0.1600
7	350.0	298.2	20	28.80	1.4400	9.67	0.48	0.62	0.1225
8	300.0	285.7	20	28.60	1.4300	9.69	0.48	0.58	0.0900
9	250.0	273.3	20	28.54	1.4270	9.68	0.48	0.56	0.0625
10	200.0	260.8	20	28.60	1.4300	9.69	0.48	0.53	0.0400

Таблица 2: основной опыт

Для каждого измерения рассчитаем значение g из формулы (4) и усредним.

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{I_0 + m_{\text{г}} y^2}{M x_{\text{ц}}}$$

Момент инерции I_0 (здесь масса стержня рассчитывается с вычетом массы призмы):

$$I_0 = \frac{ml^2}{12} + ma^2 = 0.152 \pm 0.007 \text{ кг·м}^2$$

Усредним полученные значения g и рассчитаем погрешность.

$$g = 9.68 \ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$\sigma_{\text{сл}} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (g_i - \overline{g})^2} = 0.01 \ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

$$\sigma = g \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial m_{\text{г}}}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial M}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial I_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial x_{\text{ц}}}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)^2}$$

Приборную погрешность рассчитываем для каждого измерения и усредняем.

$$\sigma = 0.48\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

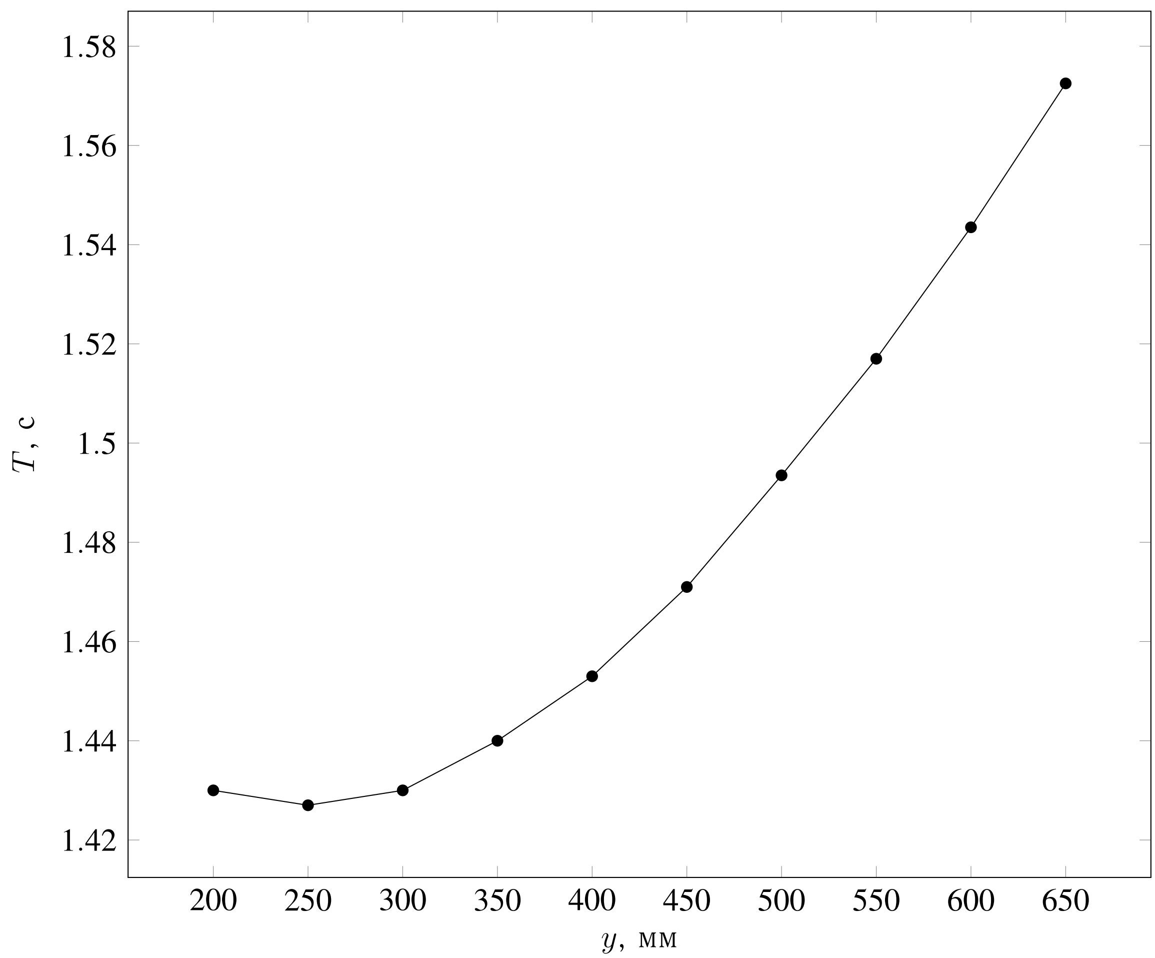
Находим полную погрешность:

