

Problemy optymalizacyjne i symulowane wyżarzanie

Piotr Idzik
vil02@o2.pl

Karlsruhe, Katowice, 14.03.2022



ver. 13.03.2022 19:40:16

Jaki prostokąt o obwodzie 2 ma największe pole powierzchni?

Jaki prostokąt o obwodzie 2 ma największe pole powierzchni? Jaka jest jego wartość?

Jaki prostokąt o obwodzie 2 ma największe pole powierzchni? Jaka jest jego wartość?

$$2a + 2b = 2$$

Jaki prostokąt o obwodzie 2 ma największe pole powierzchni? Jaka jest jego wartość?

$$2a + 2b = 2 \quad \Rightarrow \quad a + b = 1$$

Jaki prostokąt o obwodzie 2 ma największe pole powierzchni? Jaka jest jego wartość?

$$2a + 2b = 2 \quad \Rightarrow \quad a + b = 1 \quad \Rightarrow \quad b = 1 - a \quad (1)$$

Jaki prostokąt o obwodzie 2 ma największe pole powierzchni? Jaka jest jego wartość?

$$2a + 2b = 2 \quad \Rightarrow \quad a + b = 1 \quad \Rightarrow \quad b = 1 - a \quad (1)$$

$$P = ab$$

Jaki prostokąt o obwodzie 2 ma największe pole powierzchni? Jaka jest jego wartość?

$$2a + 2b = 2 \quad \Rightarrow \quad a + b = 1 \quad \Rightarrow \quad b = 1 - a \quad (1)$$

$$P = ab \stackrel{(1)}{=} a(1 - a)$$

Jaki prostokąt o obwodzie 2 ma największe pole powierzchni? Jaka jest jego wartość?

$$2a + 2b = 2 \quad \Rightarrow \quad a + b = 1 \quad \Rightarrow \quad b = 1 - a \quad (1)$$

$$P = ab \stackrel{(1)}{=} a(1 - a)$$

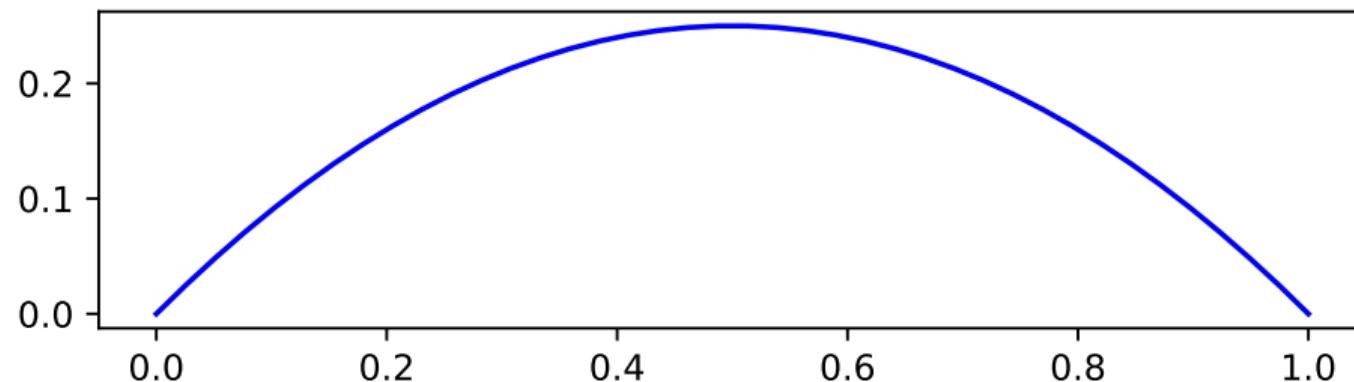
$$\max_{a \in [0,1]} a(1 - a)$$

Jaki prostokąt o obwodzie 2 ma największe pole powierzchni? Jaka jest jego wartość?

$$2a + 2b = 2 \quad \Rightarrow \quad a + b = 1 \quad \Rightarrow \quad b = 1 - a \quad (1)$$

