

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Base régulière de <math>\text{Int}_n(E, D)</math></b>	<b>4</b>
2.1	Suite ordonnée . . . . .	4
2.2	Base régulière dans le cas local . . . . .	4
2.3	Base régulière . . . . .	6
2.4	Calcul effectif pour $E = D$ . . . . .	8
2.4.1	Construction d'une suite $P$ -ordonnée de $D$ . . . . .	8
2.4.2	Algorithme pour $\text{Int}_n(D)$ . . . . .	11
2.4.3	Exemples . . . . .	12
2.4.4	Fonctions pour $\text{Int}_n(D)$ . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Base régulière du sous-module <math>\text{Int}_n^r(E, D)</math></b>	<b>16</b>
3.1	Le sous-module $\text{Int}_n^r(E, D)$ . . . . .	16
3.2	Suite $(P, r)$ -ordonnée . . . . .	17
3.3	Base régulière dans le cas local . . . . .	17
3.4	Base régulière . . . . .	20
3.5	Calcul effectif pour $E=D$ . . . . .	22
3.5.1	Construction d'une suite $(P, r)$ -ordonnée de $D$ . . . . .	23
3.5.2	Algorithme pour $\text{Int}_n^r(D)$ . . . . .	25
3.5.3	Exemples . . . . .	25
3.5.4	Fonctions pour $\text{Int}_n^r(D)$ . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Base régulière du sous-module <math>\text{Int}_n^M(E, D)</math></b>	<b>28</b>
4.1	Le sous-module $\text{Int}_n^M(E, D)$ . . . . .	28
4.2	Suite $P^h$ -ordonnée . . . . .	28
4.3	Base régulière dans le cas local . . . . .	29
4.4	Base régulière . . . . .	31
4.5	Calcul effectif pour $E = D$ . . . . .	33
4.5.1	Construction d'une suite $P^h$ -ordonnée de $D$ . . . . .	33
4.5.2	Algorithme pour $\text{Int}_n^M(D)$ . . . . .	35
4.5.3	Exemples . . . . .	35
4.5.4	Fonctions pour $\text{Int}_n^M(D)$ . . . . .	36

# 1 Introduction

Soit  $P \in \mathbb{Q}[X]$ . Il se peut qu'un tel polynôme, bien qu'à coefficients rationnels, ne prenne que des valeurs entières lorsqu'il est évalué sur des entiers. On dit alors que  $P$  est à valeurs entières. De tels exemples sont donnés par les polynômes binomiaux, définis par  $\binom{X}{0} = 1$  et pour tout  $n \geq 1$ :

$$\binom{X}{n} = \frac{X(X-1)\dots(X-(n-1))}{n!}$$

En effet  $n!$  divise tout produit de  $n$  entiers consécutifs par la formule du binôme de Newton.

**Definition 1.1.** On note  $\text{Int}(\mathbb{Z})$  l'ensemble des polynômes à valeurs entières et  $\text{Int}_n(\mathbb{Z})$  l'ensemble des éléments de  $\text{Int}(\mathbb{Z})$  de degré au plus  $n$ .

Ce sont des  $\mathbb{Z}$  modules. Il s'avère que tout  $f \in \text{Int}_n(\mathbb{Z})$  s'écrit comme  $\mathbb{Z}$ -combinaison linéaire unique des polynômes binomiaux  $\binom{X}{k}_{k \leq n}$ :

*Preuve.* Soit  $f = \sum_{k=0}^n c_k \binom{X}{k}$  la décomposition de  $f$  sur la  $\mathbb{Q}$ -base  $\binom{X}{k}_{k \leq n}$ . Il s'agit de montrer que les  $c_k$  sont dans  $\mathbb{Z}$ . Par l'absurde, soit  $j$  le plus petit indice tel que  $c_j \notin \mathbb{Z}$ . Si  $k > j$ ,  $c_k \binom{X}{k}(j) = 0$  et si  $k < j$ ,  $c_k \binom{X}{k}(j) \in \mathbb{Z}$  par définition de  $j$ . Il vient  $c_j = c_j \binom{X}{j}(j) = f(j) - \sum_{k=0}^{j-1} c_k \binom{X}{k}(j) \in \mathbb{Z}$ , contradiction.  $\square$

On a donc:

**Proposition 1.1.**  $\text{Int}_n(\mathbb{Z})$  est un  $\mathbb{Z}$  module libre de rang  $n+1$  et  $\binom{X}{k}_{k \leq n}$  en est une base.

On peut naturellement généraliser la situation à un anneau de Dedekind  $D$ , et même à un sous-ensemble  $E \subset D$ . On a en tête l'anneau des entiers d'un corps de nombres ou un anneau de valuation discrète.

**Definition 1.2.** Soit  $D$  un anneau de Dedekind de corps des fractions  $K$  et  $E \subset D$ . On note  $\text{Int}(E, D)$  l'ensemble des polynômes  $P$  de  $K[X]$  tels que  $P(E) \subset D$  et  $\text{Int}_n(E, D)$  l'ensemble des éléments de  $\text{Int}(E, D)$  de degré au plus  $n$ . Ce sont des  $D$  modules.

On peut alors se poser la question suivante :

**Question 1.** La Proposition 1.1 subsiste-t-elle dans ce cadre plus général ? Autrement dit,  $\text{Int}_n(E, D)$  est-il un  $D$  module libre de rang  $n+1$ , et si oui, peut-on trouver une base  $\{f_k\}_{k \leq n}$  telle que  $\deg(f_k) = k$  ?

Même si  $\text{Int}_n(E, D)$  est libre, il se peut qu'il n'existe pas de base  $\{f_k\}_{k \leq n}$  vérifiant  $\deg(f_k) = k$ . Si une telle base existe, on dit que c'est une base *régulière*.

L'objectif du présent papier est de répondre à la Question 1 et de présenter un algorithme pour effectivement construire quand elle existe une base régulière de  $\text{Int}_n(E, D)$  dans le cas  $E = D$  où  $D$  est l'anneau des entiers d'un corps de nombre.

Il s'agira ensuite de généraliser cette construction à deux sous-modules de  $\text{Int}_n(E, D)$  qui seront introduits en section 3 et 4, et de fournir à nouveau des algorithmes de construction de bases régulières pour ces sous-modules.

Ces algorithmes ont été implémentés en C en utilisant la bibliothèque pari/GP et réunis avec d'autres dans une librairie consultable à l'adresse:

<https://github.com/vilanele/libfact>

Les exemples présents dans ce papier ont été construits à l'aide de cette librairie, et quelques références de fonctions seront données à la fin des différentes parties. On renvoie à la documentation pour des descriptions détaillées.

Les principales sources sur lesquelles est basé ce document sont [Bha09] et [Joh10]. On généralise notamment certains résultats donnés sur  $\mathbb{Z}$  dans le deuxième papier à l'anneau des entiers d'un corps de nombres.

Dans l'ensemble de ce document,  $D$  est un anneau de Dedekind de corps des fractions  $K$ .

On note  $E$  un sous-ensemble infini de  $D$ ,  $P$  un idéal premier de  $D$ , et  $\pi \in P \setminus P^2$  une uniformisante.

## 2 Base régulière de $\text{Int}_n(E, D)$

### 2.1 Suite ordonnée

Dans le but de généraliser à  $K[X]$  les polynômes binomiaux  $\binom{X}{n} \in \mathbb{Q}[X]$ , Bhargava a introduit la notion de *P-ordering* ([Bha97]) que l'on nommera en français *suite P-ordonnée*.

La définition d'une suite *P-ordonnée* est une généralisation à tout anneau de Dedekind de la remarque suivante: pour tout nombre premier  $p$ , la suite ordonnée  $(0, 1, 2, 3, \dots) = (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots)$  des entiers naturels est telle que pour tout  $n \geq 0$ ,  $a_n$  réalise le minimum suivant:

$$\min_{x \in \mathbb{Z}} v_p \left( \prod_{i=0}^{n-1} (x - a_i) \right)$$

On est donc amené à la définition suivante:

**Definition 2.1.** On appelle suite *P-ordonnée* de  $E$  toute suite  $(a_n)_{n \geq 0}$  d'éléments de  $E$  telle que pour tout  $n \geq 0$ ,  $a_n$  vérifie:

$$\min_{x \in E} v_P \left( \prod_{i=0}^{n-1} (x - a_i) \right) = v_P \left( \prod_{i=0}^{n-1} (a_n - a_i) \right) = e_n$$

On appelle *P-séquence* associée à la suite *P-ordonnée*  $(a_n)_{n \geq 0}$  la suite décroissante d'idéaux  $(P^{e_0}, P^{e_1}, P^{e_2}, P^{e_3}, \dots)$ .

On a alors le théorème d'indépendance suivant:

**Theoreme 2.1.** *La P-séquence associée à une suite P-ordonnée  $\delta$  de  $E$  est indépendante de  $\delta$ .*

Le Theoreme 2.1 sera démontré à la fin de la prochaine section.

### 2.2 Base régulière dans le cas local

Dans cette section, on montre que dans le cas où  $D$  est local,  $\text{Int}_n(E, D)$  possède toujours une base régulière que l'on construit à l'aide d'une suite  $\pi$ -ordonnée de  $E$  par un procédé en tout point équivalent à celui présenté dans l'introduction pour  $\text{Int}_n(\mathbb{Z})$ . Ce résultat permet alors de démontrer le Theoreme 2.1.

Nous avons vu que dans le cas  $D = E = \mathbb{Z}$ , la suite  $(0, 1, 2, \dots)$  est une suite  $p$ -ordonnée de  $\mathbb{Z}$  pour tout premier  $p$  simultanément. Ce fait permet de définir les polynômes binomiaux  $\binom{X}{n}$  qui permettent à leurs tour d'exprimer tout polynôme à valeurs entières comme  $\mathbb{Z}$  combinaison linéaire des  $\binom{X}{n}$ .

Si on essaye d'appliquer le même procédé à  $E$  et  $D$  quelconques, on se heurte rapidement à l'obstruction suivante: il n'existe pas toujours dans  $E$  de suite *P-ordonnée* pour tout  $P$  simultanément. En revanche, si  $D$  est local, toute suite  $\pi$ -ordonnée de  $E$  l'est pour tout premier simultanément puisque  $(\pi)$  est le seul idéal premier ! On peut alors reproduire le procédé présenté en introduction pour  $\text{Int}_n(\mathbb{Z})$ .

Jusqu'à la fin de cette section, sauf mention du contraire,  $D$  est local. Soit  $\delta = (a_n)_{n \geq 0}$  une suite  $\pi$ -ordonnée de  $E$ .

**Definition 2.2.** Pour tout  $n \geq 0$ , on pose

$$n!_{\delta,E} = \prod_{i=0}^{n-1} (a_n - a_i)$$

Par construction,  $(\pi)^{v_\pi(n!_{\delta,E})}$  est le  $n$ -ème terme de la  $\pi$ -séquence associée à  $\delta$ .

**Definition 2.3.** Pour tout  $n \geq 0$ , on définit le  $n$ -ème polynôme binomial associé à  $E$  et  $\delta$  par  $\binom{X}{0}_{\delta,E} = 1$  et pour  $n \geq 1$ :

$$\binom{X}{n}_{\delta,E} = \frac{(X - a_0)(X - a_1) \dots (X - a_{n-1})}{n!_{\delta,E}}$$

Par définition de  $\delta$  et  $n!_{\delta,E}$ , on a  $\binom{X}{k}_{\delta,E} \in \text{Int}_n(E, D)$ . Ces polynômes sont en tout point similaires aux polynômes  $\binom{X}{n} \in \mathbb{Q}[X]$ . Comme dans le cas de  $\text{Int}_n(\mathbb{Z})$ , on a:

**Theoreme 2.2.** Pour tout  $n$ , le  $D$ -module  $\text{Int}_n(E, D)$  est libre de rang  $n + 1$  et la famille

$$\left( \binom{X}{k}_{\delta,E} \right)_{k \leq n}$$

en est une base régulière.

*Preuve.* Soit  $f \in \text{Int}_n(E, D)$ ,  $f = \sum_{i=0}^n c_i \binom{X}{i}_{\delta,E}$  sa décomposition sur la  $K$ -base  $\left( \binom{X}{k}_{\delta,E} \right)_{k \leq n}$ . Il s'agit de montrer que les  $c_i$  sont dans  $D$ . Par l'absurde, soit  $j$  le plus petit indice tel que  $c_j$  ne soit pas dans  $D$ . Si  $k > j$ ,  $c_k \binom{X}{k}_{\delta,E}(a_j) = 0$  et si  $k < j$ ,  $c_k \binom{X}{k}_{\delta,E}(a_j) \in D$  par définition de  $j$ .

Il vient  $c_j = c_j \binom{X}{j}_{\delta,E}(a_j) = f(a_j) - \sum_{k=0}^{j-1} c_k \binom{X}{k}_{\delta,E}(a_j) \in D$ , contradiction.  $\square$

**Corrolaire 2.1.** Un polynôme  $f \in K[X]$  de degré  $n$  est à valeurs entières sur  $E$  si et seulement si il est à valeurs entières sur  $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ .

*Preuve.* Si  $f$  est à valeur entière sur  $E$ , il l'est à fortiori sur  $\{a_0, a_1, \dots, a_n\} \subset E$ . Pour la réciproque, il suffit de remarquer que dans la preuve du Theoreme 2.2 on utilise uniquement le fait que  $f(\{a_0, a_1, \dots, a_n\}) \subset D$ .  $\square$

**Corrolaire 2.2.** Soit  $\delta$  une suite  $\pi$ -ordonnée de  $E$ . La  $\pi$ -séquence associée à  $\delta$  ne dépend pas de  $\delta$ .

*Preuve.* Le Theoreme 2.2 implique que l'idéal fractionnaire formé par zéro et l'ensemble des coefficients dominants des éléments de  $\text{Int}_n(E, D)$  de degré  $n$  est  $(n!_{\delta,E})^{-1}D$  et cela pour tout  $\delta$ . Ainsi l'entier  $v_\pi(n!_{\delta,E})$  ne dépend pas de  $\delta$  et par conséquent la  $\pi$ -séquence associée à  $\delta$  non plus.  $\square$

**Remarque 2.1.** On a donc  $n!_{\delta_1,E}D = n!_{\delta_2,E}D$  pour tout  $\delta_1, \delta_2$ . On peut donc noter simplement  $n!_E D$ .

