

一. 题目概述

求解线性常微分方程的模拟计算机

【本科组】

利用测评板上提供的器件，设计制作一个求解下列微分方程的模拟计算机，如图 1 所示。

$$\frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + 4 \times 10^4 \cdot u_o(t) = 3 \times 10^4 \cdot u_i(t)$$

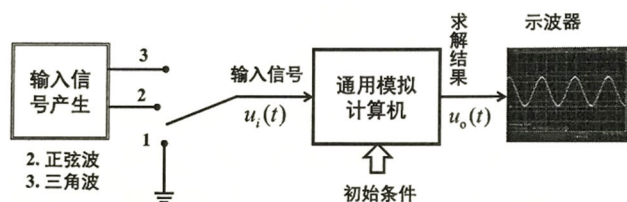


图 1 求解微分方程的模拟计算机结构示意图

输入信号 $u_i(t)$ 为下列 3 种：

- (1) 0
- (2) $\omega = 600\text{rad/s}$ 正弦波（幅度 $> 2\text{V}$ ，初相位不限）
- (3) 与正弦波同频同相的三角波（幅度 $> 2\text{V}$ ）。

初始条件为

- (1) $u_o(0) = 1\text{V}$
- (2) $\frac{du_o(0)}{dt} = 0\text{V/s}$

二、设计任务及指标要求

利用综合测评板和若干电阻、电容、开关等，设计制作电路。模拟计算机开始计算时刻（时间 0 点）由开关控制。具体要求如下：

1. 基于测评板上的运算放大器生成正弦波、三角波电压 $u_i(t)$ ，并留出测试端子。 $\omega = 600\text{rad/s}$ ，幅度 $> 2\text{V}$ ，初相位不限。
2. 基于测评板上的运算放大器构造实现模拟计算机中所需的微分、积分器模块，留出输入输出测试端子，以便采用 $1\text{V}/100\text{Hz}$ 三角波或方波信号单独测试微分、积分器功能。
3. 构建模拟计算机系统，分别完成 3 种输入信号（可用开关或跳线切换）时对微分方程的解，求解结果通过示波器显示。

系统框图：

其中， k_1 、 k_2 分别为两积分器的积分常数， k_3 为微分器的微分常数。

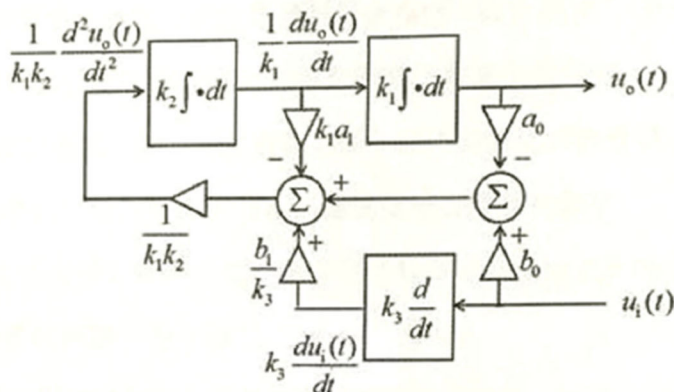


图 2 二阶微分方程求解的通用模拟计算机结构

要求求解微分方程： $\frac{d^2 u_o(t)}{dt^2} + 4 \times 10^4 u_o(t) = 3 \times 10^4 u_i(t)$

6. 有关理论知识提示

(1) 根据数学知识，本题微分方程的理论求解部分结果为：

$$u_i(t) = 0 \text{ 时, } u_o(t) = \cos(200t) \text{ V}$$

$$u_i(t) = 2 \cos(600t + \theta) \text{ V 时, } u_o(t) = K \cos(200t + \varphi) - 0.1875 \cos(600t + \theta) \text{ V}$$