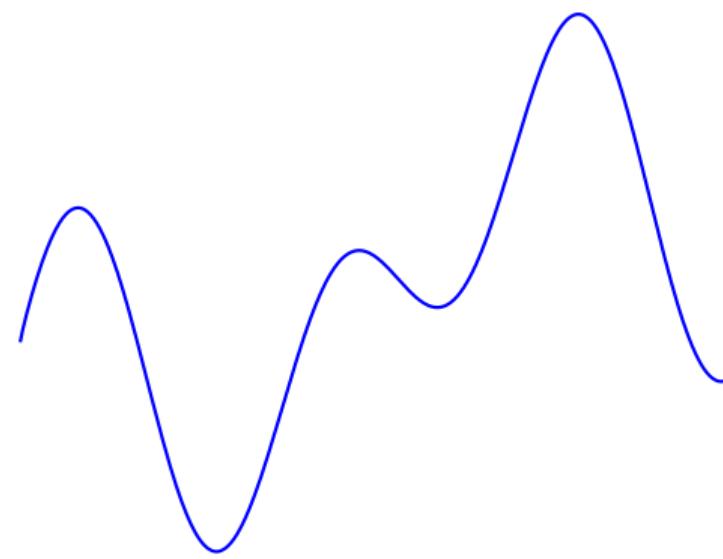
$$P = ab \stackrel{(1)}{=} a(1 - a)$$

$$\max_{a \in [0,1]} a(1 - a)$$

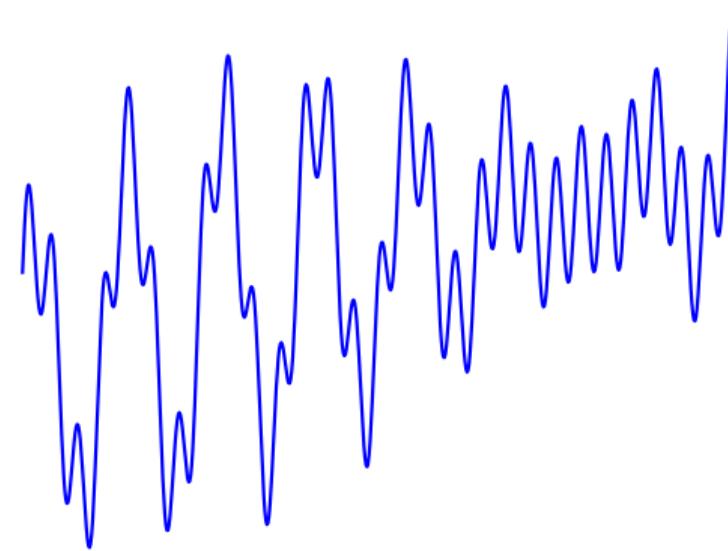


└ Problemy optymalizacyjne

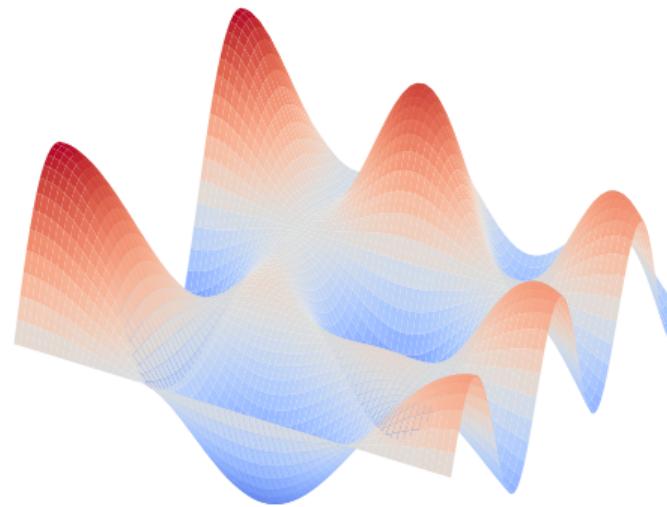
└ Optima lokalne i globalne



- └ Problemy optymalizacyjne
- └ Optima lokalne i globalne

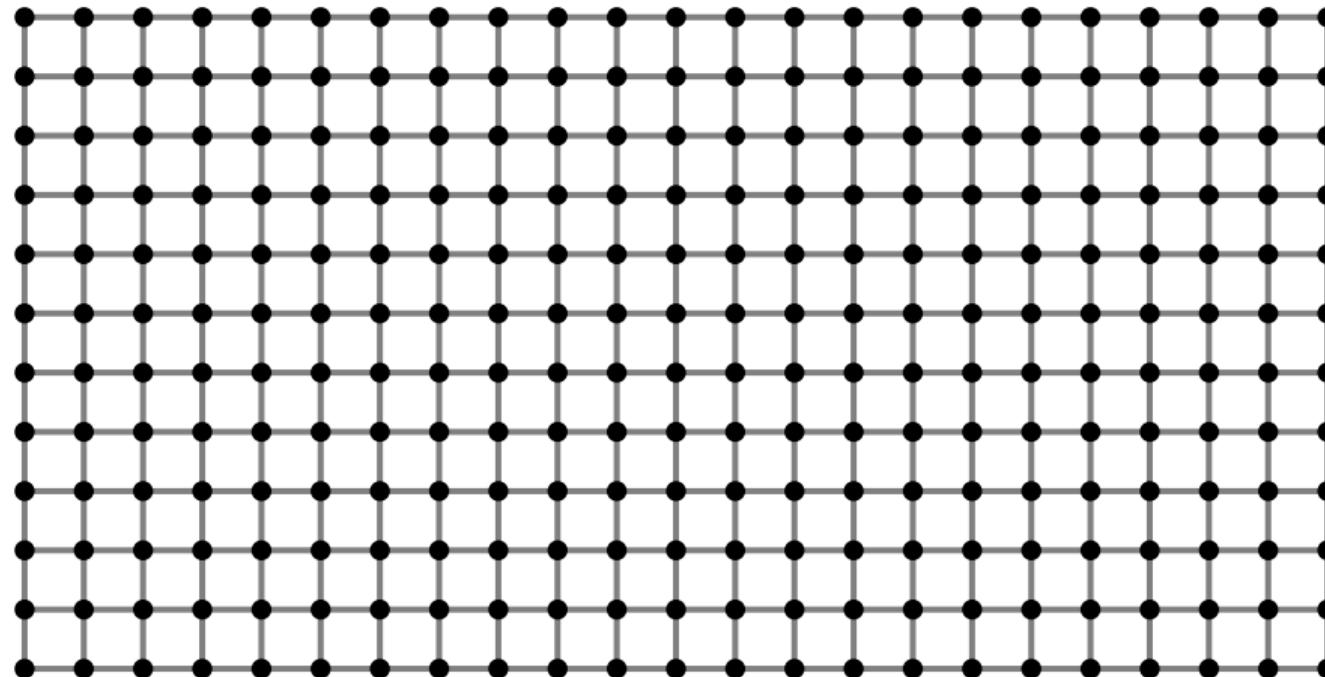


- └ Problemy optymalizacyjne
- └ Optima lokalne i globalne



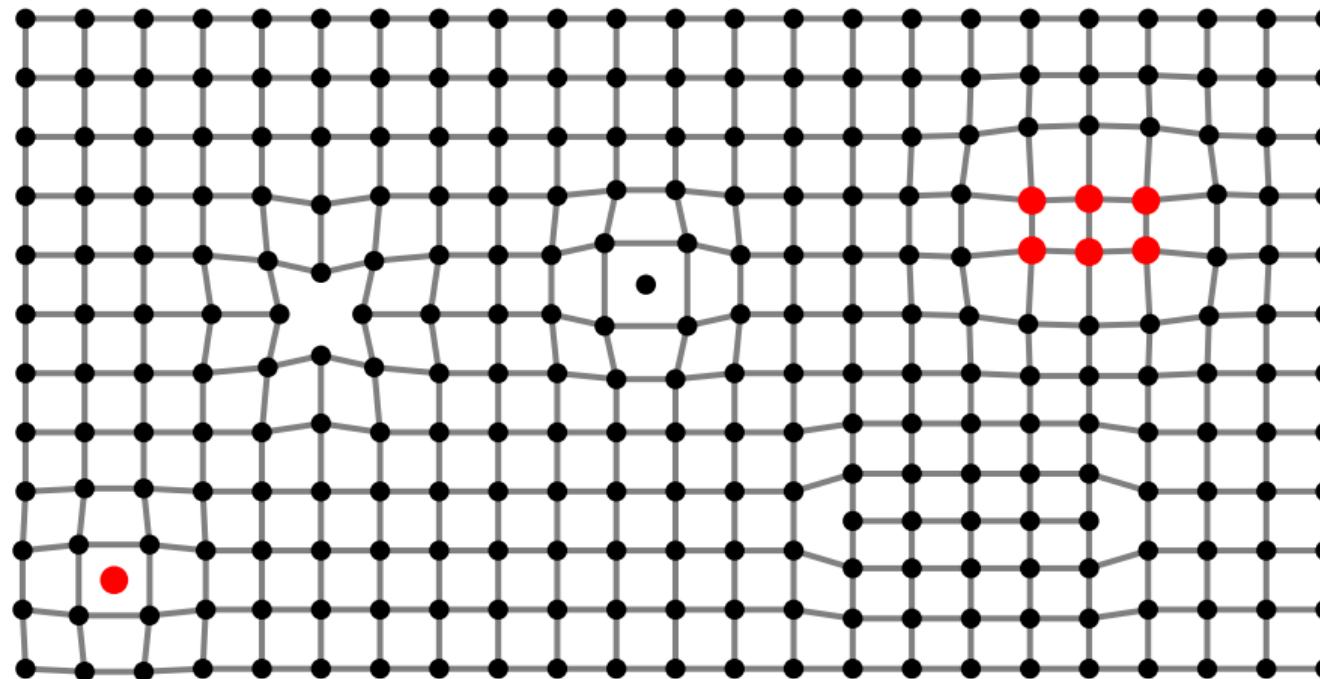
└ Wyżarzanie

└ Struktura krystaliczna metali



└ Wyżarzanie

└ Struktura krystaliczna metali



└ Wyżarzanie

└ Struktura krystaliczna metali

└ Symulowane wyżarzanie

$$\min_{s \in S} F(s)$$

└ Symulowane wyżarzanie

$$\min_{s \in S} F(s)$$

2. $s' := \text{NowyStan}(s, T)$

└ Symulowane wyżarzanie

$$\min_{s \in S} F(s)$$

2. $s' := \text{NowyStan}(s, T)$
3. Jeżeli $F(s') < F(s)$ to

$$s := s'$$

└ Symulowane wyżarzanie

$$\min_{s \in S} F(s)$$

2. $s' := \text{NowyStan}(s, T)$
3. Jeżeli $F(s') < F(s)$ to

$$s := s'$$

w przeciwnym wypadku

$$s := s', \text{ z prawdopodobieństwem } P(F(s), F(s'), T)$$

└ Symulowane wyżarzanie

$$\min_{s \in S} F(s)$$

2. $s' := \text{NowyStan}(s, T)$
3. Jeżeli $F(s') < F(s)$ to

$$s := s'$$

w przeciwnym wypadku

$$s := s', \text{ z prawdopodobieństwem } P(F(s), F(s'), T)$$

4. $T := \text{NowaTemperatura}(T)$

└ Symulowane wyżarzanie

$$\min_{s \in S} F(s)$$

2. $s' := \text{NowyStan}(s, T)$
3. Jeżeli $F(s') < F(s)$ to

$$s := s'$$

w przeciwnym wypadku

$$s := s', \text{ z prawdopodobieństwem } P(F(s), F(s'), T)$$

4. $T := \text{NowaTemperatura}(T)$
5. Idź do 2 o ile niespełnione kryterium stopu.

└ Symulowane wyżarzanie

$$\min_{s \in S} F(s)$$

1. $T := T_{\max}$, $s := s_0$
2. $s' := \text{NowyStan}(s, T)$
3. Jeżeli $F(s') < F(s)$ to

$$s := s'$$

w przeciwnym wypadku

$$s := s', z \text{ prawdopodobieństwem } P(F(s), F(s'), T)$$

4. $T := \text{NowaTemperatura}(T)$
5. Idź do 2 o ile niespełnione kryterium stopu.

└ Symulowane wyżarzanie

$$\min_{s \in S} F(s)$$

1. $T := T_{\max}$, $s := s_0$
2. $s' := \text{NowyStan}(s, T)$
3. Jeżeli $F(s') < F(s)$ to

$$s := s'$$

w przeciwnym wypadku

$$s := s', z \text{ prawdopodobieństwem } P(F(s), F(s'), T)$$

4. $T := \text{NowaTemperatura}(T)$
5. Idź do 2 o ile niespełnione kryterium stopu.

$$\text{NowaTemperatura}(T) = \alpha T, \text{ gdzie } \alpha \in (0, 1),$$

└ Symulowane wyżarzanie

$$\min_{s \in S} F(s)$$

1. $T := T_{\max}$, $s := s_0$
2. $s' := \text{NowyStan}(s, T)$
3. Jeżeli $F(s') < F(s)$ to

$$s := s'$$

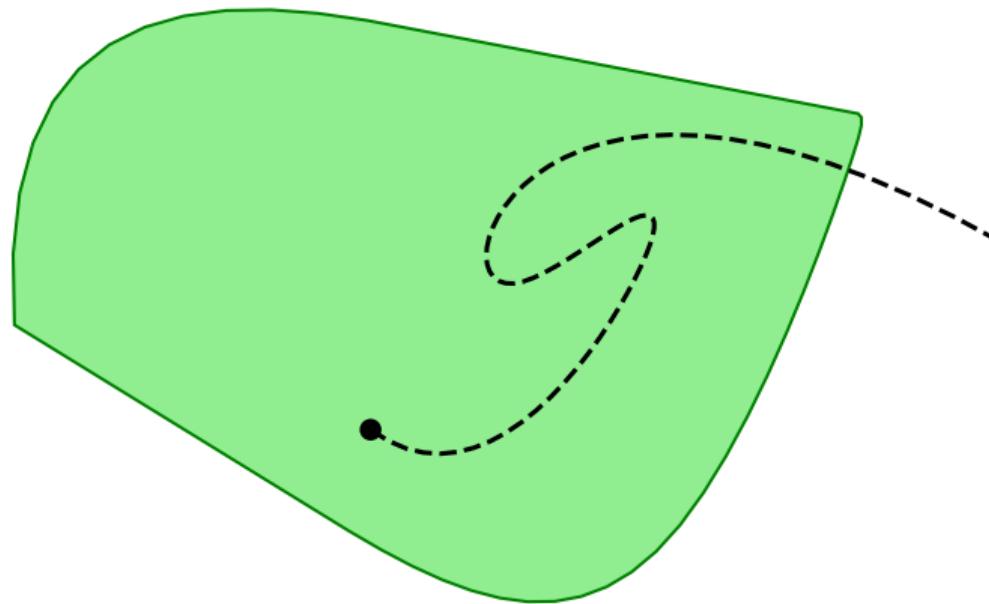
w przeciwnym wypadku

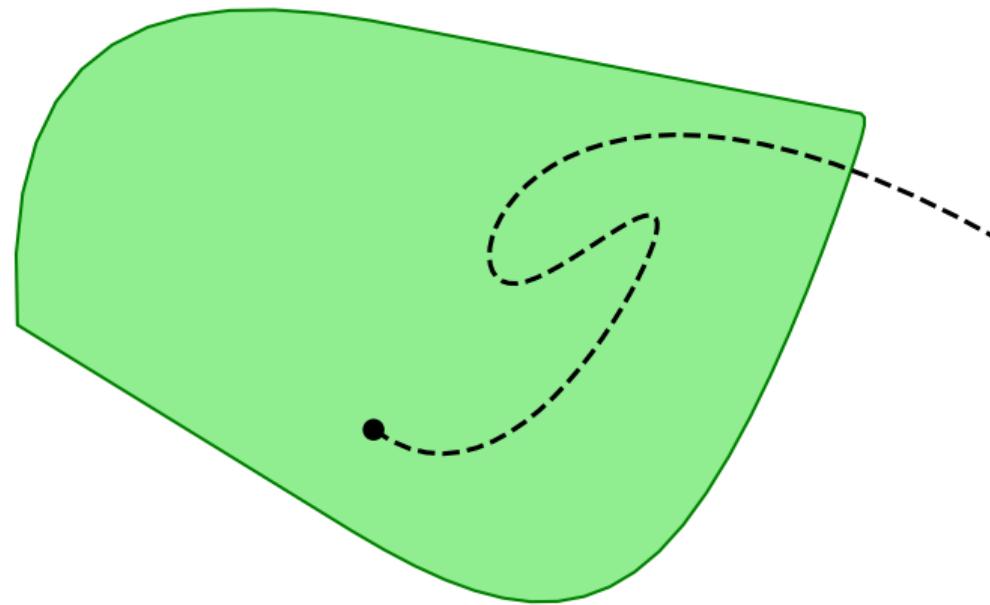
$$s := s', z \text{ prawdopodobieństwem } P(F(s), F(s'), T)$$

4. $T := \text{NowaTemperatura}(T)$
5. Idź do 2 o ile niespełnione kryterium stopu.

$\text{NowaTemperatura}(T) = \alpha T$, gdzie $\alpha \in (0, 1)$, $P(F(s), F(s'), T) = e^{\frac{F(s') - F(s)}{kT}}$, gdzie $k > 0$.

└ Ucieczka ze zbiorów wypukłych

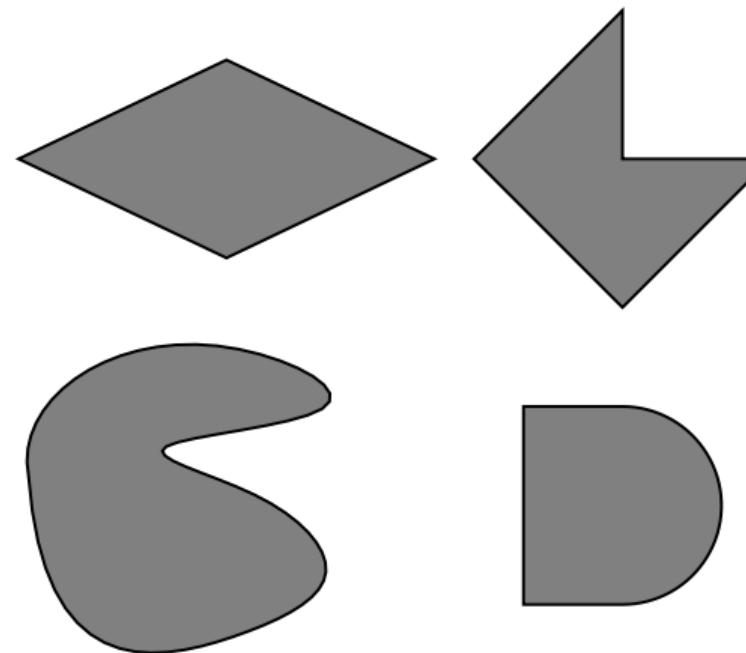




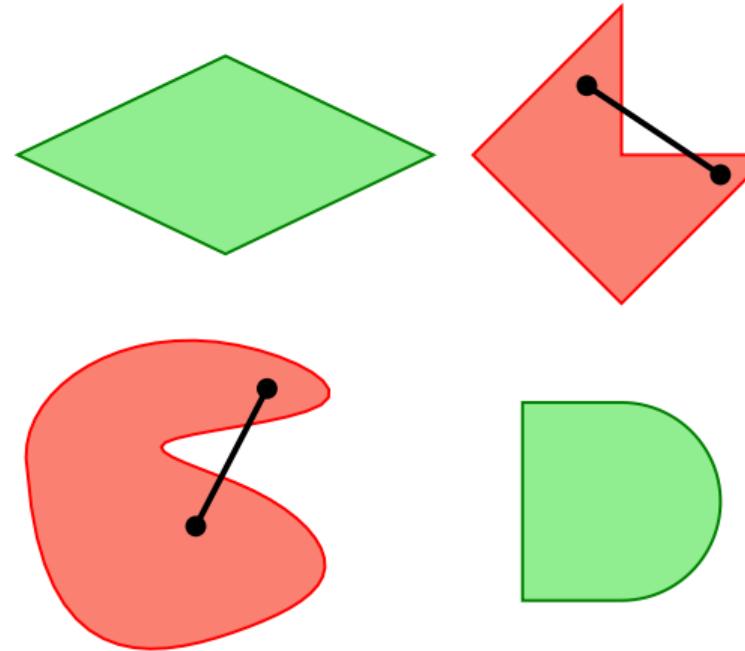
Richard E. Bellman, 1956, [1] (zob. [7, 4])