**Definition 2.4.** On appelle fonction factorielle associée à  $E$  la fonction

$$n \rightarrow n!_E = n!_E D$$

Le Theoreme 2.1 est conséquence immédiate du Corrolaire 2.2:

*Preuve du Theoreme 2.1.* Soit  $D$  quelconque,  $P$  un idéal premier de  $D$ ,  $D_P$  le localisé de  $D$  en  $P$  et  $\delta$  une suite  $P$ -ordonnée de  $E$ . La suite  $\delta$  est aussi une suite  $\pi$ -ordonnée de  $E \subset D_P$  et les exposants dans la  $\pi$ -séquence associée à  $\delta$  sont les même que dans la  $P$ -séquence associée à  $\delta$ . On applique alors le Corrolaire 2.2.  $\square$

## 2.3 Base régulière

$D$  est quelconque (plus nécessairement local).

Dans cette section, on énonce une condition nécessaire et suffisante pour que  $\text{Int}_n(E, D)$  admette une base régulière et lorsque c'est le cas, on explique comment construire une telle base à partir de suites  $P$ -ordonnée pour un nombre fini de  $P$  à l'aide du théorème chinois.

Les résultats obtenus dans le cas local suggèrent qu'en général les coefficients dominants des éléments de  $\text{Int}_n(E, D)$  jouent un rôle important.

**Definition 2.5.** Pour tout  $n$ , on définit  $\mathfrak{J}_n(E, D)$  comme l'ensemble formé de zéro et des coefficients dominants des éléments de  $\text{Int}_n(E, D)$  de degré  $n$ .

**Proposition 2.1.**  $\mathfrak{J}_n(E, D)$  est un idéal fractionnaire.

*Preuve.* Soit  $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in \text{Int}_n(E, D)$  de degré  $n$  et soient  $x_0, x_1, \dots, x_n$  des éléments distincts de  $E$ . En considérant les  $a_i$  comme des inconnus, les  $f(x_i)$  forment un système de  $n+1$  équations linéaires (à  $n+1$  inconnues) à coefficients dans  $D$ . Le déterminant du système est le déterminant de Vandermonde  $d = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$ . D'après les fameuses formules de Cramer,  $da_i \in D$  pour tout  $i$ . Autrement dit on a  $\mathfrak{J}_n(E, D) \subset \frac{1}{d}D$ .  $\square$

On a alors la propriété centrale suivante qui lie l'existence d'une base régulière de  $\text{Int}_n(E, D)$  à la principalité des idéaux fractionnaires  $\mathfrak{J}_k(E, D)_{k \leq n}$

**Theoreme 2.3.**  $\text{Int}_n(E, D)$  possède une base régulière si et seulement si les idéaux fractionnaires  $\mathfrak{J}_k(E, D)_{k \leq n}$  sont principaux.

*Preuve.* Supposons que pour tout  $k \leq n$ ,  $\mathfrak{J}_k(E, D) = a_k D$  avec  $a_k \in K$ . Par définition, il existe une suite  $(f_k)_{k \leq n}$  dans  $\text{Int}_n(E, D)$  telle que  $\deg(f_k) = k$  et  $a_k$  soit le coefficient dominant de  $f_k$ . Soit  $f \in \text{Int}_n(E, D)$  de degré  $m \leq n$  et  $a$  son coefficient dominant. Par hypothèse il existe  $\beta \in D$  tel que  $a = \beta a_m$ . Alors en posant  $g = f - \beta f_m$ , on a  $g \in \text{Int}_n(E, D)$  et  $\deg(g) < m$ . En itérant le procédé (au plus  $m$  fois), on obtient une décomposition  $D$ -linéaire de  $f$  sur la famille  $(f_k)_{k \leq n}$ , nécessairement unique.

Réciproquement, supposons que  $\text{Int}_n(E, D)$  admette une base régulière  $(f_k)_{k \leq n}$  et soit  $a_k$  le coefficient dominant de  $f_k$ . Puisque  $\text{Int}_n(E, D)$  est un  $D$  module, on a immédiatement  $a_k D \subset \mathfrak{J}_k(E, D)$  pour tout  $k$ . Soit  $f \in \text{Int}_n(E, D)$  de degré  $m \leq n$  et  $f = \lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_m f_m$  sa décomposition sur la base  $(f_k)_{k \leq n}$ . Le coefficient dominant de  $f$  est donc  $\lambda_m a_m \in a_m D$ . Donc  $\mathfrak{J}_m(E, D) \subset a_m D$  et finalement  $\mathfrak{J}_m(E, D) = a_m D$  pour tout  $m \leq n$ .  $\square$

Ainsi, lorsque les idéaux  $\mathfrak{J}_k(E, D)_{k \leq n}$  sont principaux de générateurs  $\beta_k$ , il suffit pour construire une base régulière de trouver  $n + 1$  polynômes  $(f_k)_{k \leq n}$  de  $K[X]$  tels que  $\deg(f_k) = k$  et tels que le coefficient dominant de  $f_k$  soit  $\beta_k$ .

La proposition suivante permet de lier les idéaux fractionnaires  $\mathfrak{J}_n(E, D)$  à ceux des localisés  $D_P$  puis de construire une factorielle généralisée  $n!_E$  pour  $D$  quelconque à partir des  $n!_{E_P}$ .

**Proposition 2.2.**

$$\text{Int}_n(E, D_P) = \text{Int}_n(E, D)_P$$

*Preuve.* Soit  $f \in \text{Int}_n(E, D)_P$ . Pour tout  $x \in E$ , on a  $f(x) \in D_P$  puisque les coefficients de  $f$  sont dans  $D_P$  et que  $E \subset D \subset D_P$ .

Réciproquement soit  $f \in \text{Int}_n(E, D_P)$  et soit  $I$  le  $D$ -module engendré par ses coefficients. Pour  $x \in E$ , on a donc  $f(x) \in I \cap D_P$ . Puisque  $D$  est Noëtherien,  $I \cap D_P$  est finiment engendré. Il existe donc  $s \in D \setminus P$  tel que  $sf \in \text{Int}_n(E, D)$ , i.e  $f \in \text{Int}_n(E, D)_P$ .  $\square$

**Corrolaire 2.3.** Soit  $n!_{E_P}$  la factorielle associée à  $E \subset D_P$ . On a  $n!_{E_P} = D$  sauf pour un nombre fini de  $P$

*Preuve.*  $n!_{E_P} \neq D$  pour les  $P$  qui divisent  $\mathfrak{J}_n^{-1}(E, D)$  qui sont en nombre fini.  $\square$

La Proposition 2.2 permet naturellement d'étendre la fonction factorielle définie dans le cas local à  $D$  quelconque:

**Définition 2.6.** On appelle fonction factorielle associée à  $E$  la fonction

$$n \rightarrow n!_E = \mathfrak{J}_n^{-1}(E, D) = \prod_{(P, \pi)} P^{v_\pi(n!_{E_P})}$$

On présente maintenant un algorithme pour construire un polynôme  $A_n \in D[X]$  de degré  $n$  tel que  $A_n(D) \subset n!_E$ .

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$  les premiers qui divisent  $n!_E$ . Pour tout  $1 \leq i \leq m$  soit  $(u_{i,k})_{0 \leq k < n}$  les  $n$  premiers termes d'une suite  $P_i$ -ordonnée de  $E$ . On note également  $e_{i,n} = v_{P_i}(n!_E)$ .

**Algorithme 2.1.**

1. Pour tout  $0 \leq k < n$ , on construit à l'aide du théorème chinois un élément  $a_k$  vérifiant pour tout  $1 \leq i \leq m$ :

$$a_k \equiv u_{i,k} \pmod{P_i^{e_{i,n}+1}}$$

2. On retourne le polynôme  $A_n = (X - a_0)(X - a_1) \dots (X - a_{n-1})$ .

La suite  $(a_k)_{k \leq n}$  est construite afin d'être  $P_i$ -ordonnée simultanément pour tout les  $P_i \in \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ .

**Théorème 2.4.** On a  $A_n(E) \subset n!_E$ .

*Preuve.* Soit  $x \in E$ . Il suffit de montrer que  $v_P(A_n(x)) \geq v_P(n!_E)$  pour tout  $P$ . Si  $P \notin \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ ,  $v_P(n!_E) = 0$ . On peut donc se restreindre à  $P_i \in \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ . Mais alors par construction

$$\begin{aligned}
v_{P_i}(A_n(x)) &= \sum_{k=0}^{n-1} v_{P_i}(x - a_k) \\
&\geq \sum_{k=0}^{n-1} v_{P_i}(a_n - a_k) \quad \left( = \sum_{k=0}^{n-1} v_{P_i}(u_{i,n} - u_{i,k}) \right) \\
&= v_{P_i}(n!_E)
\end{aligned}$$

□

Pour que  $\text{Int}_n(E, D)$  admette une base régulière, il est nécessaire d'après le Theoreme 2.3 que les idéaux  $k!_E$  pour  $k \leq n$  soient principaux. On suppose donc que c'est la cas et on note  $\beta_k$  un générateur de  $k!_E$ .

Soit  $(A_k)_{0 \leq k \leq n}$  des polynômes de  $D[X]$  tels que  $A_k(D) \subset k!_D$ , par exemple construits avec l'Algorithme 2.1. On pose  $B_k = \frac{1}{\beta_k} A_k$ .

**Theoreme 2.5.** *La famille  $\{B_0, B_1, B_2, \dots, B_n\}$  est une base régulière de  $\text{Int}_n(E, D)$*

*Preuve.* Pour tout  $k$ ,  $B_k$  est un polynôme de degré  $k$ , à valeurs entières d'après le Theoreme 2.4 et de coefficient dominant  $\beta_k$  par construction. D'après le Theoreme 2.3,  $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$  est une base régulière de  $\text{Int}_n(E, D)$ . □

## 2.4 Calcul effectif pour $E = D$

Pour construire en utilisant les résultats de la section précédente une base régulière de  $\text{Int}_n(E, D)$  lorsque les  $(k!_E)_{k \leq n}$  sont principaux, on a besoin de savoir:

1. déterminer les idéaux premiers qui divisent  $n!_E$
2. construire les  $n$  premiers terme d'une suite  $P$ -ordonnée de  $E$

Réaliser le deuxième point demande si on applique la définition d'une suite  $P$ -ordonnée de  $E$  de prendre un minimum sur un ensemble infini, ce qui n'est pas réalisable tel quel.

Cependant, dans le cas où  $E = D$  et où  $D/P$  est de cardinal fini pour tout  $P$ , il est possible de construire effectivement les  $n$  premiers termes d'une suite  $P$ -ordonnée de  $D$  en utilisant la finitude de  $D/P$  et l'homogénéité de  $D$ . On peut également en déduire les idéaux qui divisent  $n!_D$ .

On présente un tel algorithme puis on l'applique dans le cas où  $D$  est un corps de nombres sur quelques exemples.

Dans cette partie,  $D/P$  est de cardinal fini pour tout  $P$ .

### 2.4.1 Construction d'une suite $P$ -ordonnée de $D$

On propose un algorithme pour construire les  $n$  premiers termes d'une suite  $P$ -ordonnée de  $D$ . On utilise de manière cruciale le fait que  $D$  est réunion disjointe finie des différentes classes modulo  $P$ . On généralise notamment aux entiers d'un corps de nombres certains théorèmes donnés pour  $\mathbb{Z}$  dans [Joh10].



Le cardinal de  $D/P$  est noté  $q$ .

Soit  $\{r_0, r_1, \dots, r_{q-1}\}$  un système de représentants modulo  $P$ . On note  $D_{r_i} = \{x \in D : x \equiv r_i \pmod{P}\}$ .

On montre que les  $D_{r_i}$  ont tous la même  $P$ -séquence

**Proposition 2.3.** *Pour tout  $r_i, r_j$  on a*

$$v_P(n!_{D_{r_i}}) = v_P(n!_{D_{r_j}})$$

*Preuve.* Soit  $c \in D$  tel que  $D_{r_i} + c = D_{r_j}$  et soit  $(a_n)_n$  une suite  $P$ -ordonnée de  $D_{r_i}$ . Puisque pour tout  $x, y, c \in D$  on a

$$v_P(x - y) = v_P((x + c) - (y + c))$$

la suite  $(a_n + c)_n$  est une suite  $P$ -ordonnée de  $D_{r_j}$  et  $v_P(n!_{D_{r_i}}) = v_P(n!_{D_{r_j}})$ .  $\square$

On relie ensuite la  $P$ -séquence de  $D$  à celle des  $D_{r_i}$ .

**Proposition 2.4.** *L'application*

$$\theta_i : x \rightarrow x\pi + r_i$$

*envoie une suite  $P$ -ordonnée de  $D$  sur une suite  $P$ -ordonnée de  $D_{r_i}$ .*

*Preuve.* Soit  $(a_n)_n$  une suite  $P$ -ordonnée de  $D$ . Pour tout  $x, y \in D$ , on a

$$v_P(\theta_i(x) - \theta_i(y)) = v_P(\pi(x - y)) = 1 + v_P(x - y)$$

Par récurrence sur  $n \geq 0$ , le minimum à la  $n$ -ème étape de construction d'une suite  $P$ -ordonnée de  $D_{r_i}$  est atteint par  $\theta_i(a_n)$ , ce qui fait de  $(\theta_i(a_n))_n$  une suite  $P$ -ordonnée de  $D_{r_i}$ .  $\square$

**Corrolaire 2.4.** *Pour tout  $n \geq 0$  on a*

$$v_P(n!_{D_{r_i}}) = v_P(n!_D) + n$$

*Preuve.*

$$\begin{aligned} v_P(n!_{D_{r_i}}) &= \sum_{k=0}^{n-1} v_P(\theta_i(a_n) - \theta_i(a_k)) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (v_P(a_n - a_k) + 1) = v_P(n!_D) + n \end{aligned}$$

$\square$

On cherche désormais à construire une suite  $P$ -ordonnée de  $D$  à partir de suites  $P$ -ordonnées des  $D_{r_i}$ . On a besoin de la notion d'entrelacement de suites:

**Définition 2.7.** Soient  $(\phi_1, \dots, \phi_m)$  des applications de  $\mathbb{N}$  vers  $\mathbb{N}$ . On dit que  $(\phi_1, \dots, \phi_m)$  est un entrelacement si  $\phi_i$  est strictement croissante et si  $\cup_i \phi_i(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$ .

On dit qu'une suite  $(b_n)_n$  est le  $(\phi_1, \dots, \phi_m)$  entrelacement des suites

$$((a_{i,n})_n)_{1 \leq i \leq m}$$

si pour tout  $i$  la suite  $(a_{i,n})_n$  est une sous-suite de  $(b_n)_n$  d'extractrice  $\phi_i^{-1}$ .

On montre maintenant que l'entrelacement  $q$ -uniforme de suites  $P$ -ordonnée des  $D_{r_i}$  résulte en une suite  $P$ -ordonnée de  $D$ . On en tire notamment que  $v_P(n!_D)$  ne dépend pas de  $P$  mais que du cardinal  $q$  de  $D/P$ , puis un algorithme pour construire une suite  $P$ -ordonnée de  $D$ .