其中，

$$\varphi = \arctan \frac{0.5625 \sin \theta}{1 + 0.1875 \cos \theta}$$

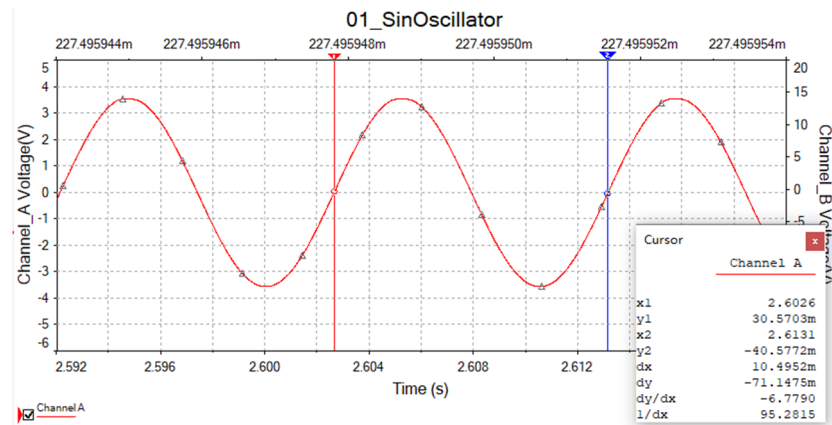
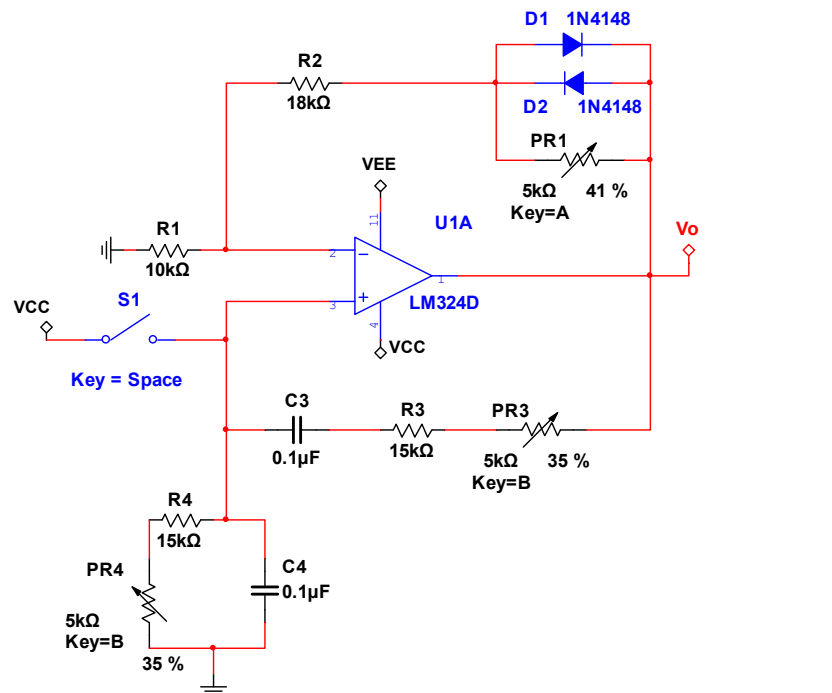
$$K = \frac{1 + 0.1875 \cos \theta}{\cos \varphi}$$

