21.

a)

Bevis $\text{Rank}(AB) \leq \text{Rank}(A)$:

Rank av en matrise M er gitt ved : $\text{Rank}M + \dim \text{Nul} M = n$
$\text{Rank}M = n - \dim \text{Nul} M = \dim \text{Col} M$

Dermed har vi at: $\text{rank}(AB) = \dim(\text{Col}\, AB)$, $\text{rank}A = \dim(\text{Col}A)$

Dersom en vektor $y \in \text{Col}(AB)$. Finnes det en $x \in \mathbb{R}^p$
slik at $y = (AB)x$

La $z = Bx \in \mathbb{R}^n \longrightarrow y = A(Bx) = Az$

derfor er $y \in \text{Col}(A)$ og $\text{Col}AB$ er et underrom av A.
og vi har:

$$\text{rank}(AB) = \dim(\text{Col}AB) \leq \dim(\text{Col}A) = \text{rank}A$$

b)

the rank of AB^T is given by $\text{Rank}(AB^T) = \text{Rank}B^TA^T$

$$\text{rank}\, AB = \text{rank}(AB)^T = \text{rank}(B^T \cdot A^T) \leq \text{rank}\, B^T = \text{rank}\, B$$

fra beviset i a) er $\text{Col}B^TA \subseteq \text{Col}B^T$ og dermed kan man
konkludere med $\text{rank}AB \leq \text{rank}B$