

**Aurinkokunnan fysiikan harjoitustyö:
Asteroidin kirkkauden numeerinen
mallintaminen**

Vili Oja 014339369

20. toukokuuta 2016

Tiivistelmä

Tässä harjoitustyössä teimme ohjelman, joka luo ja esittää ellipsoidin muotoisen asteroidin pinnan kolmioiden verkkona. Johdimme myös kaavan asteroidin sisäisen rakenteen kolmiointiin. Lisäksi meidän piti verrata ohjelmallamme laskettuja kirkkauksia teoreettisiin arvoihin.

Ohjelmamme laskemat kirkkaudet olivat hyvin lähellä teoreettisia arvoja, joten ohjelmaa voi pitää onnistuneena.

Sisältö

1	Asteroidin muodon kolmionti ja integroitu kirkkaus	1
1.1	Yleistä	1
1.2	Tuloksia	3
1.3	Koodi ja sen ajaminen	5
2	Sisäisen rakenteen ”kolmiointi”	5

1 Asteroidin muodon kolmionti ja integroitu kirkkaus

1.1 Yleistä

Tein tämän työn yhdessä Julia Rantakylän ja Minttu Seppälän kanssa. Teimme ohjelman ellipsoidin muotoisen asteroidin pinnan kolmiointiin. Ohjelma laskee ensin yhden oktantin pinnan pisteet, ja kloonaa ne kaikille muille pinnan osille. Tämän jälkeen ohjelma muodostaa lasketuista pisteistä kolmioita. Lopuksi jokaiselle kolmiolle lasketaan normaali, jonka avulla lasketaan kolmiosta katsottuna tulo- ja lähtökulma Aurinkoon ja havaitsijaan. Näiden kulmien avulla jokaiselle yksittäiselle kolmiolle lasketaan kirkkaus kaavalla

$$L(\alpha) = A\mu\mu_0 \frac{1}{4} \frac{1}{\mu + \mu_0} \tilde{\omega} P(\alpha) . \quad (1)$$

Tässä $\mu = \cos \varepsilon$, missä ε on pinnan normaalin ja havaitsijan välinen kulma, ja $\mu_0 = \cos \iota$, missä ι on pinnan normaalin ja Auringon välinen kulma. [1]

Yksittäisen heijastuksen albedo $\tilde{\omega}$ ja vaihefunktio $P(\alpha)$ voidaan tässä unohtaa.

Laskemalla jokaisen kolmion antamat kirkkaudet yhteen, saamme approksimaation koko asteroidin pintakirkkaudelle.

Ellipsoidin muotoisen asteroidin pintakirkkauden analyttinen kaava on [2]

$$\begin{aligned} L(\alpha) = & \frac{1}{8} \pi F_0 \tilde{\omega} P(\alpha) abc \frac{S_{\odot} S_{\oplus}}{S} \\ & \times \{ \cos(\lambda' - \alpha') + \cos \lambda' + \sin \lambda' \sin(\lambda' - \alpha') \\ & \times \ln[\cot \frac{1}{2} \lambda' \cot \frac{1}{2} (\alpha' - \lambda')] \} . \end{aligned} \quad (2)$$

Tässä näkyvät muuttujat ovat

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \mathbf{e}_{\odot} \cdot \mathbf{e}_{\oplus} , \quad S_{\odot} = \sqrt{\mathbf{e}_{\odot}^T \mathbf{C} \mathbf{e}_{\odot}} , \quad S_{\oplus} = \sqrt{\mathbf{e}_{\oplus}^T \mathbf{C} \mathbf{e}_{\oplus}} , \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2} \end{bmatrix} , \quad \cos \alpha' = \frac{\mathbf{e}_{\odot}^T \mathbf{C} \mathbf{e}_{\oplus}}{S_{\odot} S_{\oplus}} , \quad \sin \alpha' = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha'} , \end{aligned}$$

$$S = \sqrt{S_{\odot}^2 + S_{\oplus}^2 + 2S_{\odot}S_{\oplus}\cos\alpha'} \quad , \quad \cos \lambda' = \frac{S_{\odot} + S_{\oplus}\cos\alpha'}{S} \quad \text{ja} \quad \sin \lambda' = \frac{S_{\oplus}\sin\alpha'}{S} \quad .$$