└ Ucieczka ze zbiorów wypukłych

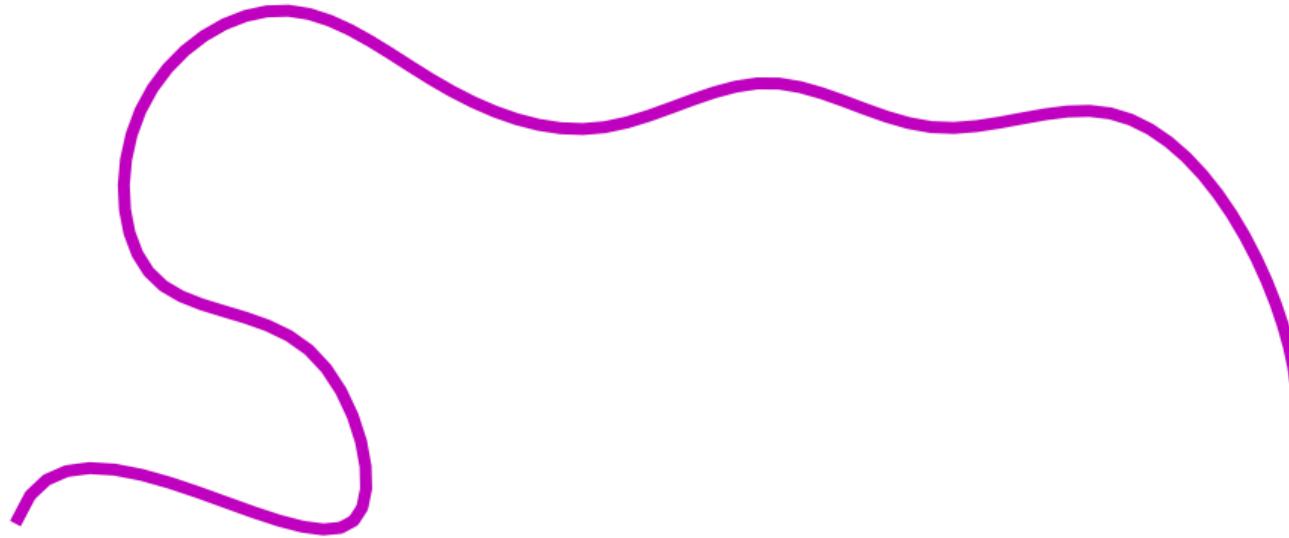
└ Zbiory wypukłe



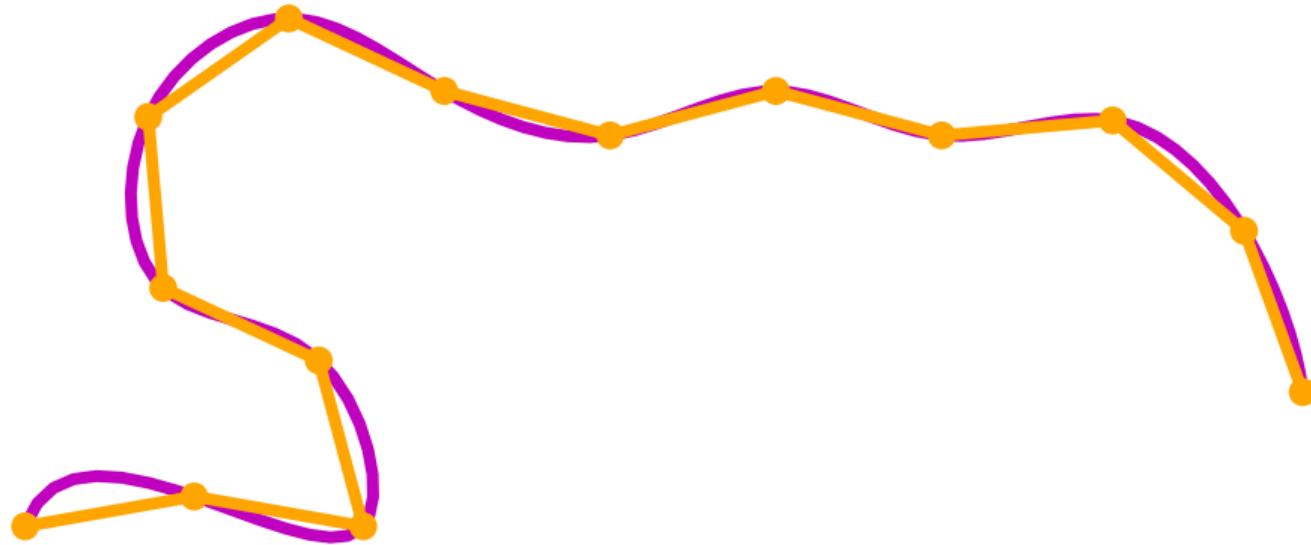
- └ Ucieczka ze zbiorów wypukłych
- └ Zbiory wypukłe



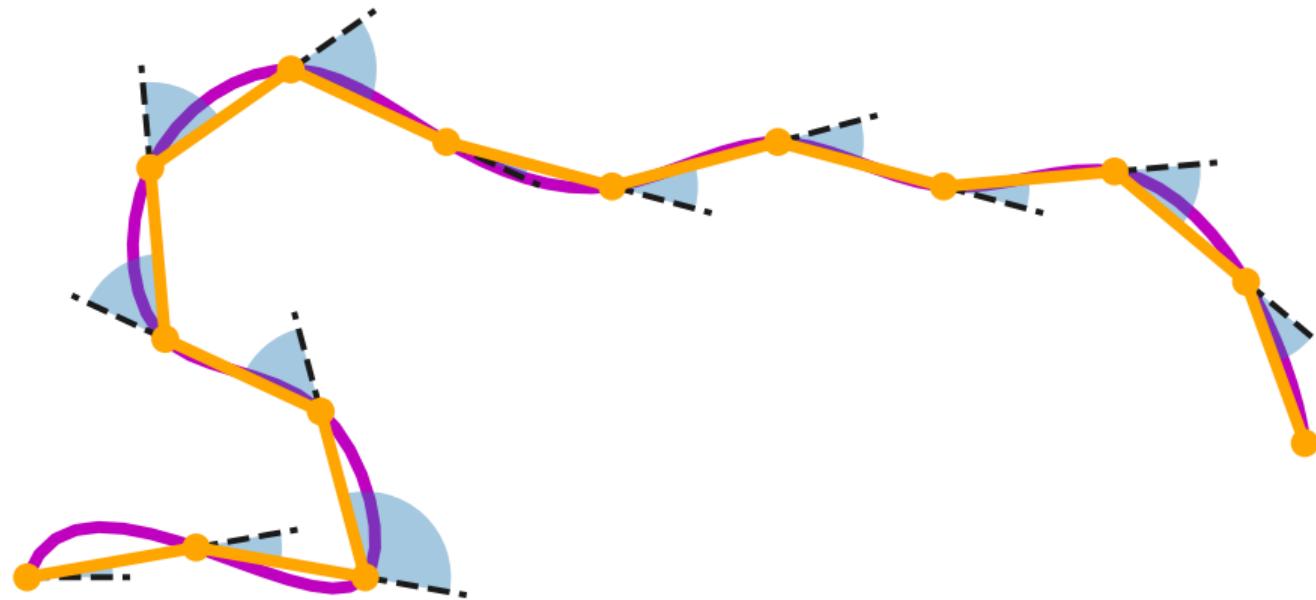
- └ Ucieczka ze zbiorów wypukłych
- └ Reprezentacja krzywej



- └ Ucieczka ze zbiorów wypukłych
- └ Reprezentacja krzywej

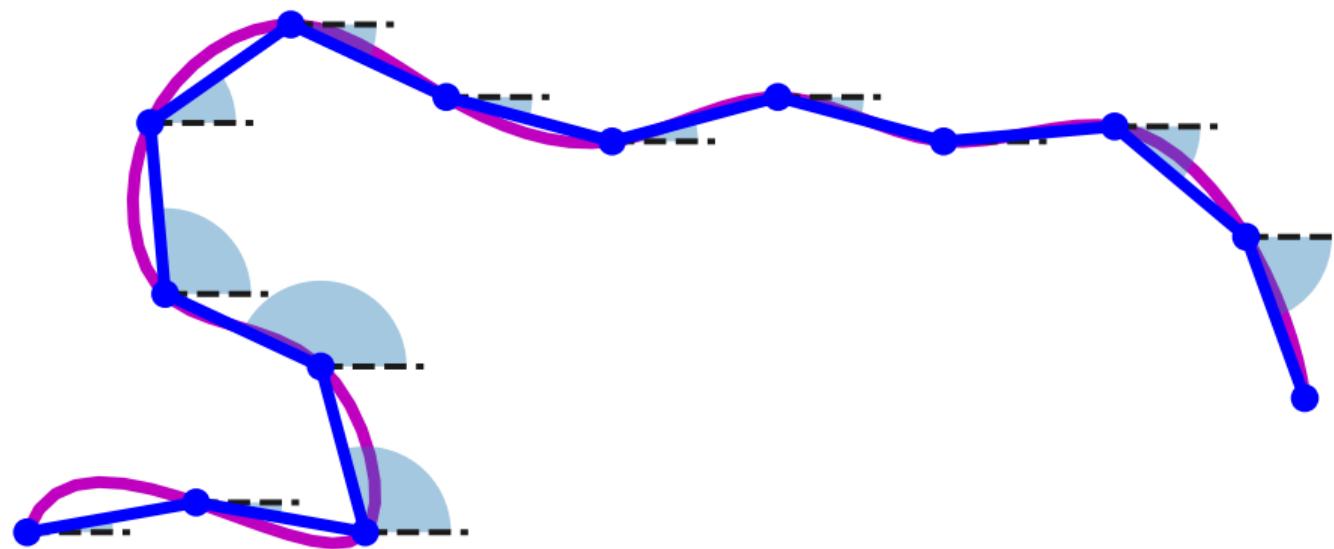


- └ Ucieczka ze zbiorów wypukłych
 - └ Reprezentacja krzywej



$(10^\circ, -20^\circ, 115^\circ, 50^\circ, -60^\circ, -60^\circ, -60^\circ, 10^\circ, 30^\circ, -30^\circ, 20^\circ, -45^\circ, -30^\circ)$

- └ Ucieczka ze zbiorów wypukłych
- └ Reprezentacja krzywej

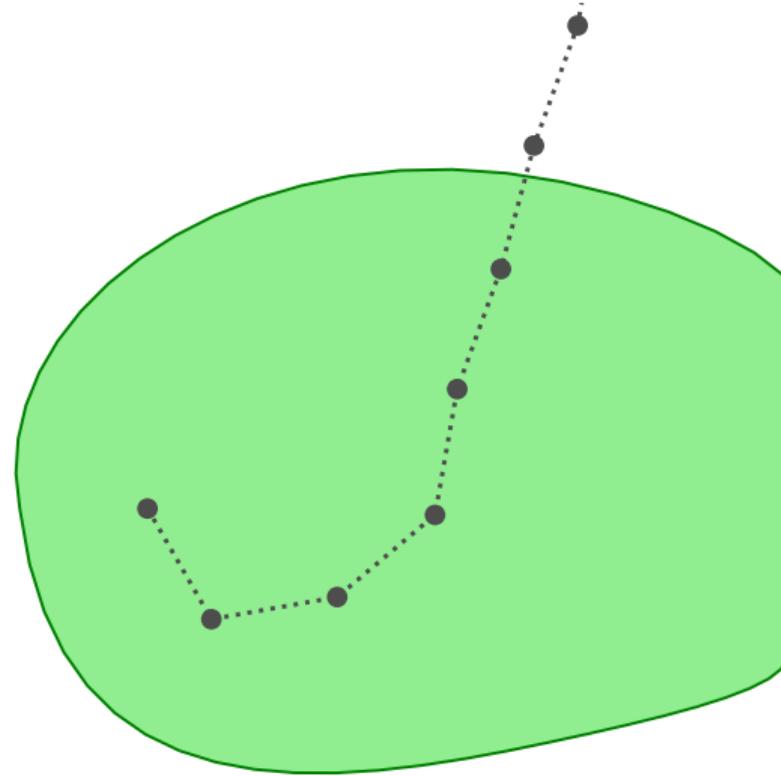


$(10^\circ, -10^\circ, 105^\circ, 155^\circ, 95^\circ, 35^\circ, -25^\circ, -15^\circ, 15^\circ, -15^\circ, 5^\circ, -40^\circ, -70^\circ)$

- └ Ucieczka ze zbiorów wypukłych
 - └ Reprezentacja krzywej

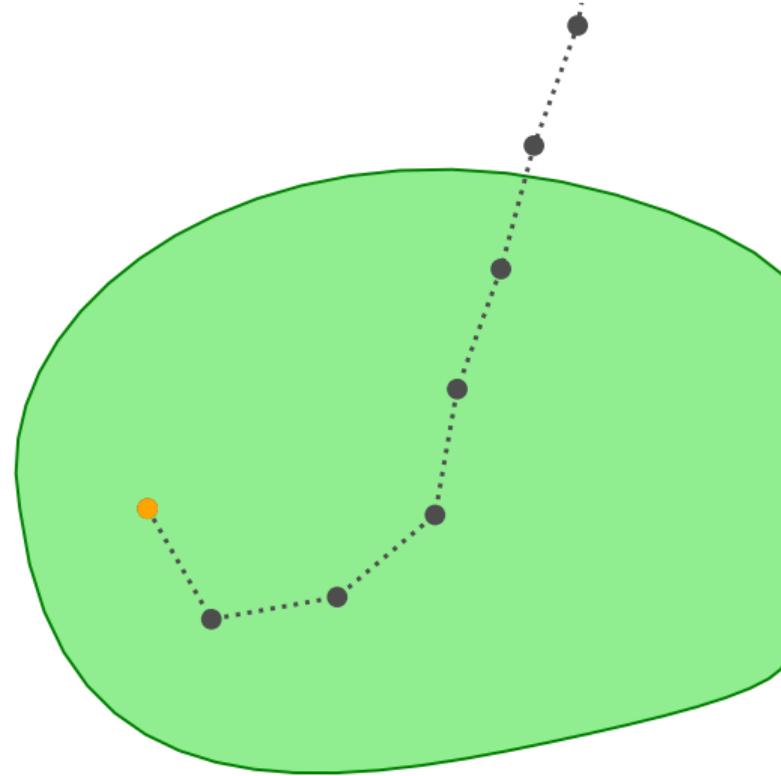
└ Ucieczka ze zbiorów wypukłych

└ Jak mierzyć długość krzywej wewnątrz zbioru?



