Univerza *v Ljubljani*
Pedagoška fakulteta

Matej Kolar in Boris Zgrablić

Več kot nobena, a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre

Ljubljana, 2004

Matej Kolar in Boris Zgrablić
VEČ KOT NOBENA, A MANJ KOT TISOČ IN ENA
REŠENA NALOGA IZ LINEARNE ALGEBRE

Strokovni pregled: dr. Gorazd Lešnjak, docent Univerze v Mariboru
dr. Peter Petek, redni profesor Univerze v Ljubljani

Za izdajatelja: dekanja dr. Cveta Razdevšek Pučko, izredna profesorica

Za založniško komisijo: dr. Janez Krek, docent

Izdala Pedagoška fakulteta Univerze v Ljubljani

Tisk: Littera picta d. o. o., Ljubljana

Naklada: 300 izvodov, 1. izdaja, 4. natis

Računalniško stavila avtorja.

Math. Subj. Class. (1991): 15-01-vaje, 15A03, 15A04, 15A06, 15A09, 15A15, 15A18, 15A21, 15A63

Ključne besede: matematika, linearna algebra, vektorski prostor, linearna preslikava, endomorfizem, matrika, determinanta, lastna vrednost, lastni vektor, skalarni produkt, evklidski prostor, unitarni prostor, kanonska oblika, bilinearna preslikava, kvadratna forma, naloga, namig, rešitev, problem

Keywords: mathematics, linear algebra, vector space, linear mapping, endomorphism, matrix, determinant, eigenvalue, eigenvector, scalar product, euclidean space, unitary space, canonical form, bilinear mapping, quadratic form, exercise, hint, solution, problem

Po Zakonu o davku na dodano vrednost (Uradni list RS št. 89/98, 7. točka, 25. člen) spada knjiga med proizvode, za katere se plačuje 8 % davek od prometa proizvodov.

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica

512.64(075.8)(076.2)

KOLAR, Matej
Več kot nobena, a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz linearne algebre / Matej Kolar in Boris Zgrablić. - 1. izd., 4. natis. - Ljubljana : Pedagoška fakulteta, 2004

ISBN 86-7735-024-1
I. Zgrablič, Boris
216174848

Predgovor

Jedro te zbirke tvori približno dvesto nalog s kolokvijev in pisnih izpitov pri predmetu Algebra I na Pedagoški fakulteti Univerze v Ljubljani in pri predmetu Linearna algebra na Tehniški fakulteti Univerze v Mariboru. Sestavila sva jih v obdobju, ko sva vodila vaje iz tega predmeta (B. Z. od leta 1990 z enoletnim premorom, M. K. od leta 1993). Jeseni leta 1995 sva se odločila zbrane naloge nekoliko urediti in izdati kot gradivo študentom za urjenje.

V želji napisati knjižico, po kateri bi rad posegal tudi, kdor sprva ne zmore (ali meni, da ne zmore) vseh korakov pri reševanju zastavljenih nalog in potrebuje več kot končne rezultate in nekaj najnujnejših nasvetov ali namigov, sva se lotila pisanja rešitev s spremljajočimi razlagami in utemeljitvami. Mnoge naloge sva rešila na več načinov (nikakor nisva izčrpala vseh!) in s tem skušala po eni strani poudariti legitimnost različnih pogledov na isto snov in omogočiti primerjavo le teh, po drugi pa opozoriti na vezi med, morebiti, navidez ločenimi področji in prijemi. Pri tem so sproti nastajale nove, ali raje dodatne naloge, namenjene krepitvi posameznih konceptov in zložnejšemu prehodu med različno zahtevnimi problemi.

Rešitve sva pisala v drugi osebi ednine, bralka in bralec naj nama ne zamerita tega pokroviteljskega tikanja, katerega edini namen je spodbuditi ju k sodelovanju. Seveda jima priporočava, da pri samostojnem reševanju uporabljata stilno manj zaznamovano prvo osebo množine. Prebereta naj tudi opombe k rešitvam: te lahko vsebujejo dodatne, v tej knjižici nerešene, a rešljive naloge (variacije na temo, posplošitve...), opozarjajo na uporabljene izreke in zvijače, kažejo na morebitne krajšnice in pasti ali kratko poudarjajo, kar si je vredno zapomniti. Večino rešitev sva opremila tudi s kazalom sorodnih nalog. Manj pozornosti zasluži stopnja zahtevnosti naloge – označila sva jo z enim, dvema ali tremi diamanti:

$\diamond$ osnovna: za reševanje zadošča razumevanje temeljnih pojmov,

$\diamond\diamond$ višja: koristna sta računska spretnost in smisel za pobudo,

$\diamond\diamond\diamond$ visoka: potrebna sta globlji uvid v snov in raziskovalna vnema.

Izbrana razvrstitev je dvakrat relativna, saj velja znotraj posameznega razdelka in je rezultat najine presoje.

Področja, ki sva jih zajela, so stalnica v večini uvodov v linearno algebro. Definicij in izrekov nisva posebej zapisala, vtkane so v nalogah in rešitvah. Omeniva le

- *usmerjeno daljico*, *krajevni vektor*, *vektor* in *urejeno trojico realnih števil*, ki so brez dvoma različne reči, a jih vendarle v razdelku Geometrija kratko poimenujeva *vektor*. Take vektorje opremiva (kot je običaj) s puščico, naprimer $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \overrightarrow{AB}, \ldots$ Prav tako dodava puščico vektorjem v $\mathbb{R}^3$, kjer želiva poudariti geometrijsko vsebino. In še: namesto $|\vec{a}|^2$ pogosto piševa krajše $\vec{a}^2$.
- problematiko definicije pojmov „linearno odvisna množica" in „linearna kombinacija", kar s primerom: množica $A := \{a, a\}$ je za neničeln vektor a prav gotovo linearno neodvisna (saj je $A = \{a\}$), čeprav velja $1 \cdot a + (-1) \cdot a = 0$. Zdi se, da ni množica tista struktura, ki jo potrebujemo pri definiciji linearne odvisnosti, temveč „množica s ponavljanjem" – *mnogovka*. (Struktura zaporedja je sicer več kot primerna, toda urejenost zakriva bistvo

linearne odvisnosti.) Več o linearni kombinaciji pa v nalogi 87. Kljub omenjenim pomislekom nisva zapisala nove definicije, raje sva se z obširnejšo razlago previdno izognila preveč formalističnemu pristopu.

- polinome, ki jih potihem obravnavava na dva načina: večinoma kot algebrske objekte (skoraj povsod ničelna zaporedja skalarjev s primernimi operacijami), ponekod pa tudi kot preslikave (slednje je smiselno za polinome nad neskončnim poljem). Polinomom nisva posvetila posebnega razdelka, saj njihova temeljita algebrska vpeljava sega v teorijo kolobarjev.

- prirejanje matrike linearni preslikavi, ki je eden od pomembnejših prijemov v linearni algebri. V ta namen je potrebno urediti bazi, glede na kateri prirejamo matriko. Čeprav urejeno bazo zapiševa na običajen način, kot množico in ne kot zaporedje, skušava dosledno poudarjati naravo tega koncepta s pisanjem *urejena baza.* Za matriko, ki pripada linearni preslikavi $\mathcal{A}$: $U \to V$ glede na urejeni bazi Ω prostora U ter Π prostora V, uporabljava Langovo oznako $\mathrm{M}_{\Pi}^{\Omega}(\mathcal{A})$. Podobno označujeva stolpec, ki pripada vektorju $u \in U$ glede na urejeno bazo Ω: $\mathrm{X}_{\Omega}(u)$. Meniva, da je ta zapis strnjen, nazoren in berljiv.

Zahvala gre vsem nosilcem predmetov Algebra I in Linearna algebra, pri katerih sva doslej vodila vaje – doc. dr. Gorazdu Lešnjaku, prof. dr. Draganu Marušiču, prof. dr. Petru Petku, prof. dr. Dušanu Repovšu in prof. dr. Antonu Suhadolcu – recenzentoma za skrben pregled rokopisa in številne izboljšave, prof. dr. Marku Razpetu za nasvete in pomoč pri računalniškem stavljenju, asist. Marjanu Jermanu in asist. mag. Aleksandru Malniču za koristne pripombe ter Pedagoški fakulteti za končno izvedbo.

S posebnim zadovoljstvom se zahvaljujeva še vsem, ki so naju podprli pri izpeljavi tega projekta.

V Ljubljani, 23. septembra 1996

Matej Kolar in Boris Zgrablić

Domača stran te zbirke: `http://www.pef.uni-lj.si/~veckotnobena`
Elektronska pošta: `veckotnobena@pef.uni-lj.si`

Kazalo

Nekaj oznak

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$	množici naravnih in celih števil (opremljeni z običajnima operacijama)
$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	polja racionalnih, realnih in kompleksnih števil
$\vec{a} \cdot \vec{b}$	običajni skalarni produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ iz $\mathbb{R}^3$
$\vec{a} \times \vec{b}$	vektorski produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ iz $\mathbb{R}^3$
$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$	mešani produkt vektorjev $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ iz $\mathbb{R}^3$
$\mathbb{F}^n$	$\underbrace{\mathbb{F} \times \cdots \times \mathbb{F}}_{n}$, to je vektorski prostor urejenih n-teric elementov iz polja $\mathbb{F}$ (opremljen z običajnima operacijama seštevanja in množenja s skalarjem po komponentah)
$\mathbb{F}[x]$	vektorski prostor polinomov nad poljem $\mathbb{F}$ v nedoločenki (ali spremenljivki) x
$\mathbb{F}_n[x]$	vektorski prostor polinomov stopnje $\leq n$ nad poljem $\mathbb{F}$ v nedoločenki (ali spremenljivki) x
$\mathcal{L}(M)$	linearna ogrinjača množice M
$\mathcal{I}$	identična preslikava (na prostoru, ki ga določimo iz sobesedila)
I	identična matrika (velikost je razvidna iz sobesedila)
$\mathbb{F}^{m \times n}$	vektorski prostor $m \times n$ matrik nad poljem $\mathbb{F}$ (opremljen z običajnima operacijama)
$A^{(i)}$	i-ti stolpec matrike A
$A_{(i)}$	i-ta vrstica matrike A
A^{t}	transponirana matrika matrike A
A^{h}	hermitirana (tj. konjugirana in transponirana) matrika kompleksne matrike A
$\mathrm{X}_\Omega(v)$	stolpec vektorja $v \in V$ glede na urejeno bazo Ω prostora V
$\mathrm{M}_\Pi^\Omega(\mathcal{A})$	matrika, ki je prirejena linearni preslikavi $\mathcal{A}\colon U \to V$ glede na urejeno bazo Ω prostora U in urejeno bazo Π prostora V
$\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$	diagonalna matrika velikosti $n \times n$ s skalarji $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ na diagonali
V^*	dual vektorskega prostora V
$\mathcal{A}^*\colon V^* \to U^*$	dualna preslikava linearne preslikave $\mathcal{A}\colon U \to V$
$\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$	skalarni produkt na evklidskem ali unitarnem prostoru
$\mathcal{A}^*\colon V \to V$	adjungirana preslikava endomorfizma $\mathcal{A}\colon V \to V$ evklidskega ali unitarnega prostora V

Geometrija

→ 10 nalog

1. naloga ◇ Dokaži, da središča stranic poljubnega štirikotnika $ABCD$ tvorijo paralelogram.

2. naloga ◇ Poišči kakšen pogoj, ki je potreben in zadosten, da za vektorja $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ velja enakost $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$.

3. naloga ◇ Dokaži, da za poljubna vektorja $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ velja neenakost

$$|\vec{a} + \vec{b}| \cdot |\vec{a} - \vec{b}| \leq |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2. \tag{1}$$

Nato razišči, kdaj natanko velja enakost v (1).

4. naloga ◇ Naj bodo $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ in $\lambda, \mu, \nu, o \in \mathbb{R}$ poljubni. Izrazi ploščino paralelograma, ki ga napenjata vektorja $\vec{m} := \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ in $\vec{n} := \nu\vec{a} + o\vec{b}$, s ploščino paralelograma, ki ga napenjata vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

5. naloga ◇ Pokaži, da sta vektorja $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ linearno neodvisna natanko tedaj, ko sta linearno neodvisna vektorja $\vec{a} - \vec{b}$ in $\vec{a} + \vec{b}$.

6. naloga ◇ Dokaži: če enotska vektorja iz $\mathbb{R}^3$ napenjata paralelogram s ploščino 1, sta pravokotna.

7. naloga ◇ Če sta vektorja $\vec{p} = \vec{a} + 2\vec{b}$ in $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$ enotska in pravokotna, izračunaj kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

8. naloga ◇◇ Naj bodo $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$ vektorji iz $\mathbb{R}^3$ z dolžinami $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 1$. Bodi kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ enak $\frac{\pi}{3}$ ter kot med ravnino, ki jo razpenjata vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, in vektorjem $\vec{c}$ enak $\frac{\pi}{6}$. Izračunaj prostornino paralelepipeda napetega na vektorje

$$\begin{aligned} \vec{m} &:= \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}, \\ \vec{n} &:= 2\vec{a} + \vec{c}, \\ \vec{o} &:= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}. \end{aligned}$$

9. naloga ◇ Naj bo $ABCDEFGH$ kocka z robom a. Šest osnovnih ploskev kocke združi v tri različne pare (po dve ploskvi) tako, da bosta imeli ploskvi v paru skupen rob. V vsakem paru poveži središči ploskev. Tako dobiš tri vektorje. Kolikšna je prostornina piramide, ki jo napenjajo ti trije vektorji (ko jih prestaviš v izhodišče)?

10. naloga ◇◇ Za soda naravna števila n poenostavi

$$((\ldots((\underbrace{((\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}) \times \vec{a}) \times \vec{a}) \ldots) \times \vec{a}) \times \vec{a}}_{n}. \tag{2}$$

11. naloga ◇ Dokaži, da so vektorji $\gamma\vec{a}-\alpha\vec{c}$, $\alpha\vec{b}-\beta\vec{a}$, $\beta\vec{c}-\gamma\vec{b}$ komplanarni, ne glede kako izberemo skalarje $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ in vektorje $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbb{R}^3$.

12. naloga ◇ Dokaži, da za vektorje $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbb{R}^3$ velja: $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{c}+\vec{a}$ so nekomplanarni natanko takrat, ko so nekomplanarni $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

13. naloga ◇ Ali sta premici

$$p\colon\ 2-x=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{3}$$

in

$$q\colon\ \frac{x-1}{2}=\frac{2-y}{4}=\frac{2-z}{6}$$

enaki?

14. naloga ◇ Dani sta točki $A(2,3,-1), B(4,-1,1)\in\mathbb{R}^3$. Za vsako od točk $P(2,4,-1)$, $Q(3,1,0)$ in $R(-2,11,-5)$ razišči, ali leži na daljici $\overline{AB}$ in ali leži na premici skozi točki A in B.

15. naloga ◇ Napiši enačbo ravnine Π, ki na koordinatnih oseh x,y,z zapovrstjo napravi odseke -2, 5, -7.

16. naloga ◇ Dani sta ravnini Π: $x+y+2z=4$ in Σ: $y+2z=3$. Poišči ravnino Ω, ki je pravokotna na Σ in za katero velja $\Pi\cap\Omega=\Pi\cap\Sigma$.

17. naloga ◇ Med premicami v ravnini Π: $x-2y+2z=18$, ki gredo skozi točko $T(4,y_0,5)$, določi:

(a) premico p, ki seka premico p': $\frac{x}{2}=y=\frac{z}{3}$;
(b) premico q, ki je vzporedna ravnini Δ: $y=0$;
(c) premico r, ki je najbližja izhodišču.

18. naloga ◇ Med premicami v ravnini Π: $x-3z=1$ poišči tiste, ki sekajo premico p: $\frac{x-1}{2}=z$, $y=4$ pod kotom $\pi/3$.

19. naloga ◇ Določi enačbo ravnine Σ, ki vsebuje presek ravnin Ω: $3x+y-z=4$ in Π: $x-2y+2z=-1$ ter točko $T(1,2,0)$. Kam se preslika točka $S(3,0,0)$ pri zrcaljenju čez Σ?

20. naloga ◇ Točke $A(2,-1,-2)$, $B(2,2,4)$, $C(-1,2,2)$ so oglišča trapeza $ABCD$.

(a) Določi točko D, če velja enakost $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{CD}$.
(b) Napiši enačbo ravnine Π, ki jo določa trapez $ABCD$.
(c) Izračunaj ploščino trapeza $ABCD$.
(d) Izračunaj prostornino piramide, ki ima za osnovno ploskev trapez $ABCD$ in vrh v izhodišču.

21. naloga ◇◇ Ravnina Σ je podana z normalnim vektorjem $\vec{n}_\Sigma$ in s točko $T\in\Sigma$. Poišči zrcalno sliko točke S glede na ravnino Σ.

22. naloga ◇◇ Ravnina Σ je podana z normalnim vektorjem $\vec{n}_\Sigma$ in s točko $T\in\Sigma$. Poišči pravokotno projekcijo točke S na ravnino Σ.

23. naloga ◇◇ Premica $p\subset\mathbb{R}^3$ je vzporedna z ravninama Ω: $2x+y-2z=6$ in Π: $2x-z=-11$ in gre skozi težišče trikotnika $\triangle ABC$, kjer so $A(1,-2,0)$, $B(3,1,-4)$ in $C(2,-2,-2)$. Poišči koordinate pravokotne projekcije točke C na ravnino Σ, ki jo določata premica p in točka B.

24. naloga ◇ Poišči pravokotno projekcijo premice p: $2x+y-z=1$, $x-2z=3$ na ravnino Π: $3x+y+z=2$.

25. naloga ◇◇ Poišči zrcalno sliko premice p: $\vec{r}=\vec{r}_P+t\vec{p}$ glede na ravnino Σ: $\vec{n}_\Sigma\cdot(\vec{r}-\vec{r}_T)=0$.

26. naloga ◇ Premica p je podana z enačbama $y=0$, $z=0$, premica q pa z enačbama $x=1$, $y+2=z$. Za kateri točki $A\in p$ in $B\in q$ je daljica $\overline{AB}$ najkrajša? Kolikšna je dolžina te daljice?

27. naloga ◇◇ Poišči enačbe vseh ravnin v $\mathbb{R}^3$, ki vsebujejo točko $T(0,0,1)$, so za $1/2$ oddaljene od izhodišča in so vzporedne s premico p, ki jo določata ravnini Σ_1: $z=3$ in Σ_2: $x-y=4$.

28. naloga ◇◇ Poišči vse ravnine, katerih razdalja do premice p: $x+1=0$, $y-1=z+3$ je pozitivna in enaka dvakratni razdalji do premice q: $x-2=\frac{y-1}{2}$, $z=0$.

29. naloga ◇◇ Poišči premico r, ki je vzporedna z ravninama

$$\Gamma\colon\ x-y+2z=-2,\qquad \Delta\colon\ x+3z=6$$

in seka premici

$$p\colon\ x=2,\ \frac{y}{3}=\frac{z+1}{2},\qquad q\colon\ 1-x=\frac{y+2}{2}=z.$$

30. naloga ◇◇ Skozi točko $T(0,-1,1)$ položi premico r, ki seka premici

$$p\colon\ \frac{x+3}{2}=2-y=z$$

in

$$q\colon\ \frac{x-1}{3}=\frac{y+3}{2}=z-1.$$

31. naloga ◇◇ Zapiši koordinate oglišč B in C enakostraničnega trikotnika $\triangle ABC$, če poznaš oglišče $A(-1,4,5)$ in veš, da leži stranica BC na premici

$$p\colon\ \frac{x-2}{2}=\frac{1-y}{2}=z.$$

32. naloga ◇◇◇ Zapiši vsaj eno oglišče pravilnega tetraedra, če veš, da dva od njegovih robov ležita na mimobežnicah

$$p: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-2}, \quad z = 1,$$

$$q: x - 2 = y + 3 = z.$$

33. naloga ◇◇ Poišči vse ravnine, katerih oddaljenost od premic p: $x = y = z$ in q: $x - 2 = y = z$ je enaka 1.

34. naloga ◇◇ Naj točke A, B in C napenjajo neizrojen trikotnik $\triangle ABC$ v $\mathbb{R}^3$. Napiši enačbo nosilke višine na stranico a.

35. naloga ◇◇ Trikotnik $\triangle ABC$ ima oglišča $A(1,0,1)$, $B(0,1,1)$, $C(-1,1,0)$. Poišči enačbo nosilke p težiščnice t_c ter nosilke q višine v_c na stranico $c = \overline{AB}$.

36. naloga ◇◇ Naj bodo $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ nekomplanarni enotski vektorji, ki napenjajo paralelepiped. Na vsakem od treh vektorjev izberemo poljubno točko. Skozi izbrane točke položimo ravnino Π. Kolikšen del glavne telesne diagonale paralelepipeda odseka ravnina Π?

37. naloga ◇ V neizrojenem trikotniku $\triangle ABC$ deli točka M stranico $\overline{AB}$ v razmerju $1:4$, točka N pa stranico $\overline{BC}$ v razmerju $1:3$. V kakšnem razmerju seka daljica $\overline{MN}$ težiščnico na stranico c?

38. naloga ◇◇ Trikotnik $\triangle ABC$ ima oglišča $A(1,3,-1)$, $B(-1,1,2)$ in $C(3,2,2)$. Poišči koordinate oglišč trikotnika $\triangle A_1B_1C_1$, ki ga dobimo pri zrcaljenju trikotnika $\triangle ABC$ čez njegovo težišče T. Izračunaj ploščino lika, ki ga določa presek trikotnikov $\triangle ABC$ in $\triangle A_1B_1C_1$.

39. naloga ◇◇ Naj bo neizrojen trikotnik v $\mathbb{R}^3$ določen s točkami A, B in C. Izračunaj koordinate središča temu trikotniku včrtanega kroga.

40. naloga ◇◇ Naj ima trikotnik $\triangle ABC$ oglišča $A(1,2,1)$, $B(3,-2,0)$ in $C(0,3,1)$.

(a) Izračunaj njegovo ploščino in obseg.
(b) Poišči središče trikotniku $\triangle ABC$ očrtanega kroga.
(c) Poišči središče trikotniku $\triangle ABC$ včrtanega kroga.

41. naloga ◇◇ Na sferi $\mathcal{K}$: $x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 + 4 = 0$ poišči točko T, ki je najbližja premici p: $x - 4 = \frac{y-3}{2} = \frac{z+4}{-5}$.

42. naloga ◇ Napiši enačbo plašča neskončnega dvojnega stožca z vrhom v točki $T(2,3,-1)$, če je kot ob vrhu stožca $\frac{\pi}{3}$, os stožca pa je vzporedna premici p: $\frac{1-3x}{2} = \frac{y-1}{2} = 3 - z$.

43. naloga ◇◇ Določi vse trojice vektorjev v $\mathbb{R}^3$, za katere velja „asociativnost“ skalarnega produkta.

44. naloga ◇◇◇ Dane so štiri nekomplanarne točke A, B, C, $D \in \mathbb{R}^3$. Napiši, kako dobimo enačbe vseh ravnin v $\mathbb{R}^3$, ki so od teh točk enako oddaljene. Koliko je takih ravnin? Poišči vsaj dve taki ravnini v primeru $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ in $D(2,2,2)$.

45. naloga ◇◇ Dan je vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$. Reši enačbo

$$\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{x}) = (\vec{a} \times \vec{x}) \times \vec{x}. \tag{3}$$

46. naloga ◇◇ V $\mathbb{R}^3$ reši enačbo $\vec{x} \times \vec{a} = \vec{b}$, kjer sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ znana vektorja iz $\mathbb{R}^3$.

47. naloga ◇ Pod katerim kotom in v kateri točki seka premica $\vec{r} \times (-1,1,1) = (-3,-5,2)$ ravnino $\vec{r} \cdot (1,-1,-1) = -1$?

48. naloga ◇◇◇ Naj bosta $\vec{a}, \vec{b}$ vektorja iz $\mathbb{R}^3$ in $\vec{a} \neq \vec{0}$. Poišči vse vektorje $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, ki rešijo enačbo

$$(\vec{a}\vec{x})\vec{b} + \vec{a} \times \vec{x} = \vec{0}. \tag{4}$$

49. naloga ◇◇ Reši sistem enačb

$$\vec{x} \times \vec{a} = \vec{b}, \qquad \vec{x} \cdot \vec{c} = d, \tag{5}$$

kjer so $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ neničelni vektorji in $d \in \mathbb{R}$ skalar.

50. naloga ◇◇ Naj bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ nekolinearna vektorja v $\mathbb{R}^3$. Napiši in primerjaj različne načine, kako poiščeš neničeln vektor, ki je pravokoten na $\vec{a}$ in leži v ravnini, ki jo določata $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

51. naloga ◇◇◇ Nevzporedni premici p in q sta podani s smernima vektorjema $\vec{p}$ in $\vec{q}$ ter s točkama $P \in p$ in $Q \in q$. Dokaži, da je najkrajša daljica med obema premicama pravokotna na obe premici.

Vektorski prostori

52. naloga ◇ Naj bo
$$U := \{(2z, w, z) \mid z, w \in \mathbb{C}\}.$$
Dokaži, da je U z običajnim seštevanjem in množenjem s skalarjem po komponentah vektorski prostor nad obsegom $\mathbb{C}$. Poišči $\dim U$.

53. naloga ◇ Za $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ definirajmo množice
$$\begin{aligned} U_1 &:= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 - x_n = 0\},\\ U_2 &:= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 - x_n = 1\},\\ U_3 &:= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \cdot x_n = 0\},\\ U_4 &:= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 / x_n = 0\},\\ U_5 &:= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\}. \end{aligned}$$
Katera od zgornjih množic je vektorski podprostor vektorskega prostora $\mathbb{R}^n$ nad obsegom $\mathbb{R}$?

54. naloga ◇ Za vsako od naslednjih podmnožic vektorskega prostora $\mathbb{R}_5[x]$,
$$\begin{aligned} N_1 &:= \{x-1, x^2-x, x^3-x^2, x^4-x^3, x^5-x^4\},\\ N_2 &:= \{x^5+x^4, x^5+x^4+x^3, \ldots, x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\},\\ N_3 &:= \{0, 1, x, 2x^2, 3x^3, 4x^4, 5x^5\}, \end{aligned}$$
ni lin. neodv.

določi, ali je linearno neodvisna, ali je ogrodje in ali je baza prostora $\mathbb{R}_5[x]$.

55. naloga ◇ Za vsako od naslednjih podmnožic prostora $\mathbb{R}_n[x]$ ($n \in \mathbb{N}$) razišči, ali je ogrodje, ali je linearno neodvisna in ali je baza prostora $\mathbb{R}_n[x]$:
$$M_1 := \{1+x, x+x^2, \ldots, x^{n-1}+x^n\},$$
$$M_2 := \{0 \cdot x, 1 \cdot x^2, \ldots, (n-1) \cdot x^n\},$$
$$M_3 := \{1, 1+x, 1+x+x^2, \ldots, 1+x+x^2+\cdots+x^n\}.$$

56. naloga ◇ Določi $t \in \mathbb{R}$ tako, da bo množica
$$U := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - t(y + 2z - 2) = 4\}$$
vektorski podprostor v vektorskem prostoru $\mathbb{R}^3$. Poišči kakšno bazo tega podprostora in jo dopolni do baze prostora $\mathbb{R}^3$.

57. naloga ◇ Za katere $c \in \mathbb{R}$ je množica $B := \{1 - cx, 1 - x^2, x - x^2\}$ baza vektorskega prostora $\mathbb{R}_2[x]$?

79, 80, 81, 82

58. naloga ◇ Pri kakšnem $a \in \mathbb{R}$ tvorijo vektorji
$$\begin{aligned} \vec{x} &:= (1, 1, a^2 + a - 1),\\ \vec{y} &:= (1, a^2 - a + 1, -1),\\ \vec{z} &:= (-2, -2, a^2 + a + 2) \end{aligned}$$
bazo prostora $\mathbb{R}^3$?

59. naloga ◇ Naj $\mathbb{R}_3[x]$ označuje vektorski prostor polinomov z realnimi koeficienti stopnje največ 3 in naj bo
$$\Omega := \{1, 1+x^2, 1-x^2+x^3, -x-2x^2+x^3\}.$$
(a) Pokaži, da je množica Ω baza prostora $\mathbb{R}_3[x]$.
(b) Linearno izrazi polinom $-1 - 3x - x^2$ s polinomi iz baze Ω.

60. naloga ◇ V $\mathbb{R}^3$ imamo podani množici
$$M := \{(1, -1, 1), (2, 0, 1), (-1, 3, -2)\},$$
$$N := \{(1, -1, 1), (2, 0, 1), (1, 1, 1)\}$$
in vektorja
$$\vec{u} := (1, 1, 0), \qquad \vec{v} := (3, -1, 1).$$
Poišči vse linearne izrazitve vektorjev $\vec{u}$ in $\vec{v}$ z vektorji iz množice M oziroma N. S pojmi kot so ogrodje, linearna ogrinjača, linearna neodvisnost in baza razloži dobljene rezultate.

61. naloga ◇ V prostoru $\mathbb{R}_4[x]$ sta dana podprostora
$$U := \{p \in \mathbb{R}_4[x] \mid p'' = 0\}, \quad V := \mathcal{L}\{1+x, x+x^2, x^2+x^3, x^3+x^4\}.$$
Ali je $U \leq V$?