二. 基本电路设计及仿真

1. 正弦波发生电路

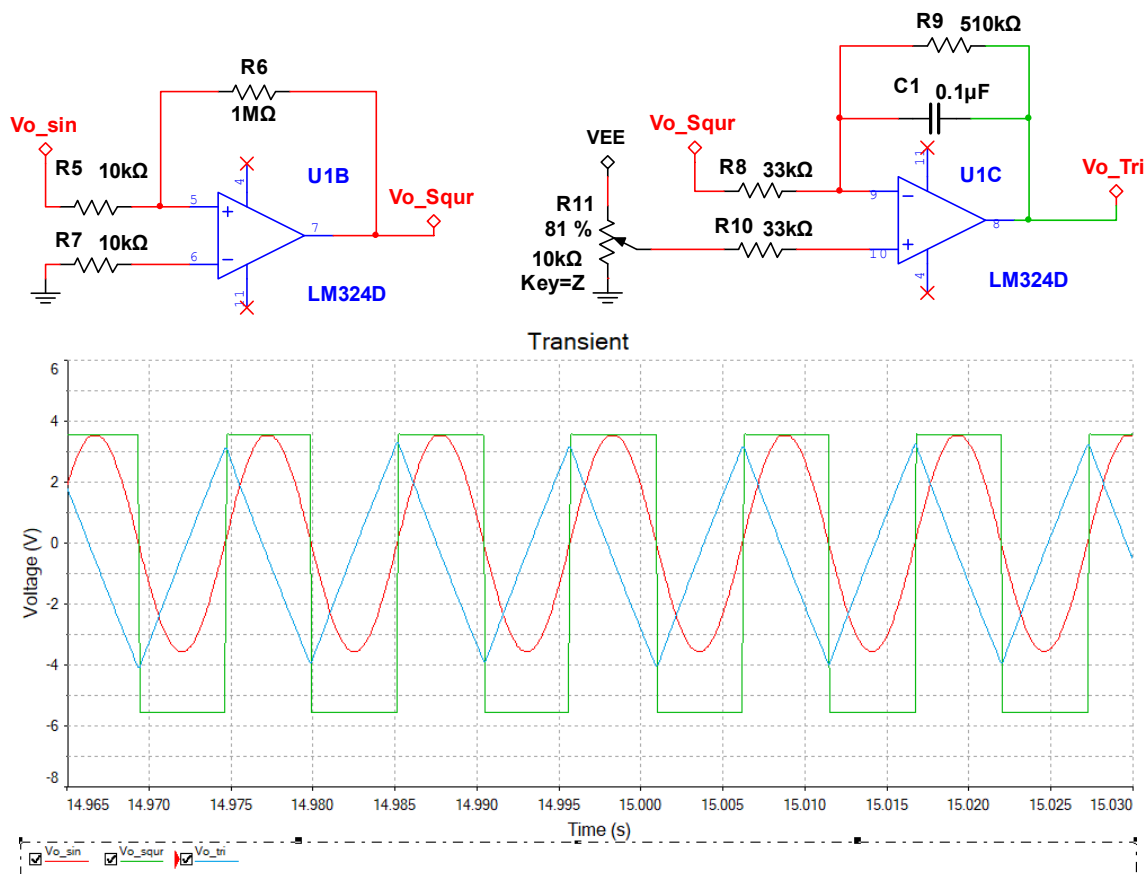
$$\omega = 600 \text{ rad/s} \quad (f = 95.49 \text{ Hz}, T = 10.47 \text{ ms}, T/2 = 5.24 \text{ ms})$$

