Дискретный анализ. Домашнее задание

Красоткина Виктория

22 октября 2022 г.

1 Алгебра логики и булевы функции

1.1 Тождественны ли формулы A и B:

a) $A = x \to (y \to z),\ B = (x \to y) \to (x \to z)$

b) $A = x \downarrow y,\ B = ((x|x)|(y|y))|((x|x)|(y|y))$

Решение

a) $A = x \to (y \to z),\ B = (x \to y) \to (x \to z)$

Рассмотрим таблицы истинности формул A и B:

x	y	z	$y \to z$	$x \to (y \to z)$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

Таблица 1: A

x	y	z	$x \to y$	$x \to z$	$(x \to y) \to (x \to z)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Таблица 2: B

Формулы **тождественны**.

b) $A = x \downarrow y,\ B = ((x|x)|(y|y))|((x|x)|(y|y))$

Рассмотрим таблицы истинности формул A и B:

x	y	$x \downarrow y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Таблица 3: A

x	y	$x|x$	$y|y$	$((x|x)|(y|y))$	$((x|x)|(y|y))|((x|x)|(y|y))$
0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	1	0

Таблица 4: B

Формулы **тождественны**.

1.2 Укажите фиктивные переменные у следующих функций или покажите, что все переменные являются существенными:

a) $f(x, y, z) = 10100000$

b) $f(x, y, z) = \overline{(x \to y) \leftrightarrow (\overline{y} \to \overline{x})}$

c) $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1 + x_2) \oplus (x_2 + x_3) \oplus \cdots \oplus (x_{n-1} + x_n) \oplus (x_n + x_1)$

Решение

a) $f(x, y, z) = 10100000$

Составим таблицу истинности для функции f и исследуем ее переменные.

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Таблица 5: $f(x, y, z)$

x	y	$f(x,y,0)$	$f(x,y,1)$
0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	1	0	0

Таблица 6: Исследование z

x	z	$f(x,0,z)$	$f(x,1,z)$
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

Таблица 7: Исследование y

y	z	$f(0,y,z)$	$f(1,y,z)$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0

Таблица 8: Исследование x

Из таблиц 6 и 8 видно, что $f(x, y, 0) \neq f(x, y, 1)$ и $f(0, y, z) \neq f(0, y, z)$, следовательно x и z — существенные. $f(x, 0, z) = f(x, 1, z)$, значит y **— фиктивная переменная**.

b) $f(x, y, z) = \overline{(x \to y) \leftrightarrow (\overline{y} \to \overline{x})}$

Упростим выражение.

$$\overline{(x \to y) \leftrightarrow (\overline{y} \to \overline{x})} = \overline{(\overline{x} + y) \leftrightarrow (y + \overline{x})} = \overline{1} = 0$$

$\overline{x} + y = y + \overline{x}$ по свойству коммутативности.

Все переменные x**,** y**,** z **— фиктивные**.

c) $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1 + x_2) \oplus (x_2 + x_3) \oplus \cdots \oplus (x_{n-1} + x_n) \oplus (x_n + x_1)$

Решение

Рассмотрим $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ при $x_1 = 0$ и $x_1 = 1$:

$$f(0, x_2, \cdots, x_n) = (0 + x_2) \oplus (x_2 + x_3) \oplus \cdots \oplus (x_{n-1} + x_n) \oplus (x_n + 0) = \\ = x_2 \oplus (x_2 + x_3) \oplus \cdots \oplus (x_{n-1} + x_n) \oplus x_n$$

$$f(1, x_2, \cdots, x_n) = (1 + x_2) \oplus (x_2 + x_3) \oplus \cdots \oplus (x_{n-1} + x_n) \oplus (x_n + 1) = \\ = 1 \oplus (x_2 + x_3) \oplus \cdots \oplus (x_{n-1} + x_n) \oplus 1$$

Видно, что $f(0, x_2, \cdots, x_n) \neq f(1, x_2, \cdots, x_n)$. Значит, x_1 — значимая переменная. Аналогичные выкладки можно повторить для остальных переменных и доказать таким образом, что **все переменные значимые**.

1.3 Упростите выражение:

$$f(x,y,z) = \overline{(xy \to z\overline{y})} \leftrightarrow \left(\overline{(x \to \overline{xyz})} \to (xy + yz + zx)\right)$$

Укажите фиктивные переменные или докажите что все переменные являются существенными.

Решение

$$\overline{(xy \to z\overline{y})} \leftrightarrow \left(\overline{(x \to \overline{xyz})} \to (xy + yz + zx)\right) = \overline{(\overline{xy} + z\overline{y})} \leftrightarrow ((x \to \overline{xyz}) + (xy + yz + zx)) =$$
$$= (xy \cdot \overline{z\overline{y}}) \leftrightarrow ((\overline{x} + \overline{xyz}) + (xy + yz + zx)) = (xy \cdot (\overline{z} + y)) \leftrightarrow (\overline{x} + \overline{x} + \overline{yz} + xy + yz + zx)$$

Известно, что $\overline{x} + \overline{x} = \overline{x}$, $\overline{yz} + yz = 1$, $y \cdot y = y$. Тогда

$$f(x,y,z) = (xy\overline{z} + xy) \leftrightarrow (\overline{x} + 1 + zx + zy)) = (xy \cdot (\overline{z} + 1)) \leftrightarrow 1 = xy \leftrightarrow 1$$

z **— фиктивная переменная**.

1.4 Сколько существует булевых функций n переменных, таких что эта функция принимает значение 1 по крайней мере 2 раза? $m > 2$ раз?