**Proposition 2.5.** *Pour tout  $0 \leq i < q$  et tout  $n \geq 0$  soit*

$$\phi_i(n) = nq + i$$

*La suite obtenue par  $(\phi_i)_{0 \leq i < q}$  entrelacement de suites  $P$ -ordonnée des  $D_{r_i}$  est une suite  $P$ -ordonnée de  $D$ .*

*Preuve.* Soit  $(a_n)_n$  une telle suite et soit  $qk \leq n < q(k+1)$  pour un certain  $k$ . Soit  $D_{r_{i_0}}$  la classe contenant  $a_n$ . Par définition des  $\phi_i$ , il y a exactement  $k$  éléments dans chaque classe parmi les  $qk$  premiers termes de la suite. Supposons par l'absurde qu'il existe  $x \in D$  tel que

$$\sum_{j=0}^{n-1} v_P(x - a_j) < \sum_{j=0}^{n-1} v_P(a_n - a_j)$$

et soit  $D_{r_{i_1}}$  la classe contenant  $x$ . Puisque  $v_P(x - y) = 0$  dès que  $x$  et  $y$  sont dans des classes différentes, on a

$$\sum_{j=0}^{n-1} v_P(a_n - a_j) \geq v_P(k!_{D_{r_{i_0}}}) \text{ et } \sum_{j=0}^{n-1} v_P(x - a_j) \geq v_P(k!_{D_{r_{i_1}}})$$

Mais

$$v_P(k!_{D_{r_{i_1}}}) = v_P(k!_{D_{r_{i_0}}})$$

d'après la Proposition 2.3, contradiction. □

**Corrolaire 2.5.** *Pour tout  $n \geq 0$  on a*

$$v_P(n!_D) = v_P(\lfloor n/q \rfloor!_D) + \lfloor n/q \rfloor$$

*Preuve.* Le  $n$ -ème terme de la suite obtenue par  $(\phi_i)_{0 \leq i < q}$  entrelacement de suites  $P$ -ordonnée des  $D_{r_i}$  est le  $\lfloor n/q \rfloor$ -ème terme d'une suite  $P$ -ordonnée de l'un des  $D_{r_i} = D_{r_{i_0}}$ . On a donc

$$v_P(n!_D) = v_P(\lfloor n/q \rfloor!_{D_{r_{i_0}}})$$

On applique alors le Corrolaire 2.4. □

**Corrolaire 2.6.** *Pour tout  $n \geq 0$  on a*

$$v_P(n!_D) = \sum_{k=1}^n \lfloor n/q^k \rfloor$$

*En conséquence  $v_P(n!_D)$  ne dépend pas de  $P$  mais uniquement du cardinal  $q$  de  $D/P$ .*

*Preuve.* Il suffit d'itérer la formule du Corrolaire 2.5. □

**Notation 2.1.** Pour tout  $n \geq 0$  et  $q \geq 2$  on pose

$$w_q(n) = \sum_{k=1}^n \lfloor n/q^k \rfloor$$

**Corrolaire 2.7.** Pour tout  $q \geq 2$ , soit  $M_q$  le produit des idéaux premiers de norme  $q$ . Pour tout  $n \geq 0$  on a

$$n!_D = \prod_{(P,q)} P^{w_q(n)} = \prod_{q=2}^n M_q^{w_q(n)}$$

*Preuve.* On a  $w_q(n) = 0$  dès que  $q > n$ . □

On est en mesure de proposer un algorithme pour construire les  $n$  premiers termes d'une suite  $P$ -ordonnée de  $D$ .

**Algorithme 2.2.**

1. Les  $q$  premiers termes  $(a_0, a_1, \dots, a_{q-1})$  sont simplement  $(r_0, r_1, \dots, r_{q-1})$ .

Puisque  $v_P(r_i - r_j) = 0$  quelque soient  $r_i \neq r_j$ , on a pour tout  $s < q$

$$\sum_{j=0}^{s-1} v_P(a_s - a_j) = 0$$

donc  $(a_0, a_1, \dots, a_{q-1})$  forme bien les  $q$  premiers termes d'une suite  $P$ -ordonnée de  $D$ .

2. Les  $q^k$  premiers termes  $(a_j)_{j < q^k}$  d'une suite  $P$ -ordonnée de  $D$  étant donnés, on construit pour chaque  $0 \leq i < q$  la suite

$$u_{i,k} = (\theta_i(a_j))_{j < q^k}$$

D'après la Proposition 2.4,  $u_{i,k}$  forme les  $q^k$  premiers termes d'une suite  $P$ -ordonnée de  $D_{r_i}$ .

On construit alors le  $(\phi_i)_{0 \leq i < q}$  entrelacement des suites  $u_{i,k}$ . D'après la Proposition 2.5, la suite résultante forme les  $q^{k+1}$  premiers termes d'une suite  $P$ -ordonnée de  $D$ .

On itère ce procédé tant que  $k \leq \lfloor \log_q(n) \rfloor$ . Enfin on tronque (éventuellement) la suite résultante au  $n$ -ème terme. On obtient au final les  $n$  premiers termes d'une suite  $P$ -ordonnée de  $D$ .

### 2.4.2 Algorithme pour $\text{Int}_n(D)$

On résume maintenant la procédure pour construire lorsque les  $(k!_D)_{k \leq n}$  sont principaux une base régulière de  $\text{Int}_n(D)$ :

1. Pour chaque  $k \leq n$ , on détermine les idéaux premiers  $T_k$  qui divisent  $k!_D$ . D'après le Corrolaire 2.7 ce sont tout les idéaux premiers de norme  $q \leq k$ . On calcul également pour tout  $q \leq n$  le produit  $M_q$  des idéaux premiers de norme  $q$ . Pour cela, on utilise les méthodes standards pour factoriser les premiers  $p \leq n$  dans  $D$ .
2. On construit pour chaque  $P \in \bigcup_{k \leq n} T_k$  les  $n$  premiers termes d'une suite  $P$ -ordonnée de  $D$  en utilisant l'Algorithme 2.2.

3. Pour chaque  $k \leq n$  on utilise l'Algorithme 2.1 pour construire le polynôme  $A_k$  tel que  $A_k(D) \subset k!_D$ . On utilise pour  $P \in T_k$  les  $k$  premiers termes des suites  $P$ -ordonnées construites à l'étape 2).
4. On calcul ensuite pour chaque  $0 \leq k \leq n$  l'idéal  $k!_D$  par la formule du Corrolaire 2.7. On utilise alors les  $M_q$  calculés à l'étape 1).
5. Pour tout  $k \leq n$ , on calcul un générateur  $\beta_k$  de  $k!_D$  par les méthodes standards puis  $B_k = \frac{1}{\beta_k} A_k$ .

La famille  $(B_0, B_1, \dots, B_k)$  ainsi construite est une base régulière de  $\text{Int}_n(D)$ .

### 2.4.3 Exemples

#### Exemple 1

Soit  $K = \mathbb{Q}(i)$ . L'anneau  $\mathbb{Z}[i]$  est principal, donc tout les  $n!_{\mathbb{Z}[i]}$  sont principaux et  $\text{Int}_n(\mathbb{Z}[i])$  admet une base régulière pour tout  $n$ .

On construit ici une base régulière de  $\text{Int}_5(\mathbb{Z}[i])$ .

1. On détermine pour  $q \leq 5$  les idéaux premiers  $T_q$  de norme  $q$  et le produit  $M_q$  des idéaux de norme  $q$ :

$q$	$T_q$	$M_q$
2	$(1 + i)$	$(2)$
5	$(2 + i), (-2 + i)$	$(5)$

2. On construit pour chaque idéal premier qui divise  $5!_{\mathbb{Z}[i]}$  les 5 premiers termes d'une suite  $P$ -ordonnée de  $\mathbb{Z}[i]$ :

Ideal $P$	Suite $P$ -ordonnée
$(1 + i)$	$(0, 1, 1 + i, 2 + i, 2, 1 + 2i)$
$(2 + i)$	$(0, 1, 2, 3, 4)$
$(-2 + i)$	$(0, 1, 2, 3, 4)$

3. On construit les  $A_k$  pour  $k \leq 5$ :

$k$	$A_k(X)$
0	1
1	$X$
2	$X^2 + X$
3	$X^3 + (2 + i)X^2 + (1 + i)X$
4	$X^4 - 2iX^3 + (i - 4)X^2 + (3 + i)X$
5	$X^5 + 40X^4 + (2160 + 1325i)X^3 + (54525 - 2775i)X^2 + (1450i - 56726)X$

4. et 5. On détermine  $k!_{\mathbb{Z}[i]}$  et un générateur pour  $k \leq 5$ :

$k$	$k!_{\mathbb{Z}[i]}$	Gen
0	$\mathbb{Z}[i]$	1
1	$\mathbb{Z}[i]$	1
2	$(1+i)$	$(1+i)$
3	$(1+i)$	$(1+i)$
4	$(1+i)^3$	$(2+2i)$
5	$(1+i)^3(2+i)(-2+i)$	$(10+10i)$

On obtient la base suivante:

$$B_0(X) = 1 \quad B_1(X) = X \quad B_2(X) = \frac{1-i}{2}X^2 + \frac{1-i}{2}X$$

$$B_3(X) = \frac{1-i}{2}X^3 + \frac{3-i}{2}X^2 + X$$

$$B_4(X) = \frac{1-i}{4}X^4 + \frac{-1-i}{2}X^3 + \frac{-3+5i}{4}X^2 + \frac{2-i}{2}X$$

$$B_5(X) = \frac{1-i}{20}X^5 + (2-i)X^4 + \frac{697-167i}{4}X^3 + \frac{5175-5730i}{2}X^2 + \frac{-13819+14544}{5}X$$

*Exemple 2*

Soit  $K = \mathbb{Q}(\zeta_5)$ . L'anneau des entiers de  $K$  est  $D = \mathbb{Z}[\zeta_5]$ . On peut montrer que dans un corps cyclotomique, les idéaux factoriels  $n!_D$  sont tous principaux ([Ler10, Proposition 1.40]). On donne une base régulière de  $\text{Int}_6(\mathbb{Z}[\zeta_5])$ :

$$B_0(X) = 1, \quad B_1(X) = X, \quad B_2(X) = X^2, \quad B_3(X) = X^3 \quad B_4(X) = X^4$$

$$B_5(X) = \frac{-4-3\zeta_5-2\zeta_5^2-\zeta_5^3}{5}X^5 + (2+2\zeta_5+\zeta_5^2)X^3 + \frac{-6-7\zeta_5-3\zeta_5^2+\zeta_5^3}{5}X$$

$$B_6(X) = \frac{-4-3\zeta_5-2\zeta_5^2-\zeta_5^3}{5}X^6 - \zeta_5^2X^5 + (2+2\zeta_5+\zeta_5^2)X^4 + (\zeta_5+3\zeta_5^2+\zeta_5^3)X^3 \\ + \frac{-6-7\zeta_5-3\zeta_5^+\zeta_5^3}{5}X^2 + (-\zeta_5-2\zeta_5^2-\zeta_5^3)X$$

*Exemple 3*

Soit  $K = Q(\zeta_5)$  encore, et soit

$$\begin{aligned} f(X) = & \frac{-3 - \zeta_5 - 4\zeta_5^2 - 2\zeta_5^3}{5}X^6 + \frac{6 - 18\zeta_5 - 2\zeta_5^2 + 4\zeta_5^3}{5}X^5 + (1 + \zeta_5 + 2\zeta_5^2 + \zeta_5^3)X^4 \\ & + (2 + 13\zeta_5 + 3\zeta_5^2 + 2\zeta_5^3)X^3 + \frac{8 - 4\zeta_5 - 6\zeta_5^2 - 8\zeta_5^3}{5}X^2 \\ & + \frac{16 - 37\zeta_5 - 28\zeta_5^2 - 4\zeta_5^3}{5}X + (2\zeta_5 + \zeta_5^2) = \sum_{i=0}^6 c_i f_i \end{aligned}$$

un polynôme de  $\mathbb{Q}(\zeta_5)[X]$  de degré 6.

On cherche à savoir si  $f$  est à valeurs entières et si oui, quelle est sa décomposition pour une base régulière donnée.

Considérons la base régulière  $B_r$  de  $\text{Int}_6(Q(\zeta_5))$  de l'exemple précédent, et soit  $M$  la matrice de passage de cette base à la base canonique  $C = \{1, X, X^2, X^3, X^4, X^5, X^6\}$  de  $Q(\zeta_5)_6[X]$  (polynômes de  $Q(\zeta_5)[X]$  de degré au plus 6). Soit  $F_C$  le vecteur de  $f$  sur la base canonique  $C$ .

Pour que  $f$  soit à valeurs entières, il faut et il suffit que le vecteur  $M^{-1}F_C$  ait tout ses coefficients dans  $\mathbb{Z}[\zeta_5]$ . On a:

$$\begin{aligned} M^{-1}F_C &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 + \zeta_5^2 + \zeta_5^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 + \zeta_5^2 + \zeta_5^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 - \zeta_5^2 - \zeta_5^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 - \zeta_5^2 - \zeta_5^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 - \zeta_5 - 3\zeta_5^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 + \zeta_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\zeta_5 + \zeta_5^2 \\ \zeta_5 \\ 2 - \zeta_5^3 \\ -3\zeta_5^2 + 2\zeta_5^3 \\ 0 \\ 5\zeta_5 - 4\zeta_5^2 \\ 1 + \zeta_5^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi  $f(X) \in \text{Int}_6(\mathbb{Z}[\zeta_5])$  et le vecteur  $M^{-1}F_C$  donne ses coordonnées sur la base régulière  $B_r$ .

#### 2.4.4 Fonctions pour $\text{Int}_n(D)$

Voici quelques fonctions utiles:

- la fonction `ispolyaupto(K, n)` teste si  $\text{Int}_n(D)$  admet une base régulière
- la fonction `zkregbasis(K, n, "X")` retourne (si possible) une base régulière (d'indéterminée "X") de  $\text{Int}_n(D)$
- la fonction `zkregbasis_dec(K, pol, "X")` retourne une matrice  $(n+1) \times 2$  (où  $n = \deg(\text{pol})$ ) avec une base régulière (d'indéterminée "X") dans la deuxième colonne et les coefficients de la  $K$ -décomposition de `pol` sur cette base dans la première.

Cette fonction permet aisément (comme dans l'exemple 3) de déterminer si un polynôme de  $K[X]$  est à valeurs entières: il faut et il suffit que les coefficients de la première colonne soient tous dans  $D$ .

### 3 Base régulière du sous-module $\text{Int}_n^r(E, D)$

Dans cette section, on présente un sous-module de  $\text{Int}_n(E, D)$  introduit par Bhargava ([Bha09]) qui dépend d'un nouveau paramètre  $r \geq 0$  ainsi qu'une nouvelle notion de suite ordonnée associée qui permet d'appliquer la même stratégie que dans la partie 2.