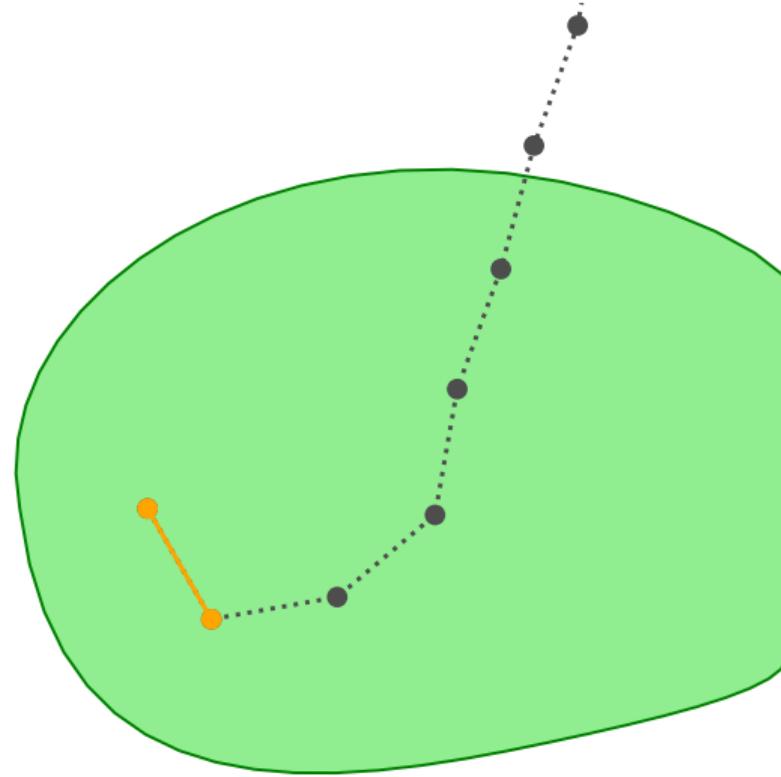
└ Ucieczka ze zbiorów wypukłych

└ Jak mierzyć długość krzywej wewnątrz zbioru?



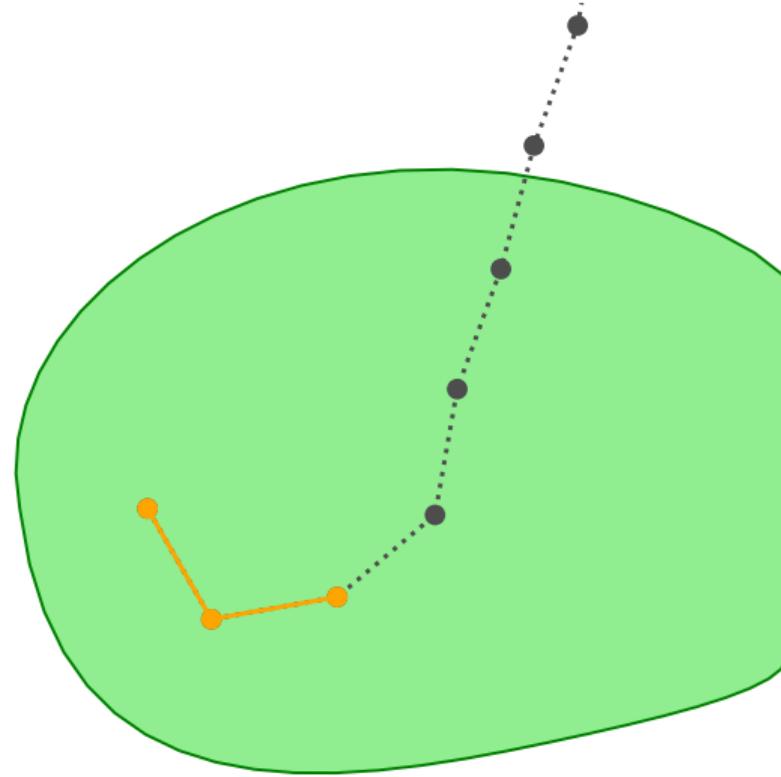
└ Ucieczka ze zbiorów wypukłych

└ Jak mierzyć długość krzywej wewnątrz zbioru?



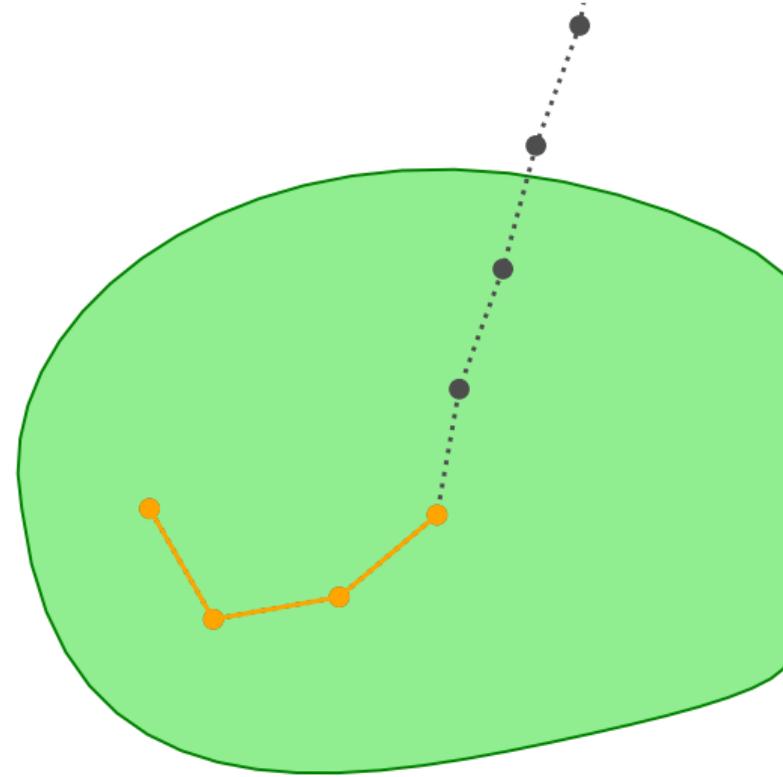
└ Ucieczka ze zbiorów wypukłych

└ Jak mierzyć długość krzywej wewnątrz zbioru?



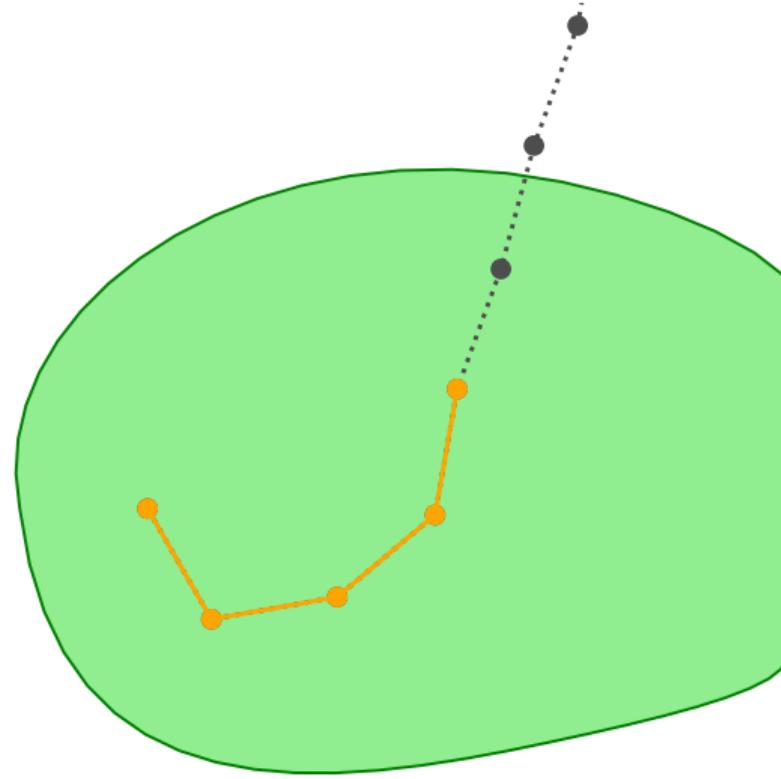
└ Ucieczka ze zbiorów wypukłych

└ Jak mierzyć długość krzywej wewnątrz zbioru?



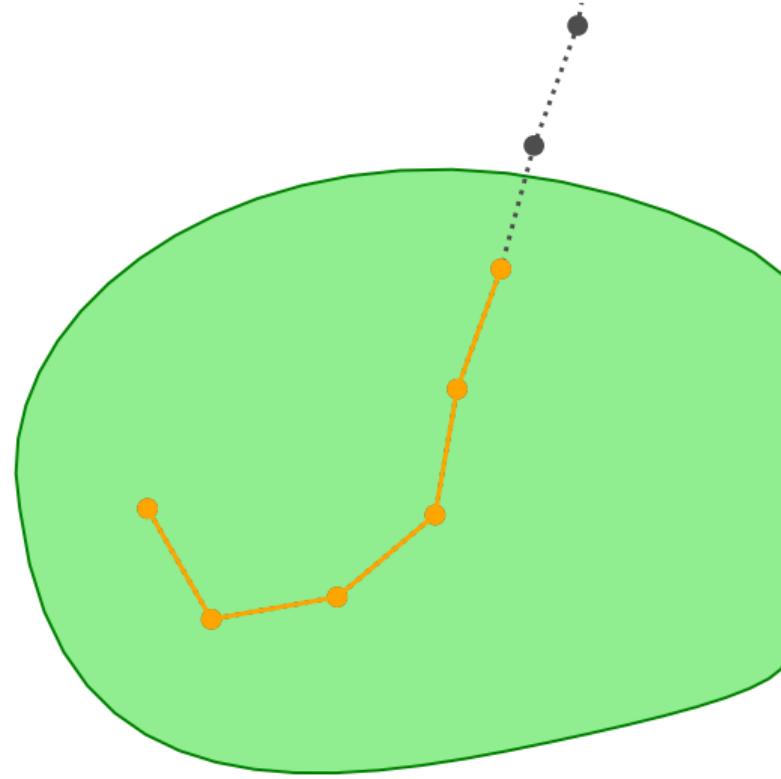
└ Ucieczka ze zbiorów wypukłych

└ Jak mierzyć długość krzywej wewnątrz zbioru?



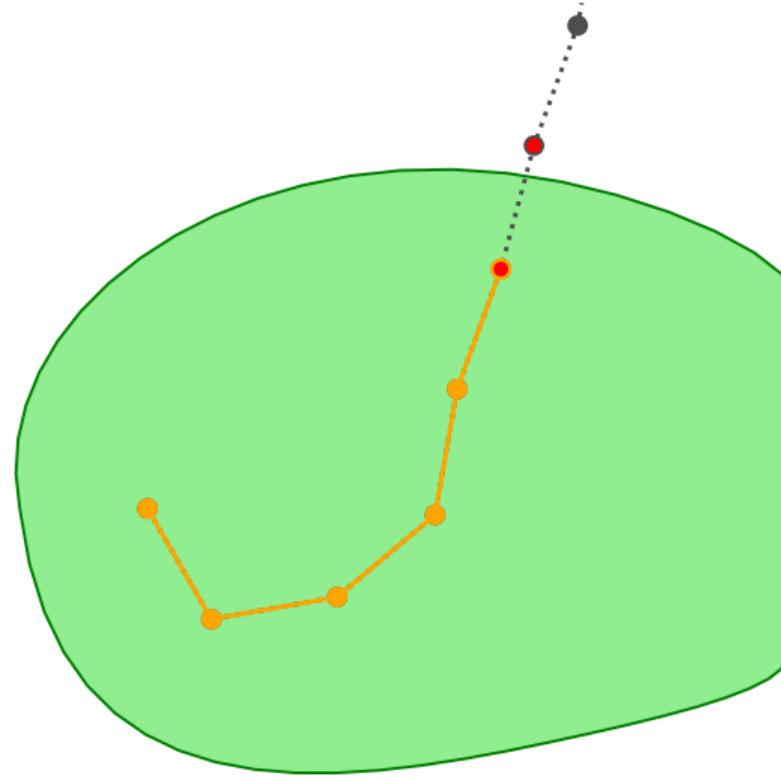
└ Ucieczka ze zbiorów wypukłych

└ Jak mierzyć długość krzywej wewnątrz zbioru?