选频网络参数： $R = 16.66 \text{ k}\Omega$, $C = 0.1 \mu\text{F}$ 。



2. 三角波电路

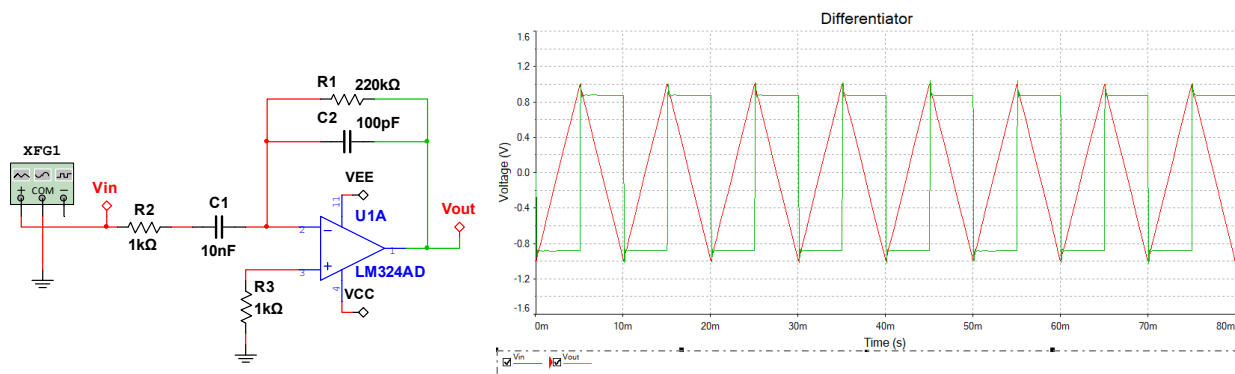
要求与正弦波同频同相，因此采用比较器及积分电路，由正弦波变换产生三角波。



考虑到仿真中方波输出含有直流分量，为了防止积分电路饱和，消除直流分量影响，设置一个可调电压环节改变同相端电位，电位升高，输出三角波向上移。

此积分电路同时作为模块测试用的积分电路。

3. 微分电路



R_1 应选择较大的阻值，避免 C_1 过大。 C_2 滤除高频噪声，需准备更小的电容。根据题目要求，微分电路只需要完成功能测试即可，在题目要求的求解电路中不需要微分电路。

4. 积分电路

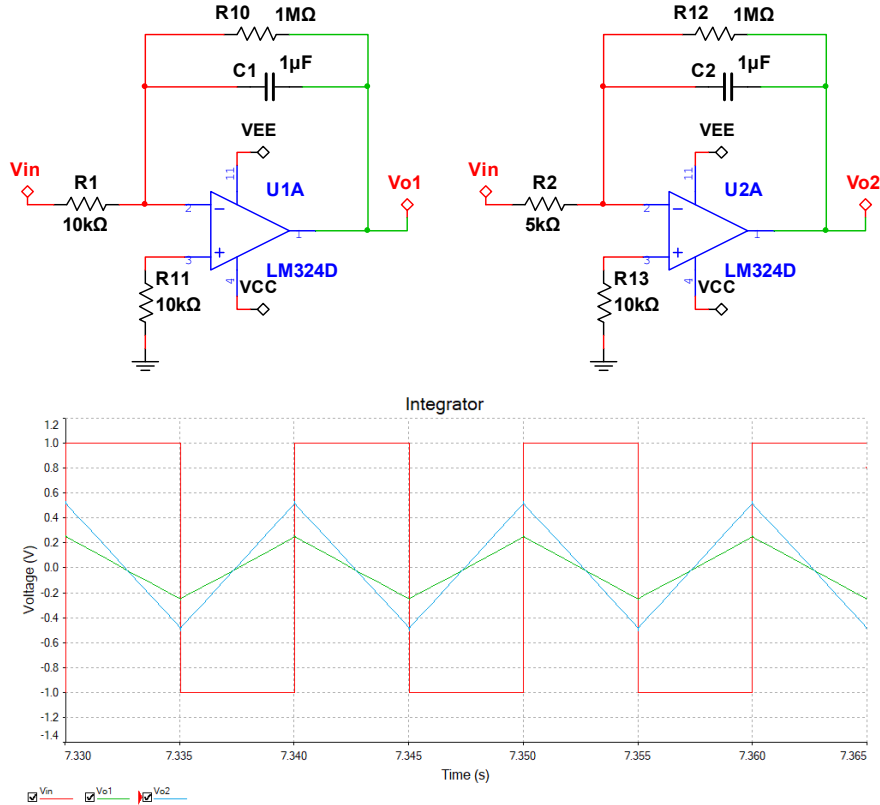
结合求解微分方程，设计积分电路参数，由题可知， $a_0 = 4 \times 10^4$