62. naloga ◇ V prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ sta dana podprostora
$$U := \{p \in \mathbb{R}_3[x] \mid p''(1) = 2p(0),\ p(-1) = 0\},$$
$$V := \{p \in \mathbb{R}_3[x] \mid p''(1) + p(-1) = 2p(0)\}.$$
Ali je $U \leq V$? Ali je $U = V$?

63. naloga ◇ V $\mathbb{R}^5$ so dane množice
$$R := \{(0,0,1,0,2), (0,0,0,0,1), (1,1,-1,0,0)\},$$
$$S := \{(1,1,-1,-1,0), (0,0,1,0,0), (0,0,0,0,1)\},$$
$$T := \{(2,2,-2,-2,2), (3,3,3,-3,3), (4,4,-4,-4,-4)\}$$
in podprostor
$$U := \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 - x_2 = 0,\ x_2 + x_4 = 0\}.$$
Katera izmed množic R, S, T je baza podprostora U?

64. naloga ◇◇ V prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ realnih polinomov stopnje manjše ali enake 3 sta dani podmnožici

$$U := \{p \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(1) = p(-1),\ p''(\tfrac{1}{2}) = \alpha\}$$

in

$$V := \{p \in \mathbb{R}_3[x] \mid \int_0^1 p(t)dt = \beta,\ p''(0) - 3p'(0) = 0\},$$

kjer sta α in β fiksni realni števili. Določi α in β tako, da bosta množici U in V vektorska podprostora v $\mathbb{R}_3[x]$, nato pa poišči kakšno bazo vsote $U+V$.

65. naloga ◇◇ Množica realnih zaporedij $V = \{f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$ je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ za običajni operaciji seštevanja in množenja s skalarjem po komponentah:

$$(f+g)(n) := f(n) + g(n),$$

$$(\lambda f)(n) := \lambda \cdot f(n).$$

Oglej si podmnožico

$$U := \{f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N} : f(n+2) = 2f(n)\} \subset V.$$

(a) Dokaži, da je U vektorski podprostor prostora V.

(b) Poišči razsežnost prostora U.

66. naloga ◇◇ Naj pomenita $+$ običajno seštevanje in $\cdot$ običajno množenje v množici realnih števil.

(a) Dokaži, da je množica $M_1 := \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ z operacijama $+$ in $\cdot$ vektorski prostor nad obsegom $\mathbb{Q}$, in izračunaj $\dim M_1$.

(b) Dokaži, da je množica $M_2 := \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ z operacijama $+$ in $\cdot$ vektorski prostor nad obsegom $\mathbb{Q}$. Dokaži, da vektorski prostor M_2 nima končnega ogrodja.

(c) Dokaži, da je množica $M_3 := \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ z operacijama $+$ in $\cdot$ vektorski prostor nad obsegom $\mathbb{R}$ in izračunaj $\dim M_3$.

(d) Dokaži, da množica $M_4 := \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ z operacijama $+$ in $\cdot$ ni vektorski prostor nad obsegom $\mathbb{R}$.

67. naloga ◇◇ Naj bo

$$V := \mathcal{L}\{1, \cos, \sin\}$$

podprostor prostora funkcij iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}$. Katere od funkcij $x \mapsto (\sin\frac{x}{2})^2$, $x \mapsto \sin(2x)$, $x \mapsto |\sin x|$ so v prostoru V? Za katere $\alpha \in \mathbb{R}$ je funkcija $f_\alpha\colon x \mapsto \sin(\alpha x)$ v V?

68. naloga ◇◇ Naj bodo $v_0, \ldots, v_n$ $(n \geq 1)$ poljubni vektorji vektorskega prostora V nad poljem $\mathbb{F}$. Dokaži: če so vektorji $v_1 - v_0, \ldots, v_n - v_0$ linearno neodvisni, tedaj so tudi vektorji $v_0 - v_n, \ldots, v_{n-1} - v_n$ linearno neodvisni.

69. naloga ◇◇ Naj bosta X in Y podprostora v vektorskem prostoru Z. Pokaži: $X \cup Y$ je podprostor v Z natanko takrat, ko je $X \subseteq Y$ ali $Y \subseteq X$.

70. naloga ◇◇ Naj bodo X, Y, Z podprostori vektorskega prostora V. Natančno razišči distributivnost seštevanja podprostorov glede na presek podprostorov, to je:

(a) Pokaži, da velja

$$X + (Y \cap Z) \subseteq (X+Y) \cap (X+Z). \tag{6}$$

(b) Poišči zgled prostorov, za katere velja stroga vsebovanost

$$X + (Y \cap Z) \subset (X+Y) \cap (X+Z). \tag{7}$$

(c) Dokaži: Če je $X \subseteq Y$, potem velja enakost

$$X + (Y \cap Z) = Y \cap (X+Z). \tag{8}$$

71. naloga ◇◇ Naj bodo U, V in W podprostori vektorskega prostora X. Dokaži, da velja

$$U \cap (V+W) \subseteq W \iff V \cap (U+W) \subseteq W. \tag{9}$$

72. naloga ◇◇ Naj bodo $V_1, \ldots, V_k$, $k \geq 2$, podprostori končnorazsežnega vektorskega prostora V. Dokaži enakovrednost izjav:

(a) Za vsak vektor $v \in V$ obstajajo enolično določeni vektorji $v_i \in V_i$, za katere je $v = v_1 + \cdots + v_k$.

(b) $V = V_1 + \cdots + V_k$ in vsak nabor neničelnih vektorjev, ki paroma pripadajo različnim podprostorom V_i, je linearno neodvisen.

(c) $V = V_1 + \cdots + V_k$ in za vsak $1 \leq i \leq k$ velja

$$V_i \cap (V_1 + \cdots + V_{i-1} + V_{i+1} + \cdots + V_k) = 0.$$

V vsakem od gornjih (ekvivalentnih) primerov pravimo, da je V prema vsota podprostorov $V_1, \ldots, V_k$, in pišemo $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ ali krajše $V = \bigoplus_{i=1}^k V_i$.

73. naloga ◇ Naj bo V vektorski prostor nad obsegom $\mathbb{F}$ in $M \subseteq V$ njegova končna neprazna podmnožica. Imejmo dve operaciji nad elementi množice M:

(i) Poljuben vektor v M pomnožimo s skalarjem različnim od 0.

(ii) K poljubnemu vektorju v M prištejemo poljuben večkratnik poljubnega drugega vektorja iz M.

Ti dve operaciji imenujemo *elementarni transformaciji* množice M. Dokaži:

(a) Če je množica M linearno neodvisna, je po transformacijah (i) ali (ii) dobljena množica spet linearno neodvisna.

(b) Linearna ogrinjača množice M se po transformacijah (i) ali (ii) ohranja.

74. naloga ◇◇ Naj bo U $(n-1)$-razsežen podprostor v n-razsežnem prostoru V $(n \in \mathbb{N}\backslash\{1\})$. Dokaži, da obstaja taka baza prostora V, ki ne vsebuje nobenega vektorja iz podprostora U.

75. naloga $\diamond$ Naj bo

$$U := \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_3 = 0,\ x_2 + x_4 = 0\}.$$

(a) Pokaži, da je $U \leq \mathbb{R}^4$.

(b) Poišči kako bazo podprostora U.

(c) Poišči kako bazo prostora $\mathbb{R}^4$, ki ne bo vsebovala nobenega vektorja iz U.

76. naloga $\diamond$ Naj bo V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ in A neprazna podmnožica prostora V. Linearno ogrinjačo množice A definiramo kot množico vseh linearnih kombinacij končno mnogo vektorjev iz A, torej

$$\mathcal{L}(A) := \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \mid n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{F}, a_i \in A\}.$$

Dokaži:

(a) Velja $A \subseteq \mathcal{L}(A) \leq V$, torej operator $\mathcal{L}$ priredi podmnožici A neki podprostor v V.

(b) Enakost $\mathcal{L}(A) = A$ velja natanko tedaj, ko je A podprostor v V.

(c) $\mathcal{L}(\mathcal{L}(A)) = \mathcal{L}(A)$.

Posebej definiramo linearno ogrinjačo prazne množice kot trivialni podprostor v V:

$$\mathcal{L}(\emptyset) := \{0\}.$$

Ali za prazno množico veljajo gornje trditve?

77. naloga $\diamond\diamond\diamond$ Naj bo V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$, A in B pa neprazni podmnožici prostora V. Dokaži:

(a) Velja $\mathcal{L}(A + B) \subseteq \mathcal{L}(A) + \mathcal{L}(B)$.
Pokaži na primeru, da je lahko $\mathcal{L}(A + B) \neq \mathcal{L}(A) + \mathcal{L}(B)$.

(b) Velja $\mathcal{L}(A \cap B) \subseteq \mathcal{L}(A) \cap \mathcal{L}(B)$.
Pokaži na primeru, da je lahko $\mathcal{L}(A \cap B) \neq \mathcal{L}(A) \cap \mathcal{L}(B)$.

(c) Linearna ogrinjača množice A je enaka preseku vseh podprostorov v V, ki vsebujejo A, torej

$$\mathcal{L}(A) = \bigcap_{A \subseteq U \leq V} U.$$

78. naloga $\diamond\diamond\diamond$ Naj bosta A in B neprazni podmnožici v vektorskem prostoru V. Pokaži:

(a) Če je $A \subseteq B$, je $\mathcal{L}(A) \subseteq \mathcal{L}(B)$.

(b) Če je $A \subseteq B \subseteq \mathcal{L}(A)$, je $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(B)$.

79. naloga $\diamond$ V $\mathbb{R}^5$ definirajmo vektorski podprostor

$$U := \mathcal{L}\{(1,0,1,0,1), (-1,-2,4,2,-1), (1,-2,3,0,1), (2,-3,-1,-4,2)\}.$$

Poišči kako njegovo bazo.

matrika

80. naloga $\diamond$ V $\mathbb{R}^5$ definirajmo vektorski podprostor

matrika

$$V := \mathcal{L}\{(1,2,-1,0,1), (2,5,0,2,2), (1,3,2,1,2)\}.$$

Poišči kako njegovo bazo.

81. naloga $\diamond\diamond$ Za podprostora U in V iz nalog 79 in 80 poišči kaki bazi vsote $U + V$ in preseka $U \cap V$.

82. naloga $\diamond$ Naj bosta

$$P := \mathcal{L}\{1 + x^2 + 2x^3, 2 - x + x^2 + 2x^3, 1 + x + x^2 + x^3\},$$

$$R := \mathcal{L}\{1 + x^3, 3 + x^3, 1 + x\}$$

podprostora v vektorskem prostoru $\mathbb{R}[x]$. Poišči baze podprostorov P, R, $P \cap R$ in $P + R$.

83. naloga $\diamond\diamond$ Določi $\alpha \in \mathbb{R}$ in $\beta \in \mathbb{R}$ tako, da bosta podmnožici

$$U := \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(0) - (\alpha - 1)p'(0) + \alpha = \beta\},$$

$$V := \{q(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid q(0) - q''(0) = \beta + 1,\ q(-1) = 0\}$$

tudi vektorska podprostora v prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ realnih polinomov stopnje ≤ 3. Nato poišči bazo preseka $U \cap V$ in bazo vsote $U + V$.

84. naloga $\diamond\diamond$ V prostoru $\mathbb{R}^4$ sta dani množici

$$B := \{(4,1,5,2), (0,1,2,1), (2,1,0,5), (0,-1,5,-8)\},$$

$$C := \{(0,1,3,0), (2,0,1,1), (0,0,1,-1), (-2,1,2,-1)\}.$$

Ali je B ogrodje podprostora $\mathcal{L}(C)$?

85. naloga $\diamond\diamond$ V prostoru $\mathbb{R}^5$ sta dani podmnožici

$$S := \{(-1,2,1,1,-1), (2,-3,1,-1,1), (3,-7,-2,1,-1)\},$$

$$T := \{(0,0,1,1,1), (0,0,1,0,0), (0,0,5,2,2)\}.$$

(a) Ali je S baza podprostora $\mathcal{L}(S)$?

(b) Dokaži, da je $\mathbb{R}^5$ prema vsota podprostorov $\mathcal{L}(S)$ in $\mathcal{L}(T)$:

$$\mathbb{R}^5 = \mathcal{L}(S) \oplus \mathcal{L}(T).$$

86. naloga $\diamond\diamond$ Bodi $\mathbb{F} = \{0,1\}$ polje z dvema elementoma in $V = \mathbb{F}^n$, $n \geq 1$.

(a) Ugotovi, da ima vektorski prostor V končno mnogo vektorjev. Koliko?

(b) Napiši potreben in zadosten pogoj za to, da sta vektorja $u, v \in V$ linearno odvisna.

(c) Naj bosta

$$A := \{(1,1,0,0),\ (0,1,0,1),\ (1,0,0,1)\},$$
$$B := \{(0,1,0,1),\ (1,0,0,0),\ (1,1,0,1)\}$$

podmnožici v prostoru $\mathbb{F}^4$. Poišči kakšne baze prostorov P, Q, $P+Q$ in $P \cap Q$, če je $P = \mathcal{L}(A)$ in $Q = \mathcal{L}(B)$.

Ne pozabi, da v polju $\mathbb{F}$ velja $-1 = 1$.

87. naloga ◇◇◇ Naj bo V vektorski prostor in $u \in V$. Oglej si

$$1 \cdot u + (-1) \cdot u \quad \text{in} \quad 0 \cdot u + 0 \cdot u. \tag{10}$$

Ali sta vektorja v (10) enaka? Ali sta linearni kombinaciji v (10) enaki? Ali razumeš pojem linearne kombinacije? Kako primerjamo linearni kombinaciji?

Linearne preslikave

88. naloga ◇ Naj bo $\vec{a} \neq \vec{0}$ izbran vektor v $\mathbb{R}^3$ in $\mathcal{A}$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ preslikava, podana s predpisom

$$\mathcal{A}\colon \vec{x} \mapsto \vec{a} \times \vec{x} + \vec{x} \quad \text{za vsak } \vec{x} \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Dokaži, da je preslikava $\mathcal{A}$ linearna.

(b) Dokaži, da je $\mathcal{A}$ injektivna.

(c) Ali je $\mathcal{A}$ surjektivna? Ali obstaja obrat $\mathcal{A}^{-1}$?

89. naloga ◇ Razišči, katere od naslednjih preslikav iz $\mathbb{R}^2$ v $\mathbb{R}^2$ so linearne:

(a) $\mathcal{A}$: $(x, y) \mapsto (x, 0)$,

(b) $\mathcal{B}$: $(x, y) \mapsto (0, x)$,

(c) $\mathcal{C}$: $(x, y) \mapsto (x+1, y)$,

(d) $\mathcal{D}$: $(x, y) \mapsto (2x, y)$,

(e) $\mathcal{E}$: $(x, y) \mapsto (|x|, y)$,

(f) $\mathcal{F}$: $(x, y) \mapsto (x, e^y)$,

(g) $\mathcal{G}$: $(x, y) \mapsto (x, \sin y)$.

90. naloga ◇ Definirajmo preslikave

$$\begin{array}{ll} \mathcal{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, & \mathcal{A}\colon (x,y,z) \mapsto (x-y, y-z), \\ \mathcal{B}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, & \mathcal{B}\colon (x,y) \mapsto (x+y, x, y), \\ \mathcal{C}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_2[t], & \mathcal{C}\colon (x,y) \mapsto t(x-t). \end{array}$$

Katere od sestavljenih preslikav $\mathcal{A}^2$, $\mathcal{AB}$, $\mathcal{AC}$, $\mathcal{BA}$, $\mathcal{B}^2$, $\mathcal{BC}$, $\mathcal{CA}$, $\mathcal{CB}$, $\mathcal{C}^2$ obstajajo? Za vsako tako zapiši predpis, po katerem slika.

91. naloga ◇◇ Definirajmo preslikave $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ iz $\mathbb{R}[x]$ v $\mathbb{R}[x]$ takole: za vsak $p \in \mathbb{R}[x]$ predpišimo

$$\begin{array}{lll} \mathcal{A}\colon & p \mapsto \mathcal{A}p, & (\mathcal{A}p)(x) = p(x^2),\ \forall x \in \mathbb{R}; \\ \mathcal{B}\colon & p \mapsto \mathcal{B}p, & (\mathcal{B}p)(x) = p(p((x)),\ \forall x \in \mathbb{R}; \\ \mathcal{C}\colon & p \mapsto \mathcal{C}p, & (\mathcal{C}p)(x) = (p(x))^2,\ \forall x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Katere od njih so linearne? Vsaki taki poišči še jedro in sliko.

92. naloga ◇◇ Naj bo

$$\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

linearna preslikava. Kaj je slika točke, kaj premice in kaj ravnine v $\mathbb{R}^3$?

93. naloga ◇◇ Na prostoru $\mathbb{R}^{[0,1]}$ (to je prostor vseh funkcij, ki slikajo iz intervala $[0,1]$ v polje $\mathbb{R}$) definirajmo preslikave $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C},\mathcal{D}$ takole: za vsak $f \in \mathbb{R}^{[0,1]}$ predpišimo

$$\begin{array}{llll} \mathcal{A}: & f \mapsto \mathcal{A}f, & (\mathcal{A}f)(t) = & \sqrt[3]{f(t)}, \\ \mathcal{B}: & f \mapsto \mathcal{B}f, & (\mathcal{B}f)(t) = & f(1-t), \\ \mathcal{C}: & f \mapsto \mathcal{C}f, & (\mathcal{C}f)(t) = & t\cdot f(t), \\ \mathcal{D}: & f \mapsto \mathcal{D}f, & (\mathcal{D}f)(t) = & \ln(|f(t)|+1) \end{array}$$

za vse $t \in [0,1]$. Katere od njih so linearne? Takim poišči še jedro in sliko.

94. naloga ◇◇ Določi vse $a \in \mathbb{C}$, za katere je preslikava $\mathcal{B}_a$: $\mathbb{C}_n[z] \to \mathbb{C}_{n+1}[z]$ ($n \in \mathbb{N}$), za vsak $p \in \mathbb{C}_n[z]$ podana s predpisom

$$\mathcal{B}_a\colon\ p(z) \mapsto zp(az) + a^n - 1,$$

linearna. Pri takih a določi še $\operatorname{Ker}\mathcal{B}_a$ in $\operatorname{Im}\mathcal{B}_a$. Za katere $a \in \mathbb{C}$ je $\mathcal{B}_a$ injektivna (surjektivna, bijektivna)?

95. naloga ◇◇ Naj bosta U in V vektorska prostora nad poljem $\mathbb{R}$.

(a) Ali obstajata taki preslikavi $\mathcal{A},\mathcal{B}$: $U \to V$, da je preslikava $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ linearna, preslikavi $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ pa nista?

(b) Dokaži: če sta preslikavi $\mathcal{A},\mathcal{B}$: $U \to V$ taki, da sta $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ in $\mathcal{A}-\mathcal{B}$ linearni, potem sta tudi $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ linearni.

96. naloga ◇ Naj bosta U in V končnorazsežna vektorska prostora nad $\mathbb{F}$. Dokaži: če je $\mathcal{A}$: $U \to V$ injektivna linearna preslikava, je slika vsake linearno neodvisne množice spet linearno neodvisna.

97. naloga ◇◇ Naj bosta U in V podprostora končnorazsežnega vektorskega prostora W nad poljem $\mathbb{F}$. Definiraj preslikavo $\mathcal{A}$: $U \times V \to W$ s predpisom

$$\mathcal{A}(u,v) := u - v.$$

Preslikava $\mathcal{A}$ je linearna. Poišči njeno jedro in zalogo vrednosti in nato s pomočjo naloge 109 napiši lep dokaz Grassmanove enakosti.

98. naloga ◇◇ Naj bo V vektorski prostor. Dokaži: če za linearno preslikavo $\mathcal{P}$: $V \to V$ velja $\mathcal{P} = \mathcal{P}^2$, je

$$V = \operatorname{Ker}\mathcal{P} \oplus \operatorname{Im}\mathcal{P}.$$

99. naloga ◇ Naj bodo U, V in W vektorski prostori nad istim obsegom ter $\mathcal{A}$: $U \to V$ in $\mathcal{B}$: $V \to W$ linearni preslikavi. Dokaži:

$$\mathcal{B}\mathcal{A} = 0 \iff \operatorname{Im}\mathcal{A} \le \operatorname{Ker}\mathcal{B}.$$

100. naloga ◇ Endomorfizem $\mathcal{A}$ prostora $\mathbb{R}^5$ naj bo injektiven, endomorfizem $\mathcal{B}$ istega prostora pa naj bo tak, da velja $\operatorname{Im}\mathcal{A} = \operatorname{Ker}\mathcal{B}$. Dokaži, da je $\mathcal{B}$ ničelna preslikava.

101. naloga ◇ Naj bo $\mathcal{A}$ endomorfizem petrazsežnega vektorskega prostora nad $\mathbb{F}$. Dokaži: če je $\mathcal{A}^2 = 0$, je $\operatorname{rang}\mathcal{A} \le 2$.

102. naloga ◇◇ Naj bosta U in V končnorazsežna vektorska prostora nad istim poljem $\mathbb{F}$, vektorji

$$e_1, e_2, \ldots, e_n \in U$$

naj tvorijo bazo prostora U, vektorji

$$f_1, f_2, \ldots, f_n \in V$$

pa naj bodo poljubni. Dokaži, da obstaja natanko ena linearna preslikava $\mathcal{A}$: $U \to V$, za katero je

$$\mathcal{A}e_i = f_i, \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{11}$$

103. naloga ◇ Poišči vse linearne funkcionale f na prostoru $\mathbb{R}_2[x]$, za katere velja

$$f(x^2 - x) = 1 \quad \text{in} \quad f(x+1) = 2.$$

104. naloga ◇ Ali obstaja tak linearni funkcional f: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, da velja

$$\begin{aligned} f(1,1,2,0) &= 2, \\ f(1,2,1,0) &= 2, \\ f(0,1,2,1) &= 2, \\ f(1,0,3,0) &= 0? \end{aligned}$$

105. naloga ◇◇ Ali obstaja linearna preslikava $\mathcal{A}$: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, za katero velja

$$\mathcal{A}(2,-1,3,1) = (4,0,2),\ \mathcal{A}(0,1,3,0) = (1,-1,0),\ \mathcal{A}(1,0,1,0) = (3,1,2)$$

in ki

(a) je injektivna?

(b) je surjektivna?

(c) ima rang enak 2?

(d) ima dvorazsežno jedro?

106. naloga ◇ Ali lahko razširiš predpis

$$\mathcal{A}(4,0,2) := (2,-1,3,1),\ \mathcal{A}(1,-1,0) := (0,1,3,0),\ \mathcal{A}(3,1,2) := (1,0,1,0)$$

do linearne preslikave $\mathcal{A}$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, ki je injektivna?

107. naloga ◇◇◇ Ali lahko razširiš predpis

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(0,1,2,0,1) &:= (1,0,-1,0), \\ \mathcal{A}(-1,0,-1,1,2) &:= (2,1,1,-2), \\ \mathcal{A}(1,-3,-3,1,3) &:= (3,3,6,-6), \\ \mathcal{A}(1,-1,0,0,1) &:= (1,1,2,-2), \end{aligned}$$

do linearne preslikave $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, katere jedro je enako prostoru

$$S := \mathcal{L}\{(1,0,0,0,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0)\}?$$

108. naloga ◇◇ Poišči kako linearno preslikavo $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ki preslika ravnino

$$\Sigma\colon\ 2x - 2y + z = 1$$

na premico

$$p\colon\ \frac{x-1}{3} = y + 1 = 1 - z.$$

109. naloga ◇ Naj bo V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ in

$$D := \{(v,v) \mid v \in V\}$$

podmnožica prostora $V \times V$. Dokaži, da je D podprostor prostora $V \times V$ in da je D izomorfen prostoru V.

110. naloga ◇ Kako dokažeš, da sta dva končnorazsežna vektorska prostora izomorfna?

111. naloga ◇ Med vektorskimi prostori $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{R}_n[x]$, $\mathbb{R}_n[t]$, $\mathbb{C}_n[x]$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{R}^{n\times 1}$, $\mathbb{R}^{1\times n}$, $\mathbb{R}^{n\times n}$ ($n \in \mathbb{N}$) poišči vse izomorfne pare.

112. naloga ◇ Dokaži, da za vsaki preslikavi $\mathcal{A}\colon U \to V$ in $\mathcal{B}\colon V \to W$, kjer so U, V, W končnorazsežni vektorski prostori nad istim poljem, velja

$$\operatorname{rang}(\mathcal{BA}) \le \operatorname{rang}(\mathcal{A}) \tag{12}$$

in

$$\operatorname{rang}(\mathcal{BA}) \le \operatorname{rang}(\mathcal{B}). \tag{13}$$

113. naloga ◇◇ Dokaži, da za linearni preslikavi $\mathcal{A}\colon U \to V$ in $\mathcal{B}\colon U \to V$, kjer sta U in V končnorazsežna vektorska prostora nad istim poljem, velja

$$\operatorname{rang}(\mathcal{A}+\mathcal{B}) \le \operatorname{rang}(\mathcal{A}) + \operatorname{rang}(\mathcal{B}).$$

114. naloga ◇ Naj bosta U in V vektorska prostora nad istim poljem, $U' \le U$ podprostor in $\mathcal{A}\colon U \to V$ linearna preslikava. Kaj je jedro in kaj zaloga vrednosti zožitve $\mathcal{A}|_{U'}$?

115. naloga ◇◇ Naj bo $\mathcal{A}\colon U \to V$ linearna preslikava med končnorazsežnima prostoroma. Poišči takšen podprostor $U' \le U$ največje razsežnosti, da bo zožitev

$$\mathcal{A}|_{U'}\colon U' \to V$$

preslikave $\mathcal{A}$ na podprostor U' injektivna.

116. naloga ◇◇◇ Naj bosta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ endomorfizma končnorazsežnega vektorskega prostora V nad $\mathbb{F}$. Dokaži, da je

$$\dim \operatorname{Im}\mathcal{A} = \dim(\operatorname{Im}\mathcal{A} \cap \operatorname{Ker}\mathcal{B}) + \dim\operatorname{Im}\mathcal{BA} \tag{14}$$

in da velja

$$\dim\operatorname{Ker}(\mathcal{AB}) \le \dim\operatorname{Ker}\mathcal{A} + \dim\operatorname{Ker}\mathcal{B}. \tag{15}$$

117. naloga ◇◇◇ Dokaži, da za endomorfizme $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ in $\mathcal{C}$ končnorazsežnega vektorskega prostora V velja

(a) $\operatorname{rang}(\mathcal{A}) = \operatorname{rang}(\mathcal{BA}) \Rightarrow \operatorname{rang}(\mathcal{AC}) = \operatorname{rang}(\mathcal{BAC})$,

(b) $\operatorname{rang}(\mathcal{A}^n) = \operatorname{rang}(\mathcal{A}^{n+1}) \Rightarrow \operatorname{rang}(\mathcal{A}^{n+1}) = \operatorname{rang}(\mathcal{A}^{n+2})$.

Pri tem je n poljubno naravno število.

118. naloga ◇◇ Naj bosta $\mathcal{A},\mathcal{B}\colon V \to V$ taka endomorfizma končnorazsežnega vektorskega prostora V, da velja

$$V = \operatorname{Im}\mathcal{A} \oplus \operatorname{Ker}\mathcal{B}.$$

Dokaži, da sta zalogi vrednosti preslikav $\mathcal{BA}$ in $\mathcal{B}$ enaki.

119. naloga ◇◇ Bodi $\mathcal{A}$ neobrnljiv neničeln endomorfizem končnorazsežnega vektorskega prostora V. Dokaži, da obstaja tak endomorfizem $\mathcal{B}$ istega prostora, da velja

$$\mathcal{AB} \ne 0 \quad \text{in} \quad \mathcal{BA} = 0.$$

120. naloga ◇◇ Naj bodo $\mathcal{A}\colon W \to Z$, $\mathcal{X}\colon V \to W$, $\mathcal{B}\colon U \to V$ linearne preslikave med končnorazsežnimi vektorskimi prostori nad istim obsegom. Dokaži ekvivalenco

$$\mathcal{AXB} = 0 \iff \operatorname{Im}(\mathcal{X}|_{\operatorname{Im}\mathcal{B}}) \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A}. \tag{16}$$

121. naloga ◇◇◇ Naj bosta $\mathcal{A}\colon U \to V$ in $\mathcal{B}\colon W \to Z$ linearni preslikavi, kjer so U, V, W in Z končnorazsežni vektorski prostori nad istim poljem. Dokaži: če je

$$\operatorname{rang}\mathcal{A} \le \operatorname{rang}\mathcal{B},$$

obstajata taki linearni preslikavi $\mathcal{X}\colon Z \to V$ in $\mathcal{Y}\colon U \to W$, da velja

$$\mathcal{A} = \mathcal{XBY}.$$

Matrike in sistemi linearnih enačb

122. naloga ◇ Dane so realne matrike

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$x := \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C := \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -4 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj AB, Ax, $x^{\mathrm{t}}x$, xx^{t}, $A + C^{\mathrm{t}}$, AB^{t}, $x^{\mathrm{t}}C$, $x^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}Ax$, $x^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}C^{\mathrm{t}}x$, $x + x^{\mathrm{t}}$, $A + B$.

123. naloga ◇ Dani sta realni matriki

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}, \quad Q := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}.$$

Določi $y \in \mathbb{R}$ tako, da bo matrika $D = Q^{\mathrm{t}}AQ$ diagonalna.