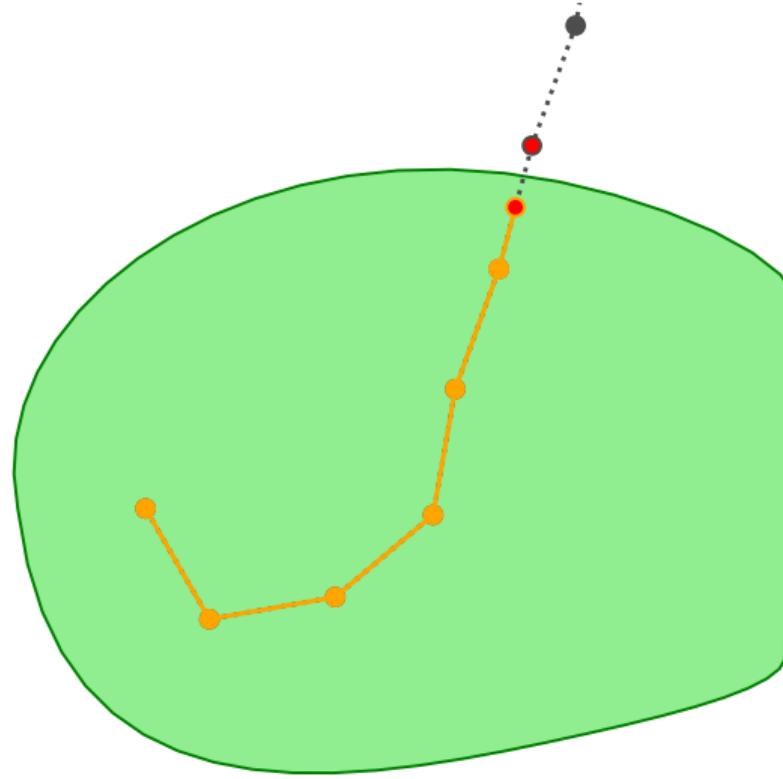
└ Ucieczka ze zbiorów wypukłych

└ Jak mierzyć długość krzywej wewnątrz zbioru?



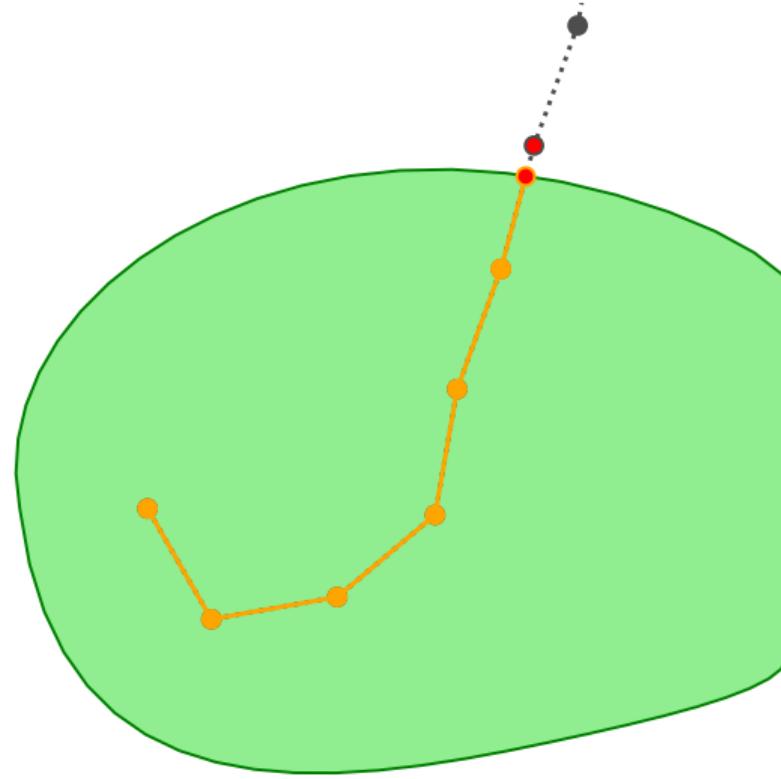
└ Ucieczka ze zbiorów wypukłych

└ Jak mierzyć długość krzywej wewnątrz zbioru?



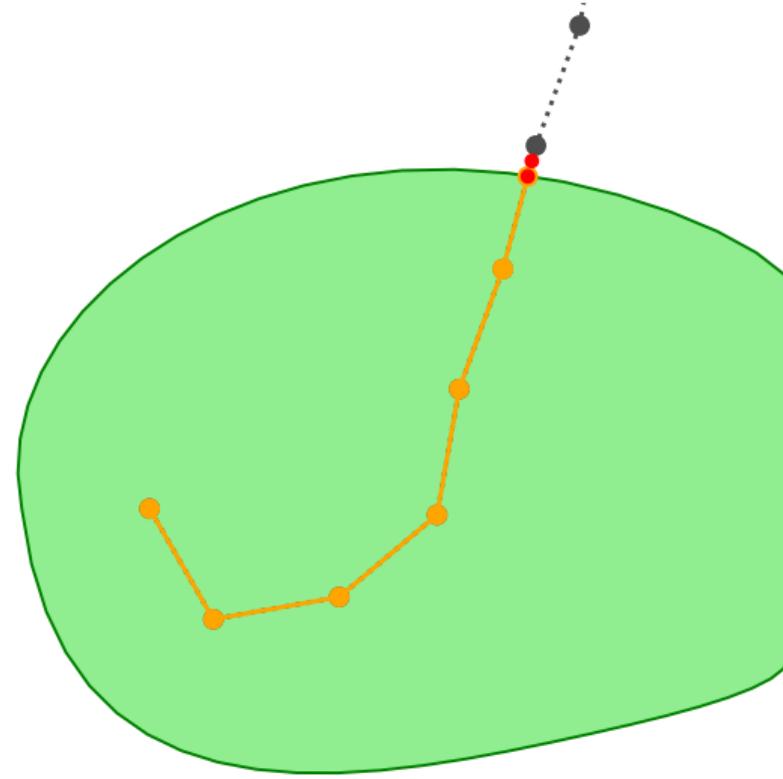
└ Ucieczka ze zbiorów wypukłych

└ Jak mierzyć długość krzywej wewnątrz zbioru?



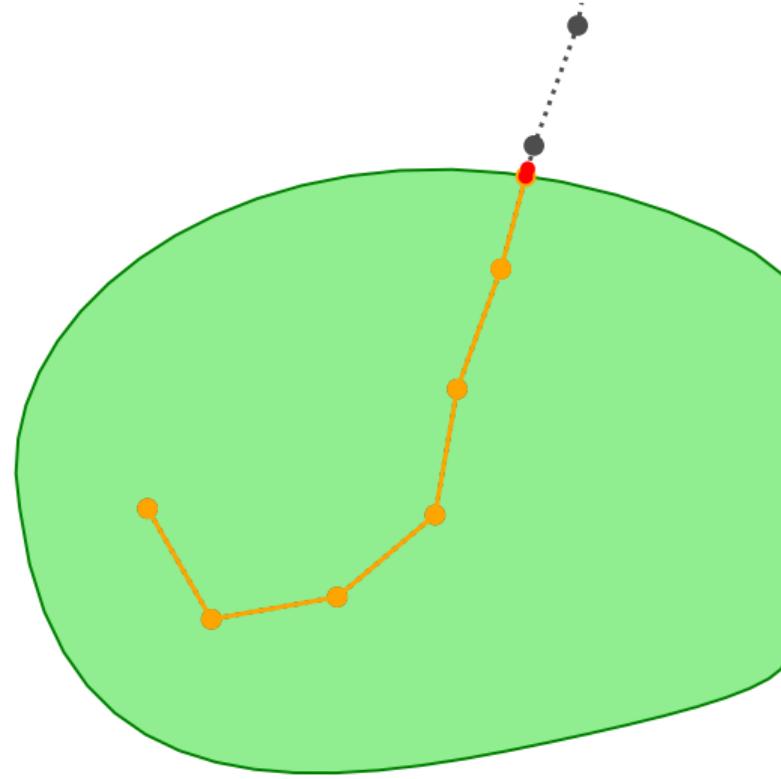
└ Ucieczka ze zbiorów wypukłych

└ Jak mierzyć długość krzywej wewnątrz zbioru?



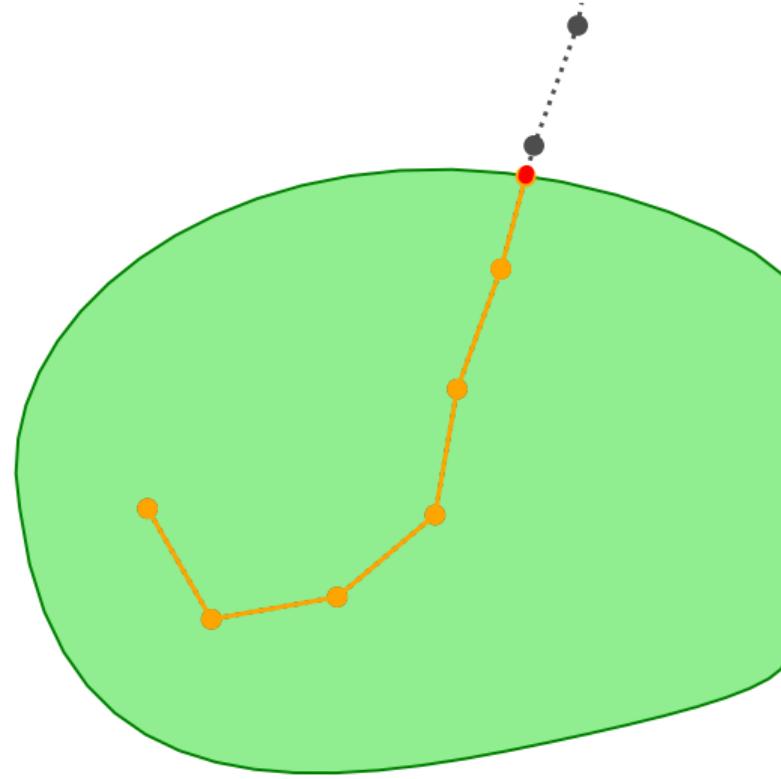
└ Ucieczka ze zbiorów wypukłych

└ Jak mierzyć długość krzywej wewnątrz zbioru?



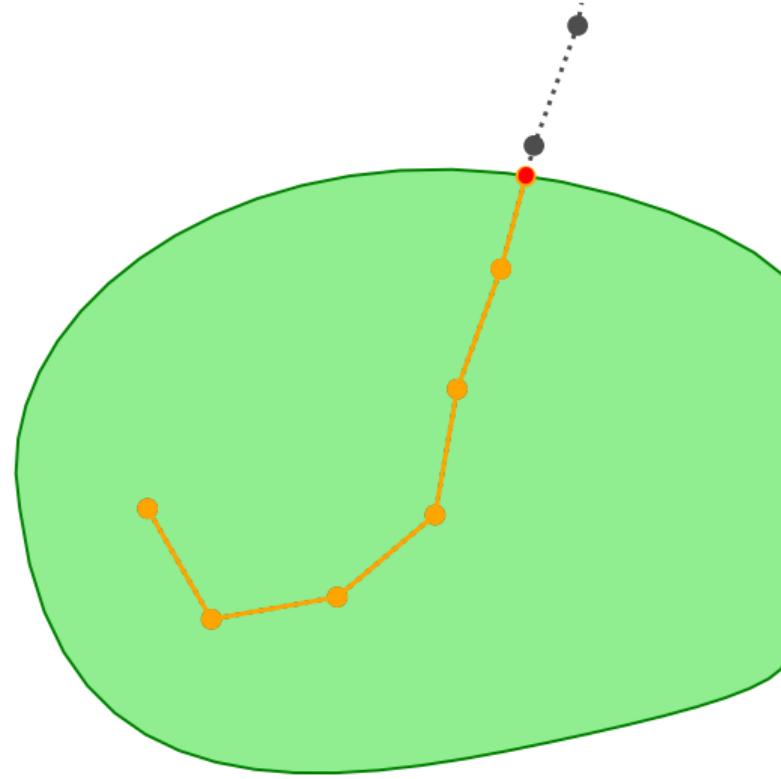
└ Ucieczka ze zbiorów wypukłych

└ Jak mierzyć długość krzywej wewnątrz zbioru?



