Oblig 3. - Vilde Oppegård

Oppgave 1.

a. Finn elementene a_{23} og a_{34} i matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 7 \\ -3 & 8 & 15 & 10 \end{bmatrix}.$$

a_{23} er rad 2 og kollone 3 som betyr at $a_{23} = -1$

a_{34} er rad 3 og kollone 4 som betyr at $a_{34} = 10$

b. La

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Finn $2A + 3B - C$.

$$2A + 3B - C = 2\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\cdot 2 + 3\cdot 1 & 2\cdot 0 + 3\cdot 2 & 2\cdot(-1) + 3\cdot 3 \\ 2\cdot 4 + 3(-3) & 2\cdot 3 + 3\cdot 1 & 2\cdot 5 + 3\cdot 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 6 & 7 \\ -1 & 9 & 22 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7-0 & 6-0 & 7-0 \\ -1-2 & 9-(-2) & 22-1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 7 & 6 & 7 \\ -3 & 11 & 21 \end{bmatrix}}}$$

c. Finn matrisen X slik at

$$3X + \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

$$3x = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-4 & 0-(-1) \\ 4-3 & -8-(-4) \end{bmatrix}$$

$$3x = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow x = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} -2 & 1/3 \\ 1/3 & -4/3 \end{bmatrix}$$

d. Finn produktet

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}} \overset{B}{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}} \overset{C}{\begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}}.$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)\cdot 3 + 1\cdot(-4) + 2\cdot 0 & (-1)1 + 1\cdot 5 + 2\cdot 2 \\ 0\cdot 3 + 1\cdot(-4) + 3\cdot 0 & 0\cdot 1 + 1\cdot 5 + 3\cdot 2 \\ 5\cdot 3 + 1\cdot(-4) + 1\cdot 0 & 5\cdot 1 + 1\cdot 5 + 1\cdot 2 \\ 0\cdot 3 + 4(-4) + 2\cdot 0 & 0\cdot 1 + 4\cdot 5 + 2\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 8 \\ -4 & 11 \\ 11 & 12 \\ -16 & 24 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -7 & 8 \\ -4 & 11 \\ 11 & 12 \\ -16 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7\cdot(-1) + 4\cdot 8 & (-7)\cdot 2 + 8\cdot 0 & -7\cdot 7 + 8\cdot 6 \\ -4\cdot(-1) + 11\cdot 4 & (-4)\cdot 2 + 11\cdot 0 & (-4)\cdot 7 + 11\cdot 6 \\ 11\cdot(-1) + 12\cdot 4 & 11\cdot 2 + 12\cdot 0 & 11\cdot 7 + 12\cdot 6 \\ -16\cdot(-1) + 24\cdot 4 & -16\cdot 2 + 24\cdot 0 & (-16)\cdot 7 + 24\cdot 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 39 & -14 & -1 \\ 48 & -8 & 38 \\ 37 & 22 & 149 \\ 112 & -32 & 32 \end{bmatrix}$$

Oppgave 2.

a. Finn A dersom $(2A)^T = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$.

Ved regler for transponering

$(cA)^T = c(A)^T$ her $(2A)^T = 2(A)^T$

dele A^T pa to?

$2(A)^T = 2\begin{bmatrix} 4 & -1/2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ som betyr at $A^T = \begin{bmatrix} 4 & -1/2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

da blir A ved regler for transponering av en matrise

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1/2 & 3 \end{bmatrix}$$

b. Finn verdien (hvis mulig) til k slik at matrisen $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & k \\ k & 3 & 0 \\ k-1 & 5 & k \end{bmatrix}$ er inverterbar. Finn inversmatrisen. Dersom A er koeffisientmatrisen for likningen $A\vec{x} = \vec{0}$ forklar for hvilke verdier av k likningen har ingen løsning, en eneste løsning, eller uendelig mange løsninger.

finne determinanten til matrisen
tok første rad:

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13}$$

$$= (-1) \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & k \end{bmatrix} - 2 \det \begin{bmatrix} k & 0 \\ k-1 & k \end{bmatrix} + k \cdot \det \begin{bmatrix} k & 3 \\ k-1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= (-1) \cdot (3k - 0 \cdot 5) - 2 \cdot (k \cdot k - 0 \cdot (k-1)) + k(5k - 3(k-1))$$

$$= -3k - 2k^2 + 5k^2 - 3k^2 + 3k$$

$$= -3k + 3k = 0$$

Det betyr at matrisen ikke er inverterbar vansett verdien til K

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & k & 0 \\ k & 3 & 0 & 0 \\ k-1 & 5 & k & 0 \end{array}\right] \underset{R_1 = -R_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -k & 0 \\ k & 3 & 0 & 0 \\ k-1 & 5 & k & 0 \end{array}\right] \underset{R_2 = R_2 - kR_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -k & 0 \\ 0 & 2k+3 & k^2 & 0 \\ k-1 & 5 & k & 0 \end{array}\right]$$

$$\underset{R_3 = R_3 - (k-1)R_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -k & 0 \\ 0 & 2k+3 & k^2 & 0 \\ 0 & 2k+3 & k^2 & 0 \end{array}\right] \underset{R_3 = R_3 - R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -k & 0 \\ 0 & 2k+3 & k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Kan se av den reduserte trappeformen at $A\vec{x} = \vec{0}$ vil ha uendelig mange løsninger vansett verdi av K. fordi matrisen har en rad $(0\ 0 \ldots 0 \mid b = 0)$

matrisenvil derfor ikke ha en entydig løsning eller ingen løsninger for noen verdier av K.

c. Finn inversmatrisene dersom de finnes

$$A \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 15 & -5 \end{bmatrix}, \quad B \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

finner den inverse matrisen ved hjelp av determinant:

Ved definisjonen av en determinant:

$\det A = (-3)(-5) - 15 \cdot 1 = 15 - 15 = 0$

Siden $\det A = 0$ betyr det at matrisen ikke er inverterbar og dermed finnes ikke A^{-1} og matrisen er singulær

Siden B er på trappeform og triangular er $\det B \neq 0$ og B er invertibel

Den invertible matrisen blir da:

$$[B \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$R_1 = \frac{1}{2} R_1$
$R_2 = 2 \cdot R_2$
$R_3 = 3 \cdot R_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\Longrightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

d. Finn ranken, nullrom, dimensjon av søylerom og dimensjon av radrom til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 7 \\ 3 & -2 & 5 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

Rank definisjon

dimensjonen av kollonerommet - antall pivotsøyler på trappeform

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 7 \\ 3 & -2 & 5 & 5 & 12 \end{bmatrix} \overset{R_1 = R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 3/2 & 2 & 5/2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 7 \\ 3 & -2 & 5 & 5 & 12 \end{bmatrix} \underset{R_3 = R_3 - 3R_1}{\overset{R_2 = R_2 - R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 3/2 & 2 & 5/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & -1 & 9/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & -1 & 9/2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_1 = R_1 - R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & -1 & 9/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & -1 & 9/2 \end{bmatrix} \overset{R_3 = R_3 - R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & -1 & 9/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_2 = -2R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Går ikke ann å radredusere matrisen videre

kan se at den ha 2 pivotsøyler som betyr at

<u>Rangen til matrisen = 2</u>

NulA er settet med løsningene for den homogene ligningen $Ax=0$

Bruker trappeformen fra tidligere

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

systemet til løsningen:

$$x_1 + \quad + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_3 - 3x_4 + 2x_5$$

$$x_2 - x_3 + 2x_4 - 9x_5 = 0 \Rightarrow x_2 = x_3 - 2x_4 + 9x_5$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 - 3x_4 + 2x_5 \\ x_3 - 2x_4 + 9x_5 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Nul}A = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Radrommet til A. Bruker matrisen på redusert trappeform

Basis til Radrommet.

$$\text{Row}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ -9 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \dim(\text{Row}A) = 2$$

Basisen til søylerommet består av de korresponderende søylene i den opprinnelige matrisen til pivotsøylene i den radreduserte matrisen.
Altså søyle 1 og 2 :

$$\text{Col}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \dim(\text{Col}A) = 2$$

Oppgave 3.

a. Forklar hvorfor determinanten til matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & -2 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

er lik null?

