Diskretna matematika II - Kombinatorika 22/23
Prva domača naloga
89201253 - Vili Perše, RIN-2

1. Naj bo A množica moči $n \in \mathbb{Z}_+$ in naj bo P(A) potenčna množica množice A. Z matematično indukcijo dokažite naslednjo enakost:

$$|P(A)| = 2^n$$

(i) Indukcijska baza $n_0 = 1$:
Potenčna množica množice A z enim samim elementom vsebuje le prazno množico in množico z le tem elementom, iz tega sledi, da je njena moč enaka 2, kar velja po formuli.

$$P(A) = \{\emptyset, A\} \Rightarrow |P(A)| = 2^1$$

(ii) Predpostavimo, da formula velja za poljuben n. Želimo dokazati, da velja tudi za n+1:
Definiramo množico A', tako da napravimo unijo množice A z nekim poljubnim paroma različnim elementom a_{n+1}.

$$A' := A \cup \{a_{n+1}\}$$

Moč množice A' bo tako moč množice |A|+1, oziroma n+1.
Po matematični indukciji sklepamo, da ima A, 2^n podmnožic.
Vsaka podmnožica mn. A, bo tudi podmnožica množice A'.
Vsaka podmnožica množice A' lahko ali vsebuje element a_{n+1} ali pa ne:
- Če ga ne vsebuje, smo jo že prešteli kot podmnožico množice A.
- Če ga vsebuje, ga lahko vsebuje skupaj z katerokoli iz med podmnožic množice A, katerih pa je natanko 2^n.

Iz tega sklepamo, da ima množica A', 2^n podmnožic, kjer ne vsebuje elementa a_{n+1} in 2^n podmnožic, kjer vsebuje element a_{n+1}.
Če sedaj te podmnožice seštejemo, dobimo, da je število podmnožic množice A', moči n+1, natanko 2^{n+1}, kar dokaže našo indukcijo.

$$|P(A')| = 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} \quad \square$$

↳ A': množica z n+1 elementi

Nalogo sem reševal samostojno z ogledom iz spletne strani: www.cuemath.com/algebra/power-set/

Datum: 23. 3. 2023

Vili

2. (a) Koliko različnih besed lahko dobimo s premetavanjem črk besede banana?

Prvo izberemo na katero izmed 6-tih mest bomo ustavili črko b. Nato iz med preostalih 5-tih mest izberemo dva kamor ustavimo črko n in na preostala mesta ustavimo črko a.

$$\binom{6}{1}\binom{5}{2} = 6\cdot\frac{5\cdot\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}\cdot 1} = 60$$

O: Dobimo lahko 60 različnih besed.

(b) Koliko besed iz točke (a) je takih, da črka b stoji neposredno pred črko a?

Zvezo ba lahko razumemo kot posamezen element, katerega lahko ustavimo v enega izmed 5-tih mest, ki zasede dve črki. Nato moramo v preostalih 4-ih mestih izbrat dva kamor ustavimo črki n.

$$\binom{5}{1}\binom{4}{2} = 5\cdot\frac{\cancel{4}^{2}\cdot 3}{\cancel{2}\cdot 1} = 30$$

O: Takih besed je natanko 30.

(c) Koliko besed iz točke (a) je takih, da se v njih skupaj ne pojavi zaporedje črk bnn?

Izračunamo razliko vseh različnih besed, s takimi, kjer se znotraj pojavi zaporedje črk bnn. Lahko izberemo 4 taka mesta dolžine treh črk kamor lahko ustavimo zaporedje bnn, na vsa preostala ustavimo črko a.

$$60-\binom{4}{1} = 60-4 = 56$$

O: Takih besed je natanko 56.

(d) Koliko besed iz točke (a) je takih, da b stoji pred vsemi a-ji (ne nujno neposredno pred njimi)?

Problem lahko obravnavamo na tri primere:
(i) Črka b je na prvem mestu, iz med 5-tih mest izberemo dva za črko n.
(ii) Črka b je na drugem mestu (na prvem črka n), iz med preostalih 4 mest izberemo kam ustaviti drugi n.
(iii) Črka b je na tretjem mestu, pred njo črki n in po njej črke a. Le en primer.

$$_{(i)}\binom{5}{2} + _{(ii)}\binom{4}{1} + _{(iii)}1 = 10+4+1 = 15$$

O: Takih besed je natanko 15.

Nalogo sem reševal popolnoma samostojno.