取 $k_1 = k_2 = 200$ ，则 $a_0 / (k_1 k_2) = 1$ ，基本合适。

可取 $R_1 = 5k\Omega$, $C_1 = 1\mu F$ 。

$b_0 = 3 \times 10^4$ ，则 $b_0 / (k_1 k_2) = 0.75 < 1$ ，不方便加法器实现。

取 $k_1 = 100$, $k_2 = 200$, 则: $R_1 = 10\text{k}\Omega$, $C_1 = 1\mu\text{F}$, $R_2 = 5\text{k}\Omega$, $C_2 = 1\mu\text{F}$



$$u_{o1} = -\frac{1}{10 \times 1 \times 10^{-3}} \int u_i dt = -100 \int u_i dt, \quad u_{o2} = -\frac{1}{5 \times 1 \times 10^{-3}} \int u_i dt = -200 \int u_i dt$$

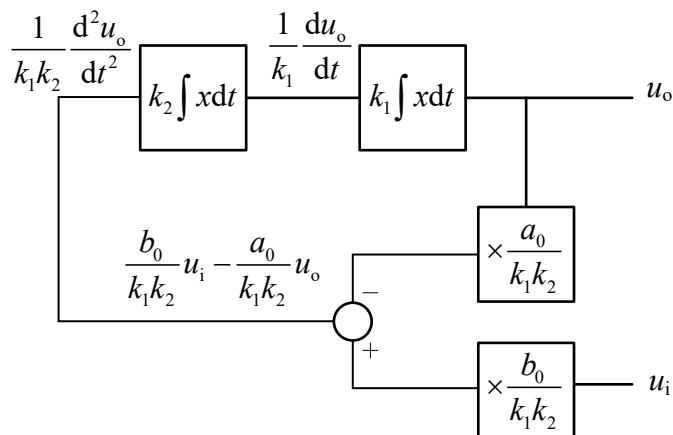
输入信号 100Hz/1V 方波, 则输出峰值分别为:

$$|u_{o1}| = 100 \int_0^{0.25} 1 dt = 250\text{mV}, \quad |u_{o2}| = 200 \int_0^{0.25} 1 dt = 500\text{mV}$$

仿真结果与理论计算基本吻合, 但存在输出正、负半周不对称情况, 差几个 mV。

三. 求解微分方程电路设计

1. 系统框图



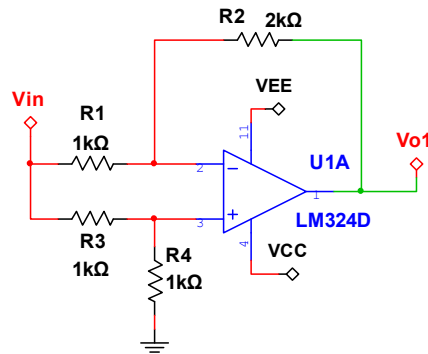
$$\frac{b_0}{k_1 k_2} u_i - \frac{a_0}{k_1 k_2} u_o = \frac{1}{k_1 k_2} \frac{d^2 u_o}{dt^2} \rightarrow \frac{d^2 u_o}{dt^2} + a_0 u_o = b_0 u_i$$