124. naloga ◇ Izračunaj A^n za vsak $n \in \mathbb{N}$, če je $\varphi \in \mathbb{R}$ in

$$A := \begin{bmatrix} 0 & \cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & 0 \end{bmatrix}.$$

125. naloga ◇ Izračunaj

$$\begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & b \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix}^n$$

za vsako naravno število n. Rezultat preveri z indukcijo.

126. naloga ◇ Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrika s koeficienti

$$a_{ij} := \frac{1}{n}, \qquad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n.$$

Izračunaj A^k, $k \in \mathbb{N}$.

127. naloga ◇ Naj bo

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj A^n za poljuben $n \in \mathbb{N}$.

128. naloga ◇◇ Naj bo

$$A := \begin{bmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{bmatrix}$$

kvadratna matrika velikosti $m \times m$. Izračunaj A^n za vsak naraven n.

129. naloga ◇ Naj bosta A in B kvadratni matriki velikosti $n \times n$. Dokaži naslednje trditve:

(a) Če imata A in B vsoto koeficientov v vsaki vrstici enako 1, potem ima matrika AB vsoto koeficientov v vsaki vrstici enako 1.

(b) Če imata A in B vsoto koeficientov v vsakem stolpcu enako 1, potem ima matrika AB vsoto koeficientov v vsakem stolpcu enako 1.

(c) Če ima matrika A vsoto koeficientov v vsaki vrstici enako 1 in ima matrika B alternirajočo vsoto koeficientov v vsaki vrstici enako 1, potem ima matrika AB alternirajočo vsoto koeficientov v vsaki vrstici enako 1.

130. naloga ◇ Brez uporabe determinant ali Gaussove eliminacije izračunaj obrat matrike

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

131. naloga ◇ Vrstične matrike $E_i \in \mathbb{R}^{1\times 5}$, $1 \leq i \leq 5$, naj imajo v i-tem stolpcu koeficient 1, v ostalih stolpcih pa koeficient nič. Izračunaj obrat A^{-1} matrike

$$A := I + E_1{}^{\mathrm{t}}E_3 - E_2{}^{\mathrm{t}}E_4 + 2E_3{}^{\mathrm{t}}E_5.$$

132. naloga ◇ Dokaži matrični enakosti

$$(A^{\mathrm{t}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{t}}, \quad (A^{\mathrm{h}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{h}}.$$

133. naloga ◇ Izračunaj minimalni polinom realne matrike

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

134. naloga ⋄ Naj bo $m_A(\lambda) := \lambda^4 - 2\lambda^3 + 5\lambda^2 + 3$ minimalni polinom realne kvadratne matrike A. Izrazi A^{-1} kot polinom matrike A.

135. naloga ⋄⋄ Naj bo $m_A(\lambda) := \lambda^5 - 3\lambda^4 + \lambda^2 + 7\lambda - 2$ minimalni polinom realne kvadratne matrike A. Poišči minimalni polinom matrike A^{-1}.

136. naloga ⋄⋄ Naj bo $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ in

$$V := \{X \in \mathbb{F}^{n\times n} | AX = XA\}$$

vektorski podprostor matrik, ki komutirajo z A. Dokaži, da razsežnost prostora V ni manjša od stopnje minimalnega polinoma m_A.

137. naloga ⋄ Naj bodo $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{F}^{m\times 1}$ in $x_0 \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ taki, da velja $Ax_0 = b$. Dokaži: $x \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ reši enačbo $Ax = b$ natanko tedaj, ko je $x \in x_0 + \operatorname{Ker} A (= \{x_0 + y | \; y \in \operatorname{Ker} A\})$.

138. naloga ⋄ Naj bo $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ taka matrika, da ima enačba

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{17}$$

množico rešitev

$$M := \{[x, y, z]^t \in \mathbb{R}^{3\times 1} | \; 3x - y + z = 1\}.$$

Določi $\operatorname{Ker} A$ in $\operatorname{Im} A$.

139. naloga ⋄ Poišči vse rešitve linearnega sistema enačb

$$\begin{aligned} 3x - y + z - w &= 4, \\ x + 2y - z - w &= -1, \\ 4x + 2z &= 4, \\ 2x - 3y + 2z &= 5. \end{aligned}$$

140. naloga ⋄ Reši naslednji linearni sistem enačb:

$$\begin{aligned} 2x + y + z + 3u &= 7, \\ x + 2z + u + 2v &= 8, \\ x + 3y + 4u - 3v &= 2, \\ 2y - z + 2u - 3v &= -3. \end{aligned}$$

141. naloga ⋄ Določi realno število a tako, da bo sistem enačb

$$\begin{aligned} x - y - z &= 0, \\ 2x - 3y + az &= 0, \\ (a-2)x + y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

imel netrivialne rešitve. Katere so te rešitve?

142. naloga ⋄ Poišči vse rešitve $(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4$ sistema linearnih enačb

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2, \\ x + z + au &= 2, \\ x + y + (1-a)z - u &= 1 - a, \\ (1+a)u - y &= 1, \end{aligned}$$

kjer je $a \in \mathbb{R}$ realno število. Torej, za vsak $a \in \mathbb{R}$ ugotovi, ali je sistem rešljiv. Če je rešljiv, določi razsežnost prostora rešitev prirejenega homogenega sistema in v primerih, ko je neničelna, poišči poljubno bazo tega prostora. Nato poišči kako partikularno rešitev sistema in končno zapiši splošno rešitev sistema.

143. naloga ⋄ Poišči vse rešitve $(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4$ sistema linearnih enačb

$$\begin{aligned} x + z + u &= 2, \\ x + ay + z + 2u &= 3 - a, \\ -2x - (1+a)z - u &= -4 + a, \\ ay + 2u &= 2 - a, \end{aligned}$$

kjer je $a \in \mathbb{R}$ realno število. Glej nalogo 142.

144. naloga ⋄ Za katere $a \in \mathbb{R}$ je linearni sistem enačb

$$\begin{aligned} ax - a^2y + z + au &= 0, \\ x + ay + 2z + 4au &= 4, \\ ay + z + 2au &= 2 \end{aligned}$$

rešljiv? Za taka realna števila a napiši splošno rešitev tega sistema.

145. naloga ⋄ Ugotovi, za katere $\lambda \in \mathbb{R}$ je naslednji linearni sistem enačb rešljiv, ter napiši pripadajočo (splošno) rešitev:

$$\begin{aligned} x - \lambda y &= 0, \\ x - z - u &= 0, \\ \lambda(\lambda-1)z + (1-\lambda)u &= (\lambda - 1), \\ -x + \lambda y + \lambda u &= \lambda^2 - \lambda. \end{aligned}$$

146. naloga ⋄ Določi $\lambda \in \mathbb{R}$ tako, da bo linearni sistem

$$\begin{aligned} 3x + y + 2z &= 1, \\ 2x + y + z &= 0, \\ x - 2y - \lambda z &= 2 - \lambda \end{aligned}$$

imel več različnih rešitev, ter zapiši vse rešitve tako dobljenega sistema.

147. naloga ⋄ Kako je število parametrov v rešitvi linearnega sistema enačb

$$\begin{array}{rrrrrcl} 2x & +y & +z & +w & +5t & = & 6, \\ x & +2y & -4z & -w & +4t & = & 2, \\ 3x & +y & +az & +2w & +7t & = & 1, \\ -x & +2y & -5z & -3w & & = & 0 \end{array}$$

odvisno od izbire realnega števila $a \in \mathbb{R}$?

148. naloga ◇ Reši sistem n enačb

$$\begin{aligned} x_1 + nx_2 &= n+1, \\ kx_{k-1} + (kn+1)x_k + nx_{k+1} &= (k+1)(n+1) \quad \text{za } k = 2,\dots,n-1, \\ nx_{n-1} + (n^2+1)x_n &= n^2+n+1 \end{aligned}$$

za $n \in \mathbb{N} \setminus \{1,2\}$.

149. naloga ◇ Določi tista realna števila a, za katera imata matriki A in B različen rang, nato pa za take $a \in \mathbb{R}$ reši prirejeni linearni homogeni sistem $Ax = 0$.

$$A := \begin{bmatrix} a & 0 & 1 & 0 \\ a & a & 1 & 1 \\ a^2 & 0 & 1 & 1 \\ -2a & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -a \\ 1 & a & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & 1 & -a-2 \\ 4 & 0 & 2 & a^2 \end{bmatrix}.$$

150. naloga ◇ Za vsak $a \in \mathbb{R}$ določi jedro in rang matrike

$$A := \begin{bmatrix} 1 & a+1 & -1 \\ 2 & a+3 & a^2-3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

151. naloga ◇◇ Napiši tak linearen sistem treh enačb s štirimi neznankami x, y, z in $u \in \mathbb{R}$, ki ima splošno rešitev oblike

$$(x,y,z,u) = (1,-2,1,3) + t(-1,0,3,0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Svojo rešitev podrobno utemelji ter opravi preizkus tako, da sistem rešiš.

152. naloga ◇◇ Poišči vse realne matrike X, ki rešijo enačbo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & 0 & 7 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 16 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

153. naloga ◇◇ Poišči vse rešitve matrične enačbe

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & -6 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \\ -5 & 3 & 8 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

154. naloga ◇ Poišči vse rešitve matrične enačbe

$$X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \\ -5 & 3 & 8 \end{bmatrix}.$$

155. naloga ◇ Poišči vse rešitve vsake od naslednjih matričnih enačb

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$,

(b) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$.

156. naloga ◇◇ Opiši reševanje sistema matričnih enačb

$$AX + BY = C,$$

$$DX + EY = F,$$

ki vprašuje po neznanih kvadratnih matrikah X in Y. Pri tem so A, B, D in E obrnljive kvadratne matrike, C in F pa znani (ne nujno obrnljivi) kvadratni matriki.

157. naloga ◇ Naj bo $a \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $a \neq 0$, fiksen stolpec in $\mathcal{A}$ preslikava

$$\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R}^{n\times n},$$

$$\mathcal{A}\colon v \mapsto a \cdot v^t.$$

Pokaži, da je $\mathcal{A}$ linearna preslikava, poišči $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ in $\operatorname{rang}\mathcal{A}$! Ali je $\mathcal{A}$ obrnljiva?

158. naloga ◇◇ Naj bo $\mathbb{F}$ polje. Preslikava $\mathrm{sled}\colon \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}$ je definirana s predpisom

$$\mathrm{sled}\colon A \to \sum_{k=1}^{n} a_{kk}, \qquad \forall A = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{n\times n}.$$

Dokaži, da je sled linearna preslikava. Ali je surjektivna? Ali je injektivna? Izračunaj razsežnost jedra te preslikave.

159. naloga ◇ Janko in Metka, študenta 1. letnika matematike, si med predavanji iz algebre dopisujeta v šifrah. Šifrirata takole: vsaki črki priredita številsko vrednost, ki je enaka mestu te črke v slovenski abecedi, pri čemer dobi presledek vrednost 0. Dobljene številke razporedita v trivrstične stolpce (manjkajoča mesta dopolnita z ničlami), nakar vsak stolpec z leve pomnožita z matriko

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dobljene številke iz stolpcev prepišeta v eno vrstico in odpošljeta šifrirano besedilo.
Tistega dne je zaljubljeni Janko želel Metki sporočiti 'kul bejba si'. Torej je ravnal takole:

$$\text{kul bejba si} \longrightarrow 12\ 22\ 13\ 0\ 2\ 6\ 11\ 2\ 1\ 0\ 19\ 10 \longrightarrow \begin{bmatrix} 12 \\ 22 \\ 13 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 11 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 19 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix}25\\47\\34\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}6\\8\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}12\\14\\13\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}10\\29\\19\end{bmatrix} \longrightarrow 25\ 47\ 34\ 6\ 8\ 2\ 12\ 14\ 13\ 10\ 29\ 19.$$

Metki je poslal listek z napisom 25 47 34 6 8 2 12 14 13 10 29 19, ona pa mu je, nagajivka, odgovorila

$$34\ 44\ 25\ 24\ 24\ 10\ 16\ 27\ 27\ 38\ 48\ 31.$$

Kaj mu je sporočila?

160. naloga ◇ Podprostor $V \leq \mathbb{R}^{2\times 2}$ naj sestavljajo vse matrike, ki komutirajo z matriko $A := \begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}$. Poišči kakšno bazo podprostora V.

161. naloga ◇ Naj bosta $A := \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$ in $B := \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}$ matriki iz $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Dana sta podprostora

$$U := \{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid AX = XA\} \leq \mathbb{R}^{2\times 2},$$

$$V := \{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid BX = XB\} \leq \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Poišči baze podprostorov U, V, $U+V$ in $U \cap V$.

162. naloga ◇◇ V vektorskem prostoru $\mathbb{R}^{n\times n}$ realnih matrik velikosti $n\times n$ je dana podmnožica

$$V := \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid AX - XA^t = 0\},$$

kjer je A fiksna matrika iz $\mathbb{R}^{n\times n}$.

(a) Pokaži, da je V vektorski podprostor prostora $\mathbb{R}^{n\times n}$.

(b) Naj bo $n = 3$ in

$$A := \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Določi razsežnost prostora V za takšna n in A.

163. naloga ◇ Naj bosta $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ matriki velikosti $n \times n$ nad poljem $\mathbb{F}$. Določi matriko $C \in \mathbb{F}^{n\times n}$ tako, da bo množica

$$U := \{X \in \mathbb{F}^{n\times n} \mid AXB^t = C\}$$

vektorski podprostor prostora $\mathbb{F}^{n\times n}$. Izračunaj razsežnost in poišči kako bazo prostora U v primeru, ko je $\mathbb{F} := \mathbb{R}$ in

$$A = B := \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

164. naloga ◇◇◇ Pribijmo matriki $A \in \mathbb{F}^{l\times m}$ in $B \in \mathbb{F}^{n\times p}$, $l,m,n,p \in \mathbb{N}$, in definirajmo podprostor

$$U := \{X \in \mathbb{F}^{m\times n} \mid AXB = 0\}.$$

Določi razsežnost prostora U.

165. naloga ◇◇ V vektorskem prostoru $\mathbb{R}^{2\times 2}$ realnih 2×2 matrik so dane matrika $A := \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ ter podmnožici

$$V := \{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} | AX = 0\},$$

$$W := \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\right\}.$$

Prepričaj se, da je V podprostor v $\mathbb{R}^{2\times 2}$, ter poišči baze podprostorov V, W, $V+W$ in $V\cap W$.

166. naloga ◇◇ Naj bo $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ matrika, ki zadošča $M^2 \neq 0$. Dokaži, da $M^3 \neq 0$.

167. naloga ◇◇ Bodi $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Preslikava $\mathcal{L}_A\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ je podana s predpisom $\mathcal{L}_A\colon X \mapsto AXA^t$ za vsak $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(a) Dokaži, da je $\mathcal{L}_A$ linearna preslikava.

(b) Za $n = 3$ in

$$A := \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

poišči kakšen dopolnilni podprostor jedra preslikave $\mathcal{L}_A$.

168. naloga ◇◇ Naj bo $\mathbb{F}$ polje. Dokaži, da za matriko $A \in \mathbb{F}^{2\times 2}$ velja

$$\operatorname{sled} A^2 = (\operatorname{sled} A)^2 \qquad (20)$$

natanko tedaj, ko sta stolpca (vrstici) matrike A linearno odvisna. Ali trditev drži, če je $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $n > 2$?

169. naloga ◇◇ Pokaži, da je množica

$$U := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A + A^t \text{ je diagonalna}\}$$

vektorski podprostor prostora $\mathbb{R}^{n\times n}$. Poišči kako bazo ter razsežnost podprostora U.

170. naloga ◇◇ Dokaži, da je množica

$$W := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A = -A^t\}$$

vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{n\times n}$. Kolikšna je razsežnost prostora W? Poišči kako bazo podprostora W.

171. naloga ◇◇◇ Naj bo $\mathcal{S}\colon \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}$ linearna preslikava, za katero velja $\mathcal{S}(AB) = \mathcal{S}(BA)$ za vsaki matriki A, B iz $\mathbb{F}^{n\times n}$. Dokaži, da obstaja tak $\lambda \in \mathbb{F}$, da je

$$\mathcal{S}(A) = \lambda \cdot \operatorname{sled} A$$

za vsak $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

172. naloga ◇◇ Naj bo A matrika z realnimi koeficienti in naj $\operatorname{rang}_{\mathbb{R}}(A)$ označuje rang matrike A nad poljem $\mathbb{R}$ ter $\operatorname{rang}_{\mathbb{C}}(A)$ rang matrike A nad poljem $\mathbb{C}$. Dokaži, da je

$$\operatorname{rang}_{\mathbb{R}}(A) = \operatorname{rang}_{\mathbb{C}}(A).$$

173. naloga ◇ Poišči taki kvadratni matriki A in B, da bo veljalo

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(B),$$

toda

$$\operatorname{rang}(A^2) \neq \operatorname{rang}(B^2).$$

174. naloga ◇◇ Kdaj sta si kompleksni matriki

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

podobni?

Vektorji in stolpci ter linearne preslikave in matrike

175. naloga ◇ V $\mathbb{R}^3$ definirajmo urejeni bazi $\Sigma := \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ in $\Omega := \{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\}$.

(a) Določi stolpec, ki pripada vektorju $(1,2,3)$ v bazi Σ, torej $X_\Sigma(1,2,3)$.
(b) Določi stolpec, ki pripada vektorju $(1,2,3)$ v bazi Ω, torej $X_\Omega(1,2,3)$.
(c) Če je stolpec vektorja v v bazi Ω enak $[1,2,3]^t$, torej $X_\Omega(v) = [1,2,3]^t$, določi vektor v.
(d) Poišči manjkajoča števila v zapisu $X_\Sigma(1,*,1) = [*,2,*]^t$.
(e) Poišči manjkajoča števila v zapisu $X_\Omega(1,*,*) = [*,-1,0]^t$.

176. naloga ◇ Poišči stolpce vektorja $v := (2,1,-3,0) \in \mathbb{R}^4$ glede na

(a) običajno urejeno bazo $\Sigma := \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ prostora $\mathbb{R}^4$;
(b) urejeno bazo $\Omega := \{(1,1,1,1),(0,1,1,1),(0,0,1,1),(0,0,0,1)\}$ prostora $\mathbb{R}^4$;
(c) urejeno bazo $\Pi := \{(2,1,-3,0),(1,1,1,1),(1,1,0,0),(1,0,0,0)\}$ prostora $\mathbb{R}^4$;
(d) urejeno bazo $\Delta := \{(0,1,0,0),(0,0,0,1),(1,0,0,0),(0,0,1,0)\}$ prostora $\mathbb{R}^4$.

177. naloga ◇ Poišči stolpce polinoma $2 - 3x + x^3 - x^4 \in \mathbb{R}_4[x]$ glede na

(a) običajno urejeno bazo $\Sigma := \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ prostora $\mathbb{R}_4[x]$;
(b) urejeno bazo $\Omega := \{1, 1-x, 1-x^2, 1-x^3, 1-x^4\}$ prostora $\mathbb{R}_4[x]$;
(c) urejeno bazo $\Pi := \{2-3x, 1-4x-x^4, 1+x+x^3, 7x^2, 3\}$ prostora $\mathbb{R}_4[x]$;
(d) urejeno bazo $\Delta := \{x^2, x^4, 1, x^3, x\}$ prostora $\mathbb{R}_4[x]$.

178. naloga ◇ Endomorfizem $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ prostora realnih polinomov stopnje manjše ali enake 2 je definiran s predpisom

$$(\mathcal{A}p)(x) := \int_0^1 p(t)dt + \left(\int_0^1 tp(t)dt\right)x + \left(\int_0^1 t^2p(t)dt\right)x^2$$

za vsak $p \in \mathbb{R}_2[x]$. Polinomu $q \in \mathbb{R}_2[x]$ pripada v urejeni bazi $\{3-3x, 3x+5x^2, 3x^2\}$ stolpec $[2,6,10]^t$. Poišči polinom $\mathcal{A}q$.

179. naloga ◇ Naj bo preslikava

$$\mathcal{A}\colon \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^3$$

definirana s predpisom

$$\mathcal{A}\colon p \mapsto \left(p'(0) + a, p(1) + p(0), 12\int_0^1 p(t)dt\right).$$

(a) Poišči tak $a \in \mathbb{R}$, da bo preslikava $\mathcal{A}$ linearna.

(b) Pri takem a zapiši matriko $\mathrm{M}_\Sigma^\Omega(\mathcal{A})$, kjer je Ω običajna urejena baza prostora $\mathbb{R}_3[x]$ in Σ običajna urejena baza prostora $\mathbb{R}^3$.

(c) Pri taistem a določi $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$.

180. naloga ◇ Dana je linearna preslikava $\mathcal{A}\colon V \to V$ štirirazsežnega vektorskega prostora V vase. Urejena baza $\Pi = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ prostora V je taka, da vektorja e_1, e_2 pripadata jedru $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ in da velja $\mathcal{A}e_3 = e_4$ in $\mathcal{A}e_4 = -e_3$. Napiši matriko A, ki je v urejeni bazi Π prirejena preslikavi $\mathcal{A}$.

181. naloga ◇ Nadomesti zvezdice s takšnimi znaki, da bodo veljale enakosti:

(a) $\mathrm{X}_\Pi(\mathcal{A}u) = \mathrm{M}_*^\Omega(\mathcal{A})\mathrm{X}_\Omega(u)$;

(b) $\mathrm{X}_\Sigma(u) = \mathrm{M}_\Sigma^\Pi(*)\mathrm{X}_\Pi(u)$;

(c) $\mathrm{M}_\Delta^\Gamma(\mathcal{AB}) = \mathrm{M}_\Delta^\Psi(\mathcal{A})\mathrm{M}_\Psi^\Gamma(*)$;

(d) $\mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{A}) = \mathrm{M}_\Omega^\Pi(*)\mathrm{M}_\Pi^\Pi(\mathcal{A})\mathrm{M}_\Pi^\Omega(*)$;

(e) $\mathrm{M}_\Phi^\Psi(\mathcal{A})\mathrm{M}_*^\Pi(\mathcal{I}) = \mathrm{M}_\Phi^\Pi(\mathcal{A})$.

182. naloga ◇ Oglej si urejene baze iz naloge 176. Napiši prehodne matrike iz urejenih baz Ω, Π, Δ v običajno urejeno bazo Σ prostora $\mathbb{R}^4$. Kateri matriki je enaka prehodna matrika $\mathrm{M}_\Sigma^\Sigma(\mathcal{I})$?

183. naloga ◇ Oglej si urejene baze iz naloge 176. Napiši prehodne matrike iz običajne urejene baze Σ v urejene baze Ω, Π, Δ prostora $\mathbb{R}^4$. Nato z njimi izračunaj stolpce, ki jih zahteva naloga 176.

184. naloga ◇ Naj bosta $\Omega := \{u_1, \ldots, u_n\}$ in $\Pi := \{v_1, \ldots, v_n\}$ urejeni bazi vektorskega prostora V in $\mathcal{A}\colon V \to V$ tak endomorfizem, da velja

$$\mathcal{A}u_i = v_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Določi matriko $\mathrm{M}_\Pi^\Omega(\mathcal{A})$ in dokaži enakost

$$\mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{A}) = \mathrm{M}_\Omega^\Pi(\mathcal{I}).$$

185. naloga ◇ Naj bosta $\Psi := \{v_1, \ldots, v_n\}$ in $\Psi' := \{\lambda v_1, \ldots, \lambda v_n\}$, kjer je $\lambda \in \mathbb{F}$ neničelni skalar, urejeni bazi prostora V in $\mathcal{A}$ neki njegov endomorfizem. Dokaži, da velja

$$\mathrm{M}_\Psi^\Psi(\mathcal{A}) = \mathrm{M}_{\Psi'}^{\Psi'}(\mathcal{A}). \qquad (21)$$

186. naloga ◇ Endomorfizem $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ je definiran takole:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3) \;:=\; & (\alpha_0 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) + \\ & + \alpha_0 x + \\ & + (2\alpha_0 + b\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3)x^2 + \\ & + (4\alpha_0 - 3\alpha_1 + a\alpha_2 + 2\alpha_3)x^3,\end{aligned}$$

kjer sta $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Določi a in b tako, da bo $\mathcal{A}(x - 2x^2 + 2x^3) = -1 - 3x^2 - x^3$.

(b) Za taka a in b poišči vsaj eno bazo podprostora $U := \{p \in \mathbb{R}_3[x] \mid \mathcal{A}p = p\} \le \mathbb{R}_3[x]$ vseh vektorjev, ki jih operator $\mathcal{A}$ ohranja.

187. naloga ◇◇ Preslikava $\mathcal{T}\colon \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ je podana s predpisom

$$\mathcal{T}\colon p(x) \mapsto (1 - x)p(x) + p'(x) + 4\int_0^x p(t)\,dt.$$

(a) Prepričaj se, da je $\mathcal{T}$ endomorfizem prostora $\mathbb{R}_3[x]$.

(b) Ali je $\mathcal{T}$ obrnljiv?

(c) Poišči vse polinome iz $\mathbb{R}_3[x]$, ki jih $\mathcal{T}$ preslika v polinom $q(x) := 2 + 4x + 4x^2 + x^3 \in \mathbb{R}_3[x]$.

188. naloga ◇ Poišči poljubno bazo podprostora

$$V := \{p \in \mathbb{R}_2[x] \mid p(0) = 0,\ p'(-\tfrac{1}{2}) = 0\} \le \mathbb{R}_2[x],$$

dopolni jo do kakšne urejene baze Ω prostora $\mathbb{R}_2[x]$ in napiši matriko, ki pripada identični preslikavi $\mathcal{I}\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ glede na bazo Ω in običajno urejeno bazo $\Sigma := \{1, x, x^2\}$ prostora $\mathbb{R}_2[x]$.

189. naloga ◇ Bodi $\mathcal{A}$ linearna transformacija prostora $\mathbb{R}^3$, ki preslika vektorje e_1, e_2, e_3 urejene baze Σ v vektorje e_2, e_3, e_1 v tem vrstnem redu. V $\mathbb{R}^3$ imamo tudi urejeno bazo $\Pi := \{e_1, e_1 + e_2, e_2 + e_3\}$. Zapiši matriko, ki je prirejena transformaciji $\mathcal{A}^{1996}$ v urejeni bazi Π.

190. naloga ◇ Vektorju $x \in \mathbb{R}^4$ pripada v urejeni bazi $\{(-1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, -1, 0, 1), (0, 0, 0, 1)\}$ stolpec $[1, -1, 2, 0]^t$. Linearna preslikava $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ima v običajni urejeni bazi običajni urejeni bazi Σ prostora $\mathbb{R}^4$ matriko

$$\mathrm{M}_\Sigma^\Sigma(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Poišči stolpec, ki je v bazi Σ prirejen vektorju $\mathcal{A}x$.

191. naloga ◇ Linearni preslikavi $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ pripada glede na urejeno bazo $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 0, 0)$, $(1, 0, 0, 0)$ prostora $\mathbb{R}^4$ in urejeno bazo $(1, 2)$, $(1, 0)$ prostora $\mathbb{R}^2$ matrika

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kakšna matrika pripada preslikavi $\mathcal{A}$ glede na običajno urejeno bazo prostora $\mathbb{R}^4$ in urejeno bazo $(2,-1)$, $(1,-1)$ prostora $\mathbb{R}^2$?

192. naloga ◇◇ Linearni preslikavi $\mathcal{A}$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ pripada glede na urejeni bazi

$$\Omega := \{(4,11,0),(1,3,0),(1,1,1)\}$$

in

$$\Pi := \{(1,0,0,0),(-1,1,0,0),(1,0,-1,0),(0,1,1,1)\}$$

matrika

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Poišči jedro in zalogo vrednosti preslikave $\mathcal{A}$.

193. naloga ◇ Poišči matriko, ki pripada operatorju $\mathcal{A}$ iz naloge 178 v urejeni bazi

$$\{x+x^2, -1+x, 2x+x^2\}$$

prostora $\mathbb{R}_2[x]$.

194. naloga ◇◇ Dani sta urejeni bazi $\Omega := \{u_1,u_2,u_3\}$ in $\Pi := \{v_1,v_2,v_3\}$ realnega vektorskega prostora V. Pri tem je $v_1 = u_3$, $v_2 = u_2 - u_3$, $v_3 = u_1 + u_2 - u_3$. Endomorfizem $\mathcal{A}$: $V \to V$ deluje na vektorjih baze Π takole: $\mathcal{A}v_1 = 2v_2 + v_3$, $\mathcal{A}v_2 = v_1 - v_3$, $\mathcal{A}v_3 = 2v_3 - v_2 + v_1$. Določi matriko, ki pripada operatorju $\mathcal{A}$ v urejeni bazi $\Lambda := \{w_1,w_2,w_3\}$, če je $w_1 = u_1$, $w_2 = u_1 + u_2$ in $w_3 = u_1 + u_2 + u_3$.

195. naloga ◇ Endomorfizmoma $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ prostora $\mathbb{R}^4$ pripadata v običajni urejeni bazi Σ prostora $\mathbb{R}^4$ matriki

$$M_\Sigma^\Sigma(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad M_\Sigma^\Sigma(\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Poišči kakšno bazo podprostora $U := (\operatorname{Ker}\mathcal{A}) + (\operatorname{Ker}\mathcal{B})$.

196. naloga ◇◇ V prostoru $\mathbb{R}^3$ so dane urejene baze

$$\begin{aligned} \Lambda &:= \{(0,0,-1),(2,1,1),(1,1,0)\}, \\ \Omega &:= \{(1,2,-1),(0,1,3),(1,2,0)\}, \\ \Pi &:= \{(1,1,2),(2,3,2),(0,0,1)\}. \end{aligned}$$

Endomorfizem $\mathcal{A}$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ima v bazi Λ matriko

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

vektorju $x \in \mathbb{R}^3$ pa v bazi Π pripada stolpec $[1,1,1]^t$. Kako se izraža vektor $\mathcal{A}x$ v bazi Ω?