On donnera une condition nécessaire et suffisante pour que ce sous-module admette une base régulière, puis un algorithme de construction d'une telle base quand elle existe. On fournira plusieurs exemples concrets en fin de partie.

Dans toute cette partie,  $r$  est un entier positif.

#### 3.1 Le sous-module $\text{Int}_n^r(E, D)$

Un polynôme entier  $f$  (i.e  $f \in D[X]$ ) est bien sûr à valeurs entières sur tout  $E \subset D$ . Un tel polynôme préserve les congruences, c'est à dire que l'on a  $f(x) \equiv f(y) \pmod{P}$  dès que  $x \equiv y \pmod{P}$ . Autrement dit, le polynôme en deux variables

$$\phi^1 f(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

est à valeurs entières. Un polynôme quelconque de  $\text{Int}_n(E, D)$  ne possède pas nécessairement cette propriété.

La fonction  $\phi^1 f$  est la première différence divisée de  $f$ . On peut itérer ce procédé et définir la  $n$ -ème différence divisée de  $f$ :

**Definition 3.1.** Pour tout  $n \geq 0$  et tout  $f \in K[X]$ , on définit la  $n$ -ème différence divisée de  $f$  par  $\phi^0 f(x_0) = f(x_0)$  et

$$\phi^{n+1} f(x_0, \dots, x_{n+1}) = \frac{\phi^n f(x_0, \dots, x_n) - \phi^n f(x_0, \dots, x_{n-1}, x_{n+1})}{x_n - x_{n+1}}$$

**Remarque 3.1.**  $\phi^n f(x_0, \dots, x_n)$  est une fonction symétrique en  $(x_0, \dots, x_{n+1})$

**Remarque 3.2.** Si  $f$  s'annule sur  $\{a_0, \dots, a_n\}$ , alors  $\phi^n f(a_0, \dots, a_n) = 0$ .

On à la formule d'interpolation de Newton suivante

**Proposition 3.1.** Soit  $(a_0, \dots, a_{n-1})$  des éléments de  $E$  et  $f \in K[X]$  de degré  $n$ . Alors

$$\begin{aligned} f(x) = & f(a_0) + \phi^1 f(a_0, a_1)(x - a_0) + \phi^2 f(a_0, a_1, a_2)(x - a_1)(x - a_0) + \dots \\ & + \phi^n f(a_0, \dots, x)(x - a_0) \dots (x - a_{n-1}) \end{aligned}$$

En conséquence, un polynôme  $f$  est à valeurs entières sur  $E$  si et seulement si ses  $n$  premières différences divisées sont à valeurs entières sur  $E$ . On en vient à la définition

**Definition 3.2.** Pour tout  $r \geq 0$ , on définit  $\text{Int}_n^r(E, D)$  comme l'ensemble des  $f \in \text{Int}_n(E, D)$  tels que  $\phi^k f(x_0, x_1, \dots, x_k)$  est à valeurs entières pour tout  $k \leq r$ .

Par construction,  $\text{Int}_n^r(E, D)$  est un sous- $D$ -module de  $\text{Int}_n(E, D)$ . C'est l'ensemble des polynômes  $f$  de degré au plus  $n$  à valeurs entières sur  $E$  tels que le fait de savoir que ses  $r$  premières différences divisées soient à valeurs entières ne permet pas de déterminer si  $f \in D[X]$ .



### 3.2 Suite $(P, r)$ -ordonnée

On définit dans cette section une nouvelle notion de suite ordonnée d'éléments de  $E$  ([Bha09], [CC16]) qui à vocation à jouer le même rôle pour  $\text{Int}_n^r(E, D)$  qu'une suite  $P$ -ordonnée pour  $\text{Int}_n(E, D)$

**Definition 3.3.** Soit  $r \geq 0$  et  $\delta_r = (a_n)_n$  une suite dans  $E$ . On dit que la suite  $(a_n)_n$  est  $(P, r)$ -ordonnée si pour tout  $n \geq r + 1$

$$\min_{\substack{S_r \in N(n, r) \\ x \in E}} v_P \left( \prod_{k \in S_r} (x - a_k) \right) = \min_{S_r \in N(n, r)} v_P \left( \prod_{k \in S_r} (a_n - a_k) \right) = e_{r, n}$$

où  $N(n, r)$  est l'ensemble des sous-ensembles de  $\{0, \dots, n-1\}$  de cardinal  $n-r$ .

On appelle  $P$ -séquence associée à  $\delta_r$  la suite décroissante d'idéaux  $\{P_1, P_2, P_3, \dots\}$  dont les  $r$  premiers termes sont  $D$  et pour  $n \geq r + 1$ ,  $P_n = P^{e_{r, n}}$ .

Pour tout  $n$ , soit  $S_r(n)$  l'un des  $S_r$  réalisant la condition de minimalité au rang  $n$  et  $R_r(n) = \{n_1, \dots, n_r\} = \{0, \dots, n-1\} \setminus S_r(n)$  les indices des éléments étudiés correspondants.

Lorsqu'on se donne une suite  $(P, r)$ -ordonnée, on considère qu'on se donne implicitement des  $S_r(n)$  et  $R_r(n)$  pour tout  $n$ .

Contrairement aux suites  $P$ -ordonnées, un élément donné de  $E$  peut apparaître plusieurs fois dans une suite  $(P, r)$ -ordonnée. Il ne peut en revanche pas apparaître plus de  $(r + 1)$  fois.

On a alors le même théorème d'indépendance que pour les suite  $P$ -ordonnée

**Theoreme 3.1.** La  $P$ -séquence associée à une suite  $(P, r)$ -ordonnée  $\delta_r$  de  $E$  ne dépend pas de  $\delta_r$ .

La preuve du Theoreme 3.1 sera donnée à la fin de la prochaine section.

### 3.3 Base régulière dans le cas local

Dans cette section, sauf mention du contraire,  $D$  est local. On montre que dans ce cas  $\text{Int}_n^r(E, D)$  admet toujours une base régulière. Ce résultat permet ensuite de démontrer le Theoreme 3.1.

Soit  $\delta_r = (a_n)_n$  une suite  $(\pi, r)$ -ordonnée de  $E$ . On pose pour tout  $n$

$$n!_{(\delta_r, E)}^r = \prod_{i \in S_r(n)} (a_n - a_i)$$

**Definition 3.4.** Pour tout  $n \geq 0$ , on définit le  $n$ -ème polynôme binomial associé à  $E$  et  $\delta_r$  par  $\binom{X}{0}_{\delta_r, E} = 1$  et pour  $n \geq 1$

$$\binom{X}{n}_{\delta_r, E} = \frac{(X - a_0)(X - a_1) \dots (X - a_{n-1})}{n!_{(\delta_r, E)}^r}$$

Il n'est pas clair a priori que  $\binom{X}{n}_{\delta_r, E} \in \text{Int}_n^r(E, D)$ .

Pour le montrer, on aura besoin du lemme combinatoire suivant qui exprime pour tout  $(b_0, \dots, b_m)$  éléments de  $E$  la  $m$ -ème différence divisée  $\phi^m f(b_0, \dots, b_m)$  d'un polynôme  $f = (X - a_0) \dots (X - a_n)$  comme une somme de produits de la forme

$$\prod_{i \in I, j \in J} (b_j - a_i)$$

où  $I$  et  $J$  sont des sous-ensemble de  $\{0, \dots, n-1\}$  de cardinal  $n-m$ .

L'objectif du lemme est de construire  $I$  et  $J$  de sorte que, à défaut d'avoir un terme constant pour les  $b_j$ , on puisse minorer la valuation de chaque produit par la valuation d'un produit de la forme

$$\prod_{i \in I} (b_k - a_i)$$

pour un certain  $k$  et cela pour venir attraper la propriété de minimalité que possède par construction la suite  $(P, r)$ -ordonnée  $(a_n)_n$ .

**Notation 3.1.** Soient  $(a_0, \dots, a_{n-1})$  et  $(b_0, \dots, b_m)$  des éléments de  $E$ .

A toute suite  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_m)$  de la forme  $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m < n$ , on associe une suite  $(s_i(k))_{0 \leq k \leq n-1}$  définie de la manière suivante.

Pour tout  $k$ , soit

$$I_k = \{0, \dots, m\} \setminus \{s_i(i_j) : i_j < k\}$$

Alors  $s_i(k)$  est définie comme le plus petit élément de  $I_k$  qui maximise la quantité  $v_\pi(b_{s_i(k)} - a_k)$ .

Pour tout  $\mathbf{i} = \{i_1, \dots, i_m\}$ , l'ensemble  $\{0, \dots, m\} \setminus \mathbf{i}$  est réduit à un élément que l'on note naturellement  $s_i(n)$ .

**Remarque 3.3.** La suite  $s_i$  est construite de sorte que

$$v_\pi(b_{s_i(k)} - a_k) \geq v_\pi(b_{s_i(n)} - a_k)$$

On en vient au lemme annoncé

**Lemme 3.1.** Avec les notations précédentes, on a

$$\phi^m f(b_0, \dots, b_m) = \sum_{\mathbf{i}} \left( \prod_{k \in \{0, \dots, n-1\} \setminus \mathbf{i}} (b_{s_i(k)} - a_k) \right) \quad (1)$$

*Preuve.* La preuve se fait par récurrence sur  $m+n$ .

Si  $m+n=0$ , l'énoncé se résume à  $f=f$ . En fait, le lemme est même trivialement vraie pour  $m=0$  et  $n$  quelconque.

Soit  $t > 0$ . Supposons que le lemme soit vraie pour tout  $m+n < t$  et soient  $m, n$  tels que  $m+n=t$ . Si  $n > 1$ , on pose  $f_0(x) = \frac{f(x)}{x-a_0}$ ,  $f_0(x) = 0$  sinon.

On a le lemme intermédiaire suivant

**Lemme 3.2.**

$$\begin{aligned} \phi^m f(b_0, \dots, b_m) = \\ (b_{s_i(0)} - a_0) \phi^m f_0(b_0, \dots, b_m) + \phi^{m-1} f(b_0, \dots, \widehat{b_{s_i(0)}}, \dots, b_m) \end{aligned}$$

*Preuve.* Une récurrence sur  $m$  pour  $f$  fixé permet immédiatement de conclure.  $\square$

L'hypothèse de récurrence s'applique à  $\phi^m f_0(b_0, \dots, b_m)$  et à  $\phi^m f(b_0, \dots, \widehat{b_{s_i(0)}}, \dots, b_m)$ . Le premier terme correspond aux  $\mathbf{i}$  tels que  $i_1 = 0$  dans (1), tandis que le second correspond aux  $\mathbf{i}$  tels que  $i_1 \neq 0$ . Ceci achève la preuve.  $\square$

On est en mesure de montrer que les  $\binom{X}{n}_{\delta_r, E}$  sont à valeurs entières

**Theoreme 3.2.** *Pout tout  $n$*

$$\binom{X}{n}_{\delta_r, E} \in \text{Int}_n^r(E, D)$$

*Preuve.* Soient  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  les  $n$  premiers termes d'une suite  $(P, r)$ -ordonnée  $\delta_r$  de  $E$  et  $b_0, \dots, b_m$  des éléments quelconques de  $E$ ,  $m \leq r$ .

Pour tout  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_m)$  comme dans le Lemme 3.1, on a:

$$\begin{aligned} v_\pi \left( \prod_{k \in \{0, \dots, n-1\} \setminus \mathbf{i}} (b_{s_i(k)} - a_k) \right) &\geq v_\pi \left( \prod_{k \in \{0, \dots, n-1\} \setminus \mathbf{i}} (b_{s_i(n)} - a_k) \right) \geq v_\pi \left( \prod_{k \in \{0, \dots, n-1\} \setminus R_r(n)} (a_n - a_k) \right) \\ &= v_\pi \left( n!_{(\delta_r, E)}^r \right) \end{aligned}$$

Ainsi pour tout  $m \leq r$ , la  $m$ -ème différence divisée de  $\binom{X}{n}_{\delta_r, E}$  est somme de termes qui sont dans  $D$ , donc est à valeurs entières. Ceci montre que  $\binom{X}{n}_{\delta_r, E} \in \text{Int}_n^r(E, D)$ .  $\square$

**Theoreme 3.3.** *La famille  $\left( \binom{X}{k}_{\delta_r, E} \right)_{0 \leq k \leq n}$  est une base régulière de  $\text{Int}_n^r(E, D)$ .*

*Preuve.* Soit  $f \in \text{Int}_n^r(E, D)$  de degré  $n$  et

$$f = \sum_{k=0}^n c_k \binom{X}{k}_{\delta_r, E}$$

sa décomposition sur la  $K$ -base  $\left( \binom{X}{k}_{\delta_r, E} \right)_{0 \leq k \leq n}$ . On souhaite montrer que les  $c_k$  sont dans  $D$ .

Par l'absurde, soit  $j$  le plus petit indice tel que  $c_j \notin D$ .

On rappelle que  $R(j, r) = \{j_1, \dots, j_r\}$  est l'ensemble des indices des éléments étudiés pour réaliser le minimum à la  $j$ -ème étape du processus de construction de  $\delta_r$ .

L'idée est de calculer  $\phi^r f(a_{j_1}, \dots, a_{j_r}, a_j)$ .

- Si  $k > j$ , on a immédiatement

$$\phi^r \left( c_k \binom{X}{k}_{\delta_r, E} \right) (a_{j_1}, \dots, a_{j_r}, a_j) = 0$$

En effet, par définition de  $\binom{X}{k}_{\delta_r, E}$ ,  $\binom{X}{k}_{\delta_r, E}(a_{j_i}) = 0$  pour tout  $j_i$  et  $\binom{X}{k}_{\delta_r, E}(a_j) = 0$  aussi.

- Si  $k < j$ , on a

$$\phi^r \left( c_k \binom{X}{k}_{\delta_r, E} \right) (a_{j_1}, \dots, a_{j_r}, a_j) \in D$$

En effet,  $c_k \binom{X}{k}_{\delta_r, E}(x) \in D$  pour tout  $x \in E$  par définition de  $j$ .