其中: $a_0 = 4 \times 10^4$, $b_0 = 3 \times 10^4$

2. 加减运算电路

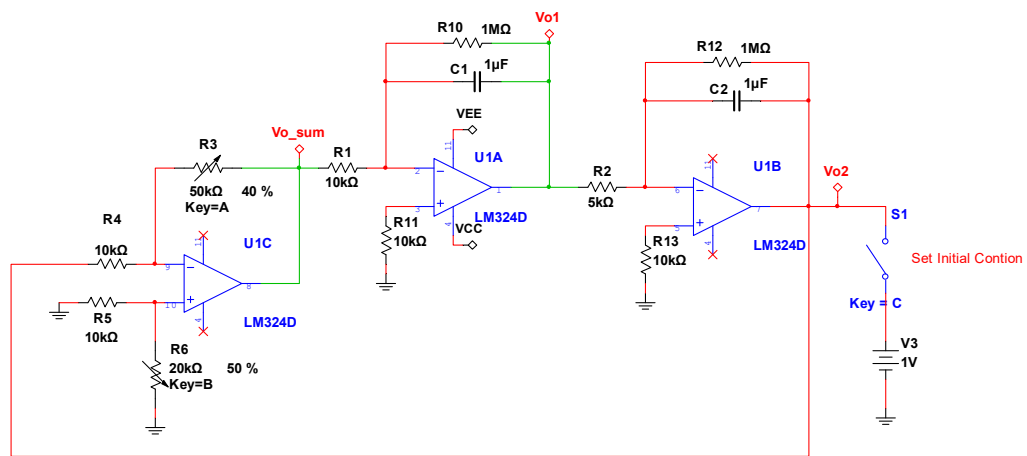
计算加、减法系数，由二.4 可知， $k_1=100$ ， $k_2=200$ ，故：

减法系数： $a_0/(k_1k_2)=2$ ，加法系数： $b_0/(k_1k_2)=1.5$



取 $R_1=1k\Omega$ ，则 $R_2=2k\Omega$ ，取 $R_3=1k\Omega$ ，则 $R_4=1k\Omega$ 。

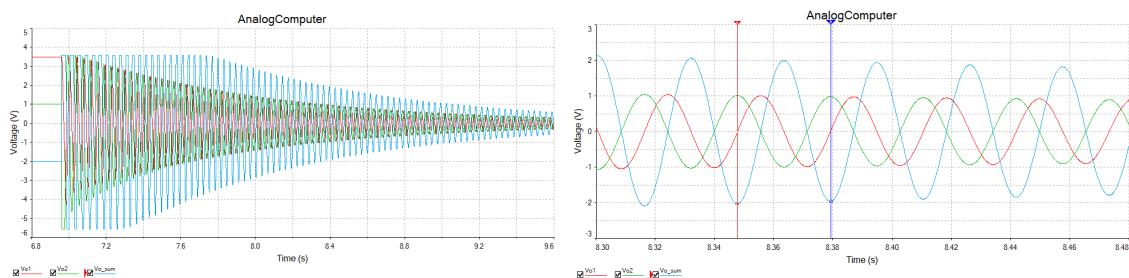
3. 仿真电路



为了方便细调比例系数，R2, R4 采用可调电阻。

4. 测试输入为 0 时(齐次方程通解)

通解应为 $u_o = \cos(200t)$ ，仿真波形如下图所示。



输出正弦波幅值衰减，频率为 31.43ms，即频率为 199.9rad。可见频率符合题解，需要解决幅值衰减的问题。

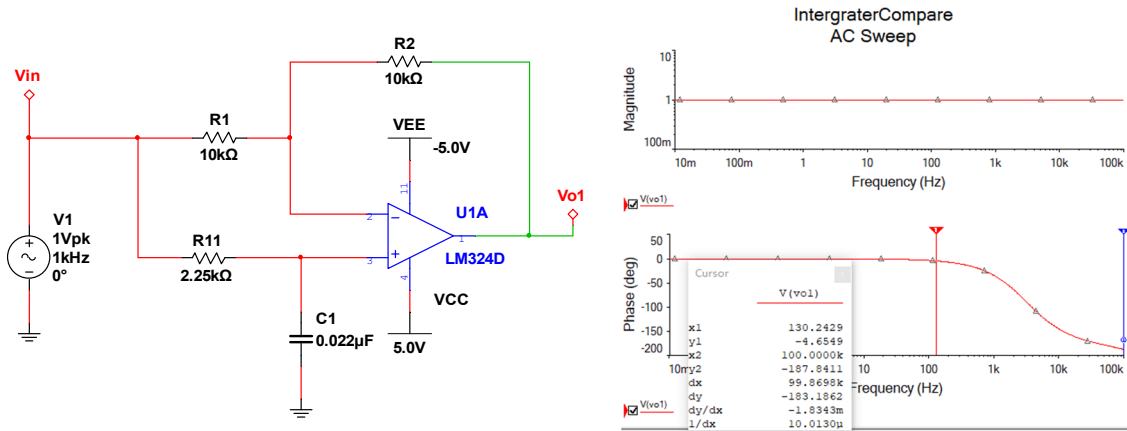
考虑输入为 0，输出正弦波，可以利用自激振荡的思想来分析，即电路满足 $\dot{A}\dot{F}=1$ 。调整加减运算电路系数后，并没有取得预期效果，因此考虑是相位条件不满足要求。