197. naloga ◇◇ Linearna preslikava $\mathcal{A}$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ ima glede na urejeno bazo

$$\{(1,0,0),(-1,1,0),(0,0,1)\}$$

prostora $\mathbb{R}^3$ in običajno urejeno bazo prostora $\mathbb{R}^4$ matriko

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

linearna preslikava $\mathcal{B}$: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ pa glede na urejeni bazi

$$\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,-1,1,0),(1,0,0,1)\}$$

prostora $\mathbb{R}^4$ in

$$\{(2,5),(1,3)\}$$

prostora $\mathbb{R}^2$ matriko

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj matriko, ki pripada preslikavi $\mathcal{BA}$ v običajnih urejenih bazah ustreznih prostorov.

198. naloga ◇ Linearna preslikava $\mathcal{A}$: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ima glede na običajno urejeno bazo Σ prostora $\mathbb{R}^4$ matriko

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poišči poljubno bazo Ω jedra preslikave $\mathcal{A}$. Pri tem zapiši stolpce, ki pripadajo vektorjem iz baze Ω

(a) glede na urejeno bazo Σ prostora $\mathbb{R}^4$;

(b) glede na urejeno bazo Π prostora $\mathbb{R}^4$, sestavljeno iz vektorjev $(1,0,0,0)$, $(1,1,0,0)$, $(1,1,1,0)$ in $(1,1,1,1)$.

199. naloga ◇◇ Linearni preslikavi $\mathcal{A}$: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ je glede na običajni urejeni bazi v $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}^3$ prirejena matrika

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Poišči poljubno bazo Ω jedra preslikave $\mathcal{A}$ ter poljubno bazo Π zaloge vrednosti preslikave $\mathcal{A}$. Dopolni Ω do urejene baze Ω' prostora $\mathbb{R}^4$ in Π do urejene baze Π' prostora $\mathbb{R}^3$. Kakšna matrika pripada preslikavi $\mathcal{A}$ glede na urejeni bazi Ω' in Π'?

200. naloga ◇◇ Linearni preslikavi $\mathcal{A}$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ pripada glede na običajni urejeni bazi v $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^4$ matrika

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Poišči kakšni bazi jedra ter zaloge vrednosti preslikave $\mathcal{A}$. Razvij njune elemente po urejenih bazah

$$\Omega := \{(0,1,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$$

oziroma

$$\Pi := \{(1,0,0,0),(0,0,1,1),(0,1,0,0),(0,1,1,0)\}.$$

Katera matrika pripada preslikavi $\mathcal{A}$ glede na bazi Ω in Π?

201. naloga ◇◇ Endomorfizmu $\mathcal{A}$: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ pripada v običajni urejeni bazi prostora $\mathbb{R}^4$ matrika

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

endomorfizmu $\mathcal{B}$: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ pa v urejeni bazi $(1,0,1,0)$, $(0,1,0,-1)$, $(1,1,0,0)$, $(0,0,1,1)$ pripada matrika

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Poišči vsoto in presek prostorov $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ in $\operatorname{Ker}\mathcal{B}$.

202. naloga ◇◇ Endomorfizmu $\mathcal{A}$ prostora $\mathbb{R}^4$ pripada v običajni bazi tega prostora matrika

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

linearni preslikavi $\mathcal{B}$: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ pa pripada glede na urejeno bazo $(1,0,1,0)$, $(0,-1,0,1)$, $(1,1,0,0)$, $(1,0,1,1)$ prostora $\mathbb{R}^4$ in običajno urejeno bazo prostora $\mathbb{R}^3$ matrika

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poišči kakšen neničeln vektor x iz jedra preslikave $\mathcal{B}$ in izračunaj $\mathcal{BA}x$.

203. naloga ◇◇ Endomorfizem $\mathcal{A}$ prostora $\mathbb{R}_4[x]$ vseh realnih polinomov stopnje manjše ali enake štiri je dan s predpisom $\mathcal{A}(1) = 1$, $\mathcal{A}(1+x) = 1 - x + x^2$, $\mathcal{A}(x+x^2) = -2x + 2x^2$, $\mathcal{A}(x^2+x^3) = -x + x^2 - x^3 + x^4$, $\mathcal{A}(x^3+x^4) = -2x^3 + 2x^4$.

(a) Poišči matriko $\mathrm{M}_\Sigma^\Sigma(\mathcal{A})$, ki pripada linearni preslikavi $\mathcal{A}$ glede na običajno urejeno bazo Σ prostora $\mathbb{R}_4[x]$.

(b) Poišči razsežnost podprostora $\operatorname{Ker}\mathcal{A} \cap \operatorname{Im}\mathcal{A}$.

204. naloga ◇ Naj bodo

$$\begin{aligned} \Sigma &:= \{e_1,\dots,e_n\}, \\ \Omega &:= \{f_1,\dots,f_n\}, \\ \Psi &:= \{g_1,\dots,g_n\} \end{aligned}$$

take urejene baze prostora $\mathbb{F}^n$, da velja: Σ je običajna urejena baza,

$$X_\Omega(e_i) = [1,0,\dots,0,1,0,\dots,0]^t$$

(to je stolpec višine n, ki ima na prvem in i-tem mestu enico, drugod pa ničle) in

$$X_\Psi(f_i) = [1,\dots,1,0,\dots,0]^t$$

(to je stolpec, ki ima na prvih i mestih enice, drugod pa ničle) za $i = 1,\dots,n$. Izpiši bazo Ψ v običajni urejeni bazi Σ.

205. naloga ◇◇ Označimo z A matriko, ki pripada operatorju odvajanja na $\mathbb{R}_n[x]$ glede na običajno urejeno bazo $\Sigma := \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ tega prostora. Dokaži, da matrika A komutira z matriko prehoda iz baze $\Omega := \{1, 1+x, (1+x)^2, \dots, (1+x)^n\}$ v urejeno bazo Σ prostora $\mathbb{R}_n[x]$.

206. naloga ◇◇ Trirazsežni vektorski prostor U nad poljem $\mathbb{F}$ je prema vsota dvorazsežnega podprostora V in enorazsežnega podprostora W. Označimo z X množico vseh endomorfizmov $\mathcal{A}$ prostora U, ki zadoščajo $\mathcal{A}(V) \le W$ in $\mathcal{A}(W) \le V$.

(a) Dokaži, da je X podprostor vektorskega prostora $\operatorname{End}(U)$ vseh endomorfizmov prostora U.

(b) Poišči razsežnost prostora X.

(c) Prepričaj se, da nobena preslikava $\mathcal{A} \in X$ ni obrnljiva.

207. naloga ◇◇ Poišči tako bazo Ω v $\mathbb{R}^3$, da bo veljalo

$$X_\Omega(1,2,-1) = [0,2,1]^t, \quad X_\Omega(6,1,2) = [1,1,-1]^t, \quad X_\Omega(-2,0,0) = [1,0,1]^t.$$

208. naloga ◇◇ Dokaži, da je vsaka realna 3×3 matrika A, za katero velja $A^2 \neq 0$ in $A^3 = 0$, podobna matriki

$$B := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

209. naloga ◇◇◇ Napiši kakšno realno matriko M velikosti 4×4, ki zadošča pogojema:

(a) $\operatorname{Ker} M = \mathcal{L}\{[1,-1,0,1]^t, [0,1,2,0]^t\}$ in

(b) $\operatorname{Im} M = \mathcal{L}\{[1,1,1,1]^t, [0,2,1,0]^t\}$.

Ali je rešitev ena sama?

210. naloga ◇◇ Dokaži, da je vsaka kvadratna matrika ranga ena podobna matriki iste velikosti, ki ima povsod, razen morda v prvi vrstici, koeficiente 0.

211. naloga ◇◇◇ Naj bo $\mathcal{A}$ endomorfizem končnorazsežnega vektorskega prostora $V \neq 0$ nad poljem $\mathbb{F}$. Poišči tako urejeno bazo prostora V, da bo preslikavi $\mathcal{A}$ v tej bazi pripadala matrika, ki ima na spodnji sodiagonali enice ali ničle, pod njo pa same ničle.

212. naloga ◇◇ Naj bo

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}.$$

Poišči taki realni obrnljivi matriki P in Q, da bo imela matrika PAQ povsod ničle razen morda nekaj enic na diagonali.

213. naloga ◇◇ Poišči taki matriki P in Q, da bo veljalo

$$P \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot Q = \begin{bmatrix} -4 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

214. naloga ◇◇◇ Definirajmo matriki

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Poišči taki matriki X in Y, da bo veljalo

$$A = XBY.$$

Determinante

215. naloga ◇ Izračunaj determinanto

$$D := \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \\ -2 & -5 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

216. naloga ◇ Izračunaj

$$\begin{vmatrix} \cos\phi & -\cos\theta \\ \sin\phi & \sin\theta \end{vmatrix},$$

če sta kota ϕ in θ suplementarna.

217. naloga ◇ Izračunaj determinanto kompleksne matrike

$$\begin{bmatrix} 1+i & 1-2i & 2-i \\ 2+2i & 3-i & i+2 \\ -1+3i & -i & 1 \end{bmatrix}.$$

218. naloga ◇ Dokaži, da je determinanta

$$D := \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & c & 5 & 3 \\ d & e & f & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

neodvisna od $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{F}$.

219. naloga ◇ Izračunaj determinanto

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 0 & 3 & 1 & 7 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 & 8 & 2 & 0 & -5 & -4 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

220. naloga ◇ Izračunaj determinanto

$$\det\left(19^3\begin{bmatrix} 7 & -11 & 23 & 2 & 10 \\ 21 & 0 & 0 & 8 & 20 \\ -7 & 22 & 0 & 6 & 0 \\ 14 & 11 & 23 & 6 & 5 \\ -7 & 0 & 46 & 4 & 10 \end{bmatrix}\right)$$

in razstavi rezultat na prafaktorje.

221. naloga ◇ Izračunaj determinanto

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & 9 & 6 & 1996 \\ 1 & 9 & 9 & 1 & 1991 \\ 1 & 9 & 4 & 5 & 1945 \\ 1 & 8 & 4 & 9 & 1849 \\ 1 & 5 & 5 & 0 & 1550 \end{vmatrix}.$$

222. naloga ◇ Za poljuben $n \in \mathbb{N}$ izračunaj determinanto

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} n & n-1 \\ n+1 & n \end{bmatrix}\right).$$

223. naloga ◇ Izračunaj

$$2222222219 \cdot 3333333335 - 6666666667 \cdot 1111111110$$

brez pomoči kalkulatorja ali računalnika.

224. naloga ◇ Naj bo $E := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Dokaži, da za matriko $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ velja ekvivalenca

$$\det A = 1 \iff A^t E A = E.$$

225. naloga ◇ Dokaži: če je v kvadratni matriki A velikosti $n \times n$ več kot $n^2 - n$ koeficientov enakih 0, je $\det A = 0$.

226. naloga ◇ Koliko je determinanta matrike

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

torej determinanta $n \times n$ matrike, ki ima na stranski diagonali enice, drugod pa ničle?

227. naloga ◇ Naj bodo A, B, X realne matrike velikosti $n \times n$, kjer velja $\det B = \det A - 1$. Poišči determinanto matrike X, če med matrikami velja zveza $3A^2X = XB$.

228. naloga ◇◇ Izračunaj determinanto D_n matrike A_n velikosti $n \times n$, $(n > 1)$:

$$A_n := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

229. naloga ◇◇ Izračunaj determinanto $D_n := \det A_n$ matrike A_n velikosti $n \times n$ s koeficienti

$$\begin{aligned} a_{ii} &:= (-1)^{i+1}, \ 1 \le i \le n, \\ a_{i,i-1} &:= (-1)^i, \ 2 \le i \le n, \\ a_{1i} &:= (-1)^{i+1}, \ 1 \le i \le n. \\ a_{ij} &:= 0, \quad \text{sicer.} \end{aligned}$$

230. naloga ◇◇ Matriki A in B iz $\mathbb{R}^{n\times n}$, $n \in \mathbb{N}$, imata koeficiente $a_{ij} := i + j$ oziroma $b_{ij} := i - j$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$. Izračunaj determinanti matrik A in B.

231. naloga ◇ Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}$. Izračunaj determinanto naslednje matrike velikosti $n \times n$:

$$\begin{bmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ b & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ b & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{bmatrix}.$$

232. naloga ◇◇ Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}$ in $n \ge 2$. Izračunaj naslednjo determinanto matrike velikosti $n \times n$:

$$D_n := \begin{vmatrix} 0 & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & 0 & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \end{vmatrix}.$$

233. naloga ◇ Poišči vse rešitve enačbe

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & x & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 3 & 3 & x & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & x & n-1 \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{vmatrix} = 0,$$

kjer je $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

234. naloga ◇ Naj bo $n \geq 1$ in

$$p_n(x) := \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \dots & x^n \\ x & x & x^2 & x^3 & \dots & x^n \\ x^2 & x^2 & x^2 & x^3 & \dots & x^n \\ x^3 & x^3 & x^3 & x^3 & \dots & x^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^n & x^n & x^n & x^n & \dots & x^n \end{vmatrix} \in \mathbb{R}[x].$$

Poišči ničle polinoma p_n ter pripadajoče kratnosti.

235. naloga ◇◇ Naj bodo $a_1, \dots, a_n$ paroma različna realna števila. Izračunaj ničle polinoma

$$p_n(x) := \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix} \in \mathbb{R}_n[x].$$

236. naloga ◇◇ Izračunaj determinanto

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a_n \end{vmatrix}, \tag{22}$$

kjer so $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$ in $\lambda \in \mathbb{F}$ poljubni skalarji.

237. naloga ◇ Izračunaj determinanto naslednje matrike velikosti $n \times n$:

$$\begin{bmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{bmatrix}.$$

238. naloga ◇◇ Izračunaj determinanto naslednje matrike velikosti $n \times n$:

$$\begin{bmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{bmatrix}.$$

239. naloga ◇ Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ obrnljiva matrika s celoštevilskimi koeficienti. Dokaži: koeficienti matrike A^{-1} so cela števila natanko tedaj, ko je $|\det A| = 1$.

240. naloga ◇ Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ taka matrika, da za njene koeficiente a_{ij} velja enakost $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ za vsak $i, j = 1, \dots, n$. Dokaži, da je potem $\det A \in \mathbb{R}$.

241. naloga ◇ Naj bo A poševno simetrična realna matrika (to pomeni, da velja $A^t = -A$) velikosti $n \times n$, kjer je n liho naravno število. Dokaži, da je $\det A = 0$.

242. naloga ◇◇ Naj bodo $a_{ij}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ odvedljive funkcije za $i, j = 1, \dots, n$ in

$$D(x) := \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

Dokaži obrazec za odvod determinante

$$\frac{dD}{dx}(x) = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a'_{k1}(x) & a'_{k2}(x) & \cdots & a'_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{vmatrix} \quad \text{za vsak } x \in \mathbb{R}. \tag{23}$$

243. naloga ◇ Naj bo

$$p(x) := \begin{vmatrix} x^6+x & x^5+x & x^4+x & x^3+x & x^2+x \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Izračunaj $p(0)$, $p(1)$, $p'(0)$, $p'(1)$.

244. naloga ◇◇ Definirajmo funkcijo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takole

$$f(x) := \begin{vmatrix} x^2 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ a & x^2+b & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Določi vse urejene pare $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, za katere ima funkcija f zalogo vrednosti v množici pozitivnih realnih števil.

245. naloga ◇◇ Naj bosta x in y poljubna neničelna stolpca iz $\mathbb{C}^{n \times 1}$. Izračunaj determinanti

$$\det(xy^t) \quad \text{in} \quad \det(y^t x).$$

246. naloga ◇◇ Dokaži: če je $X \in \mathbb{F}^{m\times n}$ in $Y \in \mathbb{F}^{n\times m}$ in je $m < n$, potem je $\det(YX) = 0$. Ali je tudi $\det(XY) = 0$?

247. naloga ◇◇◇ Izračunaj determinanto Vandermondeove matrike zaporedja $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, kjer so $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ skalarji in $n > 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \cdots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \alpha_3^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

248. naloga ◇◇ Bodi $V = \{f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\}$ kompleksni vektorski prostor funkcij z običajnima operacijama. Naj bodo $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ paroma različna neničelna števila. Dokaži, da so funkcije $f_1, \ldots, f_n \in V$, definirane s predpisom

$$f_k(t) = e^{\alpha_k t}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

linearno neodvisne.

249. naloga ◇◇ Naj bodo $a, b, c \in \mathbb{F}$ različni skalarji in $d, e, f \in \mathbb{F}$ različni skalarji. Dokaži, da je

$$\operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & a & d & ad \\ 1 & b & e & be \\ 1 & c & f & cf \end{bmatrix} = 3.$$

250. naloga ◇ Izračunaj determinanto endomorfizma

$$\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$

$$\mathcal{A}\colon \vec{x} \mapsto \vec{x} + (\vec{x}\vec{a})\vec{a},$$

kjer je $\vec{a}$ pribit vektor iz $\mathbb{R}^3$.

251. naloga ◇ Izračunaj determinanto endomorfizma

$$\mathcal{B}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$

$$\mathcal{B}\colon \vec{x} \mapsto \vec{b} \times \vec{x},$$

kjer je $\vec{b}$ pribit vektor iz $\mathbb{R}^3$.

252. naloga ◇◇ Endomorfizem $\mathcal{A}$ prostora $\mathbb{R}^3$ slika vektorje $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ takole:

$$\mathcal{A}\colon \vec{a} \mapsto \vec{d}, \quad \mathcal{A}\colon \vec{b} \mapsto \vec{e}, \quad \mathcal{A}\colon \vec{c} \mapsto \vec{f}.$$

Vektorji $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ razpenjajo paralelepiped s prostornino 7, vektorji $\vec{d}, \vec{e}, \vec{f}$ pa paralelepiped s prostornino 11. Izračunaj $\det \mathcal{A}$.

253. naloga ◇◇ Naj bo $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ in $\mathcal{B}$ endomorfizem prostora $\mathbb{F}^{n\times n}$,

$$\mathcal{B}\colon X \mapsto AX.$$

Izračunaj $\det \mathcal{B}$.

254. naloga ◇◇ Bodi

$$\mathcal{M}_t\colon p(x) \mapsto \begin{bmatrix} p(0) + p(1) & p'(0) \\ p''(0) + tp''(1) & p'''(0) \end{bmatrix}$$

linearna preslikava iz prostora $\mathbb{R}_3[x]$ v prostor $\mathbb{R}^{2\times 2}$, kjer je t neko realno število.

(a) Določi $\operatorname{Ker} \mathcal{M}_t$ in $\operatorname{Im} \mathcal{M}_t$.

(b) Zapiši $\mathrm{M}_{\Psi}^{\Sigma}(\mathcal{M}_t)$, kjer je Σ običajna urejena baza prostora $\mathbb{R}_3[x]$ in Ψ običajna urejena baza prostora $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(c) Ali lahko izračunaš $\det \mathcal{M}_t$?

Lastne vrednosti in lastni vektorji

255. naloga ◇ Bodi $\mathcal{A}\colon W \to W$ endomorfizem vektorskega prostora W in $U, V \leq W$ invariantna podprostora endomorfizma $\mathcal{A}$. Dokaži, da sta presek $U \cap V$ in vsota $U + V$ spet invariantna podprostora istega endomorfizma.

256. naloga ◇ Naj pripada endomorfizmu $\mathcal{A}$ prostora $\mathbb{R}^4$ v običajni urejeni bazi matrika

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Dokaži, da je podprostor $U_1 := \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 | \ x - y = 0, w = 0\}$ invarianten za endomorfizem $\mathcal{A}$.

(b) Pribij realno število α tako, da bo podprostor $U_2 := \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 | \ x - \alpha y = 0\}$ invarianten za $\mathcal{A}$.

(c) Poišči tako realno število β, da bo podprostor $U_3 := \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 | \ x - \beta z = 0\}$ invarianten za $\mathcal{A}$.

(d) Ali je podprostor $U_4 := \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 | \ y + z = 0\}$ invarianten za $\mathcal{A}$?

257. naloga ◇◇ V štirirazsežnem vektorskem prostoru V nad $\mathbb{F}$ je podana urejena baza

$$\Omega := \{v_1, v_2, v_3, v_4\}.$$

Podprostori

$$\mathcal{L}\{v_1, v_2, v_3\}, \ \mathcal{L}\{v_1, v_2, v_4\}, \ \mathcal{L}\{v_1, v_3, v_4\}$$

prostora V naj bodo invariantni za endomorfizem $\mathcal{A}\colon V \to V$. Kaj lahko poveš o matriki, ki pripada preslikavi $\mathcal{A}$ v bazi Ω?

258. naloga ◇ Linearnemu operatorju $\mathcal{B}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ pripada v običajni urejeni bazi prostora $\mathbb{R}^2$ matrika

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dokaži, da prostor $\mathbb{R}^2$ ne vsebuje nobenega pravega netrivialnega invariantnega podprostora za operator $\mathcal{B}$.

259. naloga ◇◇ V $\mathbb{R}^3$ so podane tri ravnine

$$\begin{aligned} \Sigma_1\colon &\quad 2x + y - z = 0, \\ \Sigma_2\colon &\quad x + y + z = 0, \\ \Sigma_3\colon &\quad x - y + z = 0. \end{aligned}$$

Poišči takšen endomorfizem $\mathcal{A}$ ranga 2 v $\mathbb{R}^3$, da bodo ravnine Σ_1, Σ_2 in Σ_3 njegovi invariantni podprostori.

260. naloga ◇ Naj bo $\mathcal{A}$ endomorfizem vektorskega prostora V nad $\mathbb{F}$. Dokaži, da so naslednji podprostori invariantni za $\mathcal{A}$:

(a) $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$;

(b) $\operatorname{Ker} (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})$, kjer je $\lambda \in \mathbb{F}$;

(c) $\operatorname{Ker} (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^s$, kjer sta $\lambda \in \mathbb{F}$, $s \in \mathbb{N}$.

261. naloga ◇ Naj endomorfizma $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ prostora V komutirata. Dokaži, da sta $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$ in $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ invariantna za $\mathcal{B}$.

262. naloga ◇ Poišči vse skalarje $\lambda \in \mathbb{R}$ in stolpce $x \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, ki ustrezajo enačbi

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} x = \lambda x. \tag{24}$$

263. naloga ◇◇ Ali lahko določiš $\alpha \in \mathbb{C}$ tako, da bo imela kompleksna matrika

$$\begin{bmatrix} i & 1+i & \alpha \\ 2i & i & 2 \\ -1 & 1 & i \end{bmatrix}$$

vse lastne vrednosti realne? Utemelji odgovor.

264. naloga ◇ Poišči vse skalarje $\lambda \in \mathbb{C}$ in vse neničelne stolpce $x \in \mathbb{C}^{3\times 1}$, ki zadoščajo enačbi

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} x + \lambda x. \tag{25}$$

265. naloga ◇◇ Poišči vse skalarje $\lambda \in \mathbb{R}$ in stolpce $x, y \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, ki zadoščajo enačbi

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 8 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} x + \lambda y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 8 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} y + \lambda x. \tag{26}$$

266. naloga ◇ Naj bosta podani preslikavi

(a) $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{A}\colon (x,y) \mapsto (-y, x)$,

(b) $\mathcal{B}\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \quad \mathcal{B}\colon (x,y) \mapsto (-y, x)$.

Vsaki preslikavi poišči njene lastne vrednosti in pripadajoče lastne vektorje.

267. naloga ◇◇ Za vsaka $a, b \in \mathbb{R}$ definirajmo realno matriko

$$M(a,b) := \begin{bmatrix} b-1 & b & a \\ a^2 & 0 & b \\ b & b & a+1 \end{bmatrix}$$

(a) Določi vse neničelne vektorje iz $\mathbb{R}^{3\times 1}$, ki jih matrika $M(a,b)$ ohranja.

(b) Poišči vse take matrike $M(a,b)$, ki imajo med lastnimi vrednostmi števili 1 in -1.

(c) Poišči vse take matrike $M(a,b)$, ki imajo neničelno jedro.

268. naloga ◇ Poišči vse lastne vrednosti in lastne podprostore matrike

$$\begin{bmatrix} 13 & 13 & -8 & -23 & 8 \\ 4 & 5 & -3 & -6 & 1 \\ 2 & 5 & -3 & -7 & 4 \\ 14 & 13 & -8 & -22 & 6 \\ 14 & 13 & -8 & -23 & 7 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{5\times 5}.$$

269. naloga ◇◇ Če veš, da je (λ, v) lastni par kvadratne matrike A, zapiši kakšen lastni par za matrike

$$A+\mu I, \quad \mu A, \quad A^2, \quad A^n,$$

kjer je μ skalar in n naravno število. Če je A obrnljiva, poišči tudi kakšen lastni par za matriko A^{-1}.

270. naloga ◇◇ Naj bo A obrnljiva kompleksna kvadratna matrika. Kakšna zveza velja med lastnimi vrednostmi prirejenke A^P ter lastnimi vrednostmi matrike A?

271. naloga ◇ Linearno preslikavo $\mathcal{C}$: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definiramo s predpisom

$$\mathcal{C}(x,y,z,u) := (-3x+2y, 6x-2y, x-z+3u, y+2z-2u).$$

Ali obstaja kakšna baza prostora $\mathbb{R}^4$, v kateri pripada operatorju $\mathcal{C}$ diagonalna matrika?

272. naloga ◇ Naj bo preslikava $\mathcal{B}$: $\mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}_4[x]$ definirana s predpisom

$$\mathcal{B}\colon p \mapsto ((x^2-1)p)'' + p, \qquad \forall p \in \mathbb{R}_4[x].$$

(a) Dokaži, da je $\mathcal{B}$ linearna preslikava.

(b) Zapiši matriko, ki ji pripada v običajni urejeni bazi prostora $\mathbb{R}_4[x]$.

(c) Ali je $\mathcal{B}$ bijekcija?

(d) Dokaži, da se da $\mathcal{B}$ diagonalizirati.

273. naloga ◇ Ali se da matrika

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

diagonalizirati? Odgovor utemelji brez računanja lastnih vektorjev!

274. naloga ◇ Dokaži: če ima kompleksna matrika A karakteristični polinom enak $p_A(\lambda) = \lambda^n - 1$, se da diagonalizirati.

275. naloga ◇ Določi karakteristični in minimalni polinom operatorja $\mathcal{T}$, ki deluje v prostoru $\mathbb{R}_n[x]$ vseh polinomov stopnje $\leq n$ in je definiran s predpisom

$$(\mathcal{T}p)(x) := (1+x)p'(x).$$

Ali se da operator $\mathcal{T}$ predstaviti v kaki bazi z diagonalno matriko?

276. naloga ◇ Ali je kompleksna matrika

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

podobna kaki spodnje trikotni matriki z realnimi koeficienti?

277. naloga ◇ Prepričaj se, da je matrika

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

podobna diagonalni matriki: poišči tako diagonalno matriko D in tako obrnljivo matriko S, da bo $A = SDS^{-1}$.

278. naloga ◇ Linearna preslikava $\mathcal{T}$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ prezrcali vsako točko v $\mathbb{R}^3$ prek ravnine $x - 2y + 3z = 0$.

(a) Kakšne so lastne vrednosti in lastni podprostori preslikave $\mathcal{T}$?

(b) Poišči diagonalno matriko, ki pripada preslikavi $\mathcal{T}$ v primerni bazi. Napiši to bazo!

279. naloga ◇ Pokaži, da matrika

$$A := \begin{bmatrix} 11 & -4 & -2 \\ 25 & -9 & -5 \\ 5 & -2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

pripada (v običajni urejeni bazi prostora $\mathbb{R}^3$) projektorju na neko ravnino Π vzdolž neke premice p. Poišči Π in p!

280. naloga ◇◇ Naj bosta $A, P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ taki matriki, da je P obrnljiva in $P^{-1}AP$ diagonalna s paroma različnimi koeficienti na diagonali. Naj bo B taka matrika, da velja $A = B^3$.

(a) Dokaži, da A in B komutirata.

(b) Poišči razsežnosti lastnih podprostorov matrike A.

(c) Dokaži, da imata A in B iste lastne vektorje.

(d) Dokaži, da je $P^{-1}BP$ diagonalna.

281. naloga ◇◇ Naj bo $\mathcal{A}\colon V \to V$ endomorfizem n-razsežnega prostora V, ki ima n različnih lastnih vrednosti. Dokaži: če endomorfizem $\mathcal{B}\colon V \to V$ komutira z $\mathcal{A}$, se $\mathcal{B}$ da diagonalizirati.

282. naloga ◇ Dokaži: če je A idempotentna matrika, sta njeni lastni vrednosti lahko le 0 ali 1.

283. naloga ◇◇ Dokaži: če je kvadratna matrika $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ničla polinoma $p \in \mathbb{F}[x]$, potem so lastne vrednosti matrike A ničle polinoma p.

284. naloga ◇ Naj ima kvadratna matrika A karakteristični polinom $p_A(\lambda) = \lambda^3(\lambda^2-1)^2$. Naj velja tudi $A^5 - 2A^4 - A^3 + 2A^2 = 0$. Zapiši minimalni polinom $m_A(\lambda)$, če veš, da se A ne da diagonalizirati.

