Univerza na Primorskem
Fakulteta za matematiko, naravoslovje
in informacijske tehnologije
Koper, 23. marec 2023.

Prva domača naloga

Način odaje: vse rešitve je treba oddati na dva načina: e-učilnica (pdf) in izpisani listi (v živo).
Rok oddaje:

- E-učilnica (ena datoteka v pdf): ponedeljek 10. april 2023 (do 23.59).
- V živo: torek 11. april 2023 od 12.45–13.30 v FAMNIT-MP1.

Pišite razločno. Vse odgovore je potrebno ustrezno utemeljiti. Vse naloge so enakovredne. Srečno!

Sodelovanje pri domačih nalogah: Domače naloge so zasnovane tako, da krepijo učenje in so pomemben del izobraženega procesa. Vemo, da je veliko situacij, v katerih je skupno reševanje danih nalog učinkovita pomoč pri učenju. Spodbujam vas, da sodelujete s sošolci, če ugotovite, da je to koristno. Nekatere smernice pa so potrebne. Tukaj so pravila:

- S sošolci se lahko pogovarjate o danih nalogah, kolikor želite.
- Ko rešite domačo nalogo, zavrzite vse napisane opombe o rešitvi.
- Pojdi gledat televizijo eno uro ali pojdite kolesarit eno uro.
- Nato napišite svojo rešitev. (Če na tej točki ne morete napisati svoje rešitve, je niste res razumeli.)
- Poleg tega se od vas pričakuje, da za vsako rešeno nalogo navedete imena posameznikov, s katerimi ste razpravljali o problemu (tako da napišete nekaj takega kot “o tem problemu sem razpravljal z XXX...”). Ne glede na to, ali sodelujete ali ne, se za tisto, kar oddate, pričakuje, da je vaše izvirno delo.

1. Naj bo A množica moči $n \in \mathbb{Z}_+$ in naj bo $\mathcal{P}(A)$ potenčna množica množice A. Z matematično indukcijo dokažite naslednjo enakost:

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^n.$$

2. (a) Koliko različnih besed lahko dobimo s premetavanjem črk besede *banana*?

(b) Koliko besed iz točke (a) je takih, da črka b stoji neposredno pred črko a?

(c) Koliko besed iz točke (a) je takih, da se v njih skupaj ne pojavi zaporedje črk bnn?

(d) Koliko besed iz točke (a) je takih, da b stoji pred vsemi a-ji (ne nujno neposredno pred njimi)?

3. Koliko celoštevilskih rešitev ima enačba $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 22$, če je

(a) $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 20$, $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$?

(b) $x_1 \geq 2$, $x_2 \geq 3$, $x_3 \geq 4$, $x_4 \geq 3$, $x_5 \geq 2$?

Rezultat naj bo podan kot točna numerična vrednost. V obeh delih naloge podajte vsaj tri rešitve dane enačbe, preden izračunate numerično vrednost.

4. V Luko Koper vsak teden pripluje 200 tovornih ladij. Utemeljite, da obstajata vsaj dve ladji, ki v pristanišče priplujeta v razmaku manj kot ene ure.

5. Na koliko različnih načinov lahko zložimo na polico 4 različne matematične in 3 leposlovne knjige ter 5 različnih leksikonov, če

(a) so knjige lahko poljubno pomešane med seboj?

(b) naj matematične knjige stojijo skupaj?

(c) knjige iste vrste stojijo skupaj?

6. Na družinskem srečanju se je zbralo devet oseb, starih med 18 in 58 let. Utemeljite, da med njimi lahko izberemo dve različni skupini oseb, tako da je vsota let oseb iz ene skupine enaka vsoti let oseb iz druge skupine.

7. (a) Podajte kombinatoričen dokaz enakosti

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \binom{k}{2} = \binom{n}{2} 2^{n-2} \tag{1}$$

za $n \geq 2$.

(b) Identiteto (1) zapišite za $n = 5$ in jo interpretirajte s pomočjo Pascalovega trikotnika.

8. (a) Podajte (algebraičen ali kombinatoričen) dokaz enakosti

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{k+j}{j} = \binom{n+k+1}{n} \tag{2}$$

za poljubni dve števili $n, k \in \mathbb{Z}_+$.

(b) Identiteto (2) zapišite za $k = 1$ in z uporabo identitete izračunajte vsoto $\sum_{j=0}^{n} j$.

(c) Z uporabo identitete (2) izračunajte $\sum_{j=0}^{n} j^2$.

(d) Identiteto (2) zapišite za $n = 4$ in $k = 2$ ter jo interpretirajte s pomočjo Pascalovega trikotnika.

9. Med študenti v nekem študentskem domu se jih v prostem času 12 rekreativno ukvarja z nogometom (N), 20 s košarko (K), 20 z odbojko (O) in 8 z rokometom (R). 5 študentov se ukvarja z N in K, 7 študentov z N in O, 4 študenti z N in R, 16 študentov s K in O, 4 študenti s K in R, 3 študenti pa z O in R. 3 študenti se ukvarjajo z N, K in O, 2 študenta z N, K in R, 2 študenta s K, O in R, 3 študenti pa z N, O in R. 2 študenta se ukvarjata z vsemi štirimi športi. Znano je tudi, da se 71 študentov ne ukvarja z nobenim od omenjenih štirih športov. Z uporabo načela vključitev in izključitev poiščite skupno število študentov v študentskem domu.

10. Na robu nekega ribnika se pasejo žabe in štorklje. V vsaki minuti se zgodi naslednje: v prvi polovici minute vsaka od žab, ki so se pasle v začetku te minute, privabi tri nove žabe in eno novo štorkljo. V drugi polovici minute pa vsaka od štorkelj poje po eno žabo. V začetku sta se pasli dve žabi in ena štorklja. Zapišite rekurzivno zvezo, ki bo podala število žab in štorkelj na začetku n-te minute za vse $n \in \mathbb{Z}_+$.
(OPOMBA: Potrebujemo dve rekurzivni enačbi, ki pa sta soodvisni.)