Решение

Всего существует 2^{2^n} булевых функций (для n переменных). Существует одна функция, которая принимает значение 0 2^n раз (то есть только нули). Тогда количество функций, принимающих значение 1 хотя бы 1 раз:

$$N' = 2^{2^n} - 1$$

Также существует 2^n функций, принимающих значение 1 только 1 раз. Тогда количество функций, принимающих значение 1 хотя бы 2 раза:

$$N = 2^{2^n} - 2^n - 1$$

1.5 Сколько существует булевых функций n переменных, таких, что на нулевом наборе (т. е. все переменные принимают значение 0) функция равняется нулю, на единичном наборе (т.е. все переменные принимают значение 1) функция принимает значние 1, и при этом выполняется свойство самодвойственности (т.е. на противоположных наборах функция принимает противоположные значения $\overline{f(x_1, \cdots, x_n)} = f(\overline{x_1}, \cdots, \overline{x_n})$)?

Решение

Функция самодвойственная, следовательно, достаточно определить половину наборов: $2^n/2 = 2^{n-1}$. Из этих наборов один уже определен ($x_1 = 0, x_2 = 0, \cdots, x_n = 0$). Остается $2^{n-1} - 1$ наборов. Тогда количество булевых функций

$$2^{2^{n-1}-1}$$

1.6 Составим следующую булеву функцию $f(x, y, z)$, которая смотрит на значения переменных и принимает значение большинства из этих значений аргументов. Если большинство аргументов принимают значение 1, то и сама функция выдаст в ответ 1. Например, если две переменных равны 1 а последняя 0, то функция примет значение 1. Если есть три единицы то функция примет значение 1. С нулём аналогично. Представьте данную функцию в виде таблицы истинности и в виде булевой формулы. Все ли переменные являются существенными? Будет ли функция самодвойственной?

Решение

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Таблица 9: таблица истинности

Проверим равенство аргументов и их равенство единице с помощью оператора конъюнкции. Если переменные совпадают, но равны 0, их произведение тоже даст 0. Если же они совпадают и равны 1, произведение будет равняться единице. Тогда сложение (дизъюнкция) результатов вернет итоговое значение функции.

x	y	z	$x \cdot y$	$x \cdot z$	$y \cdot z$	$x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

Таблица 10: проверка формулы

$$f(x, y, z) = x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z$$

Из таблиц 9 и 10 видно, что полученная формула согласуется с заданным условием.

Функция **является самодвойственной**. **Все переменные значимы**, так как если две из них различны, то третья влияет на значение функции.

1.7 Упростите выражение

$$x_1 \to (x_2 \to x_3)$$

Используя данный результат, упростите следующее выражение:

$$x_1 \to (x_2 \to \cdots (x_{n-2} \to (x_{n-1} \to x_n) \cdots)$$

Решение

$$x \to y = \overline{x} + y \;\Rightarrow\; x_1 \to (x_2 \to x_3) = x_1 \to (\overline{x_2} + x_3) = \overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3$$

Тогда

$$x_1 \to (x_2 \to \cdots (x_{n-2} \to (x_{n-1} \to x_n) \cdots) = \overline{x_1} + \overline{x_2} + \cdots + \overline{x_{n-2}} + \overline{x_{n-1}} + x_n$$

1.8 Отсортируйте группу по порядку и возьмите свой порядковый номер. Вычтите из него единицу и переведите в двоичное число. Дополните это число нулями в начале для того, чтобы вектор значений имел длину, равную степени двойки. Данное двоичное число будет Вашим вектором значений функции. Постройте таблицу истинности и задайте функцию в виде булевой формулы используя любые символы.

Решение

Порядковый номер — 5. 5 − 1 = 4. В двоичной системе:

$$4_{10} = 0100_2$$

x	y	$f(x,y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Таблица 11: таблица истинности

$$f(x,y) = (\overline{x} \to y) \wedge \overline{x}$$

2 Множества и операции с ними

2.1 Пусть имеется множество $S = \{s \in \mathbb{N}_0 | \exists n \in \mathbb{N}_0 : s = n^2\}$

Верно ли, что $A = 0, 1, 4, 9 = S$? Верно ли, что $A = \{0, 1, 4, 9, \dots\} = S$? В случае положительного ответа докажите, в случае отрицательного приведите контрпример.
Решение

2.2 Верно ли, что для любых множеств A и B выполняется

$$(A \setminus B) \cap ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) = A \setminus B$$

Решение

Распишем левую часть выражения с использованием алгебры логики:

$$(a \wedge \overline{b}) \wedge ((a \vee b) \wedge \overline{(a \wedge b)}) = a\overline{b} \cdot ((a + b) \cdot \overline{ab}) = a\overline{b} \cdot ((a + b) \cdot (\overline{a} + \overline{b})) =$$
$$= a\overline{b} \cdot (a\overline{a} + a\overline{b} + b\overline{a} + b\overline{b}) = a\overline{b} \cdot (a\overline{b} + b\overline{a}) = a\overline{b} + ab\overline{a}\overline{b} = a\overline{b} \;\Leftrightarrow\; A \setminus B$$

Преобразовав левую часть выражения, мы получили правую ($A \setminus B = A \setminus B$). Таким образом, мы доказали, что приведенное утверждение **выполняется** для любых множеств A и B.

2.3 С помощью алгебры логики докажите или опровергните для произвольных множеств A, B и C

$$((A \setminus B) \cup (A \setminus C)) \cap (A \setminus (B \cap C)) = A \setminus (B \cup C)$$

Решение

Преобразуем левую часть:

$$((a \wedge \overline{b}) \vee (a \wedge \overline{c})) \wedge (a \wedge \overline{(b \wedge c)}) = (a\overline{b} + a\overline{c}) \cdot (a\overline{(b + c)}) = (a\overline{b} + a\overline{c}) \cdot (a\overline{b} \cdot \overline{c}) =$$
$$= a\overline{b} \cdot \overline{c} + a\overline{b} \cdot \overline{c} = a\overline{b} \cdot \overline{c} \;\Leftrightarrow\; A \setminus (B \cap C)$$

Таким образом, правая и левая части не совпали ($A \setminus (B \cap C) \neq A \setminus (B \cup C)$), следовательно утверждение **неверно**.

