Dans ce document, j'utilise mon logiciel 'amibe.sage' pour générer les amibes et subdivisions associées du polynome suivant :

$$3x_1^2 + 5x_1x_2 - 6x_2^2 + 8x_1 - x_2 + 9 \in \mathbb{Q}[x_1, x_2]$$

Je traite le cas de la valuation 7-adique en premier (et donc tout premier supérieur à 7), puis dans l'ordre $p = 2, 3, 5$.

1 Cas $p = 7$

La tropicalisation de f pour $p = 7$ est :

$$\tau_f(x_1, x_2) = min(2x_1, x_1 + x_2, 2x_2, x_1, x_2, 0)$$

Les coefficients de f étant tous de valuation nulle dans ce cas, on sait que l'amibe de f sera le squelette de dimension 1 de l'éventail normal du polytope de Newton de f.

Voici un tableau donnant les formes initiales de f en fonction de $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, et donc également les équations de chaque polyèdre du complexe de Gröebner associé :

	(x_1, x_2)	$in_{(x_1,x_2)}f$
2	$x_1 < 0$, $x_1 < x_2$	$\overline{3}x_1^2$
	$x_2 < 0$, $x_2 < x_1$	x_2^2
	$x_1 > 0$, $x_2 > 0$	$\overline{2}$
1	$x_1 = x_2$, $x_2 < 0$	$\overline{3}x_1^2 + \overline{5}x_1x_2 + x_2^2$
	$x_1 = 0$, $x_2 > 0$	$x_1 + \overline{3}x_1^2 + \overline{2}$
	$x_2 = 0$, $x_1 > 0$	$\overline{6}x_2 + x_2^2 + \overline{2}$
0	$x_1 = x_2 = 0$	$\overline{f}$

Table 1: formes initiales pour $p = 7$

Avec le code couleur évident, cela donne dans le plan :

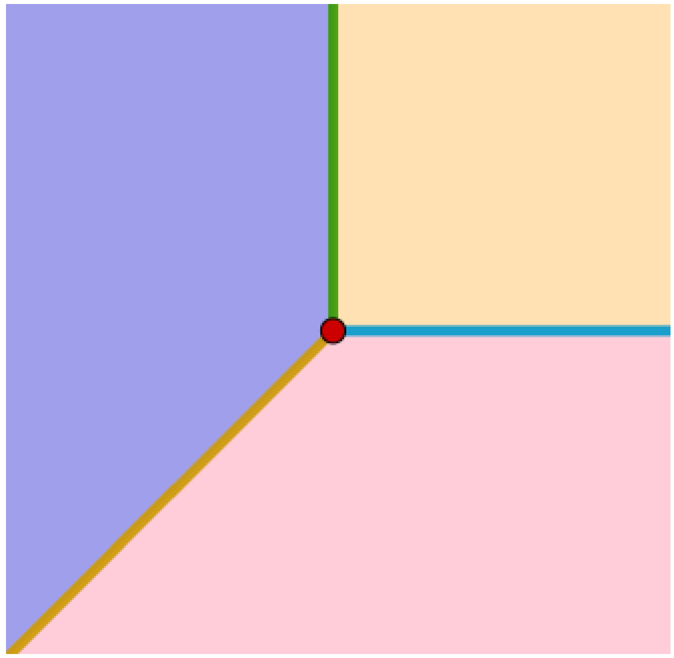

Figure 1: complexe de Gröebner pour $p = 7$

Le complexe de Gröebner est composé de 3 polytopes de dimension 2, 3 de dimension 1 et 1 de dimension 0.

Observons la condition d'équilibre associée au point $(0, 0)$. Les images proviennent de mon logiciel 'amibe.sage' :