Itse mallintavan ohjelman lisäksi tein myös piirto-ohjelman, joka luo kolmiulotteisen kuvan halutusta asteroidista. Ohjelma värittää asteroidin kolmiot sen perusteella kuinka iso kirkkaus niille on laskettu, eli siis miten asteroidi näkyy havaitsijan kantilta. Kuvissa ei siis ole väritetty kaikkia kolmioita joita aurinko todellisuudessa valaisee. Mitä suurempi kirkkaus, sitä vaaleampi kolmio. Ohjelma merkitsee myös Auringon ja havaitsijan paikat kuvaan näiden kappaleiden sijaintien hahmottamisen helpottamiseksi. Vaikka kuvassa Aurinko ja havaitsija ovat näkyvissä, laskujen kannalta niiden oletettiin olevan erittäin kaukana, joten mallikuva saattaa vaikuttaa hieman harhaanjohtavalta.

1.2 Tuloksia

Minulla ei ollut aikaa implementoida analyyttisen ratkaisun laskua koodiin, joten ratkaisin sen käsin yhdelle ellipsoidille, jonka myös mallinsin ohjelmalla.

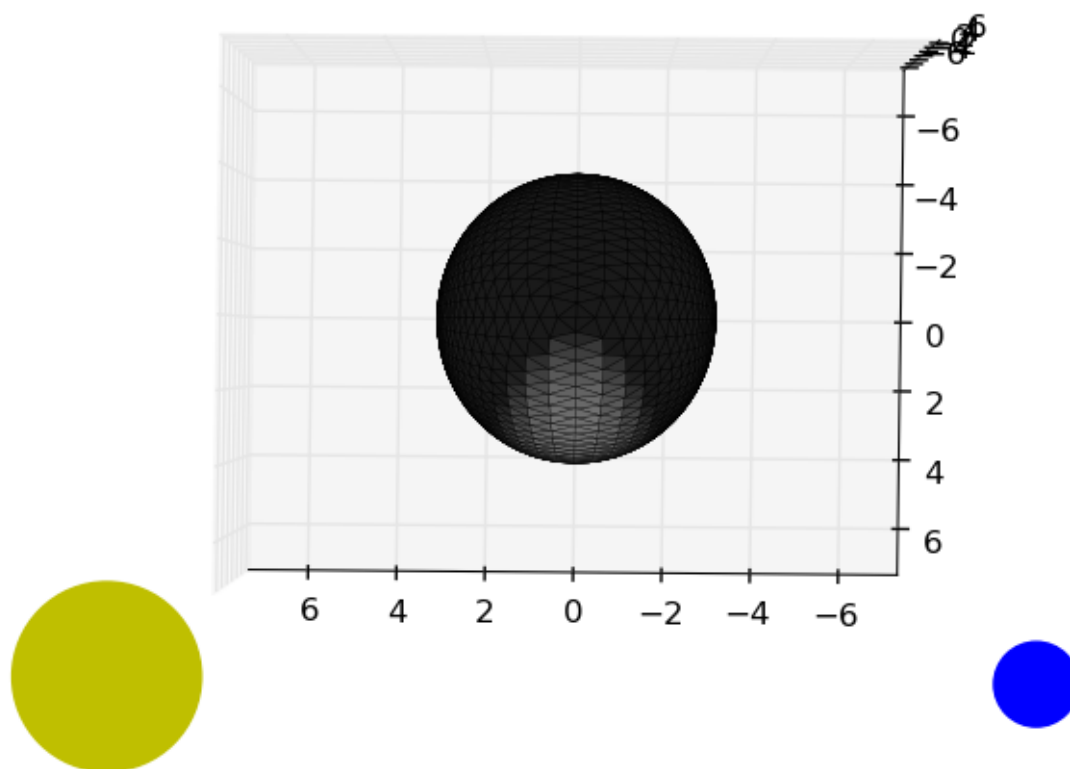
Kyseisen ellipsoidin puoliakselien pituudet olivat $a=3$, $b=4$ ja $c=5$. Aurinko sijaitsi xy -tasossa koordinaateissa $x=y$. Havaitsija sijaitsi myös xy -tasossa, koordinaateissa $-x=y$. Vaihekulma oli siis 90° . Ohjelmaa ajaessa määräsin sen tekemään 20 kolmioriviä yhteen oktanttiin.