2.4 С помощью аппарата характеристических функций докажите или опровергните для любых множеств A, B и C

$$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$$

Решение

Рассмотрим левую часть:

$$\chi_{(A \cap B) \setminus C} = \chi_{A \cap B} \cdot (1 - \chi_C) = \chi_A \chi_B \cdot (1 - \chi_C)$$

Теперь рассмотрим правую часть:

$$\chi_{(A \setminus C) \cap (B \setminus C)} = (\chi_A \cdot (1 - \chi_C)) \cdot (\chi_B \cdot (1 - \chi_C)) = \chi_A \chi_B (1 - \chi_C)$$

Утверждение **верно**.

2.5 Верно ли для произвольных A и B

$$(A \cup B) \setminus (A \setminus B) \subseteq B?$$

Решение

Перепишем выражение с помощью алгебры логики:

$$(a \vee b) \wedge \overline{(a \wedge \overline{b})} \to b = (a+b) \cdot \overline{a\overline{b}} \to b = (a+b) \cdot (\overline{a} + b) \to b = ab + \overline{a}b + b \to b =$$
$$= b + b \to b = b \to b$$

Утверждение **верно**.

2.6 Известно, что $A \cap X = B \cap X$ и $A \cup Y = B \cup Y$. Верно ли, что

$$A \cup (Y \setminus X) = B \cup (Y \setminus X)$$

Решение

Перепишем выражение с помощью алгебры логики обе части утверждения:

$$a \vee (y \wedge \overline{x}) = a + y\overline{x}$$

$$b \vee (y \wedge \overline{x}) = b + y\overline{x}$$

Условие также перепишем.

$$ax = bx, \ \ a + y = b + y$$

Оно выполнимо только если $a = b$ или $y = 0$, $x = 0$. В обоих случаях получаем

$$a + y\overline{x} = b + y\overline{x}$$

Верно.

2.7 Пусть $P = [10, 40]$, а $Q = [20, 30]$. Для отрезка A верно следующее

$$((x \in A) \to (x \in P)) \wedge ((x \in Q) \to (x \in A))$$

Какая максимальная длина отрезка A? А минимальная?

Решение

В выражении присутствует конъюнкция, следовательно утверждение верно только если $((x \in A) \to (x \in P))$ верно и $((x \in Q) \to (x \in A))$ верно. По условию $x \in A$. Первое утверждение верно, если $x \in A$ и $x \in P$. Второе утверждение верно всегда, так как если $x \in A$ (а это по условию верно), то импликация всегда равна 1. Таким образом, $x \in P$, значит **минимальная длина отрезка** A **— 10, максимальная — 40**.

2.8 A, B, C, D — отрезки прямой, для которых выполнено $A \triangle B = C \triangle D$. Верно ли, что $A \cap B \subseteq C$?

Решение

Запишем условие и утверждение, которое необходимо доказать (или опровергнуть), используя алгебру логики.

$$A \triangle B = C \triangle D \;\Leftrightarrow\; a \oplus b = c \oplus d$$

Такая запись эквивалентна условию

$$[(a = b \cap c = d) \cup (a \neq b \cap c \neq d)]$$

Само утверждение запишется так:

$$A \cap B \subseteq C \;\Leftrightarrow\; ab \to c = \overline{ab} + c$$

Приведем контрпример. Пусть $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 0$. Тогда условие выполняется, но утверждение возвращает 0. Следовательно, **неверно**.

2.9 Постройте наиболее удобную нормальную форму для выражения:

$$f(x, y, z) = (x \oplus y \oplus z) \to (xy \vee z)$$

Переведите ее в другую форму (например ДНФ в КНФ, а КНФ в ДНФ). Приведите совершенную форму к простому виду в обоих случаях.

Решение

Преобразуем выражение.

$$\begin{aligned}(x \oplus y \oplus z) \to (xy \vee z) &= (x\overline{y}+\overline{x}y) \oplus z \to (xy+z) = \overline{(x\overline{y} + \overline{x}y) \oplus z}+xy+z = (x\overline{y}+\overline{x}y) \leftrightarrow z+xy+z = \\ &= (x\overline{y}+\overline{x}y)\cdot z+\overline{(x\overline{y} + \overline{x}y)}\cdot\overline{z}+xy+z = x\overline{y}z+\overline{x}yz+\overline{x\overline{y}}\cdot\overline{\overline{x}y}\cdot\overline{z}+xy+z = x\overline{y}z+\overline{x}yz+(\overline{x}+y)\cdot(x+\overline{y})\cdot\overline{z}+xy+z = \\ &= x\overline{y}z+\overline{x}yz+(x\overline{x}+\overline{x}\cdot\overline{y}+xy+y\overline{y})\cdot\overline{z}+xy+z = x\overline{y}z+\overline{x}yz+\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot\overline{z}+xy\overline{z}+xy+z = z(x\overline{y}+\overline{x}y+1)+\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot\overline{z}+xy = \\ &= z + xy + \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}\end{aligned}$$

Мы получили выражение в ДНФ. Переведем в КНФ:

$$z + xy + \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} = (x + \overline{x})(y + \overline{y})z + xy(z + \overline{z}) + \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} = xyz + \overline{x}yz + x\overline{y}z + \overline{x} \cdot \overline{y}z + \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}$$

3 Математические определения, утверждения, методы доказательства

3.1 Докажите, используя контрапозицию, что если ab не делится на c, то a и b по отдельности не делятся на c. Все числа целые.