- On a

$$\phi^r \left( c_j \binom{X}{j}_{\delta_r, E} \right) (a_{j_1}, \dots, a_{j_r}, a_j) = \frac{\phi^{r-1} \left( c_j \binom{X}{j}_{\delta_r, E} \right) (a_{j_1}, \dots, a_{j_{r-1}}, a_j)}{a_j - a_{j_r}}$$

En itérant, on obtient

$$\begin{aligned} \phi^r \left( c_j \binom{X}{j}_{\delta_r, E} \right) (a_{j_1}, \dots, a_{j_r}, a_j) &= c_j \frac{\binom{X}{j}_{\delta_r, E}(a_j)}{\prod_{k \in R(j, r)} (a_j - a_k)} = c_j \frac{(a_j - a_0) \dots (a_j - a_{j-1})}{\prod_{k \in R(j, r) \cup S(j, r)} (a_j - a_k)} \\ &= c_j \frac{(a_j - a_0) \dots (a_j - a_{j-1})}{(a_j - a_0) \dots (a_j - a_{j-1})} \\ &= c_j \end{aligned}$$

Finalement

$$c_j = \left( \phi^r f(a_{j_1}, \dots, a_{j_r}, a_j) - \sum_{k=0}^{j-1} \phi^r \left( c_j \binom{X}{k}_{\delta_r, E} \right) (a_{j_1}, \dots, a_{j_r}, a_j) \right) \in D$$

contradiction.  $\square$

**Corrolaire 3.1.** *La  $\pi$ -séquence associée à une suite  $(\pi, r)$ -ordonnée  $\delta_r$  de  $E$  ne dépend pas de  $\delta_r$ .*

*Preuve.* Le Theoreme 3.3 implique que l'idéal fractionnaire formé par zéro et l'ensemble des coefficients dominants des éléments de  $\text{Int}_n^r(D, E)$  de degré  $n$  est

$$\left( n!_{(\delta_r, E)}^r \right)^{-1} D$$

et cela pour toute suite  $(\pi, r)$ -ordonnée  $\delta_r$  de  $E$ . Ainsi l'entier  $v_\pi(n!_{\delta_r, E}^r)$  ne dépend pas de  $\delta_r$  et par conséquent la  $\pi$ -séquence associée à  $\delta_r$  non plus.  $\square$

**Remarque 3.4.** *On a donc  $n!_{(\delta_r, E)}^r D = n!_{(\delta'_r, E)}^r D$  pour tout  $\delta_r, \delta'_r$ . On peut donc noter simplement  $n!_E^r D$ .*

**Notation 3.2.** *On appelle fonction factorielle associée à  $E$  et  $r$  la fonction*

$$n \rightarrow n!_E^r = n!_E^r D$$

Le Theoreme 3.1 est conséquence immédiate du Corrolaire 3.1:

*Preuve du Theoreme 3.1.* Soit  $D$  quelconque,  $D_P$  le localisé de  $D$  en  $P$ , et  $\delta_r$  une suite  $(P, r)$ -ordonnée de  $E$ . La suite  $\delta_r$  est aussi une suite  $(\pi, r)$ -ordonnée de  $E \subset D_P$  et les exposants dans la  $\pi$ -séquence associée à  $\delta_r$  sont les même que dans la  $P$ -séquence associée à  $\delta_r$ . On applique alors le Corrolaire 3.1.  $\square$

### 3.4 Base régulière

$D$  est quelconque (plus nécessairement local).

Dans cette section, on énonce une condition nécessaire et suffisante pour que  $\text{Int}_n^r(E, D)$  admette une base régulière et lorsque c'est le cas, on présente un algorithme qui construit une telle base à partir de suites  $(P, r)$ -ordonnée pour un nombre fini de  $P$  à l'aide du théorème chinois.

Le procédé, les preuves et l'algorithme sont en tout point similaires à ceux utilisés dans la partie précédente pour  $\text{Int}_n(E, D)$  et les suites  $P$ -ordonnée.

**Définition 3.5.** Pour tout  $n$ , on définit  $\mathfrak{J}_n^r(E, D)$  comme l'ensemble formé de zéro et des coefficients dominants des éléments de  $\text{Int}_n^r(E, D)$  de degré  $n$ .

**Proposition 3.2.**  $\mathfrak{J}_n^r(E, D)$  est un idéal fractionnaire.

*Preuve.* Identique à la preuve de la Proposition 2.1 pour  $\mathfrak{J}_n(E, D)$ .  $\square$

**Theoreme 3.4.**  $\text{Int}_n^r(E, D)$  possède une base régulière si et seulement si les idéaux fractionnaires  $\mathfrak{J}_k^r(E, D)_{k \leq n}$  sont principaux.

*Preuve.* Identique à la preuve du Theoreme 2.3 pour  $\text{Int}_n(E, D)$ .  $\square$

**Proposition 3.3** (Localisation).

$$\text{Int}_n^r(E, D_P) = \text{Int}_n^r(E, D)_P$$

*Preuve.* Soit  $f \in \text{Int}_n^r(E, D)_P$ . Pour tout  $k \leq r$  et tout  $x_0, \dots, x_k \in E$ , on a  $\phi^k f(x_0, \dots, x_k) \in D_P$  puisque  $f(x_i) \in D_P$  d'après la Proposition 2.2.

Réciproquement, soit  $f \in \text{Int}_n^r(E, D_P)$  et soit  $I$  le  $D$ -module engendré par ses coefficients. Pour tout  $k \leq r$  et tout  $x_0, \dots, x_k \in E$ ,  $\phi^k f(x_0, \dots, x_k) \in I \cap D_P$ . Puisque  $D$  est Noétherien, il existe  $s \in D \setminus P$  tel que  $s\phi^k f(x_0, \dots, x_k) \in D$ , et donc  $f \in \text{Int}_n^r(E, D)_P$ .  $\square$

**Corrolaire 3.2.** Soit  $n!_{E_P}^r$  la factoriel associée à  $E \subset D_P$ . On a  $n!_{E_P}^r = D$  sauf pour un nombre fini de  $P$

*Preuve.*  $n!_{E_P}^r \neq D$  pour les  $P$  qui divisent  $\mathfrak{J}_n^r(E, D)^{-1}$  qui sont en nombre fini.  $\square$

La Proposition 3.3 permet naturellement d'étendre la fonction factorielle définie dans le cas local à  $D$  quelconque:

**Définition 3.6.** On appelle fonction factoriel associée à  $E$  et  $r$  la fonction

$$n \rightarrow n!_E^r = \mathfrak{J}_n^r(E, D)^{-1} = \prod_{(P, \pi)} P^{v_\pi(n!_{E_P}^r)}$$

On présente maintenant un algorithme pour construire un polynôme  $A_n \in D[X]$  de degré  $n$  tel que  $A_n(D) \subset n!_E^r$ .

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$  les premiers qui divisent  $n!_E^r$ . Pour tout  $1 \leq i \leq m$  soit  $(u_{i,k})_{0 \leq k < n}$  les  $n$  premiers termes d'une suite  $(P_i, r)$ -ordonnée de  $E$ . On note également  $e_{i,n} = v_{P_i}(n!_E^r)$ .

**Algorithme 3.1.**

1. Pour tout  $0 \leq k < n$ , on construit à l'aide du théorème chinois un élément  $a_k$  vérifiant pour tout  $1 \leq i \leq m$ :

$$a_k \equiv u_{i,k} \pmod{P_i^{e_{i,n}+1}}$$

2. On retourne le polynôme  $A_n = (X - a_0)(X - a_1) \dots (X - a_{n-1})$ .

La suite  $(a_k)_{k \leq n}$  est construite afin d'être  $(P_i, r)$ -ordonnée simultanément pour tout les  $P_i \in \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ .

**Theoreme 3.5.** On a  $A_n(E) \subset n!_E^r$ .

*Preuve.* Soit  $x \in E$ . Il suffit de montrer que  $v_P(A_n(x)) \geq v_P(n!_E^r)$  pour tout  $P$ . Si  $P \notin \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ ,  $v_P(n!_E^r) = 0$ . On peut donc se restreindre à  $P_i \in \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ . Mais alors par construction

$$\begin{aligned} v_{P_i}(A_n(x)) &= \sum_{k=0}^{n-1} v_{P_i}(x - a_k) \geq \sum_{k \in S(n,r)} v_{P_i}(x - a_k) \\ &\geq \sum_{k \in S(n,r)} v_{P_i}(a_n - a_k) \quad \left( = \sum_{k \in S(n,r)} v_{P_i}(u_{i,n} - u_{i,k}) \right) \\ &= v_{P_i}(n!_E^r) \end{aligned}$$

□

Pour que  $\text{Int}_n^r(E, D)$  admette une base régulière, il est nécessaire que les idéaux  $k!_E^r$  pour  $k \leq n$  soient principaux. On suppose donc que c'est le cas et on note  $\beta_k$  un générateur de  $k!_E^r$ .

Soit  $(A_k)_{0 \leq k \leq n}$  des polynômes de  $D[X]$  tels que  $A_k(D) \subset k!_D^r$ . On pose  $B_k = \frac{1}{\beta} A_k$ .

**Theoreme 3.6.** La famille  $\{B_0, B_1, B_2, \dots, B_n\}$  est une base régulière de  $\text{Int}_n^r(E, D)$

*Preuve.* Pour tout  $k$ ,  $B_k$  est un polynôme de  $\text{Int}_n^r(E, D)$  de degré  $k$  et de coefficient dominant  $\beta_k$  par construction. D'après la preuve du Theoreme 3.4,  $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$  est une base régulière de  $\text{Int}_n^r(E, D)$ . □

### 3.5 Calcul effectif pour $E=D$

Pour construire en utilisant les résultats de la section précédente une base régulière de  $\text{Int}_n^r(E, D)$  lorsque les  $(k!_E^r)_{k \leq n}$  sont principaux, on a besoin de savoir:

1. déterminer les idéaux premiers qui divisent  $n!_E^r$
2. construire les  $n$  premiers termes d'une suite  $(P, r)$ -ordonnée de  $E$

Réaliser le deuxième point demande si on applique la définition d'une suite  $(P, r)$ -ordonnée de  $E$  de prendre un minimum sur un ensemble infini, ce qui n'est pas réalisable tel quel.

Cependant, dans le cas où  $E = D$  et où  $D/P$  est de cardinal fini pour tout  $P$ , il est possible de construire effectivement les  $n$  premiers termes d'une suite  $(P, r)$ -ordonnée de  $D$  en utilisant la finitude de  $D/P$  et l'homogénéité de  $D$ . On peut également en déduire les idéaux qui divisent  $n!_D^r$ .

On montre en fait que les  $n$  termes produits par l'Algorithme 2.2 servant à construire une suite  $P$ -ordonnée de  $D$  forment aussi les  $n$  premiers termes d'une suite  $(P, r)$ -ordonnée de  $D$  et cela pour tout  $r$  !

Dans cette partie,  $D/P$  est de cardinal fini pour tout  $P$ .

### 3.5.1 Construction d'une suite $(P, r)$ -ordonnée de $D$

On propose un algorithme pour construire les  $n$  premiers termes d'une suite  $(P, r)$ -ordonnée de  $D$ . On utilise de manière cruciale le fait que  $D$  est réunion disjointe finie des différentes classes modulo  $P$ . On généralise notamment aux entiers d'un corps de nombres certains théorèmes donnés pour  $\mathbb{Z}$  dans [Joh10]. Le cardinal de  $D/P$  est noté  $q$ .

Soit  $\{r_0, r_1, \dots, r_{q-1}\}$  un système de représentants modulo  $P$ . On note  $D_{r_i} = \{x \in D : x \equiv r_i \pmod{P}\}$ .

On montre que les  $D_{r_i}$  ont tous la même  $P$ -séquence.

**Proposition 3.4.** *Pour tout  $r_i, r_j$  et  $n \geq 0$ :*

$$v_P(n!_{D_{r_i}}^r) = v_P(n!_{D_{r_j}}^r)$$

*Autrement dit les  $P$ -séquences associées aux suites  $(P, r)$ -ordonnées des  $D_{r_i}$  sont les mêmes.*

*Preuve.* Soit  $c \in D$  tel que  $D_{r_i} + c = D_{r_j}$ . Soit  $(a_n)_n$  une suite  $(P, r)$ -ordonnée de  $D_{r_i}$ . Pour tout  $n, m$

$$v_P((a_n - c) + (a_m - c)) = v_P(a_n - a_m)$$

Ainsi  $(a_n - c)_n$  est une suite  $(P, r)$ -ordonnée de  $D_{r_j}$  et  $v_P(n!_{D_{r_i}}^r) = v_P(n!_{D_{r_j}}^r)$  □

**Proposition 3.5.** *L'application  $\theta_i : x \rightarrow x\pi + r_i$  envoie une suite  $(P, r)$ -ordonnée de  $D$  sur une suite  $(P, r)$ -ordonnée de  $D_{r_i}$ .*

*Preuve.* Soit  $(a_n)_n$  une suite  $(P, r)$ -ordonnée de  $D$ . Pour tout  $x, y \in D$

$$v_P(\theta(x) - \theta(y)) = v_P(\pi(x - y)) = 1 + v_P(x - y)$$

Par récurrence sur  $n \geq r + 1$ , le minimum à la  $n$ -ème étape de construction d'une suite  $(P, r)$ -ordonnée de  $D_{r_i}$  est donc atteint pour  $\theta(a_n)$  ce qui fait de  $(\theta(a_n))_n$  une suite  $(P, r)$ -ordonnée de  $D_{r_i}$ . □

**Corrolaire 3.3.** *Pour tout  $0 \leq i < q$  et pour  $n \geq r + 1$*

$$v_P(n!_{D_{r_i}}^r) = v_P(n!_D^r) + n - r$$

*Preuve.*

$$\begin{aligned} v_P(n!_{D_{r_i}}^r) &= \sum_{k \in S_r(n)} (v_P(\theta(a_n) - \theta(a_k))) \\ &= \sum_{k \in S_r(n)} (v_P(a_n - a_k) + 1) = v_P(n!_D^r) + n - r \end{aligned}$$

□

On cherche désormais à construire une suite  $(P, r)$ -ordonnée de  $D$  à partir de suites  $(P, r)$ -ordonnées des  $D_{r_i}$ . On rappelle que la notion d'entrelacement de suites à été introduite dans la Définition 2.7.

On montre que l'entrelacement  $q$ -uniforme de suites  $(P, r)$ -ordonnées des  $D_{r_i}$  résulte en une suite  $(P, r)$ -ordonnée de  $D$ .

**Proposition 3.6.** *Pour tout  $0 \leq i < q$  et tout  $n \in \mathbb{N}$  soit*

$$\phi_i(n) = nq + i$$

*La suite obtenue par  $(\phi_i)_{0 \leq i < q}$  entrelacement de suites  $(P, r)$ -ordonnée des  $D_{r_i}$  est une suite  $(P, r)$ -ordonnée de  $D$ .*

*Preuve.* Identique à la preuve de la Proposition 2.5 pour les suites  $P$ -ordonnée.  $\square$

**Corrolaire 3.4.** *Pour  $n \geq q(r+1)$*

$$v_P(n!_D^r) = v_P(\lfloor n/q \rfloor!_D^r) + \lfloor n/q \rfloor - r$$

*Preuve.* Remarquons d'abord que  $n \geq q(r+1)$  implique  $\lfloor n/q \rfloor \geq r+1$ .