Sain teoreettiselle kirkkaudelle tulokseksi 1.809, kun kerroin $F_0 \tilde{\omega} P(\alpha)$ jätettiin pois. Ohjelmallamme yhteenlasketun kirkkauden arvoksi tuli 2.022, kun kertoimet $\tilde{\omega} P(\alpha)$ jätettiin pois. Luvut ovat hyvin lähellä toisiaan. Fluxi ja yhden heijastuksen albedo ovat vakioita tietylle tilanteelle, joten niiden ei pitäisi vaikuttaa tulokseen. Ainoa erottava tekijä on vaihefunktio, joka riippuu vaihekulmasta, joten se on oikeasti eri jokaiselle yksittäiselle kolmiolle.

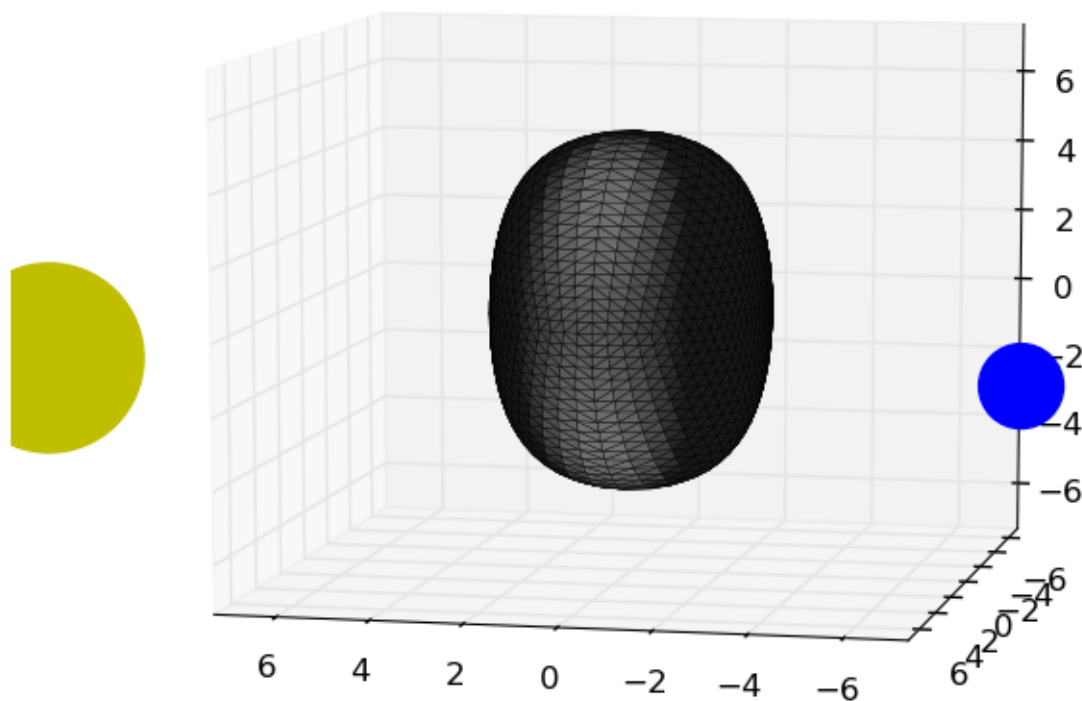
On myös hyvä huomioda, että kun testasin ohjelman antamia kirkkauksia tapauksessa että asteroidi on pallo, analyyttiset ja ohjelman laskemat kirkkaudet olivat muutaman desimaalin tarkkuudella samat.

Vaikka testikappaleita oli vain yksi, voimme melko varmasti todeta, että vaikka ohjelmamme antama tulos ei ole täysin oikein, se on hyvä approksimaatio asteroidin kirkkaudelle.

Kuvissa 1 ja 2 on piirto-ohjelman luomia kuvia yllä käsitellystä asteroidista. Siitä pystyy helposti hahmottamaan Auringon ja havaitsijan sijainnit, sekä asteroidin valaistun osan.



Kuva 1: Tarkastelemamme asteroidi z-suunnasta katsottuna.



Kuva 2: Tarkastelemamme asteroidi lähempää xy-tasoa.

1.3 Koodi ja sen ajaminen

Teimme itse laskuohjelman Fortranilla, mutta piirto-ohjelman tein pythonilla. Tämän tiedoston liitteinä on ohjelman lähdekoodi sekä makefile helppoa kääntämistä varten.