Решение

Пусть

$$A = a \vdots c$$

$$B = b \vdots c$$

$$C = ab \vdots c$$

Тогда по закону контрапозиции

$$((A + B) \to C) \to (\overline{C} \to \overline{(A + B)}) = 1 \;\Rightarrow\; \overline{C} \to \overline{A} \cdot \overline{B} = 1$$

Значит, если ab не делится на c, то по отдельности числа тоже не делятся на c.

3.2 Докажите, что число $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ иррационально.

Решение

Докажем от противного. Пусть $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ — рационально. Тогда

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{p}{q},\; p \in \mathbb{Z},\; q \in \mathbb{N}$$

Возведем обе части в квадрат.

$$5 + 2\sqrt{6} = \frac{p^2}{q^2}$$

Выразим $\sqrt{6}$:

$$\sqrt{6} = \frac{\frac{p^2}{q^2} - 5}{2} \;\Rightarrow\; \sqrt{}\in\mathbb{R}$$

Рассмотрим, правда ли, что $\sqrt{6}$ — действительное число.

$$\sqrt{6} = \frac{p}{q},\; p \in \mathbb{Z},\; q \in \mathbb{N}$$

Снова возведем в квадрат:

$$6 = \frac{p^2}{q^2} \;\Rightarrow\; 6q^2 = p^2 \;\Rightarrow\; p^2 \vdots 6 \;\Rightarrow\; p \vdots 6$$

Тогда пусть $p = 6k$.

$$6q^2 = 36k^2 \;\Rightarrow\; q^2 = 6k^2 \;\Rightarrow\; q \vdots 6$$

Пусть $q = 6m$. Тогда

$$\frac{p}{q} = \frac{6k}{6m}$$

Написанная выше дробь сократима. Противоречие означает, что $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

3.3 Докажите, используя индукцию:

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = 2 \cdot (2^n(n-1) + 1)$$

Решение

- База. Для $k = 1$

$$2 = 2 \text{ — верно}$$

- Шаг. Пусть верно для $k = p$.

$$\sum_{k=1}^{p} k \cdot 2^k = 2 \cdot (2^p(p-1) + 1)$$

Тогда докажем для $k = p + 1$:

$$\sum_{k=1}^{p+1} k \cdot 2^k = 2 \cdot (2^p(p-1) + 1) + (p+1) \cdot 2^{p+1} = 2 \cdot (2^p(p-1) + 1 + 2^p(p+1)) =$$

$$= 2 \cdot (2^p \cdot 2p + 1) = 2 \cdot (2^{p+1}((p+1) - 1) + 1)$$

Следовательно, для $k = p + 1$ верно. **Доказано** по индукции.

3.4 Какое из двух утверждений сильнее:

$A = \forall x \exists y : \mathcal{K}(x, y)$ или $B = \exists y \forall x : \mathcal{K}(x, y)$?

$\mathcal{K}(x, y)$ — какая-то формула

Решение Если существует y, такое, что для любого x выполняется некоторое условие, то для любого x точно существует y, при котором выполняется равенство. Следовательно,

$$B \to A$$

Значит, **утверждение B сильнее**.

3.5 Подумайте, чему может равняться данная сумма:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$$

Найдите

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$$

Решение Из **3.3** разумно предположить, что

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \cdots + \frac{n}{2^n} + \cdots = 2$$

3.6 В доме живут муж A, жена B и их дети C, D и E. При этом верны следующие утверждения:

- Если A смотрит телевизор, то и B смотрит телевизор.
- Хотя бы один из C и D смотрит телевизор.
- Ровно один из B и C смотрит телевизор
- C и D либо оба смотрят телевозор, либо оба не смотрят
- Если E смотрит телевизор, то A и D тоже смотрят телевизор

Кто в итоге смотрит телевизор, а кто нет?

Решение

Пусть A = A смотрит телевизор и т.д. Тогда запишем приведенные в условии утверждения с помощью алгебры логики:

$$A \to B = 1$$

$$C + D = 1$$

$$B \oplus C = 1$$

$$C \Leftrightarrow D = 1$$

$$E \to AB = 1$$

Тогда запишем

$$(A \to B) \cdot (C + D) \cdot (B \oplus C) \cdot (C \Leftrightarrow D) \cdot (E \to AB) = 1$$

Теперь преобразуем

$$(\overline{A} + B) \cdot (C + D) \cdot (\overline{B}C + B\overline{C}) \cdot (\overline{\overline{D}C + D\overline{C}}) \cdot (\overline{E} + AD) = 1$$

$$(\overline{A} + B) \cdot (\overline{B}CC + BC\overline{C} + \overline{B}CD + B\overline{C}D) \cdot \overline{\overline{D}C} \cdot \overline{D\overline{C}} \cdot (\overline{E} + AD) = 1$$

$$(\overline{A} + B) \cdot (\overline{B}C + \overline{B}CD + B\overline{C}D) \cdot (D + \overline{C}) \cdot (C + \overline{D}) \cdot (\overline{E} + AD) = 1$$

$$(\overline{A}\overline{B}C + \overline{A}\overline{B}CD + \overline{A}B\overline{C}D + B\overline{C}D) \cdot (D + \overline{C}) \cdot (C + \overline{D}) \cdot (\overline{E} + AD) = 1$$

$$(\overline{A}\overline{B}CD + \overline{A}\overline{B}CD + \overline{A}B\overline{C}D + B\overline{C}D + \overline{A}B\overline{C}D + B\overline{C}D) \cdot (C + \overline{D}) \cdot (\overline{E} + AD) = 1$$

$$\overline{A}\overline{B}CD \cdot (\overline{E}AD) = 1$$

$$\overline{A}\overline{B}CD\overline{E} = 1$$

Из полученного выражения следует, что C и D смотрят телевизор, а A, B и D — нет.