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{\text{пр}}^2 + \sigma_{\text{сл}}^2} = 0.48\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Тогда

$$g = 9.68 \pm 0.48\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2},\ \varepsilon = 5\%$$

7. Построим график зависимости $T(y)$.

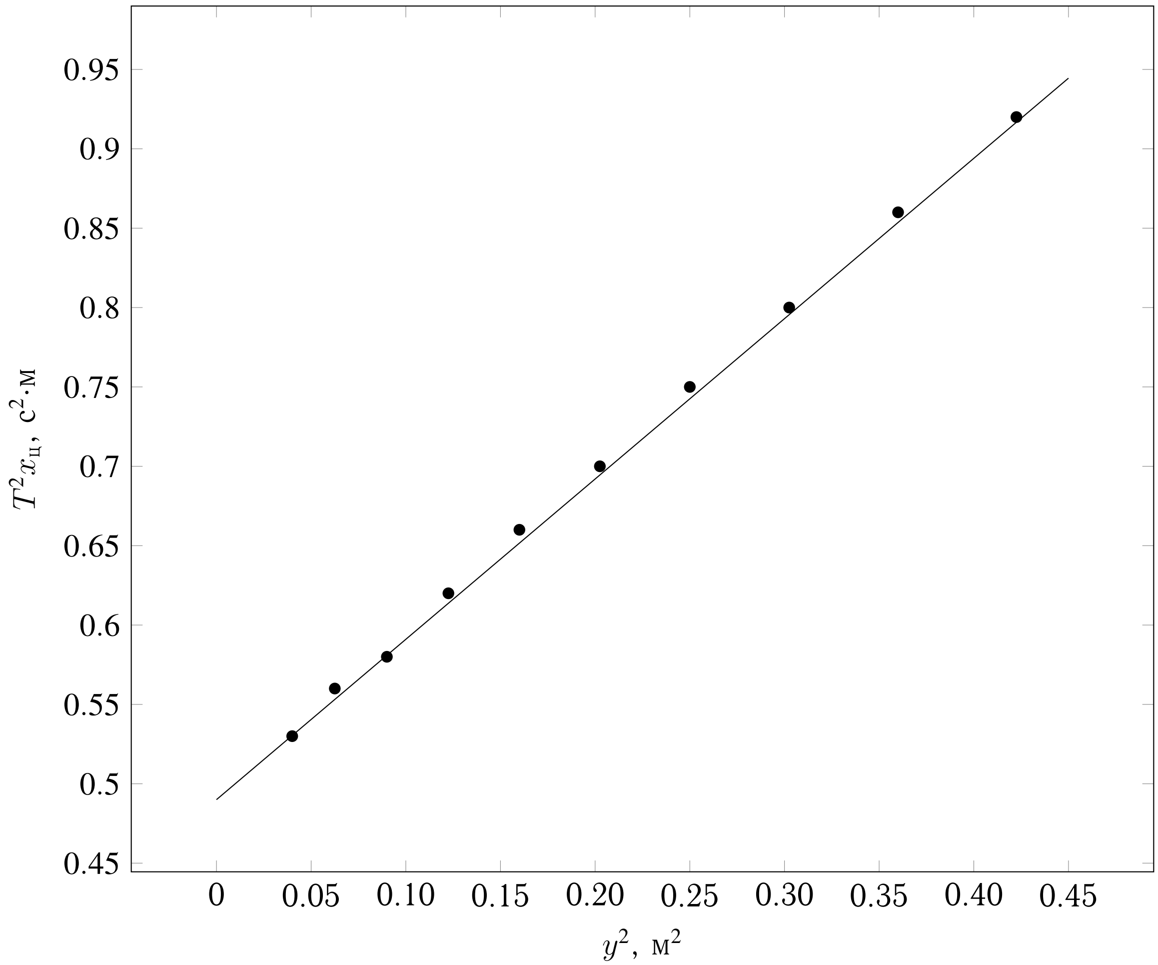


Минимум по графику находится на $y = 250$ мм и равен $T = 1.427$ с.

8. Построим график зависимости $T^2 x_{\text{ц}}(y^2)$.

Методом наименьших квадратов определим параметры (k, b) наилучшей прямой $u = kv + b$ и их погрешности (σ_k и σ_b).

$$k = \frac{\langle xy\rangle - \langle x\rangle\langle y\rangle}{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} \approx 1.01\ \frac{\text{с}^2}{\text{м}}$$



$$b = \langle y \rangle - k\langle x \rangle \approx 0.49 \text{ м} \cdot \text{с}^2$$

Случайные погрешности вычисления k и b можно найти по следующим формулам:

$$\sigma_k^{\text{сл}} = \sqrt{\frac{1}{N-2}\left(\frac{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} - k^2\right)} \approx 0.04 \ \frac{\text{с}^2}{\text{м}}$$

$$\sigma_b^{\text{сл}} = \sigma_k^{\text{сл}} \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \approx 0.005 \text{ м} \cdot \text{с}^2.$$

По наклону прямой рассчитаем величину ускорения свободного падения g.

$$T^2 x\text{ц} = \frac{4\pi^2 m_\text{г}}{gM} \cdot y^2 + \frac{4\pi^2 I_0}{gM}$$