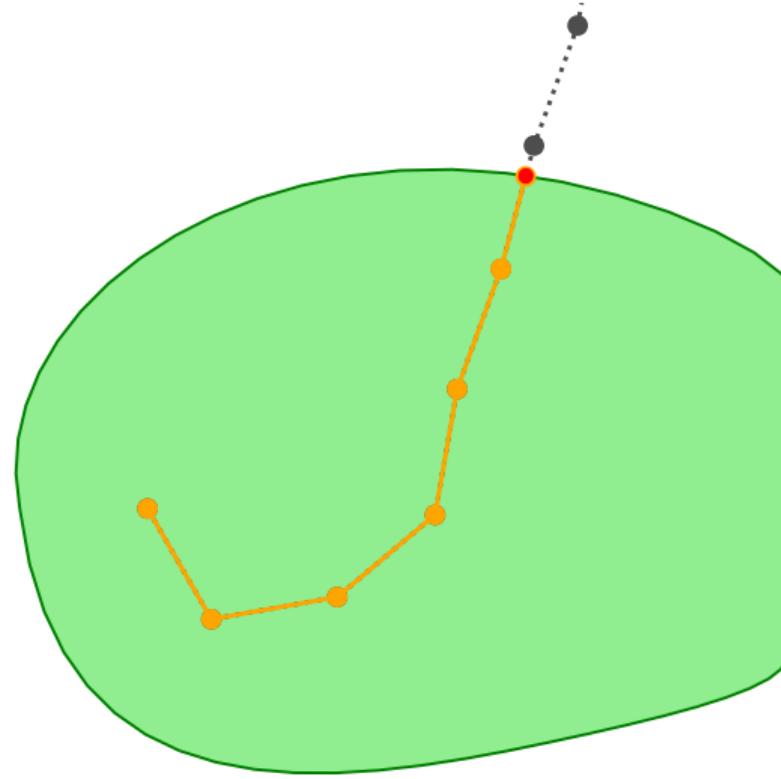
└ Ucieczka ze zbiorów wypukłych

└ Jak mierzyć długość krzywej wewnątrz zbioru?

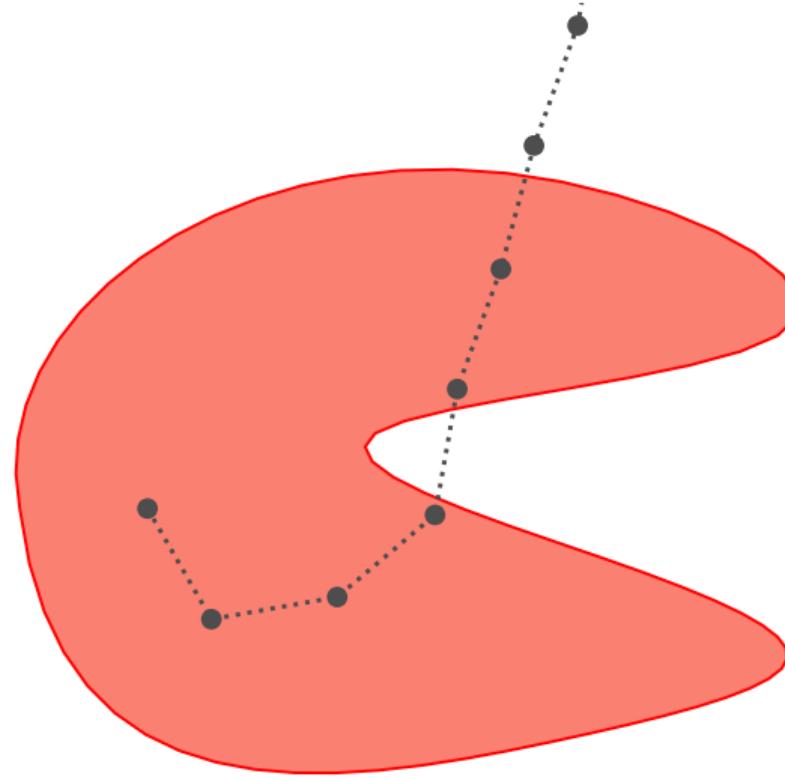


└ Ucieczka ze zbiorów wypukłych

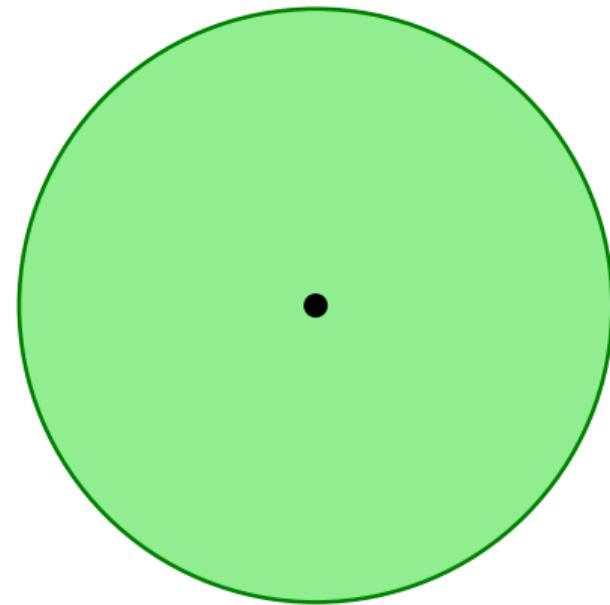
└ Jak mierzyć długość krzywej wewnątrz zbioru?