3.7 Докажите, используя контрапозицию:

если $x^2 - 6x + 5$ — четно, то x нечетно.

Решение

Пусть $A = x$ — четно, $B = x^2 - 6x + 5$ — нечетно. Очевидно, что если x — четно, то x^2 и $6x$ тоже четно. Следовательно $x^2 - 6x + 5$ нечетно. Тогда по закону контрапозиции

$$A \to B \to \overline{B} \to \overline{A} = 1 \;\Rightarrow\; \overline{B} \to \overline{A} = 1$$

То есть, если $x^2 - 6x + 5$ четно, то x — нечетно.

3.8 Докажите

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

Решение

Докажем по индукции.

- База. Для $k = 1$

$$1 = \frac{1}{30} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 1 \text{ — верно}$$

- Шаг. Пусть верно для $k = p$.

$$\sum_{k=1}^{p} k^4 = \frac{1}{30} p(p+1)(2p+1)(3p^2+3p-1) = \frac{1}{30}(p^2+p)(2p+1)(3p^2+3p-1) =$$

$$= \frac{1}{30}(2p^3+3p^2+p)(3p^2+3p-1) = \frac{1}{30}(6p^5+15p^4+10p^3-p) = \frac{p^5}{5} + \frac{p^4}{2} + \frac{p^3}{3} - \frac{p}{30}$$

Тогда докажем для $k = p + 1$:

$$\frac{(p+1)^5}{5} + \frac{(p+1)^4}{2} + \frac{(p+1)^3}{3} - \frac{p+1}{30} - \left(\frac{p^5}{5} + \frac{p^4}{2} + \frac{p^3}{3} - \frac{p}{30}\right) =$$

$$= \frac{5p^4+10p^3+10p^2+5p+1}{5} + \frac{4p^3+6p^2+4p+1}{2} + \frac{3p^2+3p+1}{3} - \frac{1}{30} =$$

$$= \frac{30p^4+120p^3+180p^2+120p+31}{30} - \frac{1}{30} = p^4+4p^3+6p^2+4p+1 = (p+1)^4$$

Таким образом, $A(p+1) = A(p) + (p+1)^4$, следовательно **доказано** по индукции.

4 Комбинаторика I

4.1 У Васи 6 друзей. В течение 15 дней, он приглашает троих из них в гости каждый день так, что никакая тройка не повторяется. Какое кол-во способов сделать это есть у Васи?

Решение

Всего способов разделить друзей на тройки без повторений

$$C_n^k = C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = 20$$

Тогда способов пригашать эти тройки в течение 15 дней

$$C_n^k = C_{20}^{15} = \frac{20!}{15!5!} = \frac{16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 20}{5!} = 15504$$

Это и есть ответ.

4.2 Сколько 10-значных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3 таких, что они делятся на 9 и цифра 3 используется в них ровно 2 раза?

Решение

Условие делимости на 9 — сумма цифр числа делится на 9. Цифры 3 можно поставить

$$C_n^k = C_{10}^2 = \frac{10!}{2!8!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$$

Проверим все варианты количества единиц и двоек в числе, при котором оно делится на 9. Оказывается, такое вариант только один: 2 тройки, 4 двойки и 4 единицы. Тогда нам нужно понять, сколькими способами мы можем поставить цифры 1 и 2. Единицы расставляются

$$C_n^k = C_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = 70$$

способами. Двойки встанут на оставшиеся места. Тогда всего способов расставить цифры в числе

$$C_{10}^2 \cdot C_8^4 = 45 \cdot 70 = 3150$$

3150 способов.

4.3 Имеется колода из 52 карт. Сколько существует способов вынуть 4 карты так, чтобы оказалось 3 масти? 2 масти?

Решение

Всего имеется 4 масти. Тогда каждой масти по $\frac{52}{4} = 13$ карт. Если нужно три масти, то две карты будут одной масти. Значит можно выбрать C_n^k вариантами карты каждой масти. Всего будет

$$C_{13}^2 \cdot C_{13}^1 \cdot C_{13}^1 = \frac{13!}{2!11!} \cdot \frac{13!}{12!} \cdot \frac{13!}{12!} = \frac{12 \cdot 13^3}{2} = 13182$$

Так как мастей 4, какой-то одной среди выбранных карт не будет. Тогда нужно еще умножить на 4. Ответ: **52728**.

Для двух мастей есть два варианта: либо по две карты каждой масти, либо 3 карты одной и 1 — другой. Тогда количество вариантов

$$C_{13}^2 \cdot C_{13}^2 + C_{13}^3 \cdot C_{13}^1 = 6084 + 3178 = 9262$$

Из 4 мастей выбрать две существует $C_2^4 = 6$ вариантов. Значит умножим все на 6. Ответ: **55572**.

4.4 Сколько способов разместить 20 различных книг на 5 полках, если каждая полка может вместить все 20 книг? Размещения, отличающиеся порядком книг на полках, считаются различными.

Решение

Если бы все книги были одинаковые, было бы

$$\overline{C}_n^k = \overline{C}_5^{20} = C_{24}^{20} = \frac{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24}{4!} = 10626$$

способов поставить их на 5 полок. Для каждого способа еще существует 20! способов переставить книги, так как все они разные. Значит всего способов

$$N = \frac{24!20!}{4!20!} = \frac{24!}{4!}$$

4.5 Сколькими способами можно из чисел от 1 до 100 три числа так, чтоб их сумма делилась на 3?