Koodi koostuu pääohjelmasta *anm.f90*, sekä moduulitiedostoista *pointhecatoncoords.f90*, *trianglehexaton.f90* ja *lshexaton.f90*. Ensimmäinen moduuli laskee kaikki pinnan pisteet, toinen tekee niistä kolmioita, ja kolmas laskee lopulta niiden kirkkauksia.

Koodin saa käännettyä komennolla **make**, ja turhat tiedostot poistettua komennolla **make clean**. Ohjelman nimeksi tulee *ANM* (sanoista Asteroidin Numeerinen Mallinnus), joten se ajetaan komennolla **./ANM**. Ohjelma kysyy käyttäjältä asteroidin muotoon ja Auringon ja havaitsijan paikkoihin liittyviä tietoja. Ohjelma tallentaa dataa tiedostoihin *raw*, *info*, *rawbri*, *infobri* ja *data*. Tiedostoissa *raw* ja *info* on dataa asteroidin muodostavista pisteistä. Niihin on tallennettu sama informaatio, mutta *info*-tiedostossa se on luettavammassa muodossa. Sama pätee tiedostoihin *rawbri* ja *infobri*, mutta niihin on tallennettu tietoa kolmioiden kirkkauksista ja koko asteroidin kirkkaudesta. Tiedostossa *data* on informaatio jonka piirto-ohjelma tarvitsee toimiakseen.

Piirto-ohjelma ajetaan komennolla **python piirtaja.py data**.

2 Sisäisen rakenteen ”kolmiointi”

Mikäli asteroidin keskipisteestä piirretään viivat minkä tahansa pintakolmion kärkiin, muodostuu tetraedri. Oletetaan asteroidi tähän tarkoitukseen pallomaiseksi. Tällainen tetraedri voidaan jakaa n:ään palaan siten, että jokaisen näin muodostuneen ”siivun” tilavuus on sama.

Kolmion pohjan pinta-ala ja kolmion korkeus ovat yhteydessä toisiinsa skaalakertoimella k . Pohjan sivujen pituudet ovat suoraan verrannollisia skaalakertoimeen ja kolmion pinta-ala lasketaan kaavasta

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} , \quad (3)$$

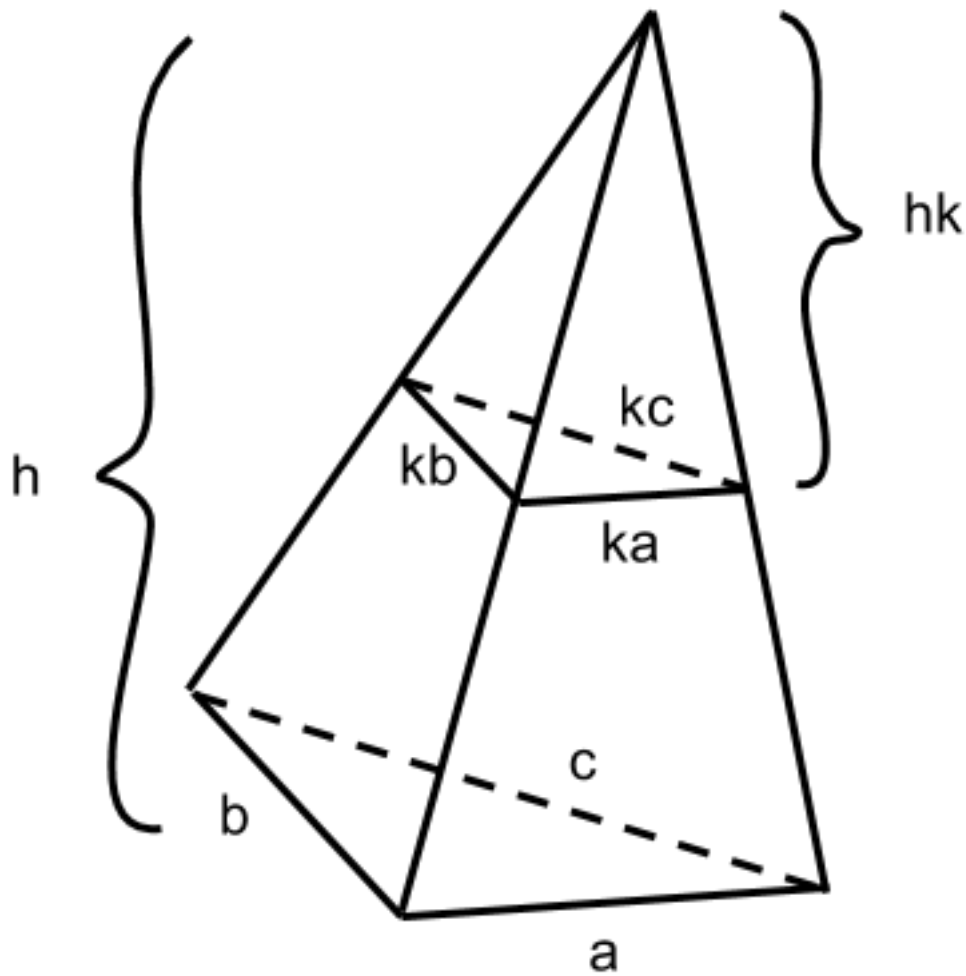
jossa a , b ja c ovat kolmion sivujen pituudet ja p on Heronin kaava