Soit  $(a_n)_n$  la suite obtenue par  $(\phi_i)_{1 \leq i < q}$  entrelacement de suites  $(P, r)$ -ordonnée des  $D_{r_i}$ . Par définition des  $\phi_i$ ,  $a_n$  est le  $\lfloor n/q \rfloor$ -ème terme d'une suite  $(P, r)$ -ordonnée de l'un des  $D_{r_i} = D_{r_{i_0}}$ . Puisque  $v_P(a_n - a_k) = 0$  dès que  $a_k \notin D_{r_{i_0}}$ , on a

$$v_P(n!_D^r) = v_P(\lfloor n/q \rfloor!_{D_{r_{i_0}}}^r)$$

On peut alors appliquer le Corrolaire 3.3 puisque  $\lfloor n/q \rfloor \geq r+1$ .  $\square$

**Theoreme 3.7.** *Pour tout  $n \geq 0$  on a*

$$v_P(n!_D^r) = \sum_{i=1}^k \lfloor n/q^i \rfloor - kr$$

où  $k = \lfloor \log_q(n/(r+1)) \rfloor$ .

*Preuve.* Pour  $n < q(r+1)$ , la formule est trivialement vraie.

Rappelons la formule du Corrolaire 3.4 valable pour  $n \geq q(r+1)$

$$v_P(n!_D^r) = v_P(\lfloor n/q \rfloor!_D^r) + \lfloor n/q \rfloor - r$$

On peut itérer cette relation pour obtenir

$$v_P(n!_D^r) = v_P(\lfloor n/q^j \rfloor!_D^r) + \sum_{i=1}^j \lfloor n/q^i \rfloor - jr$$

et cela tant que  $n/q^{j-1} \geq q(r+1)$ . La dernière valeur de  $j$  pour laquelle on peut appliquer le Corrolaire 3.4 est donc  $j = \lfloor \log_q(n/(r+1)) \rfloor - 1$ . Le résultat suit puisqu' alors  $v_P(\lfloor n/q^j \rfloor!_D^r) = 0$ .  $\square$

**Definition 3.7.** Soit  $k = \lfloor \log_q(n/(r+1)) \rfloor$ . Pour  $n < q(r+1)$ , on pose  $w_{q,r}(n) = 0$  et pour  $n \geq q(r+1)$

$$w_{q,r}(n) = v_P(n!_D^r) = w_q(n) - w_q(\lfloor n/q^k \rfloor) - kr$$

**Corrolaire 3.5.** *Pour tout  $q \geq 2$  soit  $M_q$  le produit des idéaux premiers de  $D$  de norme  $q$ . On a*

$$n!_D^r = \prod_{(P,q)} P^{w_{q,r}(n)} = \prod_{q=2}^n M_q^{w_{q,r}(n)}$$



*Preuve.*  $v_P(n!_D^r) = w_{q,r}(n)$  ne dépend que du cardinal  $q$  de  $D/P$  et  $w_{q,r}(n) = 0$  dès que  $q > n$ .  $\square$

Les Proposition 3.5 et Proposition 3.6 impliquent que l'Algorithme 2.2 servant à construire une suite  $P$ -ordonnée de  $D$  peut être utilisé pour construire les  $n$  premiers termes d'une suite  $(P, r)$ -ordonnée de  $D$  à condition de prendre pour  $q$  premiers termes à l'étape 1) les  $q$  premiers termes d'une suite  $(P, r)$ -ordonnée de  $D$ . Mais il est immédiat que les  $q$  premiers termes  $(r_0, r_1, \dots, r_{q-1})$  utilisés dans l'algorithme sont aussi les  $q$  premiers termes d'une suite  $(P, r)$ -ordonnée de  $D$  quelque soit  $r$ . En conséquence:

**Theoreme 3.8.** *La suite  $P$ -ordonnée de  $D$  produite par l'Algorithme 2.2 est aussi une suite  $(P, r)$ -ordonnée de  $D$  pour tout  $r \geq 0$ .*

### 3.5.2 Algorithme pour $\text{Int}_n^r(D)$

On résume maintenant la procédure pour construire lorsque les  $(k!_D^r)_{k \leq n}$  sont principaux une base régulière de  $\text{Int}_n^r(D)$ :

1. On détermine les idéaux premiers  $T_k$  qui divisent  $k!_D^r$  pour  $k \leq n$ . D'après le Corrolaire 3.5, ce sont tout les idéaux premiers de norme  $q \leq k$ . On calcul également pour tout  $q \leq n$  le produit  $M_q$  des idéaux premiers de norme  $q$ .

Pour cela, on utilise les méthodes standards pour factoriser les premiers  $p \leq n$  dans  $D$ .

2. On construit pour chaque  $P \in \cup_{k \leq n} T_k$  les  $n+1$  premiers termes d'une suite  $(P, r)$ -ordonnée de  $D$  en utilisant l'Algorithme 2.2.
3. Pour chaque  $k \leq n$  on utilise l'Algorithme 3.1 pour construire le polynôme  $A_k$  tel que  $A_k(D) \subset n!_D^r$ . On utilise pour cela les  $k+1$  premiers termes des suites  $(P, r)$ -ordonnée pour  $P \in T_k$  construites à l'étape 2).
4. On calcul ensuite pour chaque  $0 \leq k \leq n$  l'idéal  $k!_D^r$  par la formule du Corrolaire 3.5. On utilise alors les  $M_q$  calculés à l'étape 1).
5. Pour tout  $k \leq n$ , on calcul un générateur  $\beta_k$  de  $k!_D^r$  par les méthodes standards puis  $B_k = \frac{1}{\beta_k} A_k$ .

La famille  $(B_0, B_1, \dots, B_k)$  ainsi construite est une base régulière de  $\text{Int}_n^r(D)$ .

### 3.5.3 Exemples

#### Exemple 1

Soit  $K = \mathbb{Q}[i]$ . L'anneau des entiers  $\mathbb{Z}[i]$  est principal, donc  $\text{Int}_n^r(\mathbb{Z}[i])$  admet une base régulière pour tout  $n$  et  $r$ .

Voici une base régulière de  $\text{Int}_6^1(\mathbb{Z}[i])$ :

$$\begin{aligned} B_0(X) &= 1, \quad B_1(X) = X, \quad B_2(X) = X^2 + X, \quad B_3(X) = X^3 + 2X^2 + X \\ B_4(X) &= \frac{1-i}{2}X^4 + (1-i)X^3 + \frac{1-i}{2}X^2 \\ B_5(X) &= \frac{1-i}{2}X^5 + (2+3i)X^4 - \frac{27+13i}{2}X^3 + (19-i)X^2 - (8+2i)X \end{aligned}$$

$$B_6(X) = \frac{1}{2}X^6 + \frac{1-20i}{2}X^5 - \frac{159+10i}{2}X^4 + \frac{-1+600i}{2}X^3 + (485-140i)X^2 - (406+145i)X$$

Soit  $f \in \text{Int}_6^1(\mathbb{Z}[i])$  le polynôme dont les coordonnées sur la base  $(B_i(X))_{i \leq 6}$  sont:

$$\begin{pmatrix} 1+i \\ 0 \\ 2-i \\ 3+5i \\ -2 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$$

et soit  $g(x, y) = \phi^1 f(x, y)$  la première différence divisée de  $f$ .

Puisque  $f \in \text{Int}_6^1(\mathbb{Z}[i])$ , on a  $g(x, a) \in \text{Int}_5(\mathbb{Z}[i])$  quelque soit  $a \in \mathbb{Z}[i]$ . Soit  $R$  la base régulière de  $\text{Int}_5(\mathbb{Z}[i])$  construite dans l'exemple 1. de la partie 2. Dans le tableau suivant, on donne pour quelques valeurs de  $a$  la décomposition du polynôme  $g(a, x)$  sur la base  $R$ :

$a$	0	$i$	$1+i$
$(g(a, x))_R$	$\begin{pmatrix} -399 - 149i \\ 55093 - 3153i \\ 629966 - 21543i \\ -442 - 1847i \\ -19 - 57i \\ 5 + 5i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -296 + 118i \\ 54881 - 3073i \\ -29897 - 21639i \\ -435 - 1838i \\ -20 - 56i \\ 5 + 5i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -224 + 113i \\ 54895 - 2926i \\ 629975 - 21707i \\ -426 - 1844i \\ -19 - 55i \\ 5 + 5i \end{pmatrix}$

Table 1: Les coordonnées de  $g(a, x)$  sur la base  $R$  en fonction de  $a$

### Exemple 2

Soit  $K = \mathbb{Q}(j)$ . On donne dans le tableau suivant les 15 premiers termes d'une suite  $((2), r)$ -ordonnée ainsi que les exposants de la  $(2)$ -séquence associée pour  $0 \leq r \leq 2$ :

$r$	Suite $((2), r)$ -ordonnée et exposants
0	$(0, 1, j, j + 1, 2, 3, 2 + j, 3 + j, 2j, 1 + 2j, 3j, 1 + 3j, 2 + 2j, 3 + 2j, 2 + 3j)$
	$(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3)$
1	$(0, 2, 1, 3, j, 2 + j, 1 + j, 3 + j, 2, 3, 2 + j, 3 + j, 2j, 1 + 2j, 3j)$
	$(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2)$
2	$(0, 2, 2j, 1 + j, 1 + j, 1 + j, 1, 3, 1 + 2j, j, 2 + j, 3j, 3 + j, 2, 3)$
	$(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$

Table 2: Suites  $((2), r)$ -ordonnée pour  $r = 0, 1, 2$

### 3.5.4 Fonctions pour $\text{Int}_n^r(D)$

Voici quelques fonctions utiles:

- la fonction `ispolyaupto_rem(K, r, n)` teste si  $\text{Int}_n^r(D)$  admet une base régulière
- la fonction `zkremregbasis(K, r, n, "X")` retourne (si possible) une base régulière (d'indéterminée "X") de  $\text{Int}_n^r(D)$ .
- la fonction `zkremregbasis_dec(K, pol, 1, "X")` retourne une matrice  $(n + 1) \times 2$  (où  $n = \deg(\text{pol})$ ) avec une base régulière de  $\text{Int}_n^r(D)$  (d'indéterminée "X") dans la deuxième colonne et les coefficients de la  $K$ -décomposition de `pol` sur cette base dans la première.

## 4 Base régulière du sous-module $\text{Int}_n^M(E, D)$

Dans cette section, on présente un sous-module de  $\text{Int}_n(E, D)$  qui dépend d'un nouveau paramètre  $M$  (un idéal) ainsi qu'une nouvelle notion de suite ordonnée associée ([Bha09]) qui permet d'appliquer la même stratégie que dans la partie 2.

On donnera une condition nécessaire et suffisante pour que ce sous-module admette une base régulière, puis un algorithme de construction d'une telle base quand elle existe. On fournira plusieurs exemples concrets en fin de partie.

Dans toute cette partie,  $h$  est un entier positif.

### 4.1 Le sous-module $\text{Int}_n^M(E, D)$

Soit  $f \in \text{Int}_n(E, D)$ . Même si  $f \notin D[X]$ , on peut se demander quels sont les  $m \in D$  pour lesquels le polynôme composé  $f(mX + e) \in D[X]$  pour tout  $e \in E$ . Si  $m$  est tel que  $f(mX + e) \in D[X]$ , on a  $f(m'X + e) \in D[X]$  pour tout  $m'$  dans l'idéal  $mD$ .

Ceci amène la définition suivante:

**Definition 4.1.** Soit  $M$  un idéal de  $D$ . On dit que  $f \in \text{Int}_n(E, D)$  est de module  $M$  si  $f(mX + e) \in D[X]$  pour tout  $m \in M$  et  $e \in E$ .

On note  $\text{Int}_n^M(E, D)$  l'ensemble des éléments de  $\text{Int}_n(E, D)$  de module  $M$ . C'est un sous-module de  $\text{Int}_n(E, D)$ . On a  $\text{Int}_n^{(0)}(E, D) = \text{Int}_n(E, D)$ .

### 4.2 Suite $P^h$ -ordonnée

On définit dans cette section une nouvelle notion de suite ordonnée d'éléments de  $E$  qui à vocation à jouer le même rôle pour  $\text{Int}_n^M(E, D)$  qu'une suite  $P$ -ordonnée pour  $\text{Int}_n(E, D)$ .

Formellement, se donner un module  $M = \prod_i P_i^{h_i}$  revient à associer à chaque  $P$  un entier  $h$ . La notion de suite  $P^h$ -ordonnée que l'on décrit ici est une légère variation de la notion de suite  $P$ -ordonnée où l'on souhaite garder un contrôle (dicté par  $h$ ) sur la décroissance de la  $P$ -séquence associée.

**Definition 4.2.** On appelle suite  $P^h$ -ordonnée de  $E$  toute suite  $(a_n)_{n \geq 0}$  d'éléments de  $E$  telle que pour tout  $n \geq 1$ ,  $a_n$  vérifie:

$$\min_{x \in E} \left( \sum_{i=0}^{n-1} \min(h, v_P(x - a_i)) \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \min(h, v_P(a_n - a_i)) = e_n$$

On appelle  $P$ -séquence associée à la suite  $P^h$ -ordonnée  $(a_n)_{n \geq 0}$  la suite décroissante d'idéaux  $(P^{e_0}, P^{e_1}, P^{e_2}, P^{e_3}, \dots)$ .

**Remarque 4.1.** Pour tout  $x, y \in D$ ,  $\min(h, v_P(x + \pi^h - y)) = \min(h, v_P(x - y))$ .

En conséquence, si  $(a_n)_n$  est une suite  $P^h$ -ordonnée de  $E$  et que l'on remplace  $a_n$  par un  $a_m$  tel que  $a_n \equiv a_m \pmod{P^h}$ , la suite obtenue est encore une suite  $P^h$ -ordonnée de  $E$ .

A partir d'une suite  $P^h$ -ordonnée de  $E$ , on peut construire une suite  $P^h$ -ordonnée de  $E$  telle que l'ensemble des termes de la suite qui sont dans la même classe modulo  $P^h$  est réduit à un unique élément. Il suffit de remplacer chaque  $a_n$  par l'élément  $a_m$  de plus petit indice  $m$  tel que  $a_m \equiv a_n \pmod{P^h}$ .

**Definition 4.3.** Soit  $(a_n)_n$  une suite  $P^h$ -ordonnée de  $E$ . Si pour toute classe  $C$  modulo  $P^h$  l'ensemble des termes de la suite qui sont dans  $C$  est vide ou réduit à un élément, on dit que la suite est restreinte.

Il existe toujours une suite  $P^h$ -ordonnée restreinte.

Finalement on a le même théorème d'indépendance que pour les suite  $P$ -ordonnée

**Theoreme 4.1.** La  $P$ -séquence associée à une suite  $P^h$ -ordonnée  $\delta^h$  de  $E$  ne dépend pas de  $\delta^h$ .