Radredusere matrisen:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & -2 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim 2 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

fra eksempel 3 (sec. 3.2, side 189)
Hvis to rader i A er like vil $\det A = 0$

b. Forklar hvorfor determinanten til matrisen $B = \begin{bmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{bmatrix}$ er lik til determinanten til matrisen $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$\det A = \underline{ad - bc}$ ved definisjonen av determinanten til en 2x2 matrise.

$$\det B = (a+kc)\cdot d - (b+kd)c$$
$$= ad + \cancel{dkc} - bc - \cancel{dkc}$$
$$= \underline{ad - bc = \det A}$$

c. La A være en kvadratisk (4×4)-matrise slik at $\det(A) = 2$. Regn $\det(3A)$ ut.

Regel:

$\det(CA) = c^n \det A$

da blir:

$\det(3A) = 3^4 \det A = 3^4 \cdot 2 = \underline{\underline{162}}$

d. Finn løsningen av det lineær systemet

$$\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -3 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 14 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 10 \end{cases}$$

ved hjelp av Cramer sin regel.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -3 \\ 14 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - 5 \cdot \det \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + 1 \det \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= ((-2) \cdot 2 - (-3) \cdot 4) - 5(7 \cdot 2 - (-3)3) + 1(7 \cdot 4 - (-2) \cdot 3)$$

$$= 8 - 5(23) + (34) = \underline{-73}$$

$$A_1(b) = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -3 \\ 14 & 5 & 1 \\ 10 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det A_1(b) = (-3) \det \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - (-2) \det \begin{bmatrix} 14 & 1 \\ 10 & 2 \end{bmatrix} + (-3) \det \begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= (-3)(5 \cdot 2 - 1 \cdot 4) + 2(14 \cdot 2 - 1 \cdot 10) - 3(14 \cdot 4 - 5 \cdot 10)$$

$$= -3 \cdot 6 + 2 \cdot 18 - 3(6) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{\det A_1(b)}{\det A} = \frac{0}{\det A} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = 0$$

$$A_2(b) = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ 1 & 14 & 1 \\ 3 & 10 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det A_2(b) = 7 \det \begin{bmatrix} 14 & 1 \\ 10 & 2 \end{bmatrix} - (-3) \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + (-3) \det \begin{bmatrix} 1 & 14 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$= 7(14 \cdot 2 - 10 \cdot 1) + 3(1 \cdot 2 - 1 \cdot 3) - 3(1 \cdot 10 - 14 \cdot 3)$$

$$= 7(18) + 3(-1) - 3(-32) = 219$$

$$x_2 = \frac{\det A_2(b)}{\det A} = \frac{219}{-73} = -3 \iff \underline{x_2 = -3}$$

$$A_3(b) = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -3 \\ 1 & 5 & 14 \\ 3 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\det A_3(b) = 7 \cdot \det \begin{bmatrix} 5 & 14 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} - (-2) \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 14 \\ 3 & 10 \end{bmatrix} + (-3) \det \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= 7 \cdot (5 \cdot 10 - 14 \cdot 4) + 2(1 \cdot 10 - 3 \cdot 14) - 3(1 \cdot 4 - 5 \cdot 3)$$

$$= 7(-6) + 2(-32) - 3(-11) = -73$$

$$x_3 = \frac{\det A_3(b)}{\det A} = \frac{-73}{-73} = 1 \iff x_3 = 1$$

$$\underline{\underline{x_1 = 0 \;,\; x_2 = -3 \quad \text{og} \quad x_3 = 1}}$$