Решение

Признак делимости на 3 — сумма цифр делится на 3. Всего в диапазоне от 1 до 100 существует 33 числа, которые без остатка делятся на 3, 34 числа, делящиеся на 3 с остатоком 1 и 34 — с остатком 2. Можно взять либо три числа, которые делятся с одинаковым остатком, либо с разным. Тогда

$$N = 2C_{33}^3 + C_{34}^3 + C_{33}^1 \cdot C_{33}^1 \cdot C_{34}^1 = 2 \cdot 5456 + 5984 + 33^2 \cdot 34 = 53922$$

4.6 Маша варит борщ. Ей нужно положить в кастрюлю ровно 30 овощей, у нее есть морковь, свекла, картофель и лук. Сколькими способами она сможет это сделать, если 5 картофелин и 2 свеклы Маше нужно положить обязательно?

Решение

Всего останется 23 места в кастрюле, на которые можно положить овощи. Существует 4 вида овощей. Тогда вариантов наполнения супа

$$\overline{C}_n^k = \overline{C}_4^{23} = C_{26}^{23} = \frac{26!}{3!23!} = \frac{24 \cdot 25 \cdot 26}{6} = 2600$$

2600 способов.

4.7 Имеется $2n$ человек. Нужно разбить их на пары. Порядок неважен, как внутри пары, так и среди пар. Сколько существует способов это сделать?

Решение

Первого человека можно выбрать $2n$ способами. Выбрать его пару (второй человек) — $2n-1$ способами. Третий человек — $2n-2$ способов. На $n-1$-ом человеке останется только один вариант. Тогда всего вариантов

$$2n \cdot (2n-1) \cdot (2n-2) \cdot \dots \cdot 1 = (2n)!$$

4.8 Имеется k различных шаров и n различных ящиков. Сколько вариантов разложить шары по ящикам так, чтобы в первом было k_1 шаров, во втором — k_2, и так далее, в n-ом ящике k_n шаров.

Решение

Всего вариантов разложить шары по ящикам — $k!$. Но среди этих вариантов существуют такие, что шары в ящике просто поменяны местами, нужно от них избавиться. Для i-го ящика таких вариантов $k_i!$. Тогда

$$N = \frac{k!}{k_1!k_2!\dots k_n!} = P(k_1, k_2, \dots, k_n)$$

4.9 Имеется nk различных шаров и n неразличимых ящиков. Сколько вариантов разложить шары по ящикам так, чтобы количество шаров в ящиках было по k шаров?

Решение

Как в прошлой задаче, вариантов разложить по n различным ящикам

$$N' = P(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{(nk)!}{k_1!k_2!\dots k_n!}$$

Однако в данной задаче все ящики одинаковые. Это значит, что среди N' вариантов существует $n!$ способов поменять ящики местами. Кроме того, $k_1 = k_2 = \dots = k_n = k$. Тогда

$$N = \frac{N'}{n!} = \frac{(nk)!}{(k!)^n n!}$$

4.10 Из 36-карточной колоды на стол равновероятно и случайно выкладывается последовательность из 4 карт. Какова вероятность того, что две из них красные, а две черные?

Решение

Всего вариантов положить 4 карты на стол:

$$C_n^k = C_{36}^4 = \frac{36!}{4!32!} = \frac{33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36}{24} = 58905$$

Каждой масти имеется $\dfrac{36}{4} = 9$ карт. Черных карт, как и красных, соответственно, по 18 штук. Вариантов выбрать по 2 карты разных цветов

$$C_{18}^2 \cdot C_{18}^2 = \left(\frac{18!}{2!16!}\right)^2 = \left(\frac{17 \cdot 18}{2}\right)^2 = 23409$$

Тогда вероятность

$$P = \frac{23409}{58905} = \frac{153}{385}$$

4.11 Сколько существует 6-значных чисел, в которых четных и нечетных цифр поровну?

Решение

Всего есть 5 четных (ноль считается) и 5 нечетных цифр. Пускай первая цифра числа четная. Тогда вариантов

$$N_1 = 4 \cdot 5^5 \cdot C_5^2 = 125000$$

Если же первая цифра нечетная, то вариантов

$$N_2 = 5^6 \cdot C_5^2 = 156250$$

Мы домножаем на C_5^2, чтобы выбрать место оставшимся двум четным/нечетным цифрам.

$$N = N_1 + N_2 = 281250$$

Ответ: **281250**.

4.12 Сколько существует 7-значных чисел, в которых ровно две четные цифры и перед каждой четной цифрой обязательно стоит нечетная?

Решение

Будем считать четную и идущую перед ней нечетную цифру одним элементом. Разновидностей таких элементов существует $5 \cdot 5 = 25$. Тогда нам нужно разместить 3 нечетные цифры и 2 элемента на 5 мест. Вариантов это сделать:

$$N = C_5^3 \cdot 5^3 \cdot 25^2 = 781250$$

В написанной выше формуле коэффициент C_5^3 равен количеству вариантов выбрать место для трех нечетных цифр. Результат будет такой же, если мы захотим наоборот выбрать место для двух элементов (нечетноая и четная цифра), т.к $C_5^3 = C_5^2$.

781250 чисел.

5 Комбинаторика II

5.1 Робот ходит по координатной плоскости. На каждом шаге он может увеличить одну координату на 1 или обе координаты на 2 Сколько есть способов переместить Робота из точки $(0,0)$ в точку $(4,5)$?

Решение Назовем команды некоторыми именами:

$$a = x + 1;\ \ b = y + 1;\ \ c = x + 1,\ \ y + 1$$

Количество вариантов наборов команд ограничено: их всего три. Рассмотрим все:

- $0a$, $1b$, $2c$

  Всего 3 хода. Тогда количество вариантов:

  $$N_1 = C_3^1 = 3$$

- $2a$, $3b$, $1c$

  Всего 6 ходов. Тогда количество вариантов:

  $$N_2 = C_6^1 \cdot C_5^2 = 6 \cdot 15 = 60$$

- $4a$, $5b$, $0c$

  Всего 9 ходов. Тогда количество вариантов:

  $$N_3 = C_9^4 = 126$$

  Всего вариантов

  $$N = N_1 + N_2 + N_3 = 3 + 60 + 126 = 189$$

5.2 В магазине продается 10 видов пирожных. Сколькими способами можно купить 100 пирожных (порядок покупки не важен)?