Datum: 23. 3. 2023

3. Koliko celoštevilskih rešitev ima enačba $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 22$, če je:

(a) $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 20,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0$?

Primeri rešitev: (i) $x_2 = 22,\ x_1 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$
(ii) $x_2 = 21,\ x_1 = 1,\ x_3 = x_4 = x_5 = 0$
(iii) $x_2 = 20,\ x_1 = x_3 = 1,\ x_4 = x_5 = 0$

Člen x_2 lahko definiramo kot nek člen x_2', če na obeh straneh enačbe odštejemo 20, tako da $x_2' := x_2 - 20$. S tem zagotovimo, da bo x_2' zagotovo ≥ 0. Ker so sedaj vsi členi enačbe ≥ 0 lahko uporabimo izrek, ki pravi, da taka enačba premore $\binom{n+k-1}{k}$ rešitev, kjer je n število elementov in k vsota teh elementov.

$$n = 5,\quad k = 2;\quad \binom{n+k-1}{k} = \binom{6}{2} = 15$$

O: Ima 15 celoštevilskih rešitev.

(b) $x_1 \geq 2,\ x_2 \geq 3,\ x_3 \geq 4,\ x_4 \geq 3,\ x_5 \geq 2$?

Primeri rešitev: (i) $x_1 = 10,\ x_2 = 3,\ x_3 = 4,\ x_4 = 3,\ x_5 = 2$
(ii) $x_1 = 2,\ x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 5$
(iii) $x_3 = 6,\ x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = 4$

Enačbo lahko spremenimo v naslednjo obliko:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 22 \quad /-14$$
$$(x_1-2) + (x_2-3) + (x_3-4) + (x_4-3) + (x_5-2) = 8$$

Sedaj definiramo člene: $y_1 := x_1 - 2,\ y_2 := x_2 - 3,\ y_3 := x_3 - 4,\ y_4 := x_4 - 3,\ y_5 := x_5 - 2$, za katere bo veljalo, da bojo vsi ≥ 0 in lahko podobno kot v primeru (a) uporabimo izrek.

$$n = 5,\quad k = 8;\quad \binom{n+k-1}{k} = \binom{12}{8} = 495$$

O: Enačba ima 495 celoštevilskih rešitev.

Nalogo sem reševal popolnoma samostojno.

Datum: 25. 3. 2023

Vili

4. V Luko Koper vsak teden pripluje 200 tovornih ladji. Utemeljite, da obstajata vsaj dve ladji, ki v pristanišču priplujeta v razmaku manj kot ene ure.

En teden vsebuje $7 \cdot 24h = 168h$.

Dirichletovo načelo pravi, če ~~imamo~~ $n+1$ ali več predmetov razporedimo v n škatel, potem imamo vsaj v eni škatli vsaj dva predmeta.

V našem primeru imamo 200 tovornih ladji, ki jih želimo razporediti v različne ure v tednu, katerih je skupaj 168. Tovorne ladje lahko razumemo kot predmete, ure v tednu pa kot škatle v katere želimo predmete razporediti.

Iz tega razberemo, da je število škatel (n) 168, število predmetov pa 200, kar pa je $\geq 168+1$.

Po temu sklepamo, da velja Dirichletovo načelo in pridemo do rešitve, da res obstajata vsaj dve ladji, ki priplujeta v isti uri.

Nalogo sem reševal popolnama samostojno.

Datum: 25. 3. 2023

5. Na koliko različnih načinov lahko zložimo na polico 4 različne matematične in 3 leposlovne knjige ter 5 različnih leksikonov, če:

(a) so knjige poljubno pomešane med seboj?

Skupaj imamo 12 različnih knjig, ki jih postavljamo na 12 mest. Torej sledi, da imamo urejene izbore brez ponavljanja najdaljšega dopustnega reda oziroma permutacije, katere lahko preštejemo s formulo $n!$, v katerem je za naš primer $n = 12$.

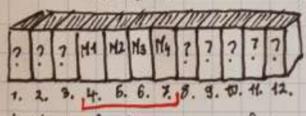
$$12! = 479\,001\,600$$

O: Knjige lahko zložimo na polico na 479 001 600 različnih načinov.

(b) naj matematične knjige stojijo skupaj?

Problem razbijemo na 8 množic, kjer i-ta množica ($1 \leq i \leq 8$), definira ~~koliko knjig stoji pred zaporedjem 4 matematičnih~~ na katerem mestu se začne zaporedje 4 matematičnih knjig.