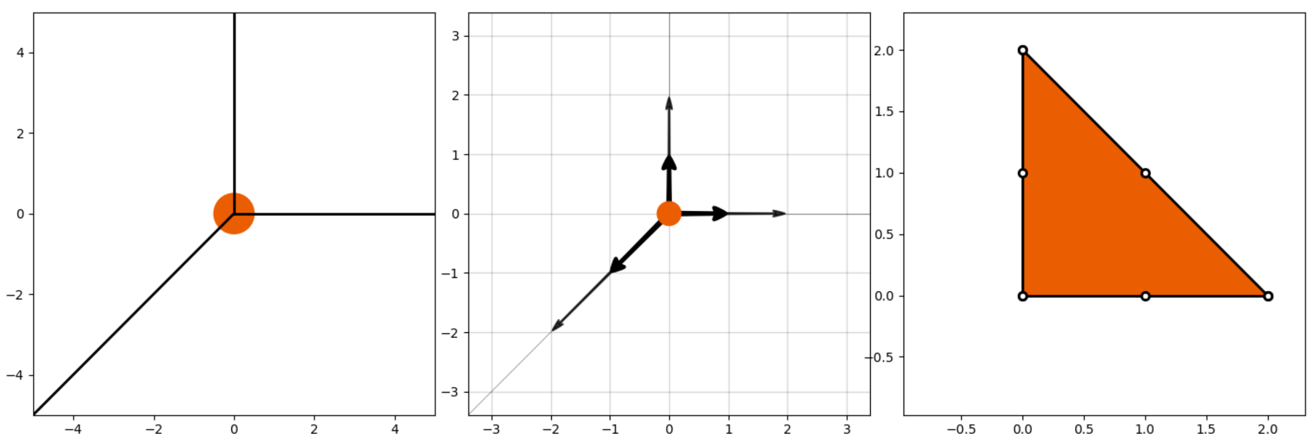

Figure 2: condition d'équilibre en $(0, 0)$ pour $p = 7$

Les images de gauche et droite montrent l'amibe et le polytope de Newton respectivement. Les points blancs sur l'image de droite sont les points à coordonnées entières. Ils permettent de rapidement calculer le poids : c'est le nombre de points blancs sur l'arête moins un. L'image du milieu montre la condition d'équilibre. Les vecteurs plus fin sont obtenus après multiplication par le poids correspondant à partir du vecteur entier plus épais colinéaire. Pour vérifier la condition d'équilibre, il ne reste plus qu'à sommer tout les vecteurs multipliés par leurs poids. On obtient zéro.

Il y a une chose intéressante que nous montre la condition d'équilibre en figure 2. Bien que l'amibe de f pour $p \geq 7$ soit identique, en tant que complexe polyédral, à l'amibe d'un droite tropicale, elle s'en distingue par son vecteur de poids qui est $(2, 2, 2)$, contre $(1, 1, 1)$ pour la droite.

2 Cas $p = 2$

La tropicalisation de f pour $p = 2$ est :

$$\tau_f(x_1, x_2) = min(2x_1, x_1 + x_2, 1 + 2x_2, 3 + x_1, x_2, 0).$$

Voici le tableau qui résume la situation :

	(x_1, x_2)	$in_{(x_1,x_2)}(f)$
2	$x_1 > 0$, $x_2 > 0$	$\overline{1}$
	$x_1 < 0$, $x_2 > x_1$	x_1^2
	$-1 < x_2 < 0$, $x_1 > 0$	x_2
	$x_1 < 0$, $x_1 < x_2$, $x_1 < x_2 + 1$	$x_1 x_2$
	$x_1 < -1$, $x_2 + 1 < x_1$	x_2^2
1	$x_1 = 0$, $x_2 > 0$	$x_1^2 + \overline{1}$
	$x_2 = 0$, $x_1 > 0$	$x_2 + \overline{1}$
	$x_1 = 0$, $-1 < x_2 < 0$	$x_1 x_2 + x_2$
	$x_2 = -1$, $x_1 > 0$	$x_2^2 + x_2$
	$x_2 + 1 = x_1$, $x_1 < 0$	$x_1 x_2 + x_2^2$
	$x_1 = x_2$, $x_1 < 0$	$x_1^2 + x_1 x_2$
0	$x_1 = x_2 = 0$	$x_1^2 + x_1 x_2 + x_2 + \overline{1}$
	$x_1 = 0$, $x_2 = -1$	$x_1 x_2 + x_2^2 + x_2$