285. naloga ◇◇ Dokaži: če ima endomorfizem $\mathcal{A}\colon U \to U$ vsak vektor iz U za lastni vektor, je večkratnik identitete, to je

$$\mathcal{A} = \lambda\mathcal{I}$$

za neki skalar λ.

286. naloga ◇◇ Definirajmo preslikavo

$$\mathrm{sled}\colon \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}$$

kot v nalogi 158 s predpisom

$$\mathrm{sled}\colon A = [a_{ij}] \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_{kk},$$

torej je sled matrike A vsota njenih diagonalcev. Dokaži:

(a) Za poljubni matriki $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ velja: $\mathrm{sled}(AB) = \mathrm{sled}(BA)$.

(b) Za poljubno matriko $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ in poljubno obrnljivo matriko $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ velja: $\mathrm{sled}(PAP^{-1}) = \mathrm{sled}(A)$.

(c) Če je $\mathcal{A}$ endomorfizem n-razsežnega prostora V, zgrajenega nad poljem $\mathbb{F}$, in je Ω poljubna urejena baza prostora V, je definicija $\mathrm{sled}\,\mathcal{A} := \mathrm{sled}\,\mathrm{M}_{\Omega}^{\Omega}(\mathcal{A})$ neodvisna od baze Ω.

(d) Če je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, je $\mathrm{sled}\,A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$, kjer so $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ lastne vrednosti matrike A.

287. naloga ◇ Če za matriko $A \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ velja $\mathrm{sled}\,A = 1$, $\mathrm{sled}\,A^2 = 19$ in so $-3, 0, 2, 2$ njene lastne vrednosti, izračunaj preostali lastni vrednosti.

288. naloga ◇◇ Naj bosta A in $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ obrnljivi matriki Dokaži: matriki A in B sta si podobni natanko takrat, ko obstajata taki kvadratni matriki X in $Y \in \mathbb{F}^{n\times n}$, da velja $A = XY$ in $B = YX$.

289. naloga ◇◇ Pribijmo $n \in \mathbb{N}$ in skalarje $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{F}$. S pomočjo naloge 236 poišči tako matriko $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, da je njen karakteristični polinom enak $p_A(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$.

290. naloga ◇◇ Napiši kako realno kvadratno matriko najmanjše velikosti, ki ima lastne vrednosti: $1+i$, $-i$ in $\sqrt{2}$.

291. naloga ◇◇ Zvezdice v matriki

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

zamenjaj s takimi realnimi števili, da bodo stolpci $[1,2,1]^t$, $[0,-1,2]^t$ in $[2,0,-3]^t$ njeni lastni vektorji.

Ali lahko isto storiš za stolpce $[1,2,1]^t$, $[-1,0,2]^t$ in $[2,0,-3]^t$?

292. naloga ◇◇◇ Naj bodo vektorji $[1,-1,0]^t$, $[1,-2,0]^t$ in $[0,0,1]^t$ lastni vektorji kompleksne matrike

$$A := \begin{bmatrix} 5 & * & * \\ -4 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}.$$

Poišči manjkajoče koeficiente matrike A. Ali lahko isto storiš za matriko

$$B := \begin{bmatrix} 2 & * & * \\ -3 & * & * \\ 3 & * & * \end{bmatrix}?$$

293. naloga ◇◇◇ Endomorfizem $\mathcal{A}$ prostora $\mathbb{R}^3$ deluje takole:

$$\mathcal{A}(x,y,z) := (-x-y+z, -2x-3y+4z, -2x-3y+4z).$$

Poišči vse urejene baze Ψ prostora $\mathbb{R}^3$, v katerih endomorfizmu $\mathcal{A}$ pripada matrika

$$\mathrm{M}_{\Psi}^{\Psi}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

294. naloga ◇◇ Pokaži, da je vsaka kompleksna matrika velikosti 2×2 podobna neki matriki oblike

$$\begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix}.$$

295. naloga ◇ Za katere $a \in \mathbb{C}$ ima minimalni polinom kompleksne matrike

$$A := \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ a-1 & -a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

vsaj eno večkratno ničlo?

296. naloga ◇◇ Naj bo $\mathcal{A}$ linearen operator na končnorazsežnem kompleksnem vektorskem prostoru z minimalnim polinomom $m_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda - 1)^k$, kjer je k neko naravno število. Dokaži, da je minimalni polinom $m_{\mathcal{A}^2}(\lambda)$ operatorja $\mathcal{A}^2$ enak polinomu $m_{\mathcal{A}}(\lambda)$.

297. naloga ◇◇◇ Naj bo $\mathcal{A}$ endomorfizem kompleksnega končnorazsežnega vektorskega prostora V, $\dim V \geq 1$. Dokaži – brez uporabe determinant in karakterističnega polinoma – da ima $\mathcal{A}$ vsaj eno lastno vrednost.

298. naloga ◇◇◇ Dokaži, da je vsaka kompleksna matrika $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ podobna neki zgornje trikotni matriki $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dokaza se loti naprimer z indukcijo na velikost matrike. Dokaži tudi, da ima T na diagonali ravno lastne vrednosti matrike A.

299. naloga ◇◇ Bodi $\mathcal{A} \in \text{End}\,(V)$ nilpotenten endomorfizem končnorazsežnega vektorskega prostora V nad poljem $\mathbb{C}$. Dokaži, da je

$$\det(\mathcal{I} + \mathcal{A}) = 1,$$

pri čemer $\mathcal{I}$ označuje identični endomorfizem prostora V.

300. naloga ◇◇ Poišči vse matrike $X \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, ki rešijo matrično enačbo

$$X^2 - 5X + 6I = 0.$$

301. naloga ◇◇ Če poznaš karakteristični polinom p_A kompleksne matrike A, določi karakteristični polinom matrike $A^2 - 3I$.

302. naloga ◇◇◇ Naj bo $\mathcal{A}$ endomorfizem prostora V in $v_1, \ldots, v_k$ njegovi lastni vektorji pri paroma različnih lastnih vrednostih. Invariantni podprostor $U \leq V$ endomorfizma $\mathcal{A}$ naj vsebuje vektor $v_1 + \cdots + v_k$. Dokaži, da U vsebuje tudi vse vektorje $v_1 \ldots, v_k$.

303. naloga ◇◇◇ Naj bo V končnorazsežen vektorski prostor in $\mathcal{A}$ njegov endomorfizem, ki se da diagonalizirati. Dokaži, da ima vsak netrivialen invarianten podprostor endomorfizma $\mathcal{A}$ bazo, sestavljeno iz lastnih vektorjev endomorfizma $\mathcal{A}$.

304. naloga ◇◇ Na prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ je definiran linearni operator $\mathcal{A}$ s predpisom

$$\mathcal{A}\colon\ p \mapsto (x-1)p' + p,$$

kjer je $p = p(x)$ poljuben polinom iz prostora $\mathbb{R}_2[x]$, p' pa njegov odvod. Poišči vse dvorazsežne podprostore v $\mathbb{R}_2[x]$, ki so invariantni za $\mathcal{A}$.

305. naloga ◇◇◇ Naj bo $\mathcal{A}$ endomorfizem n-razsežnega kompleksnega vektorskega prostora V. Pokaži, da za vsak $i = 0, 1, \ldots, n$ obstaja i-razsežen invarianten podprostor endomorfizma $\mathcal{A}$.

Evklidski in unitarni prostori

306. naloga ◇ Bodi V unitaren prostor in $v \in V$. Dokaži: $v = 0$ natanko tedaj, ko velja $\langle v, w\rangle = 0$ za vse $w \in V$.

307. naloga ◇ Naj bo V evklidski prostor s skalarnim produktom $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Za vektorja $e_1, e_2 \in V$ naj velja $\langle e_i, e_j\rangle = 1$ za vse $i, j \in \{1, 2\}$. Dokaži brez uporabe kotnih funkcij, da je $e_1 = e_2$.

308. naloga ◇ Naj v evklidskem ali unitarnem prostoru V s skalarnim produktom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ velja pri nekem fiksnem a iz V neenakost $\langle a, x\rangle \geq 0$ za vsak x iz V. Dokaži, da je $a = 0$.

309. naloga ◇◇ Kateri od predpisov

$$\begin{aligned}
\langle\cdot,\cdot\rangle_1\colon&\quad (p,q) \mapsto p^{(n)}(0)q^{(n)}(0),\\
\langle\cdot,\cdot\rangle_2\colon&\quad (p,q) \mapsto p(1)q(1),\\
\langle\cdot,\cdot\rangle_3\colon&\quad (p,q) \mapsto p(0) + q(0),\\
\langle\cdot,\cdot\rangle_4\colon&\quad (p,q) \mapsto \textstyle\sum_{k=0}^{n} |p^{(k)}(0)q^{(k)}(0)|,\\
\langle\cdot,\cdot\rangle_5\colon&\quad (p,q) \mapsto \textstyle\sum_{k=0}^{n} |p^{(k)}(0)|
\end{aligned}$$

določa skalarni produkt v prostoru $\mathbb{R}_n[x]$ za $n \in \mathbb{N}$?

310. naloga ◇ Dokaži, da je s predpisom

$$\langle\cdot,\cdot\rangle\colon\ (p,q) \mapsto \sum_{k=0}^{n} p^{(k)}(0)q^{(k)}(0)$$

podan skalarni produkt na prostoru $\mathbb{R}_n[x]$.

311. naloga ◇ Imejmo predpis

$$\langle\cdot,\cdot\rangle\colon\ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$\langle\cdot,\cdot\rangle\colon\ ((a,b),(c,d)) \mapsto \lambda ac - ad + \mu bc + 2bd,$$

kjer sta λ in μ pribiti realni števili. Za kakšna λ in μ je $\langle\cdot,\cdot\rangle$ skalarni produkt na $\mathbb{R}^2$?

312. naloga ◇ Za katere $\lambda \in \mathbb{R}$ določa predpis

$$\langle(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle := 3x_1y_1 - x_1y_2 - x_1y_3 - x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_3y_1 + \lambda x_3y_3,$$

kjer sta vektorja (x_1, x_2, x_3) in (y_1, y_2, y_3) iz $\mathbb{R}^3$, skalarni produkt na $\mathbb{R}^3$?

313. naloga ◇◇ Na prostoru $V := \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 1$, definirajmo preslikavo $\phi\colon V \times V \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$\phi(A, B) := \text{sled}\,(AB)$$

za vsaki matriki $A, B \in V$.

(a) Dokaži, da je ϕ simetrična bilinearna preslikava na prostoru V.

(b) Dokaži: če je $\phi(A,B)=0$ za vsak $B\in V$, potem je $A=0$.

(c) Preveri tudi, da je na podprostoru vseh simetričnih matrik iz V preslikava ϕ skalarni produkt.

314. naloga ◇◇ Poišči kakšno preslikavo $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$, ki zadošča vsem aksiomom skalarnega produkta, razen aksiomu o homogenosti preslikave $\langle\cdot,\cdot\rangle$ v prvem faktorju.

315. naloga ◇◇ Naj bo U realen vektorski prostor in $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon U\times U\to\mathbb{R}$ preslikava. Bodi V evklidski prostor s skalarnim produktom $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$ in $\mathcal{T}\colon U\to V$ tak izomorfizem, da velja

$$\langle x,y\rangle=\langle\!\langle \mathcal{T}x,\mathcal{T}y\rangle\!\rangle$$

za vse $x,y\in U$. Dokaži, da je $\langle\cdot,\cdot\rangle$ skalarni produkt na prostoru U.

316. naloga ◇ Bodi prostor $\mathbb{R}^4$ opremljen z običajnim skalarnim produktom. Vsakemu od naslednjih podprostorov poišči kakšno bazo:

(a) $(1,2,3,4)^{\perp}$,

(b) $(1,2,3,4)^{\perp\perp}$,

(c) $(1,2,3,4)^{\perp\perp\perp}$,

(d) $(\mathcal{L}\{(1,2,3,4)\})^{\perp}$.

317. naloga ◇ V prostoru $\mathbb{R}^4$, opremljenem z običajnim skalarnim produktom, poišči ortonormirano bazo podprostora $U:=\mathcal{L}\{(3,0,0,0),(2,1,1,0),(0,-2,1,2)\}\leq\mathbb{R}^4$.

318. naloga ◇ Dokaži, da je s predpisom

$$\langle A,B\rangle:=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}a_{ij}b_{ij}$$

podan skalarni produkt na prostoru $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Nato poišči ortonormirano bazo podprostora

$$U:=\left\{\begin{bmatrix} a & a+2b\\ 0 & -b\end{bmatrix} \mid a,b\in\mathbb{R}\right\}\leq\mathbb{R}^{2\times 2}.$$

319. naloga ◇ Prostor $\mathbb{R}_2[x]$ je opremljen s takim skalarnim produktom $\langle\cdot,\cdot\rangle$, da je podmnožica $\{1-x,1+2x,x^2\}$ ortonormirana.

(a) Izračunaj kot med vektorjema 1 in x.

(b) Izračunaj pravokotno projekcijo vektorja x^2+x na vektor x.

(c) Poišči pravokotno dopolnilo množice $\{1+2x\}$.

320. naloga ◇ V evklidskem prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ s skalarnim produktom $\langle p,q\rangle:=\int_{-1}^{1}p(t)q(t)dt$ poišči kakšno ortonormirano bazo pravokotnega dopolnila zaloge vrednosti operatorja odvajanja.

321. naloga ◇ V evklidskem prostoru iz naloge 342 poišči ortonormirano bazo pravokotnega dopolnila prostora, ki ga napenja polinom $1+x$.

322. naloga ◇ Naj bo $\langle\cdot,\cdot\rangle$ tak skalarni produkt na prostoru $\mathbb{R}^3$, da je množica $\{(2,1,2),(3,2,0),(-2,-1,-1)\}$ ortonormirana. Poišči predpis za skalarni produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

323. naloga ◇◇ Vektorji $(1,0,1,0,0)$, $(0,0,1,1,0)$, $(0,1,0,0,1)$, $(0,0,0,1,-1)$ in $(1,0,0,0,1)$ naj sestavljajo ortonormirano bazo prostora $\mathbb{R}^5$ glede na skalarni produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Poišči kako ortonormirano bazo (v istem skalarnem produktu) pravokotnega dopolnila podprostora

$$U:=\{x\in\mathbb{R}^5 \mid \langle x,a\rangle=\langle x,b\rangle=0\}\leq\mathbb{R}^5,$$

kjer sta $a:=(1,0,2,1,0)$ in $b:=(0,1,1,1,1)$.

324. naloga ◇ Naj bo $\langle\cdot,\cdot\rangle$ tak skalarni produkt na prostoru $\mathbb{R}_2[x]$, da je množica $\{1+x+x^2,2-x,x+x^2\}$ ortonormirana. Poišči kakšno ortogonalno bazo istega prostora, ki vsebuje polinom 1.

325. naloga ◇◇ Naj bo $U:=\{p\in\mathbb{R}_3[x]\mid p(0)=0\}$ podmnožica v vektorskem prostoru $\mathbb{R}_3[x]$, opremljenem s skalarnim produktom $\langle p,q\rangle:=\int_{-1}^{1}p(x)q(x)dx$. Poišči polinom v U, ki je najbližji polinomu $r(x):=x^3+x^2+x+1$ glede na normo, porojeno s skalarnim produktom $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

326. naloga ◇ Naj bo $V:=\mathcal{L}\{1,\sin\}$ podprostor v vektorskem prostoru $C[-\pi/2,\pi/2]$ vseh realnih zveznih funkcij na intervalu $[-\pi/2,\pi/2]$. Poišči tako funkcijo $g\in V$, da bo integral

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(g(x)-x)^2dx \tag{27}$$

imel najmanjšo možno vrednost.

327. naloga ◇◇◇ Bodi V unitaren prostor in $\mathcal{A}$ tak njegov endomorfizem, da velja

$$\langle\mathcal{A}v,v\rangle=0 \text{ za vse } v\in V.$$

Dokaži, da je $\mathcal{A}=0$.

328. naloga ◇◇ Dokaži, da prostor $\mathbb{R}^3$ z običajnim skalarnim produktom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ne premore obrnljivega endomorfizma $\mathcal{A}$ z lastnostjo

$$\langle\mathcal{A}v,v\rangle=0 \text{ za vsak } v\in\mathbb{R}^3. \tag{28}$$

329. naloga ◇◇ Naj bo V evklidski prostor razsežnosti n s skalarnim produktom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ in bodi $v\in V$ neničeln vektor. Preslikava $\mathcal{A}\colon V\to V$ je definirana takole:

$$\mathcal{A}x:=\langle x,v\rangle v$$

za vsak $x\in V$.

(a) Dokaži, da je $\mathcal{A}$ linearna preslikava.

(b) Kolikšen je rang operatorja $\mathcal{A}$?

(c) Poišči lastne vrednosti in pripadajoče lastne podprostore preslikave $\mathcal{A}$.

(d) Določi minimalni polinom $m_{\mathcal{A}}(\lambda)$ in karakteristični polinom $p_{\mathcal{A}}(\lambda)$ preslikave $\mathcal{A}$.

Linearni funkcionali

330. naloga ◇ Naj bo jedro linearnega funkcionala $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ razpeto na vektorjih $(1,1,1,1)$, $(1,1,1,-1)$, $(1,1,-1,1)$ in naj velja $f(1,0,0,0) = 1$. Kam preslika f vektor $a := (1,2,3,4)$? Ali znaš napisati splošni predpis za funkcional f?

331. naloga ◇◇ Naj bo V končnorazsežen vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ in $f \in V^*$ neničeln linearen funkcional. Dokaži, da obstaja tak $v \in V$, da je

$$V = \mathcal{L}\{v\} \oplus \operatorname{Ker} f.$$

332. naloga ◇◇ Naj bo V končnorazsežen vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ in $f, g \in V^*$ linearna funkcionala. Dokaži: če imata f in g enaki jedri, potem za neki skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ velja $f = \lambda g$.

333. naloga ◇◇ Naj bo $f\colon V \to \mathbb{R}$ linearen funkcional na realnem vektorskem prostoru V, vektorji $e_1, e_2, \ldots, e_n \in V$ pa naj napenjajo podprostor $U \leq V$. Dokaži:

$$f(e_1)e_1 + f(e_2)e_2 + \cdots + f(e_n)e_n = 0 \iff U \leq \operatorname{Ker} f.$$

334. naloga ◇◇ Nad vektorskim prostorom $\mathbb{R}^{n\times n}$ realnih matrik velikosti $n \times n$, $n > 1$, definiramo linearne funkcionale f_{ij} $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n)$ s predpisom

$$f_{ij}(A) := \left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}\right) - a_{ij} \text{ za vsak } A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Ali so ti funkcionali linearno neodvisni?

335. naloga ◇◇◇ Na prostoru $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ realnih polinomov stopnje manjše ali enake $n-1$, $n \geq 1$, so podani funkcionali f_i, $i = 1, \ldots, n$, s predpisom

$$f_i(p) := p(i)$$

za vsak $p \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$.

(a) Dokaži, da so ti funkcionali linearni.

(b) Dokaži, da so ti funkcionali linearno neodvisni.

336. naloga ◇◇ Na vektorskem prostoru $V := \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 1$, definiramo preslikave $f_{ij}\colon V \to \mathbb{R}$ za vsaka i, j, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, s predpisom

$$f_{ij}(A) := \operatorname{sled}(E_{ij}A)$$

za vse $A \in V$. Pri tem E_{ij} označuje ij-to elementarno matriko iz V.

(a) Dokaži, da so preslikave f_{ij} linearni funkcionali.

(b) Dokaži, da je množica $\{f_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ baza dualnega prostora V^* k prostoru V.

337. naloga ◇◇ Dana je urejena baza $\Omega := \{(1,1,1,1),(1,1,1,-1),(1,1,-1,-1),(1,-1,-1,-1)\}$ prostora $\mathbb{R}^4$. Poišči dualno bazo k bazi Ω.

338. naloga ◇◇ Na prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ realnih polinomov stopnje ≤ 2 so definirane linearne preslikave f_1, f_2, f_3: $\mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ s predpisi

$$f_1(p) := p(0) + p'(0), \quad f_2(p) := 6\int_0^1 p(t)dt, \quad f_3(p) := p''(1)$$

za vsak $p \in \mathbb{R}_2[x]$.

(a) Dokaži, da je $\{f_1, f_2, f_3\}$ baza duala $(\mathbb{R}_2[x])^*$ prostora $\mathbb{R}_2[x]$.

(b) Poišči tako urejeno bazo $\{p_1, p_2, p_3\}$ prostora $\mathbb{R}_2[x]$, da bo $\{f_1, f_2, f_3\}$ njej dualna baza (torej $f_i(p_j) = \delta_{ij}$).

339. naloga ◇◇◇ Naj bodo $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 2)$ paroma različna realna števila. Na prostoru $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ definiramo preslikave f_i: $\mathbb{R}_{n-1}[x] \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, s predpisom

$$f_i(p) := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{i-2} & a_2^{i-2} & a_3^{i-2} & \cdots & a_n^{i-2} \\ p(a_1) & p(a_2) & p(a_3) & \cdots & p(a_n) \\ a_1^i & a_2^i & a_3^i & \cdots & a_n^i \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

za vsak $p \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$.

(a) Dokaži, da so tako definirane preslikave linearni funkcionali.

(b) Dokaži, da so ti funkcionali tudi linearno neodvisni. Poišči tako bazo B prostora $\mathbb{R}_{n-1}[x]$, da bo $F := \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ njej dualna baza.

340. naloga ◇◇◇ Dokaži Rieszov izrek: če je V evklidski prostor s skalarnim produktom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ in $f \in V^*$ linearen funkcional, potem obstaja natanko en tak vektor $r \in V$, da za vse $v \in V$ velja

$$f(v) = \langle v, r\rangle. \tag{29}$$

Vektorju r rečemo Rieszov vektor linearnega funkcionala f.

341. naloga ◇ V prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ je dan skalarni produkt

$$\langle p, q\rangle := p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

in linearni funkcional f: $\mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$, $f(p) := \int_0^1 p(x)\,dx$ za vsak $p \in \mathbb{R}_2[x]$. Poišči Rieszov vektor funkcionala f v tem skalarnem produktu, torej tak vektor (polinom) $r \in \mathbb{R}_2[x]$, da velja

$$f(p) = \langle p, r\rangle$$

za vsak $p \in \mathbb{R}_2[x]$.

342. naloga ◇ V prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ je dan skalarni produkt

$$\langle p, q\rangle := \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$$

in linearni funkcional f: $\mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$, $f(p) := p(1)$ za vsak $p \in \mathbb{R}_2[x]$. Poišči Rieszov vektor (polinom) funkcionala f.

343. naloga ◇ Na realnem funkcijskem prostoru

$$V = \{a + b\sin + c\cos \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

je definiran skalarni produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ s predpisom

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$$

za vse $f, g \in V$. Linearni funkcional F: $V \to \mathbb{R}$ deluje takole: $F(f) = f(0)$ za vse $f \in V$. Poišči Rieszov vektor funkcionala F.

344. naloga ◇◇ Na prostoru $\mathbb{R}^{3\times3}$, opremljenim s skalarnim produktom

$$\langle A, B\rangle := \mathrm{sl}(A^t B) \text{ za vsaka } A, B \in \mathbb{R}^{3\times3},$$

je linearni funkcional f definiran s predpisom

$$f(A) := \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij} \text{ za vsak } A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{3\times3}.$$

Poišči tako matriko $B \in \mathbb{R}^{3\times3}$, da bo

$$f(A) = \langle A, B\rangle \text{ za vsak } A \in \mathbb{R}^{3\times3}. \tag{30}$$

345. naloga ◇ Bodi V evklidski prostor s skalarnim produktom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ in $f \in V^*$ linearen funkcional na prostoru V. Dokaži: če je $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ortonormirana baza prostora V, je vektor

$$r := f(e_1)e_1 + f(e_2)e_2 + \cdots + f(e_n)e_n$$

Rieszov vektor funkcionala f.

346. naloga ◇◇◇ Naj bosta V in W končnorazsežna vektorska prostora nad poljem $\mathbb{F}$ in $\mathcal{A}$: $V \to W$ linearna preslikava. Dokaži, da imata $\mathcal{A}$ in njena dualna preslikava $\mathcal{A}^*$: $W^* \to V^*$ enak rang.

347. naloga ◇◇◇ Naj bo $\mathcal{A}$: $U \to V$ linearna preslikava končnorazsežnih vektorskih prostorov nad poljem $\mathbb{F}$. Dokaži: če je A matrika linearne preslikave $\mathcal{A}$ glede na neki urejeni bazi, potem pripada dualni preslikavi $\mathcal{A}^*$ glede na dualni bazi matrika A^t.

Posebni endomorfizmi

348. naloga $\diamond$ Dokaži, da ne obstaja tak endomorfizem $\mathcal{A}$ unitarnega prostora $\mathbb{C}^4$, opremljenega z običajnim skalarnim produktom, da velja

$$\mathcal{A}(i, 1+i, 3, -1) = (2+i, 0, 2-i, 1) \quad \text{in} \quad \mathcal{A}^*(1-i, 2i, i, 1) = (-i, 1, 1, 1).$$

Pri tem je $\mathcal{A}^*$ adjungirana preslikava endomorfizma $\mathcal{A}$.

349. naloga $\diamond$ Naj linearna preslikava $\mathcal{A}$ na prostoru $\mathbb{R}^3$ slika takole

$$\mathcal{A}\colon (x, y, z) \mapsto (z, y-z, 2z).$$

(a) Razišči, kako slika adjungirana preslikava $\mathcal{A}^*$, če je prostor $\mathbb{R}^3$ opremljen z običajnim skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

(b) Določi, kako slika adjungirana preslikava $\mathcal{A}^*$, če je prostor $\mathbb{R}^3$ opremljen s skalarnim produktom

$$\langle\!\langle (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) \rangle\!\rangle := 2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

350. naloga $\diamond$ Naj bo $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ pribit vektor. Linearna preslikava $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je definirana s predpisom

$$\mathcal{A}\colon \vec{x} \mapsto \vec{a} \times \vec{x} - \vec{x}$$

za vsak $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Kako deluje adjungirana preslikava $\mathcal{A}^*$ glede na običajni skalarni produkt v $\mathbb{R}^3$?

351. naloga $\diamond\diamond$ Pribijmo vektorja $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ in definirajmo linearno preslikavo

$$\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

s predpisom

$$\mathcal{A}\colon \vec{x} \mapsto \vec{a} \times (\vec{x} \times \vec{b}).$$

Prostor $\mathbb{R}^3$ opremimo z običajnim skalarnim produktom. Poišči predpis za adjungirano preslikavo $\mathcal{A}^*$.

352. naloga $\diamond\diamond$ Naj bo $C^\infty[0,1]$ prostor neskončnokrat odvedljivih realnih funkcij na intervalu $[0,1]$ in $U := \{f \in C^\infty[0,1] | \, f(0) = 0 = f(1)\}$.

(a) Dokaži, da je $U \leq C^\infty[0,1]$.

(b) Prostor $C^\infty[0,1]$ opremimo s skalarnim produktom

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

za $f, g \in C^\infty[0,1]$ in definirajmo linearno preslikavo $\mathcal{A}\colon U \to U$ s predpisom $(\mathcal{A}f)(x) := (x^2 - x)f'(x)$. Poišči predpis za adjungirano preslikavo $\mathcal{A}^*$.

353. naloga $\diamond$ Naj linearna preslikava $\mathcal{B}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ slika takole $\langle \mathcal{B}p, q \rangle = \langle$ [illegible] $, (u, v, w) \rangle$

$$\mathcal{B}\colon (x, y) \mapsto (2y - x, x + y, x - y).$$

Poišči adjungirano preslikavo $\mathcal{B}^*$, če je prostor $\mathbb{R}^2$ opremljen z običajnim skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ in prostor $\mathbb{R}^3$ z običajnim skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle_3$.

354. naloga $\diamond$ Naj bo $\mathcal{P}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ projekcija na ravnino

$$\Pi\colon z = 0$$

vzdolž premice

$$p\colon x = y = z.$$

Razišči, kako deluje adjungirana preslikava $\mathcal{P}^*$, če vzameš v $\mathbb{R}^3$ običajni skalarni produkt.

355. naloga $\diamond$ Naj bosta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ endomorfizma evklidskega ali unitarnega prostora V. Dokaži, da velja

$$\mathcal{B}^*\mathcal{A} = 0 \iff \operatorname{Im} \mathcal{A} \perp \operatorname{Im} \mathcal{B}.$$

356. naloga $\diamond\diamond$ Naj bosta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ endomorfizma evklidskega prostora V in $\Phi = \{f_1, \ldots, f_n\}$, $\Phi' = \{f'_1, \ldots, f'_n\}$ njegovi bazi. Pokaži: če velja

$$\langle \mathcal{A}f_i, f'_j \rangle = \langle f_i, \mathcal{B}f'_j \rangle \quad \text{za vsaka } i, j = 1, \ldots, n, \tag{31}$$

je $\mathcal{B} = \mathcal{A}^*$.