Primer: 4-ta množica: razporedi, v katerem se matematične knjige nahajajo na ~~mest~~ 4. do 8. mesta (na mestih 4, 5, 6, 7):



Za izbore matematičnih knjig v vsaki množici imamo 4 knjige, ki jih ustavimo ~~na~~ v to zaporedje velikosti 4. Se pravi imamo 4! načinov, da izberemo kako so matematične knjige v zaporedju postavljene. Sedaj moramo za vsak tak izbor še zapolnit preostalih 8 mest z preostalimi 8 knjigami. Kar pa lahko zapolnemo na 8! načinov.

Ker imamo 8 množic z enako močjo, je končna rešitev izborov:

$$8 \cdot 4! \cdot 8! = 7\,741\,440$$

O: Lahko jih zložimo na polico na 7 741 440 različnih načinov.

(c) knjige iste vrste stojijo skupaj?

Imamo 4! načinov izborov matematičnih zaporedoma postavljenih knjig, 3! leposlovnih in 5! leksikonov. Imamo sedaj 3 množice vrst knjig, med katerimi izberemo katera množica bo na katerem mestu v vrsti. Načinov na katere lahko razvrstimo te množice je torej 3! oziroma 6.

Skupaj imamo torej:

$$6 \cdot 4! \cdot 3! \cdot 5! = 103\,680$$

O: Zložimo jih lahko na 103 680 različnih načinov.

Nalogo sem reševal popolnoma samostojno.

Datum: 25. 3. 2023

Vd

6. Na družinskem srečanju se je zbralo devet oseb, starih med 18 in 58 let. Utemeljite, da med njimi lahko izberemo dve različni skupini oseb, tako da je vsota let oseb iz ene skupine enaka vsoti let oseb iz druge skupine.

Definiramo množico X, tako da kot elemente vzamemo teh devet oseb.

$$X := \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$$

Število rešitev, kjer je vsota ene izbire ljudi enaka drugi izbiri ljudi, bo navzgor omejena s številom nepraznih podmnožic, ki jih lahko napravimo iz množice X, moči 9. Torej z številom $2^9 - 1 = 511$.

Z devetimi osebami starosti med 18 in 58 lahko napravimo vse vsote let od 18 (samo en 18-letnik) do $9 \cdot 58 = 512$ (devet 58-letnikov). Število takšnih vsot bo skupaj $512 - 18 = 494$.

Ker imamo sedaj 511 različnih podmnožic (predmetov), katerih seštevek nam lahko poda 494 različnih vsot let (škatel), lahko po Dirichletovem načelu, ker je $511 \geq 494 + 1$, sklepamo, da nam bosta vsaj dve različni podmnožici izbire oseb, podale dve enaki vsoti let, kar odgovori na naše vprašanje.

Nalogo sem reševal popolnoma samostojno.

Datum: 27. 3. 2023

(a)

7. Podajte kombinatoričen dokaz enakosti

$$(1)\quad \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{2}=\binom{n}{2}2^{n-2}; \text{ za } n\geq 2$$

Problem je ekvivalenten preštevanju besed dolžine n, kjer moramo uporabiti natanko 2 črki A, in imamo na voljo poljubno mnogo črk B in C.

Besede lahko preštejemo na dva načina:

(I) Desna stran enakosti: Izberemo dva mesta v besedi, kamor ustavimo črki A. Na preostalih n-2 mestih ustavimo bodisi črko B ali C. Število besed je:

$$\binom{n}{2}2^{n-1}$$

(II) Leva stran enakosti: Problem razbijemo na množice, kjer S_k definira, koliko je v besedi skupno črk A in B. Ker so v besedi natanko 2 črki A, imamo v besedi k-2 črk B in k raste od 2 proti n.

Da preštejemo posamezno množico izberemo k mest, kamor ustavimo črke A in B. Nato v teh k mestih izberemo 2, kamor ustavimo črki A. Na preostala izbrana mesta ustavimo črke B in na neizbrana mesta črke C.

$$|S_k|=\binom{n}{k}\binom{k}{2}$$

Ker množice so med seboj paroma disjunktne, saj vsaka vsebuje različno število črk B. Torej po načelu vsote velja, da je skupno število besed:

$$\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{2}$$

~ Po načelu dvojnega preštevanja smo dokazali enakost (1). □

(b) Identiteto (1) sedaj zapišite za n=5 in jo interpretirajte s pomočjo pascalovega trikotnika.