Table 2: formes initiales pour $p = 2$

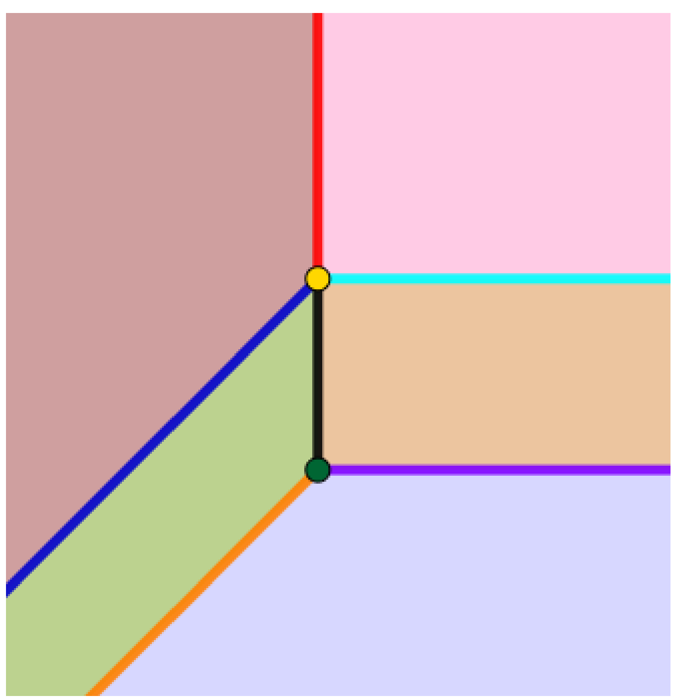

Figure 3: complexe de Gröebner pour $p = 2$

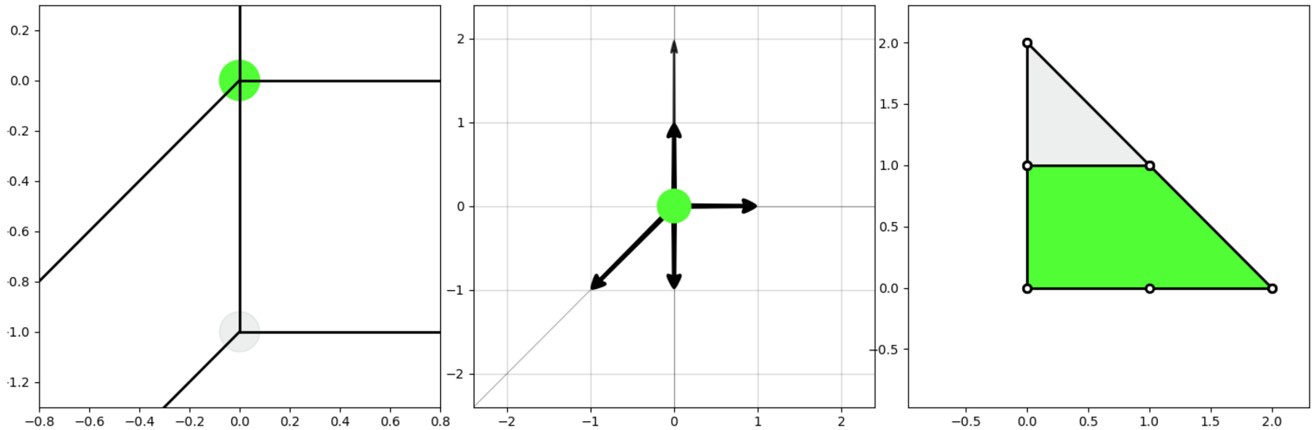

Figure 4: condition d'équilibre en $(0, 0)$ pour $p = 2$

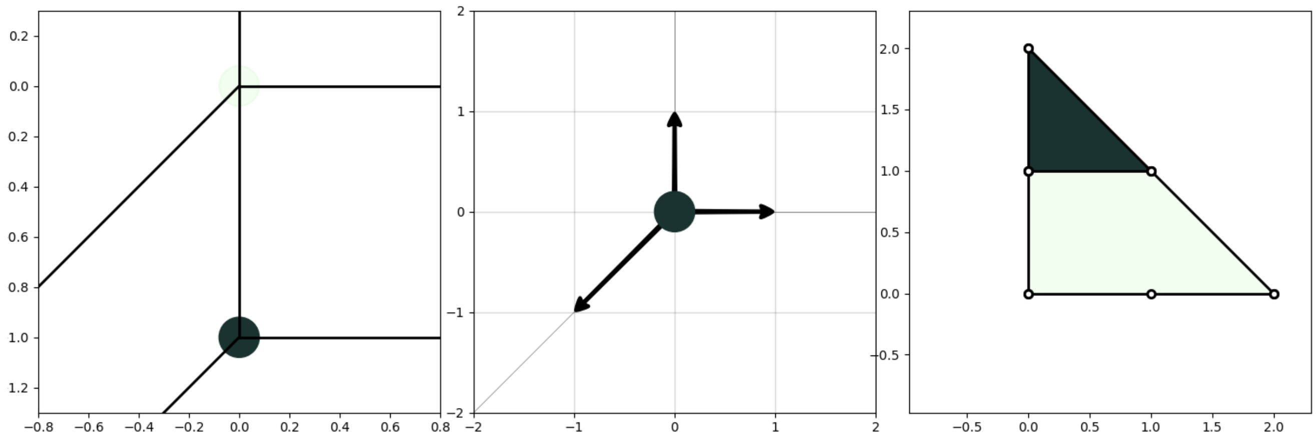

Figure 5: condition d'équilibre en $(0, -1)$ pour $p = 2$

On peut bien observer sur ces deux images la dualité entre l'amibe et la subdivision (à droite) du polytope de Newton de f.

3 Cas $p = 3$

La tropicalisation de f pour $p = 3$ est :

$$\tau_f(x_1, x_2) = min(1 + 2x_1, x_1 + x_2, 1 + 2x_2, x_1, x_2, 2)$$

On obtient le tableau suivant:

	(x_1, x_2)	$in_{(x_1,x_2)}(f)$
2	$x_1 > 2$, $x_2 > 2$	$\bar{1}$
	$x_1 < -1$, $x_1 - x_2 < 1$	x_1^2
	$x_2 < -1$, $x_2 - x_1 < 1$	x_2^2
	$x_1 - x_2 > 1$, $x1 < 0$, $x_2 - x_1 > 1$, $x_2 < 0$	$\bar{2}x_1x_2$
	$x_1 > 0$, $2 > x_2 > -1$, $x_2 < x_1$	$\bar{2}x_2$
	$x_2 > 0$, $x_1 > -1$, $x_1 < 2$, $x_1 < x_2$	$\bar{2}x_1$