- └ Ucieczka ze zbiorów wypukłych
- └ Wypukłość jest istotna

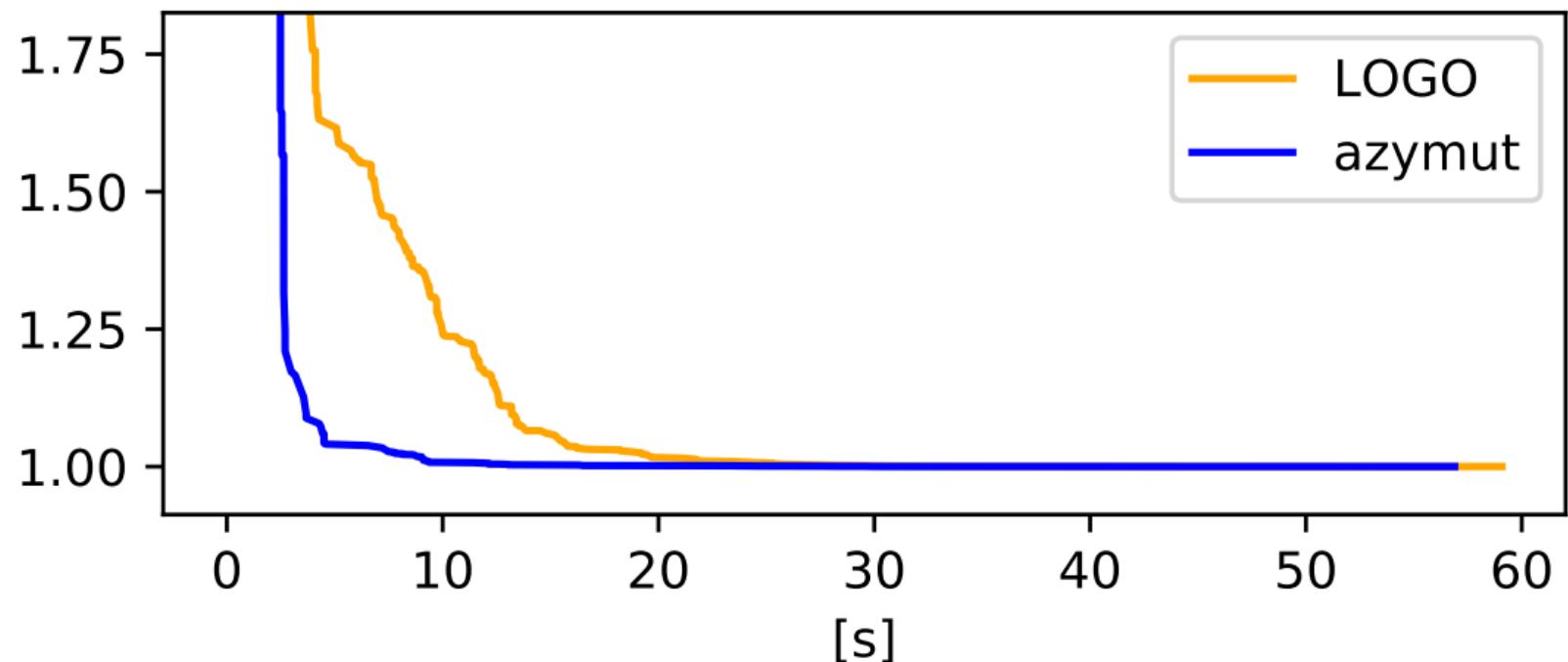


└ Ucieczka z koła

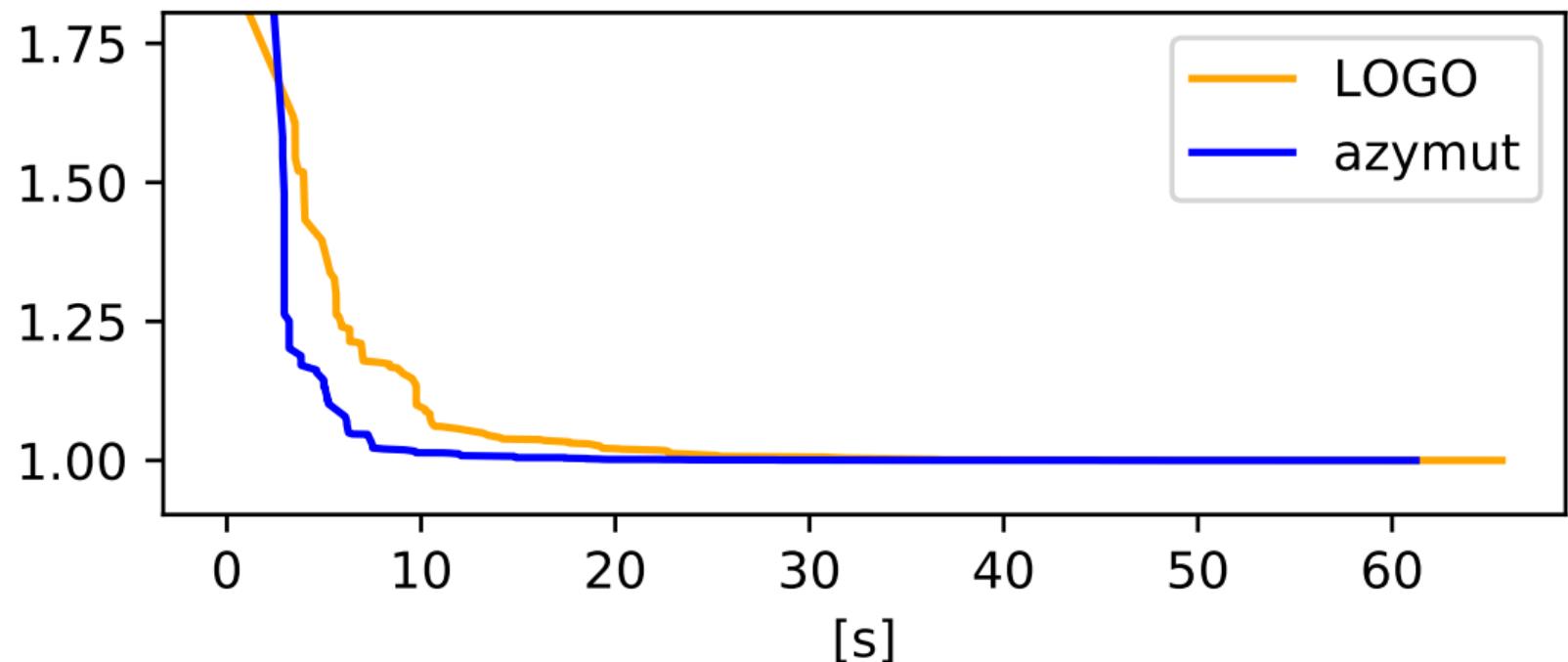


└ Ucieczka z koła

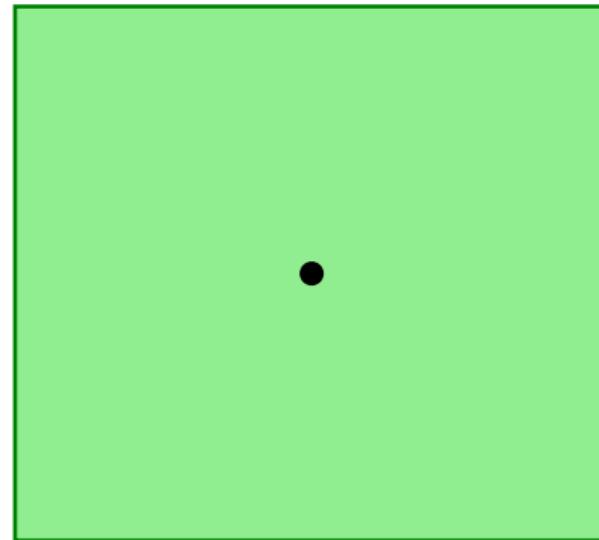
└ Ucieczka z koła



└ Ucieczka z koła

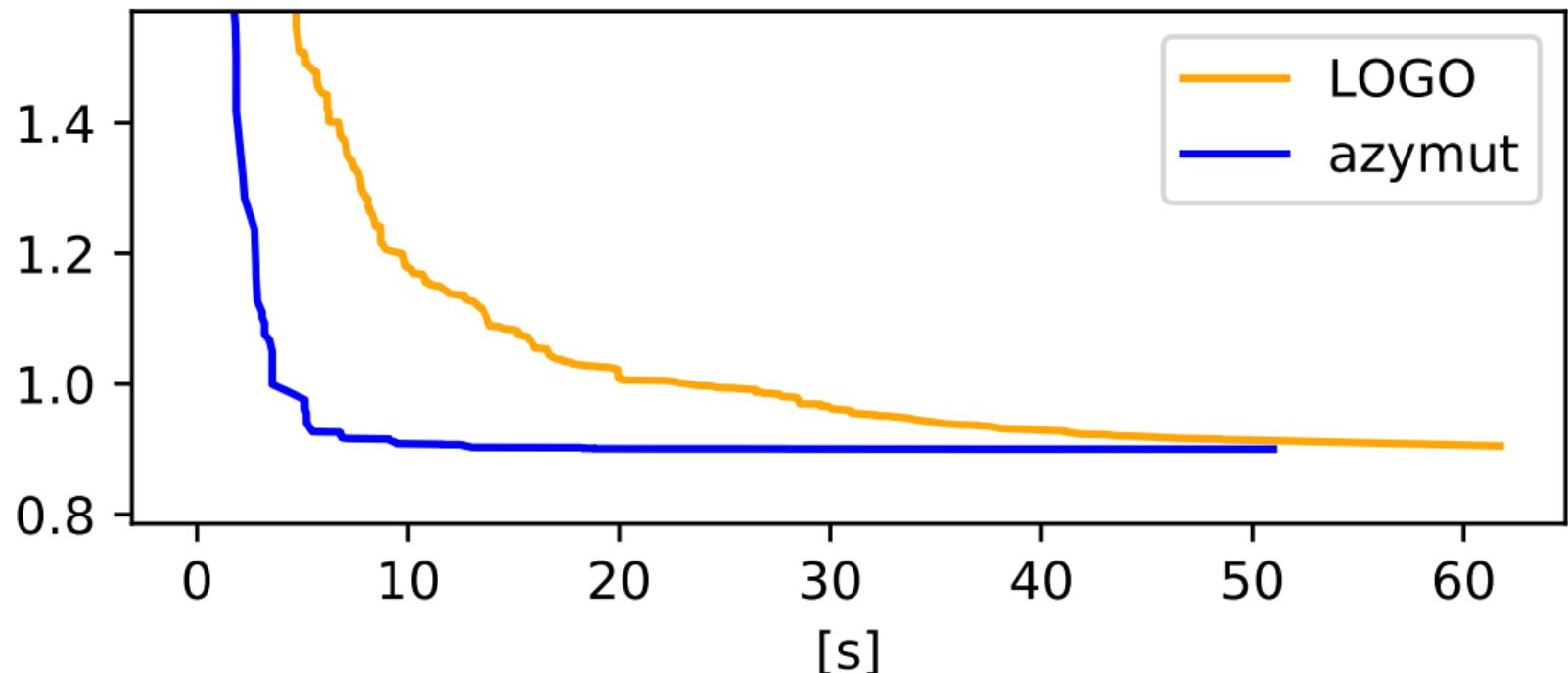


└ Ucieczka z prostokąta



└ Ucieczka z prostokąta

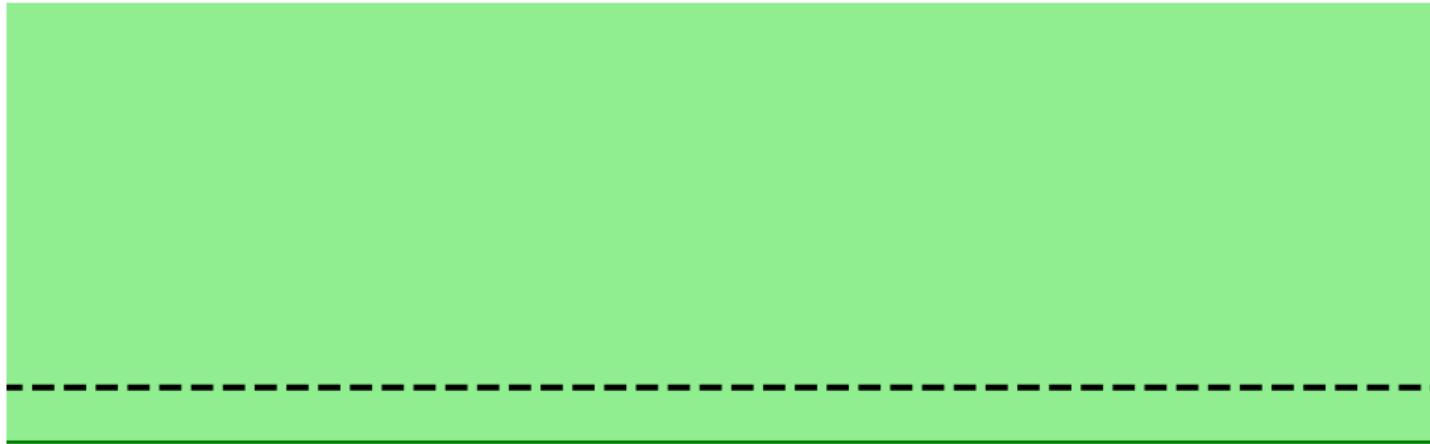
└ Ucieczka z prostokąta



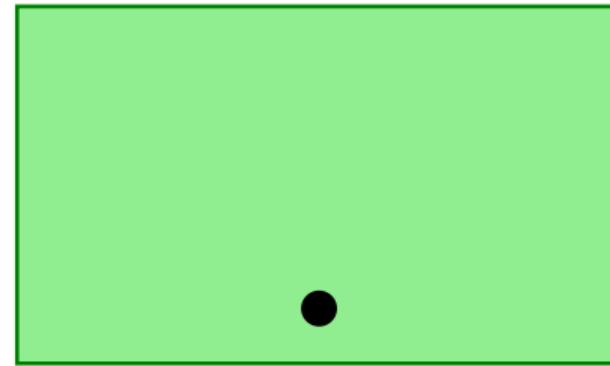
└ Ucieczka z półpłaszczyzny



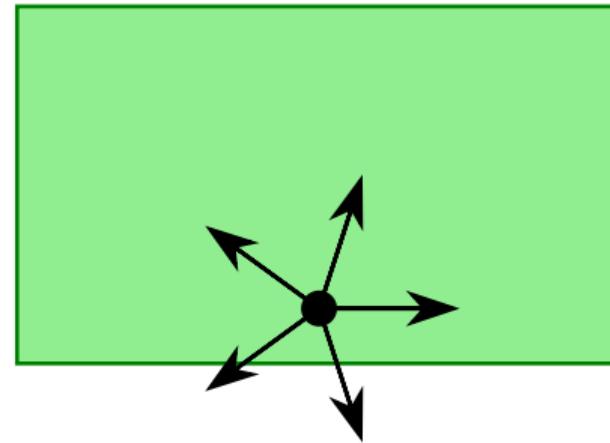
└ Ucieczka z półpłaszczyzny



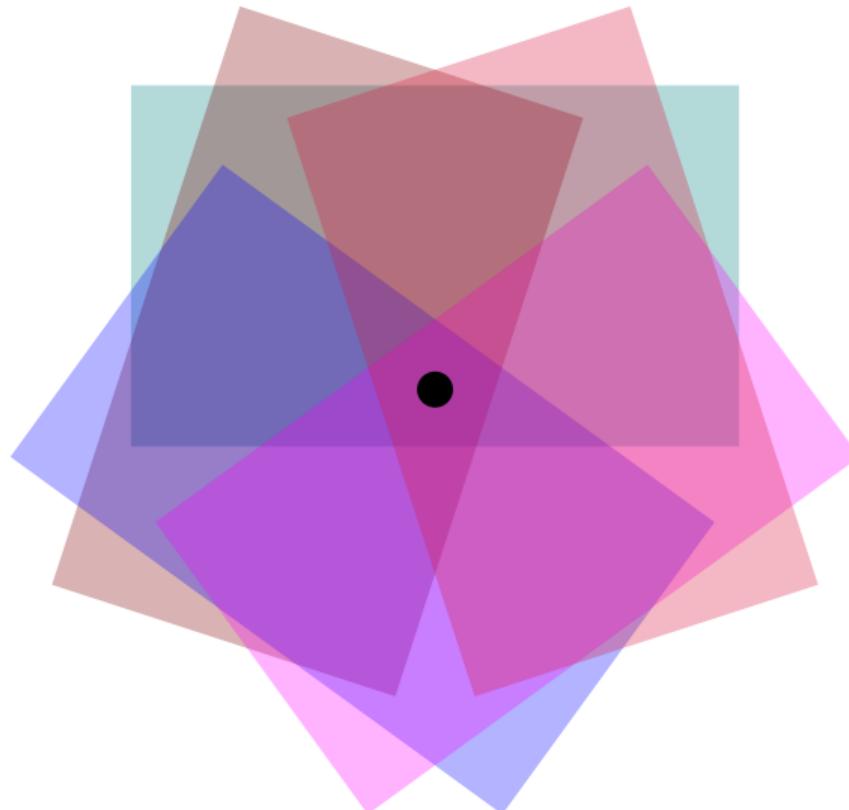
└ Ucieczka z półpłaszczyzny



└ Ucieczka z półpłaszczyzny



└ Ucieczka z półpłaszczyzny



└ Ucieczka z półpłaszczyzny

└ Funkcja kosztu

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

└ Ucieczka z półpłaszczyzny

└ Funkcja kosztu

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

$$l(s, A_1), l(s, A_2), \dots, l(s, A_n)$$

└ Ucieczka z półpłaszczyzny

└ Funkcja kosztu

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

$$l(s, A_1), l(s, A_2), \dots, l(s, A_n)$$

$$F(s) = \max(l(s, A_1), l(s, A_2), \dots, l(s, A_n))$$

- └ Ucieczka z półpłaszczyzny
- └ Funkcja kosztu

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

$$l(s, A_1), l(s, A_2), \dots, l(s, A_n)$$

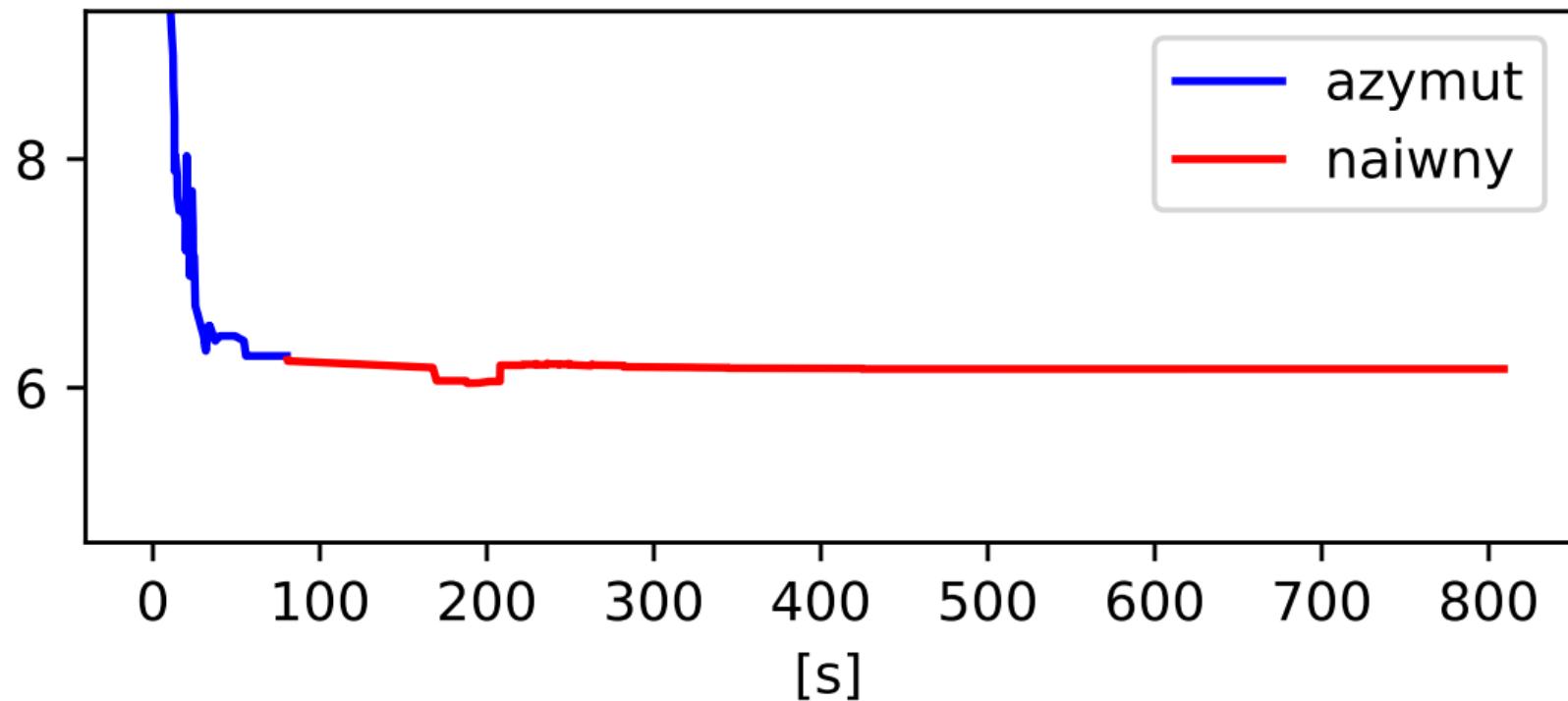
$$F(s) = \max(l(s, A_1), l(s, A_2), \dots, l(s, A_n))$$

$$G(s) = l(s, A_1) + l(s, A_2) + \dots + l(s, A_n)$$

- └ Ucieczka z półpłaszczyzny
- └ Wyniki eksperymentów

- └ Ucieczka z półpłaszczyzny
- └ Wyniki eksperymentów

- └ Ucieczka z półpłaszczyzny
- └ Wyniki eksperymentów



- └ Ucieczka z półpłaszczyzny
- └ Rozwiążanie analityczne

$$\sqrt{3} + \frac{7}{6}\pi + 1 \approx 6.3972\dots$$

- └ Ucieczka z półpłaszczyzny
- └ Rozwiążanie analityczne

$$\sqrt{3} + \frac{7}{6}\pi + 1 \approx 6.3972\dots$$

John R. Isbell, 1956 [5] oraz Henri Joris, 1980 [6, 2]