$$p = \frac{a + b + c}{2} . \quad (4)$$

Tetraedrin tilavuus saadaan kaavalla

$$V = \frac{1}{3}Ah , \quad (5)$$

missä h on tetraedrin korkeus.



Kuva 3: Tetraedri jaettuna kahteen osaan

Kun tetraedri jaetaan kahteen osaan, pienemmän tetraedrin korkeus on kh ja pohjakolmion sivujen pituudet ovat ka , kb ja kc . Pienemmän tetraedrin pohjan kolmion pinta-ala

on

$$\begin{aligned}
 A_k &= \sqrt{kp(kp - ka)(kp - kb)(kp - kc)} \\
 &= \sqrt{kp k(p - a) k(p - b) k(p - c)} \\
 &= \sqrt{k^4 p(p - a)(p - b)(p - c)} \\
 &= k^2 \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} \\
 &= Ak^2
 \end{aligned} \tag{6}$$

Pienemmän tetraedrin tilavuus on tällöin

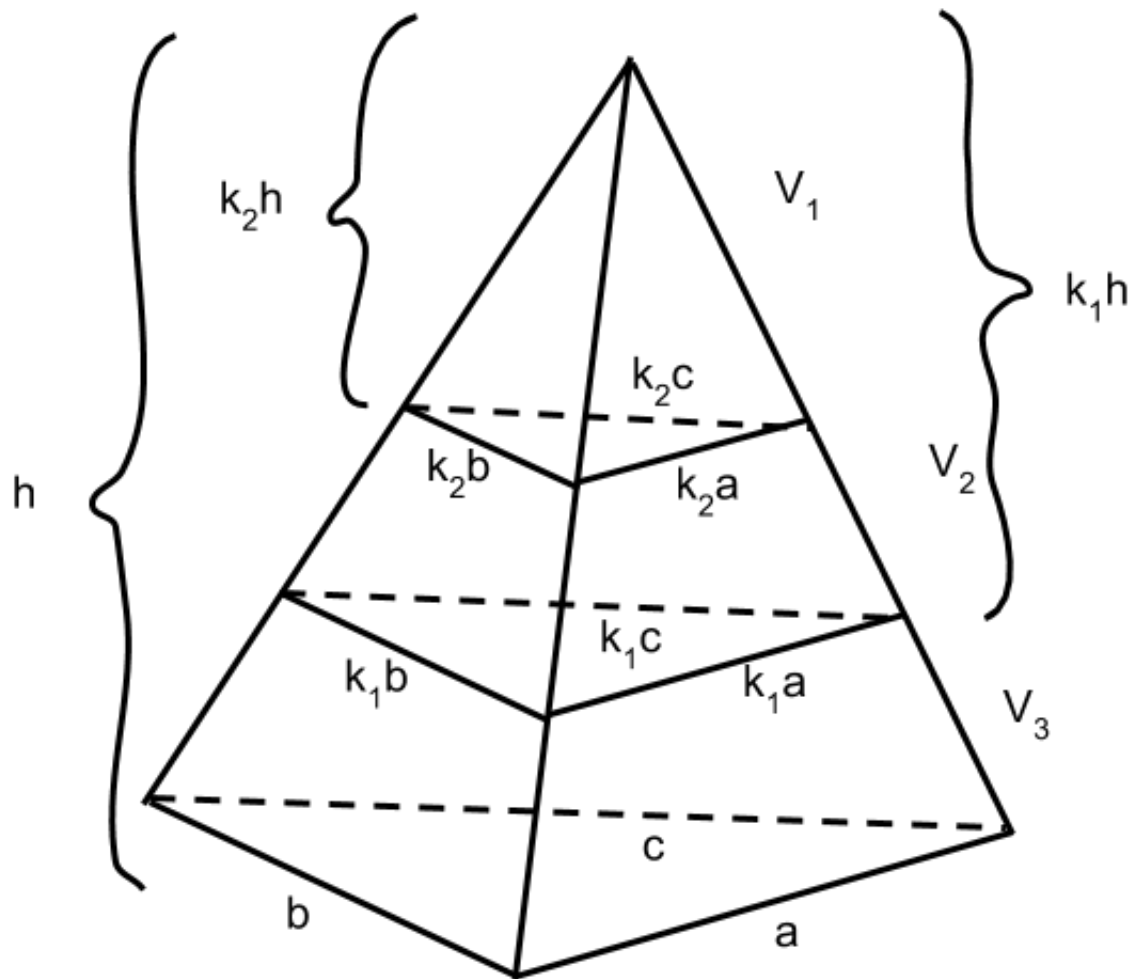
$$V_k = \frac{1}{3} A_k k h = \frac{1}{3} A h k^3 . \tag{7}$$