1	$x_1 = 2$, $x_2 > 2$	$\bar{2}x_1 + \bar{1}$
	$x_2 = 2$, $x_1 > 2$	$\bar{2}x_2 + \bar{1}$
	$x1 = -1$, $x_2 > 0$	$x_1^2 + \bar{2}x_1$
	$x_2 = -1$, $x_1 > 0$	$x_2^2 + \bar{2}x_2$
	$x_1 - x_2 = 1$, $x_1 < -1$	$x_1^2 + \bar{2}x_1x_2$
	$x_2 - x_1 = 1$, $x_2 > -1$	$x_2^2 + \bar{2}x_1x_2$
	$x_2 = 0$, $-1 < x_1 < 0$	$\bar{2}x_1x_2 + \bar{2}x_1$
	$x_1 = 0$, $-1 < x_2 < 0$	$\bar{2}x_1x_2 + \bar{2}x_2$
	$x_1 = x_2$, $0 < x_1 < 2$	$\bar{2}x_1 + \bar{2}x_2$
0	$x_1 = x_2 = 0$	$\bar{2}x_1x_2 + \bar{2}x_1 + \bar{2}x_2$
	$x_1 = x_2 = 2$	$\bar{2}x_1 + \bar{2}x_2 + \bar{2}$
	$x_1 = 0$, $x_2 = -1$	$\bar{2}x_1 + \bar{2}x_2 + \bar{1}$
	$x_1 = -1$, $x_2 = 0$	$x_1^2 + \bar{2}x_1x_2 + \bar{2}x_1$

Table 3: formes initiales pour $p = 3$

Remarquons une chose ici. Le complexe de Gröebner possède 6 polyèdres de dimension maximale (2). Il ne peut pas en posséder plus car f est composée de 6 monômes, et on sait qu'à un polyèdre de dimension maximale correspond un unique monôme de f.