357. naloga $\diamond\diamond\diamond$ Naj bo V vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ s skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ pa simetrična endomorfizma prostora V. Dokaži: če za vsak vektor $v \in V$ velja

$$\langle \mathcal{A}v, v \rangle = \langle \mathcal{B}v, v \rangle,$$

potem je $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

358. naloga $\diamond\diamond\diamond$ Naj bodo v, v', w, w' neničelni vektorji iz evklidskega prostora V, za katere velja

$$\langle v', w \rangle = \langle v, w' \rangle \neq 0.$$

Pokaži, da obstaja natanko en tak endomorfizem $\mathcal{A}$ ranga 1 na V, za katerega velja

$$\mathcal{A}v = v' \quad \text{in} \quad \mathcal{A}^*w = w'.$$

359. naloga $\diamond\diamond$ Poišči kak endomorfizem $\mathcal{A}$ prostora $\mathbb{R}^3$ z običajnim skalarnim produktom, za katerega velja

$$\mathcal{A}(1, 2, 1) = (2, 1, 0) \quad \text{in} \quad \mathcal{A}^*(-1, 1, 1) = (2, -1, -1).$$

360. naloga ◇◇ Dokaži, da za vsako matriko $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ velja
$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(AA^h).$$

361. naloga ◇ Za vsako od naslednjih realnih matrik $[-2]$, $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ določi, ali je normalna, simetrična, poševno simetrična, ortogonalna, pozitivna simetrična.

362. naloga ◇ Za vsako od naslednjih kompleksnih matrik $[-2]$, $[i]$, $\begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ -2i & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ določi, ali je normalna, simetrična, hermitska, poševno hermitska, unitarna, pozitivna simetrična.

363. naloga ◇◇ Poišči vse kompleksne matrike oblike $\begin{bmatrix} i & * \\ 2 & * \end{bmatrix}$, ki so normalne.

364. naloga ◇◇ Poišči kakšno ortogonalno matriko $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, katere prvi stolpec je $u := [\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}]^t$ in katere determinanta je pozitivna.

365. naloga ◇◇ Označimo z $\omega \in \mathbb{C}$ poljuben primitivni n-ti koren enote. (Naprimer, $\omega := \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$.) Naj bo $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrika s koeficienti $d_{rs} := \frac{1}{\sqrt{n}}\omega^{rs}$. Dokaži, da je D unitarna matrika.

366. naloga ◇ Dokaži: če so vsi koeficienti neke matrike iz $\mathbb{R}^{n\times n}$, $n > 1$, pozitivni, matrika ni ortogonalna.

367. naloga ◇◇ Dokaži: kompleksna kvadratna matrika, ki nima vseh koeficientov v množici realnih števil, ne more biti hkrati ortogonalna in unitarna.

368. naloga ◇◇ Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dokaži: matrika A je pozitivna simetrična natanko tedaj, ko je A^{-1} pozitivna simetrična matrika.

369. naloga ◇◇ Dokaži: če ima normalna kompleksna matrika z realnimi koeficienti vse lastne vrednosti realne, je simetrična.

370. naloga ◇ Dokaži: če je $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, kjer je $m < n$, in je $\operatorname{rang}(A) = m$, je matrika AA^t simetrična in pozitivna.

371. naloga ◇◇ Bodi V unitaren prostor in $\mathcal{A}$ tak njegov endomorfizem, da velja
$$\langle \mathcal{A}v, v\rangle \in \mathbb{R} \text{ za vse } v \in V.$$
Dokaži, da je $\mathcal{A}$ sebi adjungiran: $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$.

372. naloga ◇ Naj bo $\mathcal{A}$ pozitiven sebi adjungiran, $\mathcal{P}$ pa obrnljiv endomorfizem unitarnega prostora V. Dokaži, da je potem tudi endomorfizem $\mathcal{P}^*\mathcal{A}\mathcal{P}$ sebi adjungiran in pozitiven.

373. naloga ◇ Dokaži, da je identiteta edini endomorfizem unitarnega prostora, ki je hkrati sebi adjungiran, unitaren in pozitiven.

374. naloga ◇ Poišči tako ortogonalno matriko Q in tako diagonalno matriko D, da bo $A = QDQ^t$. Pri tem je
$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

375. naloga ◇ Poišči tako diagonalno matriko D in tako ortogonalno matriko P, da bo veljalo $A = PDP^t$. Pri tem je
$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

376. naloga ◇◇ Naj bo
$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$
Poišči takšno matriko B, da bo $B^3 = A$.

377. naloga ◇◇◇ Razcepi obrnljivo realno matriko
$$A := \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
v produkt $A = UB$ ortogonalne matrike U in simetrične pozitivno definitne matrike B.

378. naloga ◇◇◇ Določi skalar $\alpha \in \mathbb{C}$ tako, da bosta obstajala tak skalarni produkt na $\mathbb{C}^3$ in taka baza prostora $\mathbb{C}^3$, da bo kompleksna matrika
$$\begin{bmatrix} i & 1+i & \alpha \\ 2i & i & 2 \\ -1 & 1 & i \end{bmatrix}$$
zapis nekega sebi adjungiranega endomorfizma na tem unitarnem prostoru.

379. naloga ◇◇◇ Bodi V neničeln evklidski prostor. Dokaži ali ovrzi vsako od naslednjih trditev:

(a) Vsakemu simetričnemu endomorfizmu $\mathcal{A}$ na V pripada simetrična matrika samo v ortonormirani bazi prostora V.

(b) Obstaja simetrični endomorfizem $\mathcal{A}$ na V, ki mu pripada simetrična matrika samo v ortonormirani bazi prostora V.

(c) Obstaja simetrični endomorfizem $\mathcal{A}$ na V, ki mu pripada simetrična matrika samo v ortogonalni bazi prostora V.

380. naloga ◇◇ Dopolni matriko

$$\begin{bmatrix} * & * & * & 1996 \\ 3 & * & -2 & * \\ * & * & * & * \\ * & * & 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$$

tako, da bodo njene lastne vrednosti realne, ena od njih pa enaka številu 2.

381. naloga ◇◇ Poišči manjkajoča stolpca kompleksne matrike

$$\begin{bmatrix} 3 & * & * & -1 \\ 1 & * & * & 1 \\ 1 & * & * & 1 \\ 1 & * & * & 1 \end{bmatrix}$$

tako, da bo imela vse lastne vrednosti na kompleksni krožnici s polmerom 2 in s središčem v točki 2.

382. naloga ◇◇ Dopolni matriko

$$\begin{bmatrix} 0 & * & -1+i & * \\ -1 & 0 & 1+i & * \\ * & * & * & 2+4i \\ * & -2 & * & * \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}$$

tako, da bo imela vse lastne vrednosti imaginarne in da bo število i vsaj dvojna lastna vrednost.

383. naloga ◇◇ Bodi V unitaren prostor. Dokaži, da je prehodna matrika med dvema ortonormiranima bazama prostora V unitarna.

384. naloga ◇◇ Bodi V unitarni prostor s skalarnim produktom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ in $\Omega = \{v_1, \ldots, v_n\}$ njegova urejena baza. Z G označi Gramovo matriko baze Ω, torej $G = [\langle v_i, v_j\rangle]_{i,j=1}^n$.

(a) Dokaži, da je G obrnljiva.

(b) Naj bo Σ urejena ortonormirana baza prostora V in $P = \mathrm{M}_\Sigma^\Omega(\mathcal{I})$ prehodna matrika. Dokaži, da je

$$\overline{G} = P^{\mathrm{h}}P.$$

385. naloga ◇◇◇ Bodi V unitarni prostor s skalarnim produktom $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $\Omega := \{v_1, \ldots, v_n\}$ njegova urejena baza in $\mathcal{A}$: $V \to V$ endomorfizem. Z G označi Gramovo matriko baze Ω, torej $G = [\langle v_i, v_j\rangle]_{i,j=1}^n$. Dokaži, da velja

$$\mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{A}^*) = \overline{G}^{-1}\,\mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{A})^{\mathrm{h}}\,\overline{G}. \tag{32}$$

386. naloga ◇ Vektorji $v_1 := (1,0,0)$, $v_2 := (0,1,1)$ in $v_3 := (1,0,1)$ sestavljajo urejeno bazo Ω prostora $\mathbb{C}^3$. Linearna preslikava $\mathcal{A}$: $\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ deluje na teh vektorjih takole:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}v_1 &= v_1 + iv_2, \\ \mathcal{A}v_2 &= 2v_1 - v_2 + iv_3, \\ \mathcal{A}v_3 &= -2iv_1 + (1+i)v_3. \end{aligned}$$

Poišči matriko, ki v bazi Ω pripada adjungirani preslikavi $\mathcal{A}^*$ preslikave $\mathcal{A}$ glede na običajni skalarni produkt v $\mathbb{C}^3$.

387. naloga ◇◇ Naj bosta $\Omega = \{e_1, \ldots, e_n\}$ in $\Pi = \{f_1, \ldots, f_n\}$ ortonormirani bazi unitarnega prostora V in $\mathcal{A}$: $V \to V$ linearna preslikava, za katero velja

$$\mathcal{A}e_i = f_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Dokaži, da je $\mathcal{A}$ unitarna preslikava.

388. naloga ◇◇ S pomočjo naloge 384 oziroma naloge 387 še enkrat dokaži, da je prehodna matrika med ortonormiranima bazama unitarnega prostora unitarna. Primerjaj z dokazom v nalogi 383.

389. naloga ◇◇ Naj bo Π: $\vec{n}_\Pi(\vec{r} - \vec{r}_P) = 0$ enačba ravnine Π v $\mathbb{R}^3$, kjer sta $\vec{n}_\Pi, \vec{r}_P \in \mathbb{R}^3$ pribita vektorja. Dokaži: če z ortogonalnim endomorfizmom $\mathcal{Q}$ prostora $\mathbb{R}^3$ preslikaš ravnino Π, je $\mathcal{Q}\Pi$ ravnina, ki ima normalni vektor vzporeden z vektorjem $\mathcal{Q}\vec{n}_\Pi$ in ki je od izhodišča enako oddaljena kot ravnina Π.

390. naloga ◇◇ Poišči kakšen ortogonalen endomorfizem $\mathcal{Q}$ prostora $\mathbb{R}^3$, ki preslika ravnino Π: $x = 1$ na ravnino Ω: $x + 2y + 2z = 3$. Ali znaš poiskati vse take ortogonalne endomorfizme $\mathcal{Q}$?

391. naloga ◇◇ Kateri ravnini dobiš pri zasuku ravnine Λ: $x - 2y = 5$ za kot $\pi/6$ okoli premice, ki jo določata ravnini Ω: $2x - y = 0$ in Π: $3x + 15y = 0$?

392. naloga ◇◇ Zasuči premico p: $x = 1$, $y = z$ za kot $\frac{\pi}{2}$ okoli vektorja $(1,1,1)$.

393. naloga ◇◇ Naj bo p premica skozi izhodišče in točko $T(6,3,2)$. Določi matriko, ki v običajni urejeni bazi prostora $\mathbb{R}^3$ pripada zrcaljenju preko premice p.

394. naloga ◇◇ Poišči kakšen ortogonalni endomorfizem v $\mathbb{R}^3$, ki preslika

(a) točko $P(2,2,3)$ v točko $R(4,1,0)$.

(b) premico p: $x + z = 2$, $y = 1$ na premico r: $x = \sqrt{3}$, $y = 0$.

(c) ravnino Π: $x - 2y + 2z = 3$ na ravnino Φ: $3x - 4y = 5$.

395. naloga ◇◇◇ Naj bo V evklidski prostor in $a \in V$ enotski vektor. Definiraj zrcaljenje $\mathcal{Z}$: $V \to V$ čez pravokotno dopolnilo prostora $\mathcal{L}\{a\}$ s predpisom

$$\mathcal{Z}v := v - 2\langle v, a\rangle a \tag{33}$$

za vse $v \in V$. Naj vektorju a pripada v ortonormirani bazi Ω prostora V stolpec $s := X_\Omega(a)$. Kakšna matrika pripada zrcaljenju $\mathcal{Z}$ v isti bazi?

396. naloga ◇◇◇ Reši matrični enačbi

$$X^t \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \\ -2 & -4 & 20 \end{bmatrix}, \quad Y^t \cdot Y = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix},$$

kjer sta X in Y realni kvadratni matriki.

397. naloga ◇ Pokaži: če je A kompleksna matrika velikosti $n \times n$ in je $AA^h = 0$, je $A = 0$. Pokaži še, da iz $AA^t = 0$ ne sledi nujno $A = 0$. Dokaži tudi: če je A realna matrika velikosti $n \times n$ in je $AA^t = 0$, je $A = 0$.

398. naloga ◇◇ Matrika

$$\begin{bmatrix} i & i & i \\ -1-i & 1+3i & 2+3i \\ 1+i & -1-i & -2-i \end{bmatrix}$$

pripada nekemu normalnemu operatorju v običajni urejeni bazi Σ unitarnega prostora $\mathbb{C}^3$ glede na neki skalarni produkt. Poišči kako ortogonalno bazo prostora $\mathbb{C}^3$.

399. naloga ◇◇ Dokaži: če je mogoče endomorfizem $\mathcal{T}$ diagonalizirati v kakšni ortonormirani bazi unitarnega prostora V, je $\mathcal{T}$ normalen.

400. naloga ◇ Dokaži, da ne obstaja normalen endomorfizem prostora $\mathbb{C}^2$, opremljenega s skalarnim produktom $\langle (w_1, w_2), (z_1, z_2) \rangle := w_1\overline{z_1} + 2w_2\overline{z_2}$, ki bi slikal vektor $(1, i)$ v vektor $(-i, 1)$ in vektor $(1+i, 1)$ v vektor $(2i, 1+i)$.

401. naloga ◇◇ Naj bo prostor $\mathbb{C}^3$ opremljen z običajnim skalarnim produktom. Poišči kak normalen endomorfizem $\mathcal{A}$ na $\mathbb{C}^3$, ki slika

$$\mathcal{A}(i,1,1) = (-1,i,i) \quad \text{in} \quad \mathcal{A}(i,2,0) = (2i-1, i, i-2). \tag{34}$$

402. naloga ◇◇ Poišči vse enorazsežne invariantne podprostore linearne preslikave $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\mathcal{A}(X) := X + X^t$ za vsak $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Ali lahko v $\mathbb{R}^{2\times 2}$ vpeljemo tak skalarni produkt, da bo $\mathcal{A}$ normalen operator?

Jordanova teorija

403. naloga ◇ Endomorfizem $\mathcal{A}$ vektorskega prostora V končne razsežnosti $\dim V = n > 1$ nad poljem $\mathbb{F}$ naj premore tak vektor $v \in V$, da za neki $r \in \mathbb{N}$ velja $\mathcal{A}^r v = 0$ in $\mathcal{A}^{r-1} v \neq 0$. Dokaži:

(a) Vektorji
$$v, \mathcal{A}v, \mathcal{A}^2 v, \ldots, \mathcal{A}^{r-1} v$$
so linearno neodvisni.

(b) Velja neenakost $r \leq n$.

404. naloga ◇ Naj bo V vektorski prostor končne razsežnosti $\dim V = n > 1$ nad poljem $\mathbb{F}$ in $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$ nilpotent reda n.

(a) Kako izbrati urejeno bazo prostora V, da bo nilpotentu $\mathcal{A}$ pripadala $n \times n$ matrika
$$J := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}?$$

(b) V kateri urejeni bazi pripada nilpotentu $\mathcal{A}$ matrika J^t?

(c) Dokaži, da sta si matriki J in J^t podobni.

405. naloga ◇ Bodi matrika J kot v nalogi 404. Izračunaj razsežnosti $d_{1j} := \dim \operatorname{Ker} J^j$.

406. naloga ◇ Bodi $\mathcal{A}$ nilpotent reda $r > 1$ na n-razsežnem vektorskem prostoru V. Izberi neko urejeno bazo jedra $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$, dopolni jo do urejene baze jedra $\operatorname{Ker}\mathcal{A}^2$, slednjo do urejene baze jedra $\operatorname{Ker}\mathcal{A}^3, \ldots$ dokler ne dobiš urejene baze Ω celega prostora V. Opiši matriko, ki pripada nilpotentu $\mathcal{A}$ v urejeni bazi Ω.

407. naloga ◇◇ Bodi $\mathcal{A}$ poljuben endomorfizem končnorazsežnega prostora V. Dokaži, da za vsak $k \in \mathbb{N}$ velja

$$\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}^k - \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}^{k-1} \geq \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}^{k+1} - \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}^k. \tag{35}$$

408. naloga ◇ Naj bo V končnorazsežen vektorski prostor razsežnosti $\dim V = n$ in $\mathcal{A}$ njegov endomorfizem. Dokaži: če je v korenski vektor endomorfizma $\mathcal{A}$ pri lastni vrednosti λ, potem je $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^n v = 0$.

409. naloga ◇◇◇ Naj bo $\mathcal{A}$ endomorfizem končnorazsežnega vektorskega prostora V. Dokaži enakost

$$V = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \operatorname{Ker} \mathcal{A}^k\right) \oplus \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} \mathcal{A}^k\right).$$

410. naloga ◇◇◇ Naj bo V končnorazsežen vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ in $\mathcal{A}$ njegov endomorfizem. Dokaži:

(a) Če sta $p, q \in \mathbb{F}[x]$ taka tuja si polinoma, da je $p(\mathcal{A})q(\mathcal{A}) = 0$, potem je

$$V = \operatorname{Ker} p(\mathcal{A}) \oplus \operatorname{Ker} q(\mathcal{A}).$$

(b) Če so $p_1, \ldots, p_s \in \mathbb{F}[x]$ taki tuji si polinomi, da je $p_1(\mathcal{A}) \cdots p_s(\mathcal{A}) = 0$, potem je

$$V = \operatorname{Ker} p_1(\mathcal{A}) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker} p_s(\mathcal{A}).$$

411. naloga ◇◇◇ Naj bo $\mathcal{A}$ endomorfizem kompleksnega končnorazsežnega vektorskega prostora V. Dokaži, da je V prema vsota korenskih podprostorov endomorfizma $\mathcal{A}$.

412. naloga ◇◇ Edini lastni vrednosti kompleksne matrike

$$A := \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

sta -1 in 2.

(a) Ali je stolpec $a := [0, 0, 0, 0, 1]^t$ korenski vektor matrike A pri lastni vrednosti -1? Kaj pa stolpec $b := [0, 0, 1, 0, 0]^t$?

(b) Poišči razsežnosti korenskih podprostorov matrike A.

(c) Brez uporabe determinant izračunaj karakteristični polinom matrike A.

413. naloga ◇◇ Poišči bazo prostora $\mathbb{C}^{6\times 1}$, sestavljeno iz korenskih vektorjev kompleksne matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

414. naloga ◇◇◇ Bodi J jordanska matrika nekega nilpotenta reda $r > 1$ na n-razsežnem prostoru. Kako se izraža število jordanskih celic velikosti $k \times k$ v matriki J z razsežnostmi jeder $\operatorname{Ker} J^j$, $j \geq 0$?

415. naloga ◇ Nilpotent $\mathcal{A}$ na prostoru $\mathbb{C}^{24}$ je tak, da je $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} = 10$, $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}^2 = 17$, $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}^3 = 20$, $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}^4 = 22$, $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}^5 = 24$. Poišči jordansko matriko operatorja $\mathcal{A}$ do podobnosti natančno.

416. naloga ◇◇ Opiši jordansko matriko endomorfizma $\mathcal{A}$ prostora $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, če je $\operatorname{Im} \mathcal{A} \subseteq \operatorname{Ker} \mathcal{A}$.

417. naloga ◇◇ Linearni operator $\mathcal{T}$ na kompleksnem končnorazsežnem vektorskem prostoru ima karakteristični polinom

$$p_{\mathcal{T}}(\lambda) = (\lambda + 3)^{10}.$$

Poišči kakšno jordansko matriko ter minimalni polinom operatorja $\mathcal{T}$, če veš, da so razsežnosti jeder operatorjev $\mathcal{T} + 3\mathcal{I}$, $(\mathcal{T} + 3\mathcal{I})^2$ in $(\mathcal{T} + 3\mathcal{I})^3$ enake 4, 7 in 9.

418. naloga ◇ Naj bo $\mathcal{A}$ endomorfizem kompleksnega šestrazsežnega vektorskega prostora in naj velja $\dim \operatorname{Ker} (\mathcal{A} + \mathcal{I}) = 2$, $\dim \operatorname{Ker} (\mathcal{A} + \mathcal{I})^2 = 3$, $\dim \operatorname{Ker} (\mathcal{A} + \mathcal{I})^3 = 3$, $\dim \operatorname{Ker} (\mathcal{A} - \mathcal{I})^3 = 3$. Napiši do podobnosti vse možne jordanske matrike endomorfizma $\mathcal{A}$.

419. naloga ◇ Karakteristični polinom operatorja $\mathcal{A}\colon \mathbb{C}^{10} \to \mathbb{C}^{10}$ je

$$p_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda - 5)^4 (\lambda - 6)^5 (\lambda - 1),$$

njegov minimalni polinom pa

$$m_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda - 5)^2 (\lambda - 6)^3 (\lambda - 1).$$

Napiši vse možne jordanske matrike operatorja $\mathcal{A}$ do podobnosti natančno.

420. naloga ◇ Minimalni polinom endomorfizma $\mathcal{A}\colon \mathbb{C}^9 \to \mathbb{C}^9$ je enak $m_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda - 1996)(\lambda - 9)^6$. Napiši vse možne jordanske matrike preslikave $\mathcal{A}$ do podobnosti natančno.

421. naloga ◇ Karakteristični polinom kompleksne matrike A je

$$p_A(\lambda) = (\lambda + 2)^3 (\lambda + 1)^7,$$

minimalni polinom $m_A(\lambda)$ pa je tretje stopnje. Napiši vse možne jordanske matrike za matriko A do podobnosti natančno, pri vsaki pa še pripadajoči minimalni polinom ter geometrijske kratnosti lastnih vrednosti.

422. naloga ◇ Karakteristični polinom kompleksne matrike A je

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^3 (\lambda + 2)^2 (\lambda - a)^2,$$

minimalni polinom pa

$$m_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 2)^2 (\lambda - a),$$

kjer je a neko kompleksno število. Napiši vse možne jordanske matrike za matriko A in pri vsaki še geometrijske kratnosti lastnih vrednosti.

423. naloga ◇◇ Poišči minimalni polinom realne matrike

$$\begin{bmatrix} 1 & 9 & 9 & 6 & & & & & \\ & 1 & 9 & 9 & & & & & \\ & & 1 & 9 & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1996 & & & & \\ & & & & & 6 & & & \\ & & & & & 9 & 6 & & \\ & & & & & 1 & 9 & 6 & \\ & & & & & & & & 6 \end{bmatrix}.$$

424. naloga ◇◇ Matrika $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ ima naslednje lastnosti:

(a) $a_{ij} \in \mathbb{R}$ za vsaka $1 \leq i, j \leq 6$;

(b) $0,\ -i,\ 1+i\ \in \sigma(A)$;

(c) obstaja tak $v \in \mathbb{C}^{6\times 1}$, da velja $Av \neq 0$ in $A^2 v = 0$.

Določi karakteristični in minimalni polinom matrike A.

425. naloga ◇ Kompleksni matriki

$$B := \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

poišči podobno jordansko matriko J.

426. naloga ◇ Dana je kompleksna matrika

$$A := \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 8 & -6 \end{bmatrix}.$$

Poišči karakteristični polinom, minimalni polinom ter kakšno jordansko matriko matrike A, če veš, da sta njeni edini lastni vrednosti enaki -2 in -1.

427. naloga ◇ Poišči karakteristični polinom, lastne vrednosti ter njihove kratnosti, kakšno jordansko matriko ter minimalni polinom kompleksne matrike

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 2^{27} \\ 2 & 2 & 1 & 2^{8} \\ 0 & 0 & 4 & 2^{1993} \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

428. naloga ◇ Poišči minimalni polinom in kakšno jordansko matriko matrike

$$A := \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

429. naloga ◇◇ Dana je kompleksna matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & a-3 & 1-a \end{bmatrix},$$

kjer je $a \in \mathbb{C}$.

(a) Poišči lastne vrednosti matrike A.

(b) Za katere $a \in \mathbb{C}$ velja, da so algebrske kratnosti vseh lastnih vrednosti matrike A enake 1?

(c) Pri gornjem pogoju (b) poišči bazo prostora $\mathbb{C}^4$, sestavljeno iz lastnih vektorjev matrike A, tako diagonalno matriko D in tako obrnljivo matriko P, da bo $A = PDP^{-1}$.

(d) Zapiši jordansko matriko matrike A v odvisnosti od $a \in \mathbb{C}$.

430. naloga ◇ Določi vse $a \in \mathbb{C}$, pri katerih ima kompleksna matrika

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ a-1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

vsaj eno lastno vrednost enako 0. Za dobljene $a \in \mathbb{C}$ poišči minimalni polinom matrike A, njeno jordansko matriko in pripadajočo bazo.

431. naloga ◇ Poišči kakšno jordansko matriko J kompleksne matrike

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ter tako obrnljivo matriko P, da bo $A = PJP^{-1}$.

432. naloga ◇◇ Poišči kakšno jordansko bazo za kompleksno matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

433. naloga ◇◇ Bodi $\mathcal{A}$ endomorfizem končnorazsežnega kompleksnega prostora V. Dokaži, da sta si njegova karakteristični in minimalni polinom enaka natanko tedaj, ko imajo vse lastne vrednosti endomorfizma $\mathcal{A}$ geometrijsko kratnost enako 1:

$$p_{\mathcal{A}} = m_{\mathcal{A}} \iff d_i = 1 \text{ za vse } i.$$

434. naloga ◇◇◇ Naj bo V končnorazsežen kompleksen vektorski prostor in $\mathcal{A}\colon V \to V$ endomorfizem. Pokaži, da obstajata taka invariantna podprostora U in W endomorfizma $\mathcal{A}$, da velja

(a) $V = U \oplus W$ in

(b) zožitev $\mathcal{A}|_U\colon U \to U$ je nilpotenten operator in

(c) zožitev $\mathcal{A}|_W\colon W \to W$ je obrnljiv operator.

435. naloga ◇◇ Poišči zgled takega prostora V in takega njegovega endomorfizma $\mathcal{A}$, da velja

$$\operatorname{Ker}\mathcal{A} < \operatorname{Im}\mathcal{A}^2 < \operatorname{Ker}\mathcal{A}^2 < \operatorname{Im}\mathcal{A}.$$

436. naloga ◇◇ Izračunaj e^A, kjer je $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 10 & 8 \\ 0 & -12 & -10 \end{bmatrix}$.

437. naloga ◇ Kateri polinomi $a, b \in \mathbb{R}[x]$ zadoščajo enakosti

$$(x^3 + x^2 + x + 1)a(x) + (x^4 + x^3 - x - 1)b(x) = x + 1?$$

Napiši vse rešitve!

Bilinearne forme

438. naloga ◇ Dokaži, da vsaka matrika $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ določa bilinearno formo ϕ_A na prostoru stolpcev $\mathbb{F}^{n\times 1}$ s predpisom

$$\phi_A(x, y) := x^t A y.$$

439. naloga ◇ Bodi $\phi\colon V \times V \to \mathbb{F}$ bilinearna forma na končnorazsežnem vektorskem prostoru V nad $\mathbb{F}$ in $\Omega := \{v_1, \ldots, v_n\}$ urejena baza tega prostora. Definiraj matriko $\mathrm{M}_\Omega(\phi)$ forme ϕ v urejeni bazi Ω takole:

$$\mathrm{M}_\Omega(\phi) := \begin{bmatrix} \phi(v_1,v_1) & \phi(v_1,v_2) & \cdots & \phi(v_1,v_n) \\ \phi(v_2,v_1) & \phi(v_2,v_2) & \cdots & \phi(v_2,v_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(v_n,v_1) & \phi(v_n,v_2) & \cdots & \phi(v_n,v_n) \end{bmatrix}.$$

Poišči matriko $\mathrm{M}_\Omega(\phi)$ v naslednjih primerih:

(a) $V := \mathbb{R}^2$; $\mathbb{F} := \mathbb{R}$; Ω je običajna urejena baza v $\mathbb{R}^2$;
$\phi((a_1, a_2), (b_1, b_2)) := a_1 b_2 - a_2 b_1$.

(b) $V := \mathbb{R}^3$; $\mathbb{F} := \mathbb{R}$; Ω je običajna urejena baza v $\mathbb{R}^3$;
$\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) := 6x_2y_2 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2 - 5x_3y_3$.

(c) $V := \mathbb{R}_3[x]$; $\mathbb{F} := \mathbb{R}$; Ω je običajna urejena baza v $\mathbb{R}_3[x]$;
$\phi(p, q) = \int_{-1}^{1} tp(t)q(t)dt$.

(d) $V := \mathbb{F}^5$; $\mathbb{F} := \{0, 1\}$ je polje z dvema elementoma;
$\Omega := \{(1,0,0,0,0), (1,1,0,0,0), (1,1,1,0,0), (1,1,1,1,0), (1,1,1,1,1)\}$;
$\phi(x, y) := \sum_{i=1}^{5} x_i y_i$.

440. naloga ◇◇ Naj bodo V, $\mathbb{F}$, Ω in ϕ kot v nalogi 439. Preveri, da za vsaka vektorja $u, v \in V$ velja

$$\phi(u, v) = \mathrm{X}_\Omega(u)^t \mathrm{M}_\Omega(\phi) \mathrm{X}_\Omega(v).$$

(Pri tem enačimo $\mathbb{F}$ in $\mathbb{F}^{1\times 1}$.)

441. naloga ◇◇ Naj bosta Ω in Π urejeni bazi končnorazsežnega prostora V in ϕ bilinearna forma na V. Dokaži, da velja

$$\mathrm{M}_\Pi(\phi) = P^t \mathrm{M}_\Omega(\phi) P,$$

kjer je $P := \mathrm{M}_\Omega^\Pi(\mathcal{I})$ prehodna matrika z baze Π na bazo Ω.