$$\sum_{k=2}^{5}\binom{5}{k}\binom{k}{2}=\binom{5}{2}\binom{2}{2}+\binom{5}{3}\binom{3}{2}+\binom{5}{4}\binom{4}{2}+\binom{5}{5}\binom{5}{2}=10+30+30+10=80$$

$$\binom{5}{2}\cdot 2^{5-2}=10\cdot 8=80$$

Pascalov trikotnik:

	1	n = 0
	1 1	n = 1
1 · 10	1 2 1	n = 2
+ 3 · 10	1 3 3 1	n = 3
+ 6 · 5	1 4 6 4 1	n = 4
+ 10 · 1	1 5 10 10 5 1	n = 5
80	... ...	n = ...

Nalogo sem reševal popolnoma samostojno.

Datum: 27. 3. 2023

8. (a) Podajte (algebraičen ali kombinatoričen) dokaz enakosti

$$(2)\quad \sum_{j=0}^{n}\binom{k+j}{j}=\binom{n+k+1}{n}; \quad \text{za } n,k\in\mathbb{Z}_+ .$$

Algebraičen dokaz z matematično indukcijo po n:

(i) baza $n_0=0$: $\sum_{j=0}^{0}\binom{k+j}{j}=\binom{k+0}{0}=1$ ✓

$$\binom{0+k+1}{0}=\binom{k+1}{0}=1$$

(ii) $\sum_{j=0}^{n}\binom{k+j}{j}=\binom{n+k+1}{n}\Rightarrow\sum_{j=0}^{n+1}\binom{k+j}{j}=\binom{(n+1)+k+1}{(n+1)}=\binom{n+k+2}{n+1}$:

$$\sum_{j=0}^{n+1}\binom{k+j}{j}=\sum_{j=0}^{n}\binom{k+j}{j}+\binom{k+(n+1)}{(n+1)}=\binom{n+k+1}{n}+\binom{n+k+1}{n+1}=\binom{n+k+2}{n+1}\ \square$$

(b) Identiteto (2) zapišite za $k=1$ in z uporabo identitete izračunajte vsoto $\sum_{j=0}^{n}j$.

Za $k=1$: $\sum_{j=0}^{n}\binom{1+j}{j}=\binom{n+1+1}{n}=\binom{n+2}{n}=\binom{n+2}{2}=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$

$$\binom{1+j}{j}=\binom{j}{j}+\binom{j}{j-1}=1+j$$

$$\sum_{j=0}^{n}(1+j)=\binom{n+2}{n}$$

$$\sum_{j=0}^{n}1+\sum_{j=0}^{n}j=\binom{n+2}{n}$$

$$(n+1)+\sum_{j=0}^{n}j=\frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

$$\sum_{j=0}^{n}j=\frac{n^2+3n+2}{2}-n-1=\frac{n^2+n}{2}=\binom{n+1}{2}$$

Nalogo sem reševal popolnoma samostojno.

Datum: 10. 4. 2023

*(c) Z uporabo identitete (2) izračunajte $\sum_{j=0}^{n} j^2$.

Za $k=2$: $\sum_{j=0}^{n} \binom{2+j}{j} = \binom{n+2+1}{n} = \binom{n+3}{n} = \binom{n+3}{3} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}$

$$\binom{2+j}{j} = \binom{j+2}{2} = \frac{(j+2)(j+1)}{2} = \frac{j^2+3j+2}{2} = \frac{1}{2}j^2 + \frac{3}{2}j + 1$$

$$\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{1}{2}j^2 + \frac{3}{2}j + 1\right) = \binom{n+3}{3}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} j^2 + \frac{3}{2}\sum_{j=0}^{n} j + \sum_{j=0}^{n} 1 = \binom{n+3}{3}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} j^2 + \frac{3}{2}\binom{n+1}{2} + (n+1) = \binom{n+3}{3}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} j^2 = \binom{n+3}{3} - \frac{3}{2}\binom{n+1}{2} - n - 1$$

$$\sum_{j=0}^{n} j^2 = 2\binom{n+3}{3} - 3\binom{n+1}{2} - 2n - 2$$

(d) Identiteto (2) zapišite za $n=4$ in $k=2$ ter jo interpretirajte s pomočjo Pascalovega trikotnika.

$$\sum_{j=0}^{4}\binom{2+j}{j} = \binom{2}{0} + \binom{3}{1} + \binom{4}{2} + \binom{5}{3} + \binom{6}{4} = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35$$

$$\binom{4+2+1}{4} = \binom{7}{4} = 35$$

Pascalov trikotnik:

$$\begin{array}{r} 1 \\ +\ 3 \\ +\ 6 \\ +\ 10 \\ +\ 15 \\ \hline 35 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & \boxed{35} & & 21 & & 7 & & 1 \\
 \dots & & & & & & & & & & & & & & \dots
\end{array}$$

$n = 0$
$n = 1$
$n = 2$
$n = 3$
$n = 4$
$n = 5$
$n = 6$
$n = 7$

Nalogo sem reševal popolnoma samostojno.