Voici ce que ça donne dans le plan :

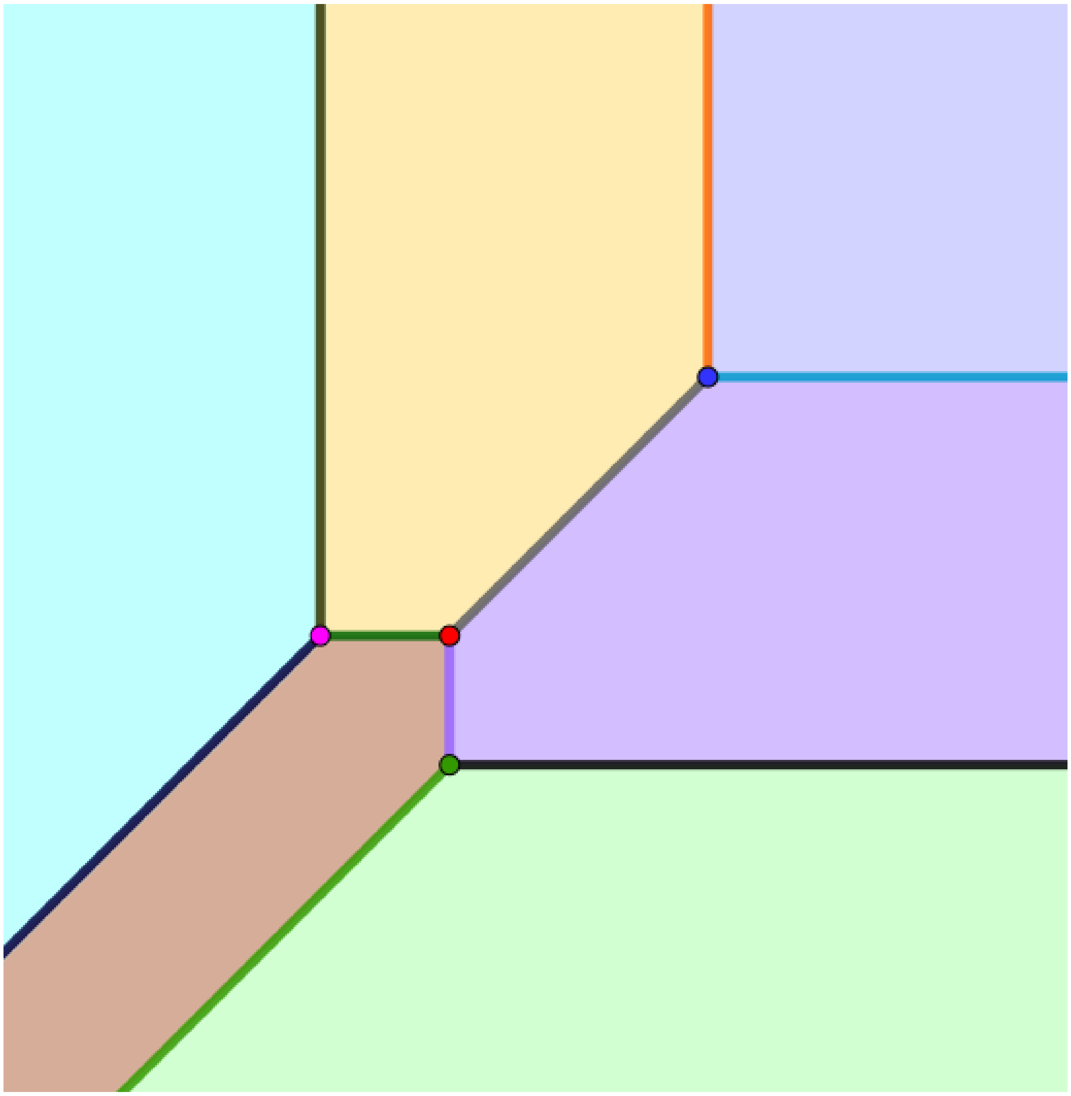

Figure 6: C
omplexe de Grebner pour $p = 3$

Pour la condition d'équilibre, le vecteur de poids est à chaque fois $(1, 1, 1)$) :