442. naloga ◇ Bodi $\mathbb{F}$ tako polje, da $1 + 1 \neq 0$, in V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$. Dokaži, da je vsaka bilinearna forma na prostoru V vsota simetrične in alternirajoče bilinearne forme.

443. naloga ◇◇ Poišči poljubno ortogonalno bazo prostora $\mathbb{R}^3$ glede na simetrično bilinearno formo ϕ, ki ji v običajni urejeni bazi pripada simetrična matrika

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Določi pozitivni in ničelni indeks te forme. Ali je forma ϕ pozitivno definitna?

444. naloga ◇◇◇ Končnorazsežni vektorski prostor $V \neq 0$ nad poljem, v katerem je $1+1 \neq 0$, je opremljen s simetrično bilinearno formo ϕ. Dokaži, da obstaja pravokotna baza prostora V za formo ϕ.

445. naloga ◇ Bodi V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, $1+1 \neq 0$. Preslikava $\mathcal{Q}$: $V \to \mathbb{F}$ je kvadratna forma na prostoru V, če obstaja taka simetrična bilinearna forma ϕ na prostoru V, da je $\mathcal{Q}(v) = \phi(v,v)$ za vsak vektor $v \in V$. Kako pri dani kvadratni formi $\mathcal{Q}$ poiščeš predpis, po katerem deluje pripadajoča bilinearna forma ϕ?

446. naloga ◇ Poišči kanonsko obliko realne kvadratne forme

$$\mathcal{Q}(x,y,z) := 4xz + 4y^2$$

glede na obrnljive ter glede na ortogonalne transformacije. V obeh primerih napiši, kako se nove koordinate izražajo s starimi.

447. naloga ◇ Z ortogonalnimi transformacijami prevedi realno kvadratno formo $\mathcal{Q}$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{Q}(x,y,z) := 13x^2 + y^2 + 4z^2 - 12xz,$$

v obliko s samimi kvadratnimi členi. Poišči polosi elipsoida v $\mathbb{R}^3$, ki ga določa enačba

$$\mathcal{Q}(x,y,z) = 1.$$

448. naloga ◇ Dana je realna kvadratna forma $\mathcal{Q}$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{Q}(x,y,z) := 11x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 4xz + 16xy - 20zy.$$

Ali jo lahko s primerno

(a) ortogonalno transformacijo prevedemo na obliko $9\xi^2 - 9\eta^2 + 18\zeta^2$?
(b) obrnljivo transformacijo prevedemo na obliko $\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2$?

449. naloga ◇◇◇ Naj bo ϕ bilinearna forma na končnorazsežnem vektorskem prostoru V nad poljem $\mathbb{F}$. Za vsako neprazno množico $S \subseteq V$ definiramo množici

$$\begin{aligned} S^{\perp} &:= \{v \in V \mid \phi(u,v) = 0 \text{ za vsak } u \in S\}, \\ S^{\top} &:= \{v \in V \mid \phi(v,u) = 0 \text{ za vsak } u \in S\}. \end{aligned}$$

Dokaži, da sta $S^{\perp}$ in $S^{\top}$ podprostora prostora V. Dokaži tudi, da velja

$$\operatorname{rang}(\phi) = \dim V - \dim V^{\perp} = \dim V - \dim V^{\top}, \tag{36}$$

in da je $\dim V^{\perp} = \dim V^{\top}$.

450. naloga ◇◇◇ Končnorazsežni vektorski prostor $V \neq 0$ nad poljem, v katerem je $1+1 \neq 0$, je opremljen z alternirajočo bilinearno formo ϕ. Dokaži, da obstaja taka urejena baza Ω prostora V, da pripada formi ϕ v tej bazi matrika oblike

$$\mathrm{M}_{\Omega}(\phi) = \left[\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & & & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & & & \\ & & -1 & 0 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & 0 & 1 & & & \\ & & & & & -1 & 0 & & & \\ & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 0 \end{array}\right].$$

To matriko imenujemo kanonska matrika alternirajoče bilinearne forme ϕ.

451. naloga ◇◇ Dana je preslikava ϕ: $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$\phi(x,y) := x_1y_2 - x_1y_3 - x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_3y_2$$

za vsaka $x = (x_1,x_2,x_3)$ in $y = (y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3$. Dokaži, da je ϕ alternirajoča bilinearna forma, poišči njeno kanonsko matriko ter pripadajočo bazo.

452. naloga ◇ Bodi ϕ alternirajoča bilinearna forma na $\mathbb{R}^3$. Dokaži, da obstaja tak $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, da za vsaka $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ velja $\phi(\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x},\vec{y},\vec{a})$. Pri tem $(\cdot,\cdot,\cdot)$ označuje mešani produkt na $\mathbb{R}^3$.

Rešitve nalog

Geometrija

Rešitev 1. naloge

Označi središča stranic $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ in $\overline{DA}$ zaporedoma s P, Q, R in S. Izrazi

$$\overrightarrow{SP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{RQ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

Ker je

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0},$$

je

$$\overrightarrow{SP} - \overrightarrow{RQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}\right) = \vec{0},$$

in zato je $\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{RQ}$. Torej sta stranici $\overline{SP}$ in $\overline{RQ}$ vzporedni in enako dolgi.

Podobno dokažeš še enakost $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$. Spet sklepaš, da sta stranici $\overline{PQ}$ in $\overline{RS}$ vzporedni in enako dolgi. Zato je štirikotnik $PQRS$ paralelogram.

Rešitev 2. naloge

Utemelji verigo ekvivalenc

$$\begin{aligned}
|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| &\iff |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2 \\
&\iff (\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 \\
&\iff \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 \\
&\iff 4\vec{a}\vec{b} = 0 \\
&\iff \vec{a}\vec{b} = 0.
\end{aligned}$$

Skleni: enakost $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ velja natanko tedaj, ko sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ pravokotna.

Opomba *Geometrijska ponazoritev: nariši paralelogram, ki ga razpenjata vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Njegovi diagonali sta enako dolgi natanko tedaj, ko je ta paralelogram pravokotnik. (Pri tem geometrijskem tolmačenju je treba posebej obravnavati primer, ko je en od vektorjev $\vec{a}$ ali $\vec{b}$ enak nič.)*
Pomni: $|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$.

⊳⊳⊳ 3.

Rešitev 3. naloge

1. način. Ker velja $|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$, je smiselno preučevati kvadrate absolutnih vrednosti. Izračunaj in oceni

$$\begin{aligned}
|\vec{a} + \vec{b}|^2 |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (\vec{a} + \vec{b})^2 (\vec{a} - \vec{b})^2 \\
&= (\vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2)(\vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2) \\
&= ((\vec{a}^2 + \vec{b}^2) + 2\vec{a}\vec{b})((\vec{a}^2 + \vec{b}^2) - 2\vec{a}\vec{b}) \\
&= (\vec{a}^2 + \vec{b}^2)^2 - (2\vec{a}\vec{b})^2 \\
&\leq (\vec{a}^2 + \vec{b}^2)^2 \\
&= (|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2)^2.
\end{aligned}$$

Koreni začetek in konec gornje verige, pa dobiš iskano neenakost.

V (1) velja enakost natanko tedaj, ko v gornji verigi nastopa enačaj namesto neenačaja. To pa je tedaj in le tedaj, ko je $(2\vec{a}\vec{b})^2 = 0$, torej, ko sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ pravokotna.

2. način. Označi $a := |\vec{a}|$, $b := |\vec{b}|$, $e := |\vec{a}+\vec{b}|$, $f := |\vec{a}-\vec{b}|$. Torej dokazuješ neenakost

$$ef \le a^2 + b^2.$$

Slednja je zaradi paralelogramske zveze $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$ enakovredna neenakosti

$$2ef \le e^2 + f^2$$

oziroma neenakosti

$$0 \le (e-f)^2,$$

ki velja za vsak $e, f \in \mathbb{R}$. Preveri, da v zadnji neenakosti velja enakost natanko tedaj, ko je $e = f$, in uporabi nalogo 2.

⊳⊳⊳ 2.

Rešitev 4. naloge

Računaj

$$\begin{aligned}\vec{m} \times \vec{n} &= (\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) \times (\nu\vec{a} + o\vec{b})\\ &= \lambda\vec{a} \times \nu\vec{a} + \lambda\vec{a} \times o\vec{b} + \mu\vec{b} \times \nu\vec{a} + \mu\vec{b} \times o\vec{b}\\ &= \lambda\vec{a} \times o\vec{b} + \mu\vec{b} \times \nu\vec{a}\\ &= \lambda\vec{a} \times o\vec{b} - \nu\vec{a} \times \mu\vec{b}\\ &= \lambda o(\vec{a} \times \vec{b}) - \nu\mu(\vec{a} \times \vec{b})\\ &= (\lambda o - \nu\mu)(\vec{a} \times \vec{b}),\end{aligned}$$

kjer upoštevaš $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$, $\vec{b} \times \vec{b} = \vec{0}$ in $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$. Zato je

$$|\vec{m} \times \vec{n}| = |\lambda o - \nu\mu||\vec{a} \times \vec{b}| = \left| \begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ \nu & o \end{vmatrix} \right| \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

V zadnjem izrazu je uporabljen zapis s pomočjo determinante.

Opomba *Premisli, kakšno zvezo ima ta naloga z izrekom o substituciji v dvojnem integralu, ki ga srečaš pri analizi.*

⊳⊳⊳ 5.

Rešitev 5. naloge

1. način. ($\Rightarrow$). Naj bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna in naj za neka skalarja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ velja

$$\alpha(\vec{a} - \vec{b}) + \beta(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{0}.$$

Gornjo enakost preoblikuj v

$$(\alpha + \beta)\vec{a} + (\beta - \alpha)\vec{b} = \vec{0}.$$

Iz linearne neodvisnosti vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sledi

$$\alpha + \beta = 0, \quad \beta - \alpha = 0,$$

odtod pa $\alpha = 0$ in $\beta = 0$. Torej sta vektorja $\vec{a} - \vec{b}$ in $\vec{a} + \vec{b}$ linearno neodvisna.

($\Leftarrow$). Naj bosta $\vec{a} - \vec{b}$ in $\vec{a} + \vec{b}$ linearno neodvisna in naj za neka skalarja $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ velja

$$\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0}.$$

Gornjo enakost preoblikuj v

$$\frac{\lambda - \mu}{2}(\vec{a} - \vec{b}) + \frac{\lambda + \mu}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{0}.$$

Iz linearne neodvisnosti vektorjev $\vec{a} - \vec{b}$ in $\vec{a} + \vec{b}$ sledi

$$\frac{\lambda - \mu}{2} = 0, \quad \frac{\lambda + \mu}{2} = 0,$$

odtod pa $\lambda = 0$ in $\mu = 0$. Torej sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna.

2. način. Vektorja iz $\mathbb{R}^3$ sta linearno neodvisna natanko tedaj, ko je njun vektorski produkt neničeln. Zato iz enakosti

$$|(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})| = 2|\vec{a} \times \vec{b}|,$$

(ki jo izpelješ iz pravil vektorskega produkta ali uporabiš nalogo 4) sklepaš, da trditev drži.

Opomba *Oglej si opombo k rešitvi naloge 12.*

⊳⊳⊳ 4., 12.

Rešitev 6. naloge

1. način reševanja. Napiši

$$1 = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})| = |\sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})|$$

in sklepaj.

2. način reševanja. Naj bosta vektorja $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ enotska in naj ima paralelogram, ki ga napenjata, ploščino 1, torej

$$|\vec{a}| = 1, \quad |\vec{b}| = 1, \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = 1.$$

Potem velja

$$\begin{aligned}|\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}))^2\\ &= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1 - (\sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}))^2)\\ &= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(\sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}))^2)\\ &= |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - |\vec{a} \times \vec{b}|^2\\ &= 1 - 1 = 0.\end{aligned}$$

Zato je $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, torej sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ pravokotna.

Opomba *Pri 2. načinu reševanja dokažeš Lagrangeovo enakost $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + (\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2$, ki jo poznaš že iz srednje šole.*

Rešitev 7. naloge

Izrazi vektorja $\vec{a} = \frac{\vec{p}+2\vec{q}}{3}$ in $\vec{b} = \frac{\vec{p}-\vec{q}}{3}$. Potem je

$$\cos \sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\frac{\vec{p}^2-2\vec{q}^2}{9}}{\sqrt{\frac{\vec{p}^2+4\vec{q}^2}{9}}\sqrt{\frac{\vec{p}^2+\vec{q}^2}{9}}} = -\frac{\sqrt{10}}{10},$$

odtod pa $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \arccos(-\sqrt{10}/10)$. Pri računanju seveda upoštevaš enakosti $\vec{p}\cdot\vec{q} = 0$, $\vec{p}^2 = 1$, $\vec{q}^2 = 1$ in $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

⊳⊳⊳ 8., 319.

Rešitev 8. naloge

Prostornina paralelepipeda je

$$V = |(\vec{m},\vec{n},\vec{o})| = |(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}, 2\vec{a}+\vec{c}, \vec{a}+\vec{b}+\vec{c})| = |2(\vec{a},\vec{b},\vec{c})| = 2|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}| =$$
$$= 2|(\vec{a}\times\vec{b})|\cdot|\vec{c}|\cdot|\cos\sphericalangle(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c})| = 2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot|\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})|\cdot|\cos\sphericalangle(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c})| =$$
$$= 2\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = 3\sqrt{3}.$$

V računu upoštevaj, da je kot med ravnino, ki jo napenjata vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, in vektorjem $\vec{c}$ komplementaren kotu med vektorjema $\vec{a}\times\vec{b}$ in $\vec{c}$ ali $\vec{a}\times\vec{b}$ in $-\vec{c}$. Zato je bodisi $\sphericalangle(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}) = \pi/2-\pi/6 = \pi/3$ bodisi $\sphericalangle(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}) = \pi/2+\pi/6 = 2\pi/3$.

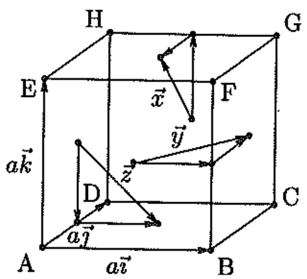
Opomba *Pomni:* $(\vec{a}+\vec{b},\vec{c},\vec{d}) = (\vec{a},\vec{c},\vec{d})+(\vec{b},\vec{c},\vec{d})$, $(\vec{a},\vec{b}+\vec{c},\vec{d}) = (\vec{a},\vec{b},\vec{d})+(\vec{a},\vec{c},\vec{d})$, $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}+\vec{d}) = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})+(\vec{a},\vec{b},\vec{d})$ *za poljubne* $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}\in\mathbb{R}^3$.

⊳⊳⊳ 7., 9.

Rešitev 9. naloge

Izberi naprimer vektorje, kot kaže slika 1. Postavi izhodišče koordinatnega sistema v točko A. Vse opisane vektorje izrazi z vektorji $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$: očitno je

$$\vec{x} = \frac{a}{2}(\vec{k}-\vec{\jmath}),\ \vec{y} = \frac{a}{2}(\vec{\imath}+\vec{\jmath}) \text{ in } \vec{z} = \frac{a}{2}(\vec{\imath}-\vec{k}).$$



Slika 1

Ker je prostornina piramide enaka šestini prostornine paralelepipeda, ki ga napenjajo isti vektorji, velja

$$V = |\frac{1}{6}(\vec{x},\vec{y},\vec{z})| = \frac{a^3}{48}|(\vec{k}-\vec{\jmath},\vec{\imath}+\vec{\jmath},\vec{\imath}-\vec{k})| = |\frac{a^3}{48}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}| = \frac{a^3}{24}.$$

Opomba *Premisli, zakaj je prostornina piramide, ki jo določajo trije vektorji, enaka šestini prostornine paralelepipeda, ki ga napenjajo isti vektorji.*
Opazi, da je rezultat neodvisen od načina izbire parov sosednih ploskev.

⊳⊳⊳ 8.

Rešitev 10. naloge

Označi z $\vec{v}_n$ vektor v (2). Če je $n = 2k$, potem, upoštevaje zvezo

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\vec{c})\vec{a},$$

dokažeš z indukcijo

$$\vec{v}_n = (-1)^k|\vec{a}|^{2k}(\vec{a}\times\vec{b}).$$

⊳⊳⊳ 50.

Rešitev 11. naloge

Preveri, da je mešani produkt $(\gamma\vec{a}-\alpha\vec{c}, \alpha\vec{b}-\beta\vec{a}, \beta\vec{c}-\gamma\vec{b})$ enak 0.

⊳⊳⊳ 12.

Rešitev 12. naloge

1. način reševanja. ($\Leftarrow$). Naj bodo $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ nekomplanarni (linearno neodvisni) in naj velja

$$\alpha(\vec{a}+\vec{b})+\beta(\vec{b}+\vec{c})+\gamma(\vec{c}+\vec{a}) = \vec{0}. \tag{37}$$

Preuredi gornjo enačbo v

$$(\alpha+\gamma)\vec{a}+(\alpha+\beta)\vec{b}+(\beta+\gamma)\vec{c} = \vec{0}. \tag{38}$$

Ker so $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ linearno neodvisni, je

$$\alpha+\gamma = 0,\quad \alpha+\beta = 0 \ \text{ in } \ \beta+\gamma = 0.$$

To pa je sistem treh linearnih enačb s tremi neznankami. Njegova edina rešitev je trojica $\alpha = 0$, $\beta = 0$ in $\gamma = 0$, zato so vektorji $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{c}+\vec{a}$ linearno neodvisni.
($\Rightarrow$). Predpostavi, da so vektorji $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{c}+\vec{a}$ nekomplanarni (linearno neodvisni). Poglej enačbo $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c} = \vec{0}$. Ali jo lahko preurediš v enačbo, kjer bodo nastopali vektorji $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{c}+\vec{a}$? V enačbah (37) in (38) dobiš idejo za zapis: $\lambda = \alpha+\gamma$, $\mu = \alpha+\beta$ in $\nu = \beta+\gamma$. Odtod izrazi

$$\alpha = \frac{\lambda+\mu-\nu}{2},\quad \beta = \frac{\mu+\nu-\lambda}{2},\quad \gamma = \frac{\lambda+\nu-\mu}{2}.$$

Ker so vektorji $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{c}+\vec{a}$ linearno neodvisni, velja

$$\alpha = 0,\quad \beta = 0,\quad \gamma = 0.$$

Rešitev tega sistema je edino trojka $\lambda = \mu = \nu = 0$. To pa pomeni, da so vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ nekomplanarni (linearno neodvisni).
2. način reševanja. Premisli, da lahko v množici linearno neodvisnih vektorjev pomnožiš katerikoli vektor z neničelnim skalarjem, pa se linearna neodvisnost ohrani. Prav tako lahko poljubnemu vektorju prištejeŠ poljuben drug vektor iz množice. Torej lahko narediš verigo sklepov: $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ linearno neodvisni $\iff$ $\vec{a},\vec{b}+\vec{a},\vec{c}$ linearno neodvisni $\iff$ $\vec{a},\vec{b}+\vec{a},\vec{c}+\vec{a}$ linearno neodvisni $\iff$ $-2\vec{a},\vec{b}+\vec{a},\vec{c}+\vec{a}$ linearno neodvisni $\iff$ $\vec{b}-\vec{a},\vec{b}+\vec{a},\vec{c}+\vec{a}$ linearno neodvisni $\iff$ $\vec{b}+\vec{c},\vec{b}+\vec{a},\vec{c}+\vec{a}$ linearno neodvisni. To pa je bilo treba dokazati!

3. način reševanja. Ker se nahajaš v $\mathbb{R}^3$, lahko uporabiš edinstven kriterij za nekomplanarnost (linearno neodvisnost) v tem prostoru. To je mešani produkt treh vektorjev, ki je različen od 0 natanko takrat, ko so vektorji nekomplanarni. Izračunaj

$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b},\vec{b}+\vec{c},\vec{c}+\vec{a}) &= (\vec{a}+\vec{b},\vec{b}+\vec{c},\vec{c}) + (\vec{a}+\vec{b},\vec{b}+\vec{c},\vec{a})\\ &= (\vec{a}+\vec{b},\vec{b},\vec{c}) + (\vec{a}+\vec{b},\vec{c},\vec{c}) + (\vec{a}+\vec{b},\vec{b},\vec{a}) + (\vec{a}+\vec{b},\vec{c},\vec{a})\\ &= (\vec{a},\vec{b},\vec{c}) + (\vec{b},\vec{b},\vec{c}) + (\vec{a},\vec{b},\vec{a}) + (\vec{b},\vec{b},\vec{a}) + (\vec{a},\vec{c},\vec{a}) + (\vec{b},\vec{c},\vec{a})\\ &= 2(\vec{a},\vec{b},\vec{c}).\end{aligned}$$

V gornjem računu so enaki nič mešani produkti, v katerih nastopata vsaj dva ista vektorja. Torej velja

$$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{b},\ \vec{b}+\vec{c},\ \vec{c}+\vec{a} \text{ so nekomplanarni} &\iff (\vec{a}+\vec{b},\vec{b}+\vec{c},\vec{c}+\vec{a}) \neq 0\\ &\iff (\vec{a},\vec{b},\vec{c}) \neq 0 \iff \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} \text{ so nekomplanarni.}\end{aligned}$$

Opomba *Ne pozabi, da z mešanim produktom preprosto preskusiš linearno neodvisnost treh vektorjev v $\mathbb{R}^3$. V $\mathbb{R}^n$ prevzame vlogo mešanega produkta determinanta primerne matrike.*

Ali znaš posplošiti besedilo naloge na n-razsežni vektorski prostor? Ali znaš rešiti tako posplošeno nalogo?

Postopek, ki je opisan v 2. načinu reševanja, ima pomemben teoretični pomen. Tega si oglej v nalogi 73.

▷▷▷ 5., 11., 73.

Rešitev 13. naloge

1. način reševanja. Gornji zapis premice p je okrajšava za eksaktni zapis

$$p = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ 2 - x = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{3}\}.$$

Podobno je za premico q:

$$q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ \frac{x-1}{2} = \frac{2-y}{4} = \frac{2-z}{6}\}.$$

Naloga torej sprašuje, ali sta množici p in q enaki.

Preveriti moraš $p \subseteq q$ in $q \subseteq p$, od koder potem sledi $p = q$. Najprej $p \subseteq q$: Vzemi poljuben $(x,y,z) \in p$. Potem je $2 - x = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{3} (= t)$, zato $x = 2 - t$, $y = 2t$ in $z = 3t - 1$ za neki $t \in \mathbb{R}$. Iščeš tak $s \in \mathbb{R}$, da bo veljalo $\frac{x-1}{2} = \frac{2-y}{4} = \frac{2-z}{6} = s$ oziroma $x = 2s + 1$, $y = 2 - 4s$ in $z = 2 - 6s$. Dobiš sistem šestih linearnih enačb z dvema neznankama t in s. Sistem je rešljiv in njegova rešitev je $s = (1-t)/2$. Zato pripada točka (x,y,z) tudi množici q.

Ko dokazuješ $q \subseteq p$, lahko uporabiš že dobljeno zvezo med s in t, torej $t = 1 - 2s$.

Ker torej velja $p \subseteq q$ in $q \subseteq p$, je končno $p = q$.

2. način reševanja. Premici sta enaki natanko takrat, ko sta vzporedni in se sekata. Iz podatkov prebereš smerni vektor $\vec{p} = (-1,2,3)$ premice p, točko $P(2,0,-1) \in p$, smerni vektor $\vec{q} = (2,-4,-6)$ premice q in točko $Q(1,2,2) \in q$. Ker je $\vec{p} || \vec{q}$, sta premici p in q vzporedni. Iz $P \in q$ sledi $p \cap q \neq \emptyset$, torej $p = q$.

Rešitev 14. naloge

Po definiciji daljice je

$$\overline{AB} = \{T \in \mathbb{R}^3 |\ \vec{r}_T = \vec{r}_A + u(\vec{r}_B - \vec{r}_A) \text{ za } u \in [0,1]\},$$

premica p skozi A in B pa je

$$p = \{T \in \mathbb{R}^3 |\ \vec{r}_T = \vec{r}_A + u(\vec{r}_B - \vec{r}_A) \text{ za } u \in \mathbb{R}\}.$$

- Oglej si točko P. Nastavi enačbo $\vec{r}_P = \vec{r}_A + u(\vec{r}_B - \vec{r}_A)$, torej

  $$(2,4,-1) = (2,3,-1) + u(2,-4,2), \quad u \in \mathbb{R}.$$

  Ker enačba ni rešljiva, točka P ne leži na premici p, in zato tudi ne na daljici $\overline{AB}$.

- Oglej si točko Q. Spet nastavi enačbo $\vec{r}_Q = \vec{r}_A + u(\vec{r}_B - \vec{r}_A)$, torej

  $$(3,1,0) = (2,3,-1) + u(2,-4,2), \quad u \in \mathbb{R}.$$

  Odtod dobiš $u = 1/2$. Ker je $u \in [0,1]$, točka Q leži na daljici $\overline{AB}$, in zato tudi na premici p.

- Oglej si točko R. Nastavi $\vec{r}_R = \vec{r}_A + u(\vec{r}_B - \vec{r}_A)$, torej

  $$(-2,11,-5) = (2,3,-1) + u(2,-4,2), \quad u \in \mathbb{R}.$$

  Odtod dobiš $u = -2$. Ker je $u \in \mathbb{R}$ in $u \notin [0,1]$, točka R leži na premici p, toda ne na daljici $\overline{AB}$.

Rešitev 15. naloge

1. način reševanja. Iz podatkov prebereš, da gre ravnina Π skozi točke

$$A(-2,0,0), \quad B(0,5,0), \quad C(0,0,-7).$$

Zato je $\vec{n}_\Pi = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (2,5,0) \times (2,0,-7) = (-35,14,-10)$ in

$$\Pi\colon\ -35x + 14y - 10z = 70.$$

2. način reševanja. Če poznaš odsekovno obliko enačbe ravnine v $\mathbb{R}^3$, lahko neposredno zapišeš

$$\Pi\colon\ \frac{x}{-2} + \frac{y}{5} + \frac{z}{-7} = 1.$$

Opomba *Razmisli, da je enačba ravnine Π neodvisna od tega, ali vzameš za njen normalni vektor izračunani vektor $(-35,14,-10)$ ali pa kak njegov neničelni vzporedni vektor.*

Rešitev 16. naloge

1. način reševanja. Zapiši enačbo Ω: $ax + by + cz = d$ iskane ravnine. Ker je $\Omega \perp \Sigma$, velja

$$0 = \vec{n}_\Omega \cdot \vec{n}_\Sigma = (a,b,c)(0,1,2) = b + 2c. \tag{39}$$

Izberi si poljubni točki A in B v preseku $\Pi \cap \Sigma$, naprimer $A(1,3,0)$ in $B(1,1,1)$. Ker točki A in B pripadata ravnini Ω, velja

$$a + 3b = d, \quad a + b + c = d. \tag{40}$$

Iz enačb (39) in (40) sklepaj $b = 0$, $c = 0$ in $a = d$. Dobiš enačbo Ω: $ax = a$ oziroma Ω: $x = 1$, saj $a \neq 0$.

2. način reševanja. Zapiši normalna vektorja $\vec{n}_\Pi = (1,1,2)$ in $\vec{n}_\Sigma = (0,1,2)$ ravnin Π oziroma Σ. Premica $p := \Pi \cap \Sigma$ ima smerni vektor $\vec{p} = \vec{n}_\Pi \times \vec{n}_\Sigma = (0,-2,1)$. Normalni vektor $\vec{n}_\Omega$ ravnine Ω je pravokoten na $\vec{n}_\Sigma$ in na $\vec{p}$. Ker je

$$\vec{n}_\Sigma \times \vec{p} = (5,0,0),$$

smeš vzeti $\vec{n}_\Omega = (1,0,0)$. Upoštevaj še, da točka $T(1,1,1)$ pripada premici $p = \Pi \cap \Sigma$, zato tudi ravnini Ω, in sklepaj, da ima Ω enačbo Ω: $\vec{n}_\Omega(\vec{r} - \vec{r}_T) = 0$ oziroma

$$\Omega\colon\ x = 1.$$

3. način reševanja. Ravnina, ki vsebuje premico $p := \Pi \cap \Sigma$, je bodisi enaka ravnini Σ bodisi ima enačbo

$$(x + y + 2z - 4) + \lambda(y + 2z - 3) = 0 \tag{41}$$

za neki $\lambda \in \mathbb{R}$. Ker $\Omega \neq \Sigma$, velja

$$\Omega\colon\ x + (1+\lambda)y + 2(1+\lambda)z = 4 + 3\lambda$$

za neki $\lambda \in \mathbb{R}$. Poiskati moraš λ. Zapiši normalni vektor

$$\vec{n}_\Omega = (1, 1+\lambda, 1+\lambda).$$

Iz pravokotnosti ravnin Ω in Σ sledi

$$0 = \vec{n}_\Omega \cdot \vec{n}_\Sigma = (1, 1+\lambda, 1+\lambda)(0,1,2) = 3 + 3\lambda$$

oziroma $\lambda = -1$. Odtod izračunaj Ω: $x = 1$.

Opomba *Pri 1. načinu reševanja določiš iz pogojev, ki jim zadošča ravnina Ω, koeficiente njene enačbe. Pri tem ne potrebuješ geometrijske predstave.*
Pri 3. načinu reševanja opazi uporaben trik: z enačbama ravnin, ki določata neko premico, enostavno izraziš vse ravnine, ki to premico vsebujejo. Ali znaš trik utemeljiti?

⋙ 19.