Datum: 10. 4. 2023

9. Med študenti v nekem študentskem domu se jih v prostem času 12 rekreativno ukvarja z nogometom (N), 20 s košarko (K), 20 z odbojko (O) in 8 z rokometom (R). 5 študentov se ukvarja z N in K, 7 študentov z N in O, 4 študenti z N in R, 16 študentov s K in O, 4 študenti s K in R, 3 študenti pa z O in R. 3 študenti se ukvarjajo z N, K in O, 2 študenta z N, K in R, 2 študenta z K, O in R, 3 študenti pa z N, O in R. 2 študenta se ukvarjata z vsemi štirimi športi. Znano je tudi, da se 71 študentov ne ukvarja z nobenim od omenjenih štirih športov. Z uporabo načela vključitev in izključitev poiščite skupno število študentov v študentskem domu.

Iz besedila razberemo:

$$|N| = \cancel{20}\,12,\ |K| = 20,\ |O| = 20,\ |R| = 8,$$
$$|N\cap K| = 5,\ |N\cap O| = 7,\ |N\cap R| = 4,$$
$$|K\cap O| = 16,\ |K\cap R| = 4,\ |O\cap R| = 3,$$
$$|N\cap K\cap O| = 3,\ |N\cap K\cap R| = 2,$$
$$|K\cap O\cap R| = 2,\ |N\cap O\cap R| = 3 \text{ in } |N\cap K\cap O\cap R| = 2$$

Po načelu izključitev in vključitev velja, da je število študentov, ki se ukvarja z vsaj enim športom enako:

$$\begin{aligned}|N\cup K\cup O\cup R| &= |N|+|K|+|O|+|R| \\ &\quad -|N\cap K|-|N\cap O|-|N\cap R|-|K\cap O|-|K\cap R|-|O\cap R| \\ &\quad +|N\cap K\cap O|+|N\cap K\cap R|+|K\cap O\cap R|+|N\cap O\cap R| \\ &\quad -|N\cap K\cap O\cap R| \\ &= 12+20+20+8-5-7-4-16-4-3 \\ &\quad +3+2+2+3-2 = 70-41 = 29.\end{aligned}$$

Zraven teh moramo prišteti še študente, ki se ne ukvarjajo z nobenim športom. Torej je skupno število študentov v študentskem domu enako:

$$29+71 = 100.$$

Nalogo sem reševal popolnoma samostojno.

Datum: 10. 4. 2023

Aleta

10. Na robu nekega ribnika se pasejo žabe in štorklje. V vsaki minuti se zgodi naslednje: v prvi polovici minute vsaka od žab, ki so se pasle v začetku te minute, privabi tri nove žabe in eno novo štorkljo. V drugi polovici minute pa vsaka od štorkelj poje po eno žabo. V začetku sta se pasli dve žabi in ena štorklja. Zapišite rekurzivno zvezo, ki bo podala število žab in štorkelj na začetku n-te minute za vse $n \in \mathbb{Z}_+$.

Definiramo: $\check{Z}(n)$: število žab v začetku n-te minute
$\check{S}(n)$: število štorkelj v začetku n-te minute ; za $n \in \mathbb{Z}_+$.

Razberemo začetne pogoje: $\check{Z}(0) = 2$ in $\check{S}(0) = 1$

Primeri:

n:	0	1	2	3	.4.
$\check{Z}(n)$	2	$\overset{6-3}{3}$	$\overset{9-6}{3}$	$\overset{9-9}{0}$	.0.
$\check{S}(n)$	1	3	6	9	.9.

$$\check{S}(n) = \check{S}(n-1) + \check{Z}(n-1)$$

$$\check{Z}(n) = 3 \cdot \check{Z}(n-1) - \check{S}(n)$$

Nalogo sem reševal popolnoma samostojno.

Datum: 10. 4. 2023