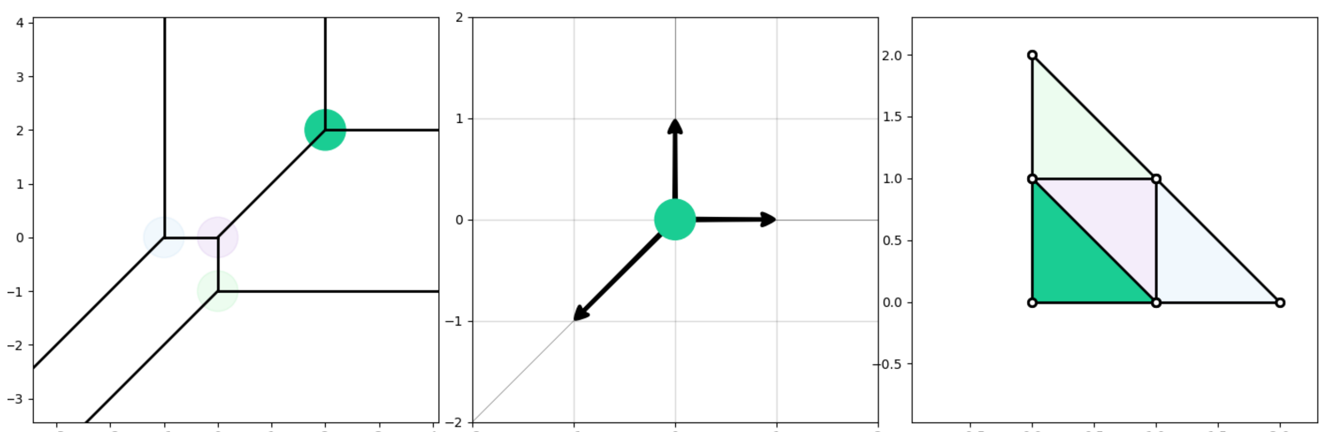

Figure 7: condition d'équilibre en $(2, 2)$ pour $p = 3$

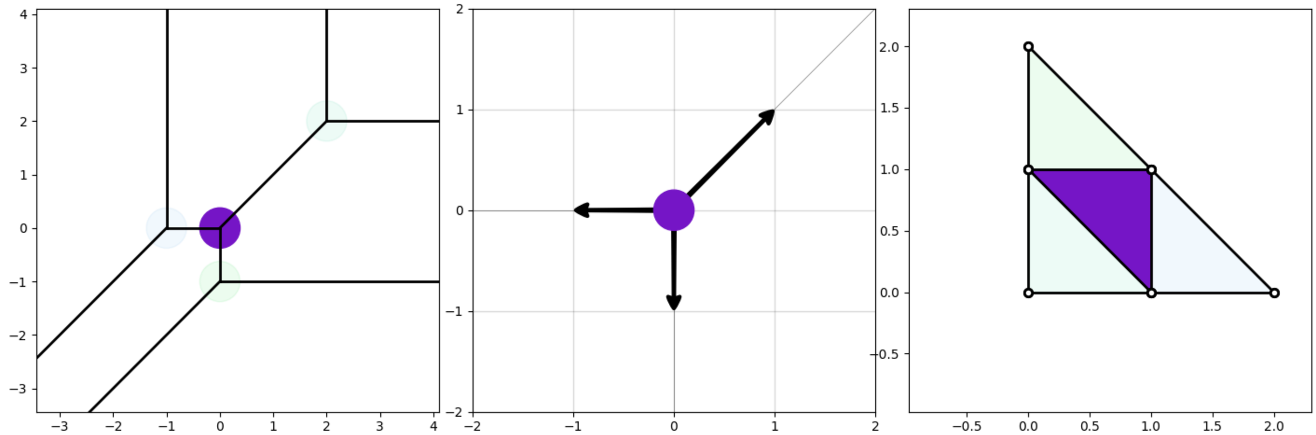

Figure 8: condition d'équilibre en $(0, 0)$ pour $p = 3$

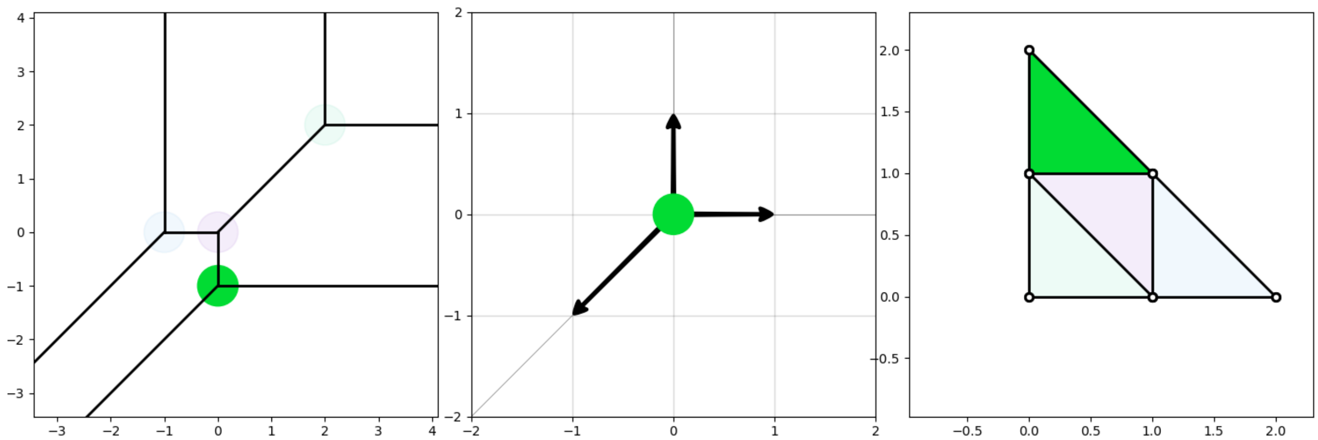

Figure 9: condition d'équilibre en $(0, -1)$ pour $p = 3$

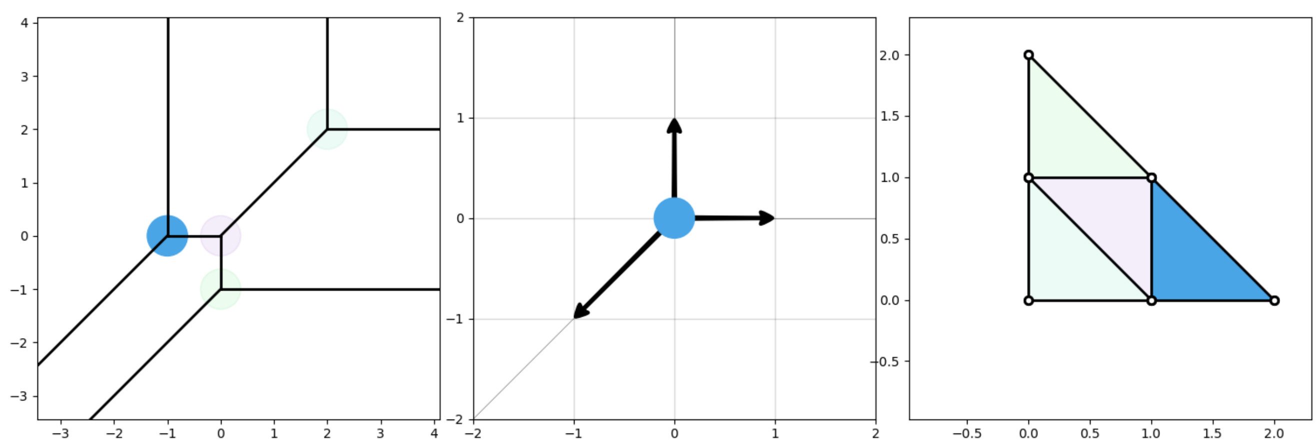

Figure 10: condition d'équilibre en $(-1, 0)$ pour $p = 3$

4 Cas $p = 5$

La tropicalisation de f est :

$$\tau_f(x_1, x_2) = min(2x_1, 1 + x_1 + x_2, 2x_2, x_1, x_2, 0)$$

Il y a peu de choses à dire ici, le complexe est le même que pour $p = 7$. Seules les formes initiales vont changer. Voici le tableau qui résume la situation :

	(x_1, x_2)	$in_{(x_1,x_2)} f$
2	$x_1 < 0$, $x_1 < x_2$	$\overline{3}x_1^2$
	$x_2 < 0$, $x_2 < x_1$	$\overline{4}x_2^2$
	$x_1 > 0$, $x_2 > 0$	$\overline{4}$
1	$x_1 = x_2$, $x_2 < 0$	$\overline{3}x_1^2 + \overline{4}x_2^2$
	$x_1 = 0$, $x_2 > 0$	$\overline{4}x_2^2 + x_1x_2$
	$x_2 = 0$, $x_1 > 0$	$\overline{3}x_1^2 + x_2^2$
0	$x_1 = x_2 = 0$	$\overline{3}x_1^2 + \overline{4}x_2^2 + \overline{3}x_1 + \overline{4}x_2 + \overline{4}$