Rešitev 17. naloge

Ker je $T \in \Pi$, je $y_0 = -2$ in $T(4,-2,5)$.

(a) Premica p gre skozi točko $P \in p' \cap \Pi$. Izračunaj njene koordinate $P(6,3,9)$, nato še smerni vektor $\vec{p} = \overrightarrow{TP} = (2,5,4)$. Premica p ima enačbo

$$p\colon\ \frac{x-4}{2} = \frac{y+2}{5} = \frac{z-5}{4}.$$

(b) *1. način reševanja.* Premica q leži na ravnini Π natanko takrat, ko jo seka in ko za njen smerni vektor $\vec{q}$ velja $\vec{n}_\Pi \cdot \vec{q} = 0$. Odtod dobiš kandidate za $\vec{q}$: to so vsi vektorji oblike $\vec{q} = (2q_2 - 2q_3, q_2, q_3)$, kjer q_2, q_3 pretečeta vsa realna števila. Iz zapisa ravnine Δ prebereš $\vec{n}_\Delta = (0,1,0)$. Pogoj o vzporednosti se prevede na vektorje takole: $0 = \vec{n}_\Delta \cdot \vec{q} = q_2$. Torej $\vec{q} = (-2q_3, 0, q_3)$. Ker te zanima samo smer vektorja $\vec{q}$, smeš izbrati $\vec{q} := (-2,0,1)$. Ker gre premica q skozi točko T, dobiš

$$q\colon\ \frac{x-4}{-2} = z - 5,\ y = -2.$$

2. način reševanja. Ker je premica q vzporedna z ravninama Π in Δ, je smerni vektor $\vec{q}$ premice q pravokoten na vektorja $\vec{n}_\Pi = (1,-2,2)$ in $\vec{n}_\Delta = (0,1,0)$. Zato smeš vzeti

$$\vec{q} := \vec{n}_\Pi \times \vec{n}_\Delta = (-2,0,1).$$

Ker je $T \in q$, dobiš isto enačbo kot prej.

(c) Premisli, da zadošča napeljati premico r skozi točko T in točko $T' \in \Pi$, ki je najbližja izhodišču! Kako poiščeš točko T'? Daljica OT' je pravokotna na ravnino Π, torej velja $T' \in \Pi \cap n$, kjer je n premica skozi izhodišče O in s smernim vektorjem $\vec{n}_\Pi$. Preveri, da je n: $x = \frac{y}{-2} = \frac{z}{2}$, $T'(2,-4,4)$ in

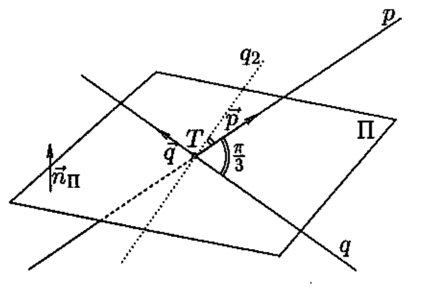
$$r\colon\ \frac{x-4}{2} = \frac{y+2}{2} = z - 5.$$

⋙ 18.

Rešitev 18. naloge

Glej sliko 2. Označi iskano premico s q, njen smerni vektor s $\vec{q} = (a,b,c)$ ter predpostavi, da je $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ (zanima te samo smer vektorja $\vec{q}$, zato smeš privzeti, da je njegova dolžina enaka 1). Ker premica q leži v ravnini Π, je $\vec{q} \perp \vec{n}_\Pi$, zato $0 = \vec{q} \cdot \vec{n}_\Pi = (a,b,c) \cdot (1,0,-3) = a - 3c$. Ker je $\sphericalangle(p,q) = \pi/3$, je

$$\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} = |\cos\sphericalangle(\vec{p},\vec{q})| = \frac{|\vec{p}\cdot\vec{q}|}{|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|} = \frac{|2a+c|}{\sqrt{5}}.$$



Slika 2

Iz gornjih pogojev dobiš tri enačbe s tremi neznankami:

$$|2a + c| = \frac{\sqrt{5}}{2}, \qquad a - 3c = 0, \qquad a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Rešitve so štiri in določajo dva para vzporednih si vektorjev. Premisli, da je dovolj vzeti vektor

$$\vec{q}_1 := \left(\frac{3\sqrt{5}}{14}, \frac{\sqrt{146}}{14}, \frac{\sqrt{5}}{14}\right) \quad \text{ali} \quad \vec{q}_2 := \left(\frac{3\sqrt{5}}{14}, -\frac{\sqrt{146}}{14}, \frac{\sqrt{5}}{14}\right).$$

Premica q seka premico p, zato gre skozi točko $T \in p \cap \Pi = \{(1,4,0)\}$. Končno lahko sestaviš dve rešitvi: skozi točko T v smeri $\vec{q}_1$ ali $\vec{q}_2$ napelješ premico q.

Opomba *Opazi, da je kot $\sphericalangle(\vec{p},\vec{q})$ med vektorjema $\vec{p}$ in $\vec{q}$ enak ali suplementaren kotu $\sphericalangle(p,q)$ med premicama p in q.*
Za kakšne kote je naloga rešljiva? Koliko rešitev ima tedaj?

⋙ 17.

Rešitev 19. naloge

1. način reševanja.

(a) Normalna vektorja ravnin Ω in Π označi z

$$\vec{n}_\Omega = (3,1,-1), \quad \vec{n}_\Pi = (1,-2,2).$$

Presek podanih ravnin je premica p, ki vsebuje točko $P(1,1,0)$ in ki je vzporedna z vektorjem

$$\vec{n}_\Omega \times \vec{n}_\Pi = (0,-7,-7);$$

torej je vektor $\vec{p} := (0,1,1)$ vzporeden s premico p. Ravnina Σ vsebuje p in je vzporedna z vektorjem

$$\vec{s} = \vec{r}_T - \vec{r}_P = (0,1,0),$$

saj sta $T, P \in \Sigma$. Zato je vektor

$$\vec{n}_\Sigma = \vec{p} \times \vec{s} = (-1,0,0)$$

pravokoten na Σ. Ravnina Σ ima vektorsko enačbo

$$\Sigma\colon\ \vec{n}_\Sigma \cdot \vec{r} = d$$

za neki $d \in \mathbb{R}$, ki ga lahko določiš iz pogoja $T \in \Sigma$. Torej je

$$\Sigma\colon\ x = 1.$$

(b) Ker je ravnina Σ pravokotna na os x in ker S leži na tej osi, dobiš zrcalno točko $S'(-1,0,0)$ brez težav. Zrcaljenja se lahko lotiš tudi računsko, kakor v nalogi 21.

Tu sta še dve poti do enačbe ravnine Σ.
2. način reševanja. Ravnina, ki vsebuje presek ravnin $\Omega \cap \Pi$, je bodisi enaka ravnini Π bodisi ima enačbo

$$(3x + y - z - 4) + \lambda(x - 2y + 2z + 1) = 0 \tag{42}$$

za neki $\lambda \in \mathbb{R}$. Ker točka T pripada iskani ravnini Σ in ne ravnini Π, velja $\Sigma \neq \Pi$, torej Σ ima enačbo (42) za neki $\lambda \in \mathbb{R}$, ki ga moraš še poiskati. Iz $T \in \Sigma$ dobiš

$$(3 \cdot 1 + 2 - 4) + \lambda(1 - 4 + 1) = 0$$

oziroma $\lambda = 1/2$. Zato je

$$\Sigma\colon\ (3x + y - z - 4) + \frac{1}{2}(x - 2y + 2z + 1) = 0$$

oziroma $\Sigma\colon\ \frac{7}{2}x = \frac{7}{2}$, ali preprostejše $\Sigma\colon\ x = 1$.
3. način reševanja. Zapiši enačbo $\Sigma\colon\ ax + by + cz = d$ iskane ravnine. Izberi si poljubni različni točki iz preseka $\Omega \cap \Pi$, naprimer $A(1,1,0)$ in $B(1,0,-1)$. Iz $A, B, T \in \Sigma$ dobiš linearen sistem treh enačb za štiri neznanke $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$a + b = d, \quad a - c = d, \quad a + 2b = d.$$

Sklepaj, da je $b = c = 0$ in $a = d$, odtod pa $\Sigma\colon\ x = 1$.

⋙ 16., 21.

Rešitev 20. naloge

Označi in izračunaj $\vec{a} := \overrightarrow{AB} = (0,3,6)$, $\vec{b} := \overrightarrow{BC} = (-3,0,-2)$, $\vec{c} := \overrightarrow{CD} = (0,-1,-2)$.

(a) $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (-1,2,2) - \frac{1}{3}(0,3,6) = (-1,2,2) - (0,1,2) = (-1,1,0)$. Torej je $D(-1,1,0)$.

(b) Trapez leži v neki ravnini Π. Njen normalni vektor je $\vec{n}_\Pi = \vec{a} \times \vec{b} = (0,3,6) \times (-3,0,-2) = (-6,-18,9)$. Ker je pri normalnem vektorju ravnine pomembna samo smer, ne pa njegova dolžina, smeš vzeti normalni vektor $\vec{n}'_\Pi = (-2,-6,3)$. Enačba ravnine je potem enaka

$$\vec{n}'_\Pi \cdot (\vec{r} - \vec{r}_A) = 0,$$

od koder dobiš

$$\Pi\colon\ -2x - 6y + 3z + 4 = 0.$$

(c) *1. način reševanja.* Ploščina trapeza je enaka $S = v\frac{|\vec{a}|+|\vec{c}|}{2}$, kjer je v višina trapeza. Ker je višina trapeza enaka razdalji med premicama p in q, ki nosita stranici a in c, velja $v = \mathrm{d}(C,p) = \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}|} = \frac{7}{\sqrt{5}}$. Končno dobiš $S = 14$.

2. način reševanja. Na stranici $\overline{AB}$ izberi točko E tako, da bo $\overrightarrow{EA} = \vec{c}$. Ploščina trapeza $ABCD$ je enaka vsoti ploščin paralelograma $AECD$ in trikotnika $\triangle EBC$, torej

$$S = |\vec{c} \times \vec{b}| + \frac{1}{2}|2\vec{c} \times \vec{b}| = 2|\vec{c} \times \vec{b}| = 14.$$

(d) Prostornina piramide je $V = Oh/3$, kjer je h višina na osnovno ploskev piramide, torej $h = \mathrm{d}(O,\Pi)$. Enačbo ravnine Π zapiši v normirani obliki, torej $\Pi\colon\ (-2x-6y+3z+4)/7 = 0$, od koder prebereš $h = 4/7$. Torej je $V = 8/3$.

Opomba *Če dvomiš v pravilnost svoje rešitve iskane enačbe ravnine, jo lahko preveriš tako, da pogledaš, ali ji ustrezajo podane točke!*

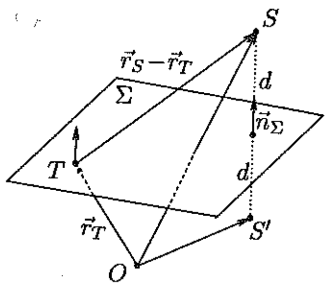
Rešitev 21. naloge

Glej sliko 3. Označi

$$d := \frac{\vec{n}_\Sigma(\vec{r}_S - \vec{r}_T)}{|\vec{n}_\Sigma|}.$$

Potem je $|d|$ razdalja od S do Σ. Ugotovi, kaj se skriva za predznakom števila d: če je $d = 0$, potem $S \in \Sigma$; če je $d > 0$, potem S leži v tistem polprostoru glede na Σ, kamor kaže vektor $\vec{n}_\Sigma$; če je $d < 0$, potem S leži v polprostoru, kamor kaže $-\vec{n}_\Sigma$. Zdaj sklepaj, da ima zrcalna točka S' krajevni vektor

$$\vec{r}_{S'} = \vec{r}_S - 2d\frac{\vec{n}_\Sigma}{|\vec{n}_\Sigma|} = \vec{r}_S - \frac{2\vec{n}_\Sigma(\vec{r}_S - \vec{r}_T)}{\vec{n}_\Sigma^2}\vec{n}_\Sigma.$$



Slika 3

▷▷▷ 19., 22., 25., 395.

Rešitev 22. naloge

Zgleduj se po nalogi 21 in sklepaj, da ima projekcija S' krajevni vektor

$$\vec{r}_{S'} = \vec{r}_S - \frac{\vec{n}_\Sigma(\vec{r}_S - \vec{r}_T)}{\vec{n}_\Sigma^2}\vec{n}_\Sigma.$$

▷▷▷ 21., 23., 24., 25.

Rešitev 23. naloge

Težišče T trikotnika $\triangle ABC$ ima krajevni vektor $\vec{r}_T = (\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C)/3$, torej je $T(2,-1,-2)$. Če z $\vec{n}_\Omega = (2,1,-2)$ in $\vec{n}_\Pi = (2,0,-1)$ označiš normalna vektorja ravnin Ω oziroma Π, potem je premica p vzporedna z vektorjem

$$\vec{n}_\Omega \times \vec{n}_\Pi = (-1,-2,-2),$$

zato smeš izbrati njen smerni vektor $\vec{p} = (1,2,2)$. Premica p ima torej kanonsko enačbo

$$p\colon\ x = 2 + t,\ y = -1 + 2t,\ z = -2 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ravnina Σ vsebuje tako p kot B, zato je vzporedna z vektorjema $\vec{p}$ in $\overrightarrow{BT}$. Ker je $\vec{p} \times \overrightarrow{BT} = (8,-4,0)$, smeš izbrati normalni vektor $\vec{n}_\Sigma = (2,-1,0)$ ravnine Σ. Upoštevaj še $B \in \Sigma$ in zapiši enačbo

$$\Sigma\colon\ 2x - y = 5.$$

Zaznamuj s q tisto pravokotnico na ravnino Σ, ki gre skozi C, torej

$$q\colon\ x = 2 + 2t,\ y = -2 - t,\ z = -2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Iskana projekcija C' točke C na Σ je ravno prebodišče premice q v ravnini Σ. Iz $C'(2+2t,-2-t,-2) \in \Sigma$ sledi $t = -1/5$ oziroma $C'(8/5,-9/5,-2)$.

Projekcijo C' lahko izračunaš tudi kot v nalogi 22.

▷▷▷ 22., 24.

Rešitev 24. naloge

1. način reševanja. Premisli, da za vsak $k \in \mathbb{R}$ enačba

$$\Sigma_k\colon\ (2x + y - z - 1) + k(x - 2z - 3) = 0$$

predstavlja ravnino, ki vsebuje premico p: če je točka $T(x,y,z)$ na premici p, ustreza obema enačbama, ki določata p, torej je tudi $T \in \Sigma_k$ za vsak $k \in \mathbb{R}$. Da je Σ_k enačba ravnine, vidiš iz preurejene enačbe:

$$\Sigma_k\colon\ (2+k)x + y + (-1-2k)z = 1 + 3k.$$

Iščeš tak $k \in \mathbb{R}$, da bosta ravnini Σ_k in Π pravokotni. Iz $\vec{n}_{\Sigma_k} \cdot \vec{n}_\Pi = 0$ sledi $k = -6$. Pravokotna projekcija premice p na ravnino Π je potem premica $p' = \Sigma_{-6} \cap \Pi$, torej

$$p'\colon\ 3x + y + z = 2,\ -4x + y + 11z = -17.$$

2. način reševanja. Ta rešitev je splošna in temelji na nalogi 22. Če vzameš poljubno točko $S \in p$ in jo projiciraš na ravnino Π, dobiš njeno pravokotno projekcijo S' takole

$$\vec{r}_{S'} = \vec{r}_S - \frac{\vec{n}_\Pi \cdot (\vec{r}_S - \vec{r}_T)}{\vec{n}_\Pi^2}\vec{n}_\Pi. \tag{43}$$

Ker želiš pravokotno projekcijo cele premice p, vstavi v (43) namesto $\vec{r}_S$ tekočo točko premice p, to je krajevni vektor $\vec{r}_P + t\vec{p}$, in dobiš

$$p'\colon\ \vec{r} = \vec{r}_P - \frac{\vec{n}_\Pi \cdot (\vec{r}_P - \vec{r}_T)}{\vec{n}_\Pi^2}\vec{n}_\Pi + t(\vec{p} - \frac{\vec{n}_\Pi \cdot \vec{p}}{\vec{n}_\Pi^2}\vec{n}_\Pi).$$

3. način reševanja. Če veš, da je pravokotna projekcija premice na ravnino spet premica, zadošča projicirati dve različni točki $P_1, P_2 \in p$ na ravnino Π. Prihraniš si nekaj računanja, če vzameš za točko P_1 prebodišče premice p z ravnino Π. Potem se točka P_1 projicira sama vase. Točko P_2 pa pravokotno projiciraš kot v nalogi 22. Na koncu skozi obe projicirani točki P_1' in P_2' napeljèš premico, ki je zaradi konstrukcije ravno pravokotna projekcija prvotne premice p.

4. način reševanja. Prepričaj se, da je vektor $(\vec{p} \times \vec{n}_\Pi) \times \vec{n}_\Pi$ smerni vektor $\vec{p}'$ iskane pravokotne projekcije p' premice p. Poišči še točko $P \in p \cap \Pi$. Potem je

$$p'\colon\ \vec{r} = \vec{r}_P + t\vec{p}', \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Opomba *Pomni konstrukcijo ravnine Σ_k pri 1. načinu reševanja. To zvijačo lahko uporabiš tudi pri reševanju nalog 16 in 19.*

▷▷▷ 22., 25.

Rešitev 25. naloge

Uporabiš rezultat naloge 21. Tekoča točka premice p ima krajevni vektor $\vec{r}_P + t\vec{p}$, ki ga vstaviš namesto vektorja $\vec{r}_S$, da dobiš enačbo prezrcaljene premice

$$p'\colon\ \vec{r} = (\vec{r}_P - 2\frac{\vec{n}_\Sigma \cdot (\vec{r}_P - \vec{r}_T)}{\vec{n}_\Sigma^2}\vec{n}_\Sigma) + t(\vec{p} - 2\frac{\vec{p} \cdot \vec{n}_\Sigma}{\vec{n}_\Sigma^2}\vec{n}_\Sigma).$$

▷▷▷ 21.

Rešitev 26. naloge

Zapiši smerna vektorja $\vec{p} := (1,0,0)$ in $\vec{q} := (0,1,1)$ premic p in q in točki $P(0,0,0) \in p$ in $Q(1,-2,0) \in q$. Pomagaj si z nalogo 51.

1. način reševanja. Iskani točki imata koordinate $A(s,0,0)$ in $B(1,t-2,t)$ za neka $s,t \in \mathbb{R}$. Ker je po nalogi 51 daljica $\overline{AB}$ pravokotna na premici p in q, je vektor $\overrightarrow{AB} = (1-s, t-2, t)$ pravokoten na smerna vektorja $\vec{p}$ in $\vec{q}$:

$$0 = \vec{p} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 - s, \quad 0 = \vec{q} \cdot \overrightarrow{AB} = 2t - 2.$$

Torej je $s = 1$, $t = 1$ in iskani točki sta $A(1,0,0)$ in $B(1,-1,1)$. Dolžina daljice $\overline{AB}$ je

$$|\overline{AB}| = |\vec{r}_B - \vec{r}_A| = \sqrt{2}.$$

2. način reševanja. Uberi pot, ki je opisana in utemeljena v rešitvi naloge 51: izračunaj $\vec{p} \times \vec{q} = (0,-1,1)$ in $\vec{r}_Q - \vec{r}_P = (1,-2,0)$, nato poišči take $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, da velja

$$\vec{r}_Q - \vec{r}_P = \alpha\vec{p} + \beta\vec{q} + \gamma(\vec{p} \times \vec{q}).$$

Dobiš $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 1$, odtod pa

$$\vec{r}_A = \vec{r}_P + \alpha\vec{p} = (1,0,0), \quad \vec{r}_B = \vec{r}_Q - \beta\vec{q} = (1,-1,1).$$

Dolžino daljice $\overline{AB}$ izračunaš kot zgoraj ali pa takole:

$$|\overrightarrow{AB}| = |\gamma(\vec{p} \times \vec{q})| = \sqrt{2}.$$

3. način reševanja. Ravnina skozi premico p, ki je vzporedna vektorju $\vec{p} \times \vec{q}$, seka premico q v točki B. Podobno dobiš točko A.

Opomba *Razdalja med množicama v $\mathbb{R}^3$ je definirana kot infimum razdalj med poljubnima točkama iz prve in druge množice. Zato je v gornji nalogi dolžina daljice $\overline{AB}$ enaka razdalji med premicama p in q.*

▷▷▷ 32., 51.

Rešitev 27. naloge

Naj ima iskana ravnina Π enačbo $ax + by + cz = d$. Lahko privzameš, da je $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Ker je $T \in \Pi$, je $c = d$. Iz $d(\Pi, (0,0,0)) = 1/2$ sledi $|d| = 1/2$. Zapiši normalna vektorja $\vec{n}_1 = (0,0,1)$ in $\vec{n}_2 = (1,-1,0)$ ravnin Σ_1 in Σ_2 in izračunaj smerni vektor $\vec{p}$ premice p:

$$\vec{p} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (1,1,0).$$

Iz $p || \Sigma$ zdaj sledi $\vec{n}_\Pi \cdot \vec{p} = 0$ oziroma $a + b = 0$. Prepričaj se, da pogojem ustrezata samo ravnini

$$\Pi_{1,2}\colon \pm\frac{\sqrt{6}}{4}x \mp \frac{\sqrt{6}}{4}y + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2}.$$

Opomba *Opazi, da je smiselno privzeti $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, ker se potem izraža razdalja poljubne točke do neznane ravnine Π enostavno. Seveda lahko rešuješ nalogo tudi brez tega privzetka.*

▷▷▷ 28., 33.

Rešitev 28. naloge

Premica p je vzporedna z vektorjem $\vec{p} = (0,1,1)$ in vsebuje točko $P(-1,1,-3)$, premica q pa je vzporedna z vektorjem $\vec{q} = (1,2,0)$ in vsebuje točko $Q(2,1,0)$.

1. način reševanja. Ker je iskana ravnina Π vzporedna s premicama p in q, je njen normalni vektor vzporeden z vektorjem

$$\vec{p} \times \vec{q} = (-2,1,-1).$$

Torej je vektor $\vec{n} = (2,-1,1)$ normalni vektor ravnine Π. Zato ima iskana ravnina Π enačbo

$$\Pi\colon 2x - y + z = d$$

za neki $d \in \mathbb{R}$, ki ga moraš še določiti. Ker je $d(\Pi, p) = 2d(\Pi, q)$, velja

$$\frac{|\vec{n}\vec{r}_P - d|}{|\vec{n}|} = 2\frac{|\vec{n}\vec{r}_Q - d|}{|\vec{n}|},$$

kjer sta $\vec{r}_P$ in $\vec{r}_Q$ krajevna vektorja točk P in Q. Odtod enakost $|6 + d| = 2|3 - d|$; njeni rešitvi sta $d = 0$ in $d = 12$. Pripadajoči ravnini imata enačbi $2x - y + z = 0$ in $2x - y + z = 12$.

2. način reševanja. Naj bo $ax + by + cz = d$ enačba iskane ravnine Π. Določi $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tako, da bo ravnina Π zadoščala pogojem naloge. Smiselno je privzeti

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \tag{44}$$

torej je normalni vektor $\vec{n}_\Pi = (a,b,c)$ normiran. Ker Π ne seka ne p ne q, velja $\vec{n}_\Pi \cdot \vec{p} = 0$ in $\vec{n}_\Pi \cdot \vec{q} = 0$ oziroma

$$b + c = 0, \quad a + 2b = 0.$$

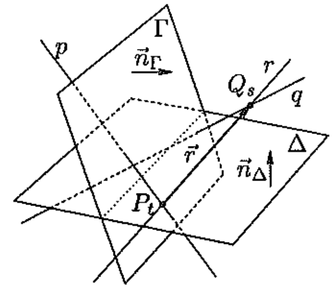
Izrazi $c = -b$ in $a = -2b$, vstavi v enakost (44) in izračunaj $b = \pm 1/\sqrt{6}$. Premisli, zakaj smeš privzeti $b = 1/\sqrt{6}$. Torej je

$$\Pi\colon -\frac{2}{\sqrt{6}}x + \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}}z = d.$$

Izračunaj $d \in \{0, -2\sqrt{6}\}$ iz pogoja $d(\Pi, p) = 2d(\Pi, q)$, podobno kot zgoraj.

▷▷▷ 27., 33.

Rešitev 29. naloge



Slika 4

1. način reševanja. Glej sliko 4. Povleci vektor od poljubne točke P_t na premici p do poljubne točke Q_s na premici q in ga vzemi za smerni vektor premice r:

$$\vec{r} = \overrightarrow{P_tQ_s} = \overrightarrow{OQ_s} - \overrightarrow{OP_t} =$$

$$= (1-s, 2s-2, s) - (2, 3t, 2t-1) = (-s-1, 2s-3t-2, s-2t+1).$$

Iz pogojev $r || \Gamma$ in $r || \Delta$, dobiš $\vec{r} \perp \vec{n}_\Gamma$ in $\vec{r} \perp \vec{n}_\Delta$, torej

$$0 = \vec{r} \cdot \vec{n}_\Gamma = (-s-1, 2s-3t-2, s-2t+1) \cdot (1,-1,2) = -s - t + 3$$

in

$$0 = \vec{r} \cdot \vec{n}_\Delta = (-s-1, 2s-3t-2, s-2t+1) \cdot (1,0,3) = 2s - 6t + 2.$$

Sklepaj, da je $s = 2$, $t = 1$, odtod izračunaš smerni vektor $\vec{r} = (-3,-1,1)$ in točko $Q_s = (-1,2,2)$ na premici r. Končno zapiši

$$r:\ \frac{x+1}{-3} = \frac{y-2}{-1} = z-2.$$

2. način reševanja. Premica r je vzporedna z vektorjem $\vec{r} = \vec{n}_\Gamma \times \vec{n}_\Delta = (1,-1,2)\times(1,0,3) = (-3,-1,1)$. Potrebuješ še koordinate kakšne točke $R \in r$. Naprimer, vzemi za R presečišče premice p in ravnine Σ, ki vsebuje q in je vzporedna z vektorjem $\vec{r}$: $\vec{n}_\Sigma = (-1,2,1)\times(-3,-1,1) = (3,-2,7)$, Σ: $3x-2y+7z=7$ in $R(2,3,1)$. Zato je r: $\frac{x-2}{-3} = \frac{y-3}{-1} = z-1$.

Opomba *Enačbi premic, ki ju dobiš po 1. in 2. načinu reševanja, se razlikujeta. Preveri, da opisujeta isto premico!*

▷▷▷ 30.

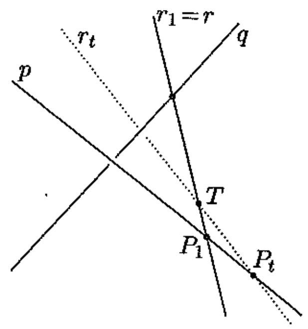
Rešitev 30. naloge

1. način reševanja. Glej sliko 5. Zapelji se po premici p: skozi tekočo točko $P_t(2t-3, 2-t, t)$, $t \in \mathbb{R}$ in točko T povleci premico

$$r_t:\ \vec{r} = \vec{r}_T + s(\vec{r}_{P_t} - \vec{r}_T), \qquad s \in \mathbb{R},$$

torej

$$r_t:\ (x,y,z) = (0,-1,1) + s(2t-3, 3-t, t-1). \tag{45}$$



Slika 5

Premica r_t gre skozi točko T in seka premico p. Iščeš tak $t \in \mathbb{R}$, da premica r_t seka premico

$$q:\ (x,y,z) = (1+3u, 2u-3, u+1). \tag{46}$$

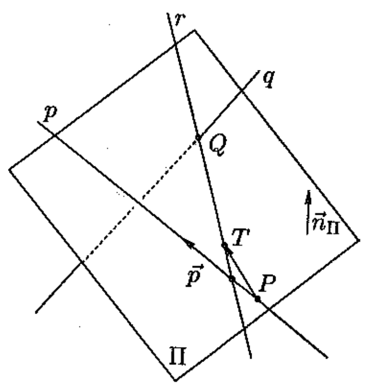
Ko izenačiš enačbi (45) in (46), dobiš sistem treh nelinearnih enačb s tremi neznankami:

$$\begin{aligned} s(2t-3) &= 1+3u \\ -1+s(3-t) &= 2u-3 \\ 1+s(t-1) &= u+1. \end{aligned}$$

Na srečo je sistem kljub nelinearnosti enostavno rešljiv. Ko iz prve in tretje enačbe odstraniš u, dobiš $st = -1$. Nato združiš še drugo in tretjo, pa dobiš $5s - 3st = -2$. Odtod dobiš rešitve $s = -1$, $t = 1$ in $u = 0$. Torej je

$$r = r_1:\ (x,y,z) = (0,-1,1) + s(-1,2,0).$$

2. način reševanja. Glej sliko 6. Označi s Π ravnino, ki jo določata premica p in iskana premica r. Poišči presečišče Q premic r in q, ki sovpada s presečiščem ravnine Π in premice q: $\vec{n}_\Pi = \overrightarrow{PT} \times \vec{p} = (3,-3,1)\times(2,-1,1) = (-2,-1,3)$, zato je



Slika 6

$$\Pi:\ 2x + y - 3z = -4,$$

$Q \in \Pi \cap q = \{(1,-3,1)\}$. Končno skozi točki T in Q napelješ premico

$$r:\ x = \frac{y+1}{-2}, \quad z = 1.$$