Решение

У нас есть 10 типов, нужно выбрать 100 предметов. Тогда способов:

$$\overline{C}_n^k = \overline{C}_{10}^{100} = C_{109}^{100} = \frac{109!}{9!100!}$$

5.3 Какое слагаемое в разложении $(1 + 2)^n$ по формуле бинома Ньютона будет наибольшим?

Решение

Формула бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} a^k b^{n-k}$$

В нашем случае формула перепишется так:

$$(1+2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} 2^k$$

Сравним два соседних элемента разложения:

$$\frac{C_n^k \cdot 2^k}{C_n^{k+1} \cdot 2^{k+1}} > 1$$

Пусть k-ый элемент больше $k+1$-го и $k-1$-го. Распишем:

$$\frac{\dfrac{n!}{k!(n-k)!} \cdot 2^k}{\dfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \cdot 2^{k+1}} > 1 \qquad \frac{\dfrac{n!}{k!(n-k)!} \cdot 2^k}{\dfrac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \cdot 2^{k-1}} > 1$$

$$\frac{(k+1)!(n-k-1)!}{2k!(n-k)!} > 1 \qquad \frac{2(k-1)!(n-k+1)!}{k!(n-k)!} > 1$$

$$\frac{k+1}{2(n-k)} > 1 \;\Rightarrow\; k+1 > 2n-2k \qquad 2\frac{n-k+1}{2k} > 1 \;\Rightarrow\; 2n-2k+2 > k$$

$$k > \frac{2n-1}{3} \qquad k < \frac{2n+2}{3}$$

Таким условиям соотвествует $k = \left[\dfrac{2n+2}{3}\right]$.

5.4 Найдите число слов длины n над алфавитом $0, 1$, в которых нет двух единиц подряд.

Решение

Выберем число k. Мы хотим найти количество слов длины k. Слово длины k может заканчивваться на 1 или 0. Количество слов, заканчивающихся на 0 равно сумме количеств слов, длины $k-1$, заканчивающихся на 0 и на 1, так как 0 мы можем поставить и после единицы, и после нуля. Количество слов длины k, заканчивающихся на 1 равно сумме количеств слов, длины $k-1$, заканчивающихся на 0, так как после единицы можно поставить только 0.

Количество слов длины 1 равно 2 (либо ноль, либо единица). Докажем по индукции. Пусть количество слов длины k, заканчивающихся на 0 — F_{k+1} (F_n — число Фибоначчи под номером n). Количество слов длины k, заканчивающихся на 1 — F_k. Рассмотрим слова длины $k+1$: заканчивающихся на 0 — $F_k + F_{k+1} = F_{k+2}$, заканчивающихся на 1 — F_{k+1}. По индукции доказано, что это так.

Тогда для длины n: $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$ — число Фибоначчи под номером $n+2$.

5.5 Дать комбинаторные доказательства тождеств

а) $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$

Решение Выражение слева можно интерпретировать как выбор m шаров из n шаров, а потом еще k шаров из m шаров. То есть мы из взяли n шаров, из них выбрали k, а потом из оставшихся $n-k$ шаров выбрали $m-k$, так как среди m шаров в первом случае содержалось k шаров.

5.6 Какок из чисел больше: $\binom{F_{1000}}{F_{998}+1}$ или $\binom{F_{1000}}{F_{999}+1}$

Решение

Число F_{999} точно больше F_{998}. Соотвественно и $F_{999}+1 > F_{998}+1$. Выбираем мы каждый раз из одинакового числа F_{1000}. Очевидно, выбрать большее количество элементов из того же числа меньше вариантов. Следовательно,

$$\binom{F_{1000}}{F_{998}+1} > \binom{F_{1000}}{F_{999}+1}$$

5.7 Приведите комбинаторное доказательство равенства:

$$\sum_{0\le k\le (n+1)/2}\binom{n-k+1}{k} = F_{n+2}$$

Решение

5.8 Сколько способов разместить 20 различных книг на 5 полках, если каждая полка может вместить все 20 книг? Размещения, отличающиеся порядком книг на полках, считаются различными.

Решение

Задача **4.4**.

5.9 Студсовет из 8 человек выбирает из своего состава председателя путем тайного голосования. Каждый может отдать один голос за любого члена студсовета. Результат голосования — число голосов, отданных за каждого кандидата. Сколько существует различных результатов голосования?

Решение

Всего у нас 8 человек, каждый из которых может получить от 0 до 7 голосов (то есть 8 вариантов), причем голоса от каждого человека считаются разными. Тогда число вариантов

$$\overline{C}_n^k = \overline{C}_8^8 = C_{15}^8 = 6435$$

5.10 Сколькими способами можно переставить буквы в слове «ОБОРОНОСПОСОБНОСТЬ», так чтобы две буквы «О» не стояли рядом?