$$k = \frac{4\pi^2 m_\text{г}}{gM} \ \Rightarrow \ g = \frac{4\pi^2 m_\text{г}}{kM} = 9.65 \ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

Приборная погрешность k находится как

$$\sigma_k^{\text{пр}} = k \cdot \sqrt{\left(2\frac{\sigma_T}{T}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_y}{y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{x_ц}}{x_ц}\right)^2}$$

В приборную погрешность наиболее существенный вклад вносит погрешность секундомера:

$$\sigma_k^{\text{пр}} = 0.04\ \frac{\text{с}^2}{\text{м}}$$

Полная погрешность коэффициента наклона:

$$\sigma_k = \sqrt{\sigma_{\text{пр}}^2 + \sigma_{\text{сл}}^2} = 0.06\ \frac{\text{с}^2}{\text{м}}$$

В погрешность g основной вклад вносит как раз ошибка k.

$$g = 9.65 \pm 0.57,\ \ \varepsilon = 6\%$$

Таким методом погрешность получается больше, чем из непосредственного усреднения. В первом случае случайная погрешность мала, основной вклад вносит ошибка по времени. Во втором же случае ошибка по времени оказывается сравнима со случайной погрешностью коэффициента k, поэтому полная погрешность больше.

Вывод

Мы исследовали зависимость периода колебаний физического маятника от его момента инерции. Формула периода колебаний физического маятникка справедлива, мы получили значение ускорения свободного падения g, с хорошей точностью совпадающее с реальным. Теорема Гюйгенса также справедлива.