由于积分电路电容并联电阻，使其相移不为 90° ，理论分析和仿真均表明，在 200rad/s 处，相移略大于 90° ，需要加滞后补偿，补偿角度很小。

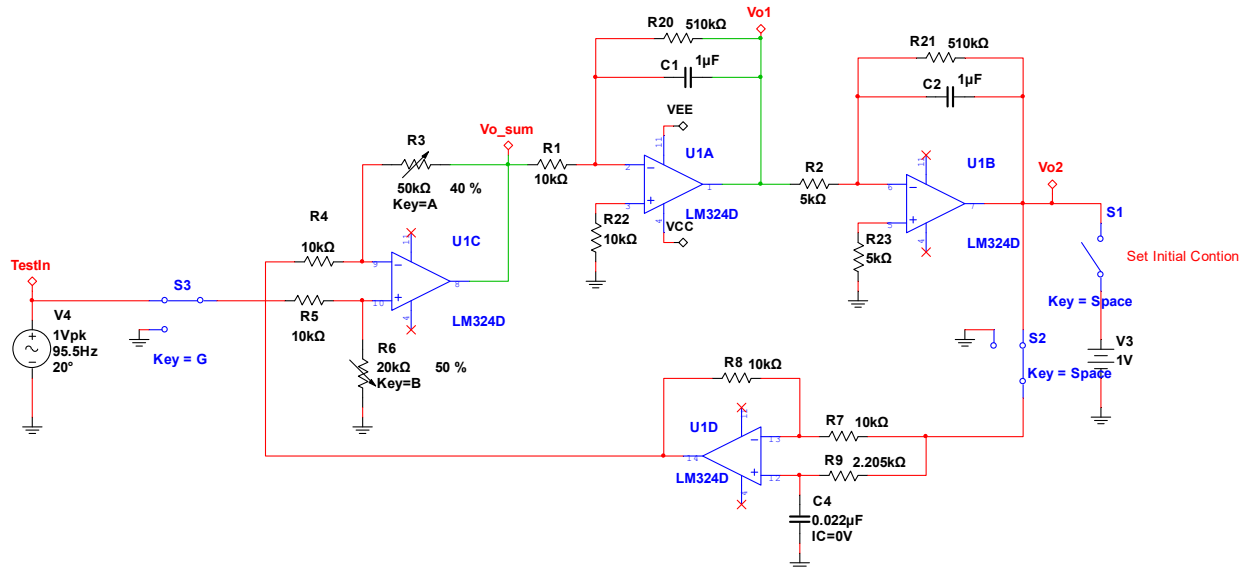
5. 相位补偿电路

- 1) 用 RC 滞后补偿，能够实现较小的滞后补偿，选则 RC 电路接电压跟随器实现积分电路输出相位补偿。(仿真文件丢失，参数合适，效果与全通滤波器相同)
- 2) 用全通滤波器补偿

下图为全通滤波器及波特图，可以看出能够满足补偿要求。



6. 增加补偿的求解电路



仿真中的问题：需要精细调整 R9；S1 和 S2 应同时动作，实际中如何实现？