Решение

Всего в слове 18 букв. Букв «О» — 7 штук. Также буквы «Б» и «Н» повторяются по 2 раза, буква «С» 3 раза. Тогда расставить все буквы, кроме «О», существует

$$P(2,2,3) = \frac{11!}{2!2!3!}$$

способов. Буквы «О» можно поставить перед и после всех остальных, а также между ними, то есть на 12 мест. Способов это сделать существует

$$C_n^k = C_{12}^7$$

Тогда итоговый ответ

$$P(2,2,3) \cdot C_{12}^7 = \frac{11!12!}{2!2!3!7!}$$

6 Комбинаторика II

6.1 Частичная функция h из множества $1, 2, \ldots, 8$ в множестве $a, b, \ldots, g$ определена следующим образом:

$$h : 1 \mapsto b,\ 2 \mapsto c,\ 3 \mapsto b,\ 4 \mapsto e,\ 5 \mapsto b,\ 6 \mapsto e,\ 8 \mapsto f$$

Найдите

a) $Dom(h)$

b) $Range(h)$; $h(0, 1, 2, 3, 4)$

c) $h^{-1}(a, b, c)$

d) $h^{-1}(h(0, 1, 2, 6, 7, 8))$

e) $h(h^{-1}(a, b, c, d, e))$

Решение

a) $Dom(h) = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8$

b) $Range(h) = b, c, e, f$; $h(0, 1, 2, 3, 4) = b, c, e$

c) $h^{-1}(a, b, c) = 1, 2, 3, 5$

d) $h^{-1}(h(0, 1, 2, 6, 7, 8)) = h^{-1}(b, c, e, f) = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8$

e) $h(h^{-1}(a, b, c, d, e)) = h(1, 2, 3, 4, 5, 6) = b, c, e$

6.2 Функция f из множества целых чисел в множество целых чисел сопоставляет числу наименьшее простое число, которое больше x^2. Докажите, что если множество целых чисел X конечное, то и полный прообраз этого множества$f^{-1}(X)$ конечен.

Решение

X — множество элементов x^2. По условию оно конечно. Значит и множество элементов x конечно. А $f^{-1}(X) = x$, следовательно, множество $f^{-1}(X)$ конечно.

6.3 Пусть f — функция из множества X в множество Y, при этом $A \subseteq X$. Какой знак сравнения можно поставить вместо «?», чтобы утверждение

$$f^{-1}(f(A))?A$$

стало верным?

Решение

Можно найти такие элементы a_1 и a_2, что $a_1 \subset A$, $a_2 \subset A$ и $a_1 \subset X$, $a_2 \not\subset X$. Следовательно, $f^{-1}(f(A)) \not\subseteq A$.

Можно найти элемент a_1 такой, что a_1 не определен на f, а значит $\not\exists f(a_1)$. Следовательно, $f^{-1}(f(A)) \not\supseteq A$.

Выше доказано, что $f^{-1}(f(A)) \nsubseteq A$ и $f^{-1}(f(A)) \nsupseteq A$, а значит $f^{-1}(f(A)) \neq A$

То есть **никакой** знак нельзя поставить для становления выражения верным.

6.4 Пусть f — функция из множества $A \cup B$ в множество Y. Какой знак сравнения можно поставить вместо «?», чтобы утверждение

$$f(A \setminus B) ? f(A \setminus f(B))$$

стало верным?

Решение

Ответ знак $\supseteq$, решение не успела

6.5 Пусть f — функция из множества X в множество Y, при этом $A \cup B \subseteq X$. Какой знак сравнения можно поставить вместо «?», чтобы утверждение

$$f^{-1}(A \setminus B) ? f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$$

стало верным?

Решение

Из условия следует, что нам нужно найти функции вида $f(f(x)) = x$. Тогда возможно два варианта: $f(x) = x$ и $f(x) = y$, $f(y) = x$. Далее рассматриваем случаи:

- Один элемент относится к первому варианту, остальные образуют пары. Тогда количество отображений:

$$C_7^1 \cdot C_5^1 \cdot C_3^1 \cdot C_1^1 = 105$$

- Три элемента относятся к первому варианту. Количество отображений:

$$C_7^3 \cdot C_3^1 \cdot C_1^1 = 105$$

- Пять элементов относятся к первому варианту. Количество отображений:

$$C_7^5 \cdot C_1^1 = 21$$

- Семь элементов относятся к первому варианту. Количество отбражений:

$$C_7^7 = 1$$

Тогда всего отображений: $105 + 105 + 21 + 1 = \mathbf{232}$.

6.6 Задана функция $f(x) = x^2$, из A в B. При каком выборе множеств A, B данная функция будет

a) отображением?

b) сюръекцией?

c) иметь обратную функцию?

Найти вид обратной функции для этих множеств A, B.

Решение

a) $A \in \mathbb{R},\ B \in [0, +\infty]$

b) $A \in \mathbb{R},\ B \in [0, +\infty]$

c) $A \in [0, +\infty],\ B \in [0, +\infty]$

Вид обратной функции: $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

6.7 Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 + 3x + 2,\ f(x) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Найти:

a) $dom(f)$

b) $range(f)$

c) $f([-1; 1])$

d) $f([-4; 7])$

e) $h(h^{-1}(a, b, c, d, e)) = h(1, 2, 3, 4, 5, 6) = b, c, e$

Решение

a) $dom(f) = \mathbb{R}$

b) Найдем минимальное значение f:

$$x_{min} = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2 \cdot 1} = -\frac{3}{2} \ \Rightarrow\ f_{min} = \left(\frac{-3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 2 = -\frac{1}{4}$$

$range(f) = \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$

c) $f(-1) = (-1)^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 0,\ f(1) = 1^2 + 3 \cdot 1 + 2 = 6.$

$f([-1; 1]) = [0; 6]$

d) $f(-1) = (-4)^2 - 3 \cdot 4 + 2 = 6,\ f(1) = 7^2 + 3 \cdot 7 + 2 = 72$. Но между $x = -4$ и $x = 7$ лежит минимум функции, значит

$f([-4; 7]) = \left[-\dfrac{1}{4}; 71\right]$

e) Найдем корни уравнения при $f = -1$ и $f = 1$. Для $f = -1$ корней нет, для $f = 1$

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2},\ x_2 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$$

$f^{-1}([-1; 1]) = \left[\dfrac{-3 - \sqrt{5}}{2}; \dfrac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right]$