La preuve du Theoreme 4.1 sera donnée à la fin de la prochaine section.

### 4.3 Base régulière dans le cas local

Dans cette section, sauf mention du contraire,  $D$  est local. Se donner un module  $M$  revient donc à se donner un entier  $h$  tel que  $M = (\pi^h)$ . On montre que dans ce cas  $\text{Int}_n^{\pi^h}(E, D)$  admet toujours une base régulière. Ce résultat permet ensuite de démontrer le Theoreme 4.1.

Soit  $\delta^h = (a_n)_n$  une suite  $\pi^h$ -ordonnée de  $E$ . On pose pour tout  $n$

$$n!_{(\delta^h, E)}^h = \pi^{\sum_{i=0}^{n-1} \min(h, v_\pi(a_n - a_i))}$$

**Definition 4.4.** Pour tout  $n \geq 0$ , on définit le  $n$ -ème polynôme binomial associé à  $E$  et  $\delta^h$  par  $\binom{X}{0}_{\delta^h, E}^h = 1$  et pour  $n \geq 1$

$$\binom{X}{n}_{\delta^h, E}^h = \frac{(X - a_0)(X - a_1) \dots (X - a_{n-1})}{n!_{(\delta^h, E)}^h}$$

Par construction,  $\binom{X}{n}_{\delta^h, E}^h \in \text{Int}_n(E, D)$ .

**Theoreme 4.2.** Pour tout  $n \geq 0$ ,  $\binom{X}{n}_{\delta^h, E}^h \in \text{Int}_n^{\pi^h}(E, D)$ .

*Preuve.* Soit  $e \in E$ . Si on développe le polynôme

$$(\pi^h X + (e - a_0))(\pi^h X + (e - a_1)) \dots (\pi^h X + (e - a_{n-1}))$$

les relations coefficients-racines montrent que la  $\pi$ -valuation de chaque coefficient est supérieur à

$$\sum_{i=0}^{n-1} \min(h, v_P(e - a_i))$$

On déduit que la valuation de chaque coefficient de  $\binom{\pi^h X + e}{n}_{\delta^h, E}^h$  est supérieur à

$$\sum_{i=0}^{n-1} \min(h, v_\pi(e - a_i)) - \sum_{i=0}^{n-1} \min(h, v_\pi(a_n - a_i))$$

qui est positif car  $(a_n)_n$  est une suite  $\pi^h$ -ordonnée de  $E$ . Ceci montre que  $\binom{\pi^h X + e}{n}_{\delta^h, E}^h \in D[X]$ , et donc  $\binom{X}{n}_{\delta^h, E}^h \in \text{Int}_n^{\pi^h}(E, D)$ .  $\square$

**Theoreme 4.3.** La famille  $\left(\binom{X}{k}_{\delta^h, E}\right)_{0 \leq k \leq n}$  est une base régulière de  $\text{Int}_n^{\pi^h}(E, D)$ .

*Preuve.* On montre d'abord le théorème lorsque la suite  $(a_n)_n$  est restreinte.

Soit  $f \in \text{Int}_n^{\pi^h}$  et  $f = \sum_{k=0}^n c_k \binom{X}{k}_{\delta^h, E} = \sum_{k=0}^n c_k f_k(X)$  la décomposition de  $f$  sur la  $K$ -base

$$\left(\binom{X}{k}_{\delta^h, E}\right)_{0 \leq k \leq n}$$

On veut montrer que les  $c_k$  sont dans  $D$ . Par l'absurde, soit  $j$  le plus petit indice tel que  $c_j \notin D$  et soit  $s$  le nombre d'indices  $i \in \{0, \dots, j-1\}$  tels que  $a_j = a_i$ . L'idée est de regarder le coefficient de  $X^s$  dans  $c_j f_j(\pi^h X + a_j)$ . On regarde pour cela le coefficient de  $X^s$  pour chacun des  $c_k f_k(\pi^h X + a_j)$ ,  $k \neq j$ .

- si  $n \geq k > j$ , le coefficient de  $X^s$  dans  $c_k f_k(\pi^h X + a_j)$  est nul par définition de  $s$  (on utilise donc ici le fait que la suite est restreinte)
- si  $k < j$ , le coefficient de  $X^s$  dans  $c_k f_k(\pi^h X + a_j)$  est dans  $D$  puisque  $c_k \in D$  (par minimalité de  $j$ ) et  $f_k(\pi^h X + a_j) \in D[X]$ .

Puisque le coefficient de  $X^s$  dans  $f(\pi^h X + a_j)$  est dans  $D$  et que le coefficient de  $X^s$  dans  $c_k f_k(\pi^h X + a_j)$  pour  $k \neq j$  est dans  $D$ , le coefficient de  $X^s$  dans  $c_j f_j(\pi^h X + a_j)$  est aussi dans  $D$ .

Enfin,  $v_\pi(f_j(\pi^h X + a_j)) = 0$  et donc  $c_j \in D$ , contradiction.

On démontre maintenant le théorème pour une suite  $\pi^h$ -ordonnée quelconque  $\delta^h$ . On se donne  $\delta_0^h$  une suite  $\pi^h$ -ordonnée restreinte et

$$(C_k(X))_{0 \leq k \leq n} = \left(\binom{X}{k}_{\delta_0^h, E}\right)_{0 \leq k \leq n}$$

la  $D$ -base correspondante. La matrice de la famille

$$(B_k(X))_{0 \leq k \leq n} = \left(\binom{X}{k}_{\delta^h, E}\right)_{0 \leq k \leq n}$$

sur la base  $(C_k(X))_{0 \leq k \leq n}$  est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. Elle est donc inversible et la famille  $(B_k(X))_{0 \leq k \leq n}$  est une  $D$ -base de  $\text{Int}_n^{\pi^h}(E, D)$ .  $\square$

**Corrolaire 4.1.** La  $\pi$ -séquence associée à une suite  $\pi^h$ -ordonnée  $\delta^h$  de  $E$  ne dépend pas de  $\delta^h$ .

*Preuve.* Le Theoreme 4.3 implique que l'idéal fractionnaire formé par zéro et l'ensemble des coefficients dominants des éléments de  $\text{Int}_n^{\pi^h}(D, E)$  de degré  $n$  est

$$(n!_{(\delta^h, E)}^h)^{-1} D$$

et cela pour toute suite  $\pi^h$ -ordonnée  $\delta^h$  de  $E$ . Ainsi l'entier  $v_\pi(n!_{\delta^h, E}^h)$  ne dépend pas de  $\delta^h$  et par conséquent la  $\pi$ -séquence associée à  $\delta^h$  non plus.  $\square$

**Remarque 4.2.** On a donc  $n!_{(\delta_1^h, E)}^h D = n!_{(\delta_2^h, E)}^h D$  pour tout  $\delta_1^h, \delta_2^h$ . On peut donc noter simplement  $n!_E^h D$ .

**Notation 4.1.** On appelle fonction factoriel associée à  $E$  et  $h$  la fonction

$$n \rightarrow n!_E^h = n!_E^h D$$

Le Theoreme 4.1 est conséquence immédiate du Corrolaire 4.1:

*Preuve du Theoreme 4.1.* Soit  $D$  quelconque,  $D_P$  le localisé de  $D$  en  $P$ , et  $\delta^h$  une suite  $P^h$ -ordonnée de  $E$ . La suite  $\delta^h$  est aussi une suite  $\pi^h$ -ordonnée de  $E \subset D_P$  et les exposants dans la  $\pi$ -séquence associée à  $\delta^h$  sont les même que dans la  $P$ -séquence associée à  $\delta^h$ . On applique alors le Corrolaire 4.1.  $\square$

## 4.4 Base régulière

Dans cette section,  $D$  est quelconque (plus nécessairement local) et  $M$  est un idéal.

On donne une condition nécessaire et suffisante pour que  $\text{Int}_n^M(E, D)$  admette une base régulière et lorsque c'est le cas, on présente un algorithme qui construit une telle base à partir des suites  $P^h$ -ordonnée pour  $P$  divisant  $M$  et du théorème chinois.

**Definition 4.5.** Pour tout  $n$ , on définit  $\mathfrak{J}_n^M(E, D)$  comme l'ensemble formé de zéro et des coefficients dominants des éléments de  $\text{Int}_n^M(E, D)$  de degré  $n$ .

**Proposition 4.1.**  $\mathfrak{J}_n^M(E, D)$  est un idéal fractionnaire.

*Preuve.* Identique à la preuve de la Proposition 2.1 pour  $\mathfrak{J}_n(E, D)$ .  $\square$

**Theoreme 4.4.**  $\text{Int}_n^M(E, D)$  possède une base régulière si et seulement si les idéaux fractionnaires  $\mathfrak{J}_k^M(E, D)_{k \leq n}$  sont principaux.

*Preuve.* Identique à la preuve du Theoreme 2.3 pour  $\text{Int}_n(E, D)$ .  $\square$

**Proposition 4.2.**

$$\text{Int}_n^M(E, D_P) = \text{Int}_n^M(E, D)_P$$

*Preuve.* Soit  $f \in \text{Int}_n^M(E, D)_P$ . D'après la preuve du Proposition 2.2,  $f \in \text{Int}_n(E, D)_P$ . De plus  $f(mX + e) \in D[X]$  et ses coefficients sont dans  $D_P$ , donc  $f \in \text{Int}_n^M(E, D_P)$ .

Réciproquement, soit  $f \in \text{Int}_n^M(E, D_P)$ . D'après la Proposition 2.2,  $f \in \text{Int}_n(E, D)_P$ . Soit  $I$  le  $D$ -module engendré par les coefficients de  $f$ . Les coefficients de  $f(mX + e)$  sont dans  $I \cap D_P$ . Puisque  $D$  est Noétherien, il existe  $s \in D \setminus P$  tel que  $sf(mX + e) \in D[X]$ , et donc  $f \in \text{Int}_n^M(E, D)_P$ .  $\square$

Par définition de  $\text{Int}_n^M(E, D)$ , les coefficients d'un élément  $f \in \text{Int}_n^M(E, D)$  sont dans  $M^{-1}$  (puisque  $f(mX + e) \in D[X]$ ).

**Notation 4.2.** On note  $n!_{E_P}^M$  la factoriel  $n!_E^h$  associée à  $E \subset D_P$  où  $h$  est la plus grande puissance de  $P$  divisant  $M$ .

La Proposition 4.2 permet naturellement d'étendre la fonction factorielle définie dans le cas local à  $D$  quelconque:

**Définition 4.6.** On appelle fonction factorielle associée à  $E$  et  $M$  la fonction

$$n \rightarrow n!_E^M = \mathfrak{J}_n^M(E, D)^{-1} = \prod_{P|M} P^{v_P(n!_E^M)}$$

On présente maintenant un algorithme pour construire un polynôme  $A_n \in D[X]$  de degré  $n$  tel que  $A_n(D) \subset n!_E^M$ .

Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$  les premiers qui divisent  $M$ . Pour tout  $1 \leq i \leq m$  soit  $(u_{i,k})_{0 \leq k < n}$  les  $n$  premiers termes d'une suite  $P_i^{h_i}$ -ordonnée de  $E$  où  $h_i$  est la plus grande puissance de  $P_i$  divisant  $M$ .

**Algorithme 4.1.**

1. Pour tout  $0 \leq k < n$ , on construit à l'aide du théorème chinois un élément  $a_k$  vérifiant pour tout  $1 \leq i \leq m$ :

$$a_k \equiv u_{i,k} \pmod{P_i^{h_i}}$$

2. On retourne le polynôme  $A_n = (X - a_0)(X - a_1) \dots (X - a_{n-1})$ .

**Theoreme 4.5.** On a  $A_n(E) \subset n!_E^M$ .

*Preuve.* Soit  $x \in E$ . Il suffit de montrer que  $v_P(A_n(x)) \geq v_P(n!_E^M)$  pour tout  $P$ . Si  $P \notin \{P_0, P_1, \dots, P_m\}$ ,  $v_P(n!_E^M) = 0$ . On peut donc se restreindre aux  $P$  qui divisent  $M$ . On a pour  $P_i^{h_i} | M$ :

$$\begin{aligned} v_{P_i}(A_n(x)) &= \sum_{k=0}^{n-1} v_{P_i}(x - a_k) \\ &\geq \sum_{k=0}^{n-1} v_{P_i}(a_n - a_k) \\ &\geq \sum_{k=0}^{n-1} \min(h_i, v_{P_i}(a_n - a_k)) \quad \left( = \sum_{k=0}^{n-1} \min(h_i, v_{P_i}(u_{i,n} - u_{i,k})) \right) \\ &\geq v_P(n!_E^M) \end{aligned}$$

□

Pour que  $\text{Int}_n^M(E, D)$  admette une base régulière, il est nécessaire que les idéaux  $k!_E^M$  pour  $k \leq n$  soient principaux. On suppose donc que c'est le cas et on note  $\beta_k$  un générateur de  $k!_E^M$ .

Soit  $(A_k)_{0 \leq k \leq n}$  des polynômes de  $D[X]$  tels que  $A_k(D) \subset k!_D^M$ . On pose  $B_k = \frac{1}{\beta_k} A_k$ .

**Theoreme 4.6.** La famille  $\{B_0, B_1, B_2, \dots, B_n\}$  est une base régulière de  $\text{Int}_n^M(E, D)$

*Preuve.* Pour tout  $k$ ,  $B_k$  est un polynôme de  $\text{Int}_n^M(E, D)$  de degré  $k$  et de coefficient dominant  $\beta_k$  par construction. D'après la preuve du Theoreme 4.4,  $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$  est une base régulière de  $\text{Int}_n^M(E, D)$ . □



## 4.5 Calcul effectif pour $E = D$

Pour construire en utilisant les résultats de la section précédente une base régulière de  $\text{Int}_n^M(E, D)$  lorsque les  $(k!_E^M)_{k \leq n}$  sont principaux, on a besoin de savoir construire les  $n$  premiers termes d'une suite  $P^h$ -ordonnée de  $E$ .

Cela demande si on applique la définition d'une suite  $P^h$ -ordonnée de  $E$  de prendre un minimum sur un ensemble infini, ce qui n'est pas réalisable tel quel.

Cependant, dans le cas où  $E = D$  et où  $D/P$  est de cardinal fini pour tout  $P$ , il est possible de construire effectivement les  $n$  premiers termes d'une suite  $P^h$ -ordonnée de  $D$  en utilisant la finitude de  $D/P$  et l'homogénéité de  $D$ .

On montre en fait que les  $n$  termes produits par l'Algorithme 2.2 servant à construire une suite  $P$ -ordonnée de  $D$  forment aussi les  $n$  premiers termes d'une suite  $P^h$ -ordonnée de  $D$  et cela pour tout  $h$  !

Dans cette partie,  $D/P$  est de cardinal fini pour tout  $P$ .

### 4.5.1 Construction d'une suite $P^h$ -ordonnée de $D$

Le cardinal de  $D/P$  est noté  $q$ . On note  $\{r_0, \dots, r_{q-1}\}$  un système de représentants modulo  $P$  et  $D_{r_i} = \{x \in D : x \equiv r_i \pmod{P}\}$ .

**Theoreme 4.7.** *Pour tout  $r_i, r_j$  et  $n \geq 0$ :*

$$v_P(n!_{D_{r_i}}^h) = v_P(n!_{D_{r_j}}^h)$$

*Autrement dit les  $P$ -séquences associées aux suites  $P^h$ -ordonnée des  $D_{r_i}$  sont les mêmes.*

*Preuve.* Identique à la preuve de la Proposition 2.3 pour les suites  $P$ -ordonnée.  $\square$

**Proposition 4.3.** *Pour  $h \geq 1$ , l'application  $\theta_i : x \rightarrow x\pi + r_i$  envoie une suite  $P^{(h-1)}$ -ordonnée de  $D$  sur une suite  $P^h$ -ordonnée de  $D_{r_i}$ .*

*Preuve.* Soit  $(a_n)_n$  une suite  $P^{h-1}$ -ordonnée de  $D$ . Pour tout  $x, y \in D$ :

$$\begin{aligned} \min(h, v_P(\theta_i(x) - \theta_i(y))) &= \min(h-1, v_P(\pi(x-y)) - 1) + 1 \\ &= \min(h-1, v_P((x-y) + 1 - 1) + 1) \\ &= \min(h-1, v_P(x-y)) + 1 \end{aligned}$$

Par récurrence sur  $n \geq 1$ , le minimum à la  $n$ -ème étape de construction d'une suite  $P^h$ -ordonnée de  $D_{r_i}$  est atteint par  $\theta_i(a_n)$  ce qui fait de  $(\theta_i(a_n))_n$  une suite  $P^h$ -ordonnée de  $D_{r_i}$ .  $\square$

**Corrolaire 4.2.** *Pour tout  $h \geq 1$  et  $n \geq 0$ :*

$$v_P(n!_{D_{r_i}}^h) = v_P(n!_D^{(h-1)}) + n$$

*Preuve.* Soit  $(a_n)_n$  une suite  $P^{(h-1)}$ -ordonnée de  $D$ . Pour tout  $n \geq 1$  on a :

$$\begin{aligned} v_P \left( n!_{D_{r_i}}^h \right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \min(h, v_P(\theta_i(a_n) - \theta_i(a_k))) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (\min(h-1, v_P(a_n - a_k)) + 1) \\ &= v_P \left( n!_D^{(h-1)} \right) + n \end{aligned}$$

□

On cherche désormais à construire une suite  $P^h$ -ordonnée de  $D$  à partir de suites  $P^h$ -ordonnée des  $D_{r_i}$ . On rappelle que la notion d'entrelacement de suites à été introduite dans la Définition 2.7.

On montre que l'entrelacement  $q$ -uniforme de suites  $P^h$ -ordonnée des  $D_{r_i}$  résulte en une suite  $P^h$ -ordonnée de  $D$ .

**Proposition 4.4.** *Pour tout  $0 \leq i < q$  et tout  $n \in \mathbb{N}$  soit*

$$\phi_i(n) = nq + i$$

*La suite obtenue par  $(\phi_i)_{0 \leq i < q}$  entrelacement de suites  $P^h$ -ordonnée des  $D_{r_i}$  est une suite  $P^h$ -ordonnée de  $D$ .*

*Preuve.* Identique à la preuve de la Proposition 2.5 pour les suites  $P$ -ordonnée. □

**Corrolaire 4.3.** *Pour tout  $n \geq 0$  et  $h \geq 1$ , on a*

$$v_P(n!_D^h) = v_P(\lfloor n/q \rfloor!_D^{(h-1)}) + \lfloor n/q \rfloor$$

*Preuve.* Soit  $(a_n)_n$  la suite obtenue par  $(\phi_i)_{0 \leq i < q}$  entrelacement des  $D_{r_i}$ . Par définition des  $\phi_i$ ,  $a_n$  est le  $\lfloor n/q \rfloor$ -ème terme d'une suite  $P^h$ -ordonnée de l'un des  $D_{r_i} = D_{r_{i_0}}$ . Puisque  $v_P(a_n - a_k) = 0$  dès que  $a_k \notin D_{r_{i_0}}$ , on a

$$v_P(n!_D^h) = v_P \left( \lfloor n/q \rfloor!_{D_{r_{i_0}}}^h \right)$$

On applique alors le Corrolaire 4.2. □

**Theoreme 4.8.** *Pour tout  $n \geq 0$ , on a :*

$$v_P(n!_D^h) = \sum_{k=1}^h \lfloor n/q^k \rfloor$$

*Preuve.* Par récurrence sur  $h \geq 0$ . Si  $h = 0$ ,  $v_P(n!_D^h) = 0$  pour tout  $n$ .

Supposons la formule vrai au rang  $h-1$ . On a d'après le Corrolaire 4.3 et l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned} v_P(n!_D^h) &= v_P(\lfloor n/q \rfloor!_D^{(h-1)}) + \lfloor n/q \rfloor = \sum_{k=1}^{h-1} \lfloor n/q^{k+1} \rfloor + \lfloor n/q \rfloor \\ &= \sum_{k=2}^h \lfloor n/q^k \rfloor + \lfloor n/q \rfloor = \sum_{k=1}^h \lfloor n/q^k \rfloor \end{aligned}$$

□

**Définition 4.7** (La fonction  $w_{q,h}$ ). Pour tout  $h, n \geq 0$  et tout  $q \geq 2$ , on pose:

$$w_{q,h}(n) = \sum_{k=1}^h \lfloor n/q^k \rfloor = w_q(n) - w_q(\lfloor n/q^h \rfloor)$$

**Corrolaire 4.4.** Soit  $M = \prod_{j \in J} P_j^{h_j}$  un module. On note  $q_j$  le cardinal de  $D/P_j$ . On a alors

$$n!_D^M = \prod_{j \in J} P_j^{w_{q_j, h_j}(n)}$$

Remarquons maintenant que si  $h \geq \lfloor \log_q(n) \rfloor$ , on a  $w_q(n) = w_{q,h}(n)$  et donc les  $n$  termes produits par l'Algorithme 2.2 servant à construire une suite  $P$ -ordonnée de  $D$  forment aussi les  $n$  premiers termes d'une suite  $P^h$ -ordonnée.

Si au contraire  $h < \lfloor \log_q(n) \rfloor$ , les Proposition 4.3 et Proposition 4.4 impliquent que l'Algorithme 2.2 servant à construire une suite  $P$ -ordonnée de  $D$  peut être utilisé pour construire les  $n$  premiers termes d'une suite  $P^h$ -ordonnée de  $D$  à condition de prendre pour  $q$  premiers termes à l'étape 1) les  $q$  premiers termes d'une suite  $P^{(\log_q(n)-h)}$ -ordonnée de  $D$ . Mais il est immédiat que les  $q$  premiers termes  $(r_0, r_1, \dots, r_{q-1})$  utilisés dans l'algorithme sont aussi les  $q$  premiers termes d'une suite  $P^h$ -ordonnée de  $D$  quelque soit  $h$ . En conséquence:

**Theoreme 4.9.** La suite  $P$ -ordonnée de  $D$  produite par l'Algorithme 2.2 est aussi une suite  $P^h$ -ordonnée de  $D$  pour tout  $h \geq 0$ .

#### 4.5.2 Algorithme pour $\text{Int}_n^M(D)$

On résume ici la procédure pour construire lorsque les idéaux  $(k!_D^M)_{k \leq n}$  sont principaux une base régulière de  $\text{Int}_n^M(D)$ .

Soit  $T$  l'ensemble des premiers  $P$  divisant  $M$ .

1. Pour tout  $P$  dans  $T$ , on utilise l'Algorithme 2.2 pour construire les  $n$  premiers termes d'une suite  $P^h$ -ordonnée de  $D$  où  $h$  est la plus grande puissance telle que  $P^h$  divise  $M$ .
2. Pour tout  $0 \leq k \leq n$ , on utilise l'Algorithme 4.1 pour construire un polynôme  $A_k$  vérifiant  $A_k(D) \subset k!_D^M$ . On utilisera pour cela les  $k$  premiers termes des suites  $P^h$ -ordonnée construites à l'étape 1).
3. Pour tout  $0 \leq k \leq n$ , on calcul l'idéal  $k!_D^M$  en utilisant la formule du Corrolaire 4.4.
4. Pour tout  $0 \leq k \leq n$ , on calcul un générateur  $\beta_k$  de  $k!_D^M$  par les méthodes standards puis  $B_k = \frac{1}{\beta_k} A_k$ .

La famille  $(B_0, B_1, \dots, B_n)$  ainsi construite est une base régulière de  $\text{Int}_n^M(D)$ .

#### 4.5.3 Exemples

*Exemple 1*

Soit  $K = \mathbb{Q}(i)$  d'anneau des entiers  $\mathbb{Z}[i]$  (principal) et soit le module

$$M = (3 - i) = (1 + i)(2 + i)$$

Voici une base régulière  $B = (B_i(X))_{0 \leq i \leq 3}$  de  $\text{Int}_3^M(\mathbb{Z}[i])$ :

$$\begin{aligned} B_0(X) &= 1, & B_1(X) &= X, & B_2(X) &= \frac{1-i}{2}X^2 - \frac{1-i}{2}X \\ B_3(X) &= \frac{1-i}{2}X^3 - \frac{1+i}{2}X^2 + iX \end{aligned}$$

Dans le tableau suivant, on donne dans la première colonne un polynôme  $P(X)$  de  $\text{Int}_3^M(\mathbb{Z}[i])$  exprimé par ses  $\mathbb{Z}[i]$ -coordonnées sur la base régulière  $B$ , dans la deuxième des couples  $(m, e)$  avec  $m \in (M)$  et  $e \in \mathbb{Z}[i]$  et dans la troisième les polynôme  $P(mX + e) \in \mathbb{Z}[i][X]$  correspondants.

$P(X)$	$(m, e)$	$P(mX + e)$
$(0, 1, i, 1 - i)_B$	$(3 - i, 1)$	$(-26 - 18i)X^3 - (19 + 17i)X^2 - 5iX + 1$
	$(3 - i, i)$	$(-26 - 18i)X^3 + (23 - 11i)X^2 + (4 + 7i)X + i - 1$
	$((3 - i)2i, i - 1)$	$(-144 + 208i)X^3 - (164 + 52i)X^2 - 30iX + 1$
$(i, 0, i, 1 + i)_B$	$((3 - i)i, 0)$	$(-26 - 18i)X^3 - (1 - 7i)X^2 - (3 + 4i)X + i$
	$((3 - i), (2 - i))$	$(18 - 26i)X^3 + (31 - 67i)X^2 + (11 - 52i)X - 1 - 11i$
	$((3 - i)^2, 1)$	$(-352 - 936i)X^3 + 50 - 350i)X^2 + (17 - 19i)X + i$
$(0, 0, 1, -1)_B$	$((3 - i), 1)$	$(4 + 22i)X^3 + (5 + 15i)X^2 + (1 + 3i)X$
$(0, 1, -1, 0)_B$	$((3 - i)(2 + 2i), 2 - 3i)$	$(-56 - 8i)X^2 + (2 + 46i)X + (10 - 2i)$

*Exemple 2*

On note  $\alpha = \sqrt[3]{2}$ .

Soit  $K = \mathbb{Q}[\alpha]$ . Une base de l'anneau des entiers  $\mathbb{Z}[\alpha]$  est  $(1, \alpha, \alpha^2)$ .

Soit le module  $M = (2\alpha)$ . Voici une base régulière de  $\text{Int}_4^M(\mathbb{Z}[\alpha])$ :

$$\begin{aligned} B_0(X) &= 1, & B_1(X) &= X, & B_2(X) &= \frac{-\alpha^2}{2}X^2 + \frac{\alpha^2}{2}X, & B_3(X) &= \frac{-\alpha^2}{2}X^3 + \frac{\alpha^2 + 2}{2}X^2 - X \\ B_4(X) &= \frac{1}{2}X^4 + (\alpha - 1)X^3 + \frac{\alpha^2 - 3\alpha + 1}{2}X^2 + \frac{\alpha - \alpha^2}{2}X \end{aligned}$$

#### 4.5.4 Fonctions pour $\text{Int}_n^M(D)$

Voici quelques fonctions utiles:

- la fonction `ispolyaupto_mod(K, M, n)` teste si  $\text{Int}_n^M(D)$  admet une base régulière

- la fonction `zkmodregbasis(K, M, n, "X")` retourne (si possible) une base régulière (d'indéterminée "X") de  $\text{Int}_n^M(D)$  .
- la fonction `zkmodregbasis_dec(K, pol, M, "X")` retourne une matrice  $(n + 1) \times 2$  (où  $n = \deg(\text{pol})$ ) avec une base régulière de  $\text{Int}_n^M(D)$  (d'indéterminée "X") dans la deuxième colonne et les coefficients de la  $K$ -décomposition de `pol` sur cette base dans la première.

## References

- [Bha97] Manjul Bhargava. “P-orderings and polynomial functions on arbitrary subsets of Dedekind rings.” In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 490 (1997), pp. 101–128. URL: <http://eudml.org/doc/153942>.
- [Bha09] Manjul Bhargava. “On P -orderings, rings of integer-valued polynomials, and ultrametric analysis”. In: *Journal of The American Mathematical Society - J AMER MATH SOC* 22 (Oct. 2009), pp. 963–993. DOI: 10.1090/S0894-0347-09-00638-9.
- [CC16] Paul-Jean Cahen and Jean-Luc Chabert. “What You Should Know About Integer-Valued Polynomials”. In: *The American Mathematical Monthly* 123.4 (2016), pp. 311–337. DOI: 10.4169/amer.math.monthly.123.4.311.
- [Joh10] Keith Johnson. “Computing  $r$ -removed  $P$ -orderings and  $P$ -orderings of order  $h$ ”. en. In: *Actes des rencontres du CIRM* 2.2 (2010), pp. 33–40. DOI: 10.5802/acirm.31. URL: [acirm.centre-mersenne.org/item/ACIRM\\_2010\\_\\_2\\_2\\_33\\_0/](http://acirm.centre-mersenne.org/item/ACIRM_2010__2_2_33_0/).
- [Ler10] Amandine Leriche. “Groupes, corps et extensions de Polya : une question de capitulation”. Theses. Université de Picardie Jules Verne, Dec. 2010. URL: <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00612597>.