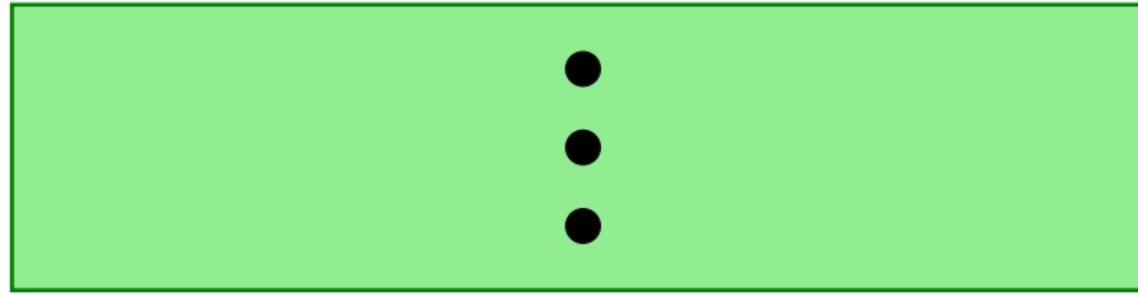
└ Ucieczka z paska



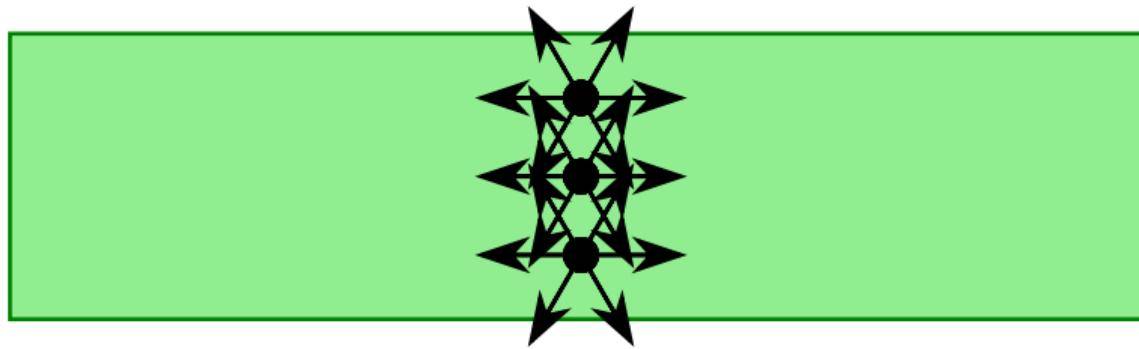
└ Ucieczka z paska



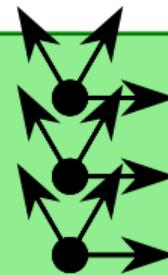
└ Ucieczka z paska



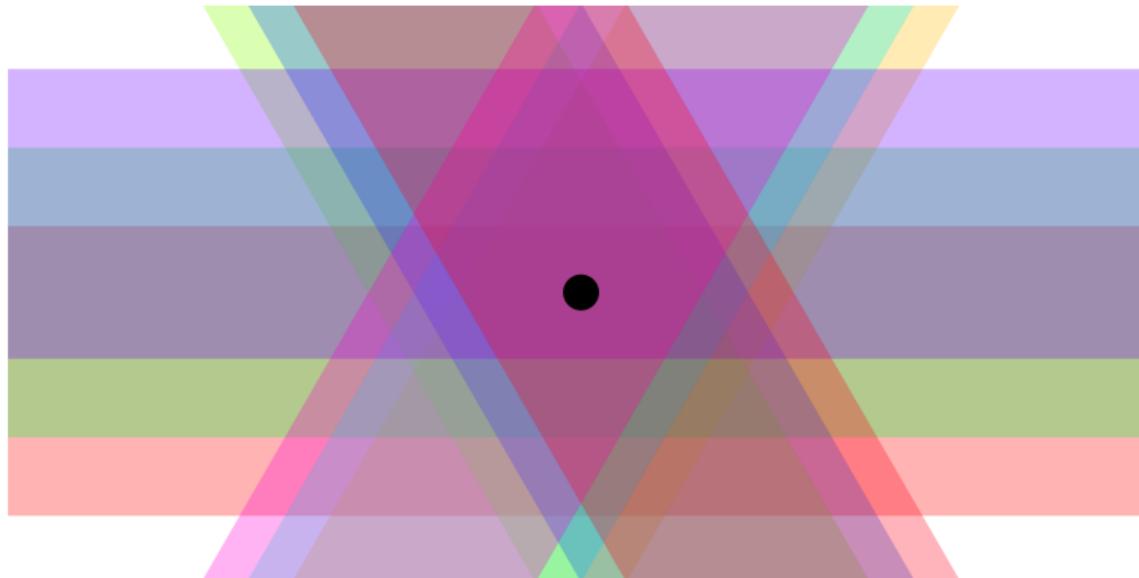
└ Ucieczka z paska



└ Ucieczka z paska



└ Ucieczka z paska

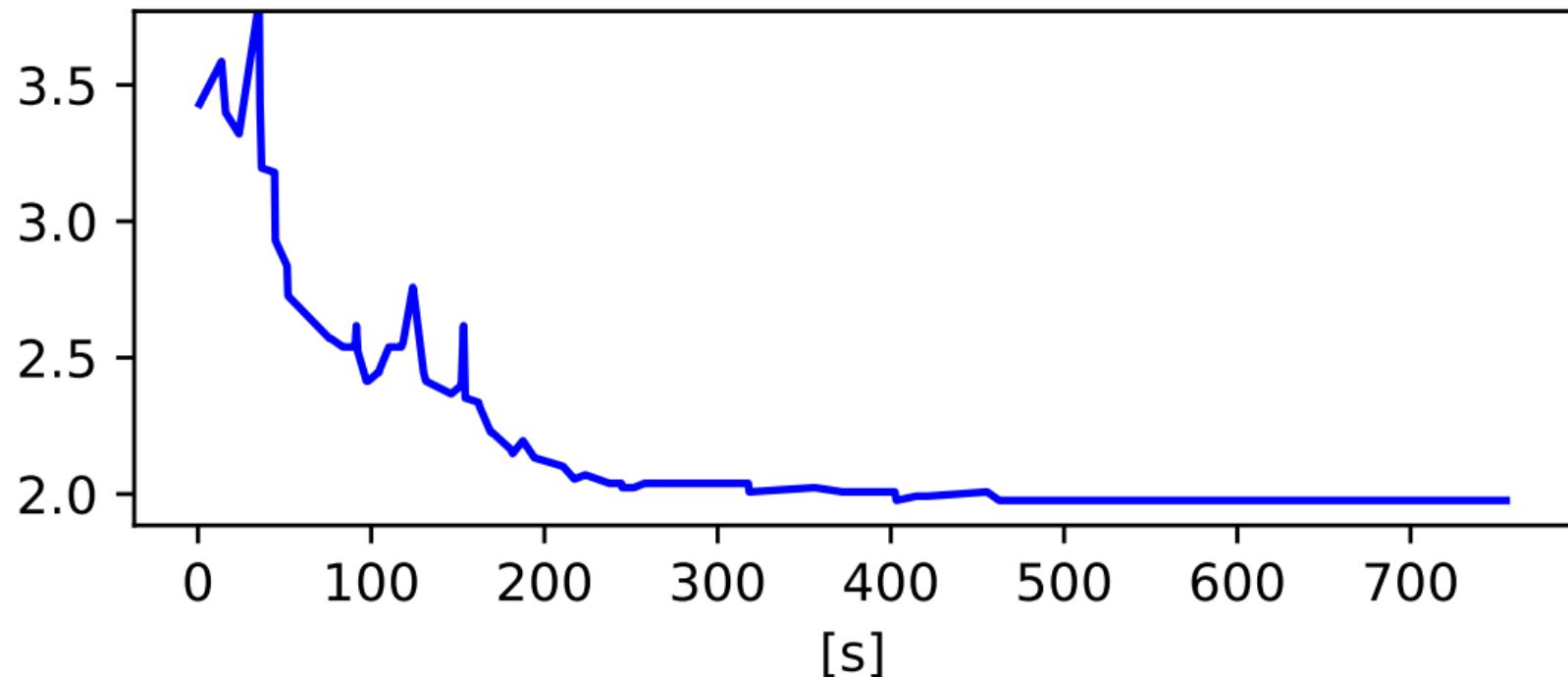


└ Ucieczka z paska

└ Wyniki eksperymentów

└ Ucieczka z paska

└ Wyniki eksperymentów



└ Ucieczka z paska

└ Rozwiążanie analityczne

$$2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi - 2\psi + \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \psi\right) \approx 2.27829\dots,$$

gdzie

$$\varphi = \operatorname{arc sin}\left(\frac{1}{6} + \frac{4}{3} \sin\left(\frac{1}{3} \operatorname{arc sin} \frac{17}{64}\right)\right),$$

$$\psi = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2} \sec \varphi\right).$$

└ Ucieczka z paska

└ Rozwiążanie analityczne

$$2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi - 2\psi + \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \psi\right) \approx 2.27829\dots,$$

gdzie

$$\varphi = \operatorname{arc sin}\left(\frac{1}{6} + \frac{4}{3} \sin\left(\frac{1}{3} \operatorname{arc sin} \frac{17}{64}\right)\right),$$

$$\psi = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2} \sec \varphi\right).$$

Wiktor Zalgaller, 1961, zob. [3]

Algorytm symulowanego wyżarzanie jest

- ▶ *jedynie algorytmem heurystycznym,*

Algorytm symulowanego wyżarzanie jest

- ▶ *jedynie algorytmem heurystycznym,*
- ▶ *prosty w implementacji i użyciu,*

Algorytm symulowanego wyżarzanie jest

- ▶ *jedynie algorytmem heurystycznym,*
- ▶ *prosty w implementacji i użyciu,*
- ▶ *powszechnie stosowany.*

Algorytm symulowanego wyżarzanie jest

- ▶ *jedynie algorytmem heurystycznym,*
- ▶ *prosty w implementacji i użyciu,*
- ▶ *powszechnie stosowany.*

Reprezentacja danych jest istotna.

Algorytm symulowanego wyżarzanie jest

- ▶ *jedynie algorytmem heurystycznym,*
- ▶ *prosty w implementacji i użyciu,*
- ▶ *powszechnie stosowany.*

Reprezentacja danych jest istotna.

Prezentacja: <https://github.com/vil02/pi2022/>

-  Richard Ernest Bellman.
Research problems.
Bull. Am. Math. Soc., 62(3):270–271, May 1956.
-  Steven Finch.
A translation of Henri Joris' "Le chasseur perdu dans la forêt" (1980), 2019.
-  Steven Finch.
A translation of Zalgaller's "The shortest space curve of unit width" (1994), 2019.
-  Steven R. Finch and John E. Wetzel.
Lost in a forest.
The American Mathematical Monthly, 111(8):645–654, 2004.

 John R. Isbell.

An optimal search pattern.

Naval Research Logistics Quarterly, 4(4):357–359, December 1957.

 Henri Joris.

Le chasseur perdu dans la forêt.

Elemente der Mathematik, 35:1–14, 1980.

 Scott W. Williams.

Million buck problems.

National Association of Mathematicians Newsletter, 31(2):1–3, 2000.