Table 4: formes initiales pour $p = 5$

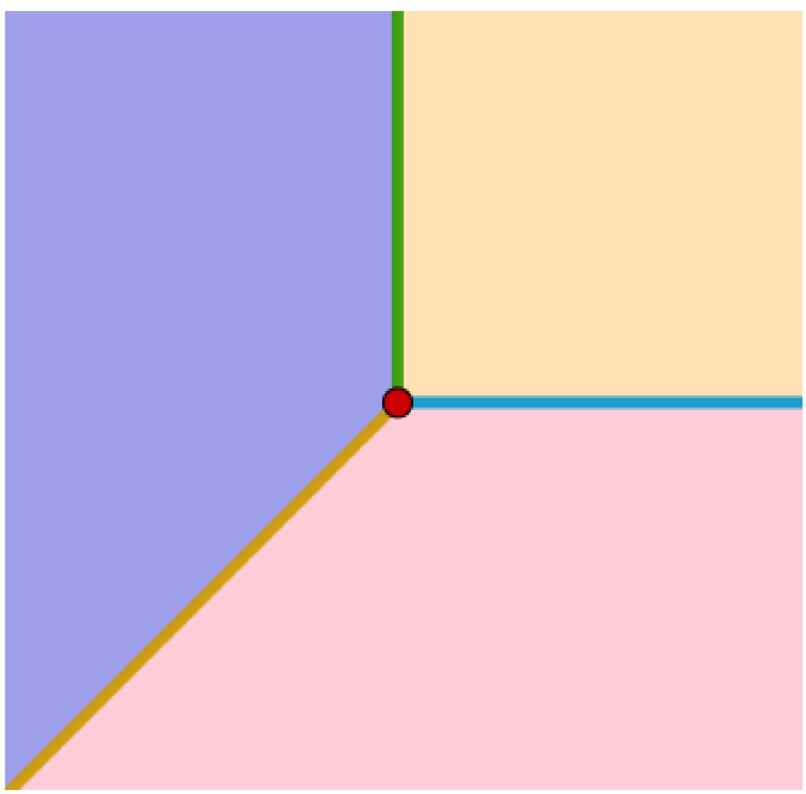

Figure 11: complexe de Gröebner pour $p = 5$

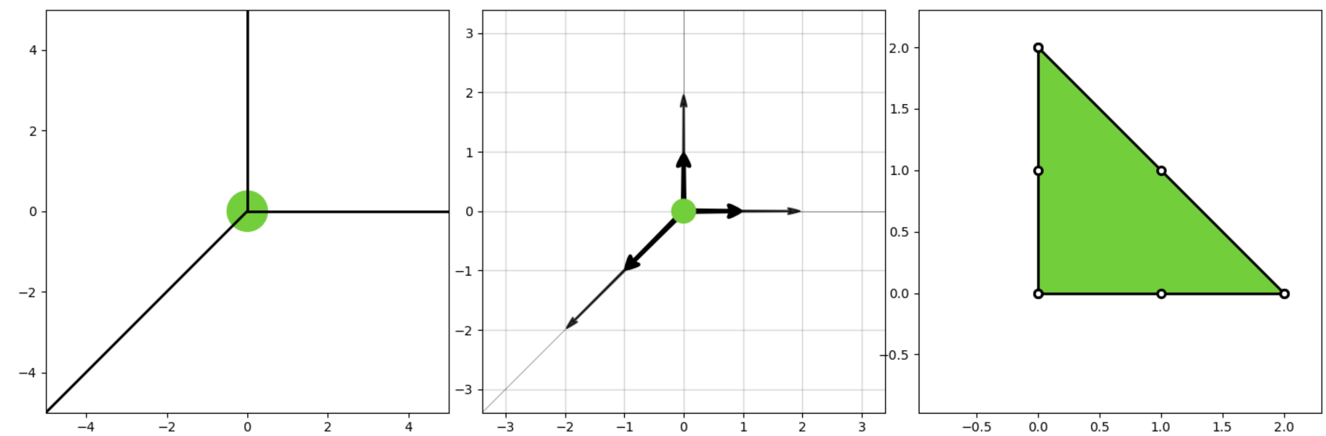

Figure 12: condition d'éuilibre en $(0, 0)$ pour $p = 5$

On peut faire une remarque ici. On sait que lorsque la valuation est triviale ou lorsque les coefficients de f sont tous de valuation nulle, l'amibe de f sera un éventail. Le cas $p = 5$ montre que la réciproque est fausse : l'amibe de f est un éventail, mais le coefficient du monôme x_1x_2 de f a valuation $1 \neq 0$.