Kun tetraedri jaetaan viipaleisiin, joiden tilavuus on sama, täytyy löytää skaalakertoimet k . Viipaleiden tilavuudet ovat

$$\begin{aligned}
 V_k &= \frac{1}{3} A h k_2^3 \\
 V_k &= \frac{1}{3} A h (k_1^3 - k_2^3) \\
 V_k &= \frac{1}{3} A h (1 - k_1^3)
 \end{aligned}$$

Tilavuudet ovat yhtä suuret, eli $V_1 = V_2 = V_3$. Tämän yhteyden avulla voidaan ratkaista tekijät k_1 ja k_2 .

$$\begin{aligned}
 V_1 &= V_2 \\
 \frac{1}{3} A h k_2^3 &= \frac{1}{3} A h (k_1^3 - k_2^3) \\
 k_2^3 &= k_1^3 - k_2^3 \\
 k_1^3 &= 2k_2^3
 \end{aligned}$$



Kuva 4: Tetraedri jaettuna kolmeen osaan

ja

$$\begin{aligned}
 V_2 &= V_3 \\
 \frac{1}{3}Ah(k_1^3 - k_2^3) &= \frac{1}{3}Ah(1 - k_1^3) \\
 k_1^3 - k_2^3 &= 1 - k_1^3 \\
 2k_1^3 &= 1 + k_2^3 \\
 k_2^3 &= 2k_1^3 - 1
 \end{aligned}$$

jolloin

$$k_1^3 = 2k_2^3$$

$$k_1^3 = 2(2k_1^3 - 1)$$

$$k_1^3 = 4k_1^3 - 2$$

$$3k_1^3 = 2$$

$$k_1^3 = \frac{2}{3}$$

ja

$$k_2^3 = \frac{1}{3}k_1^3$$

$$k_2^3 = \frac{1}{3} .$$

Kertoimien avulla voidaan laskea tetraedrien tilavuuksiksi

$$V1 = \frac{1}{3}Ahk_2^3 = \frac{1}{9}Ah$$

$$V2 = \frac{1}{3}Ah(k_1^3 - k_2^3) = \frac{1}{9}Ah$$

$$V3 = \frac{1}{3}Ah(1 - k_1^3) = \frac{1}{9}Ah .$$

Tästä voidaan päätellä kuinka skaalakerroin riippuu siitä, kuinka moneen viipaleeseen tetraedri on jaettu. Skaalakerroin k määräytyy kaavalla

$$k^3 = \frac{1}{n} \tag{8}$$

$$k = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} , \tag{9}$$

missä n on viipaleiden määrä.

Viitteet

- [1] K. Muinonen. Fundamentals for theoretical photometry of asteroids. February 4, 2014.
- [2] Muinonen, K. and Lumme, K. Disk-integrated brightness of a Lommel-Seeliger scattering ellipsoidal asteroid. *A&A*, 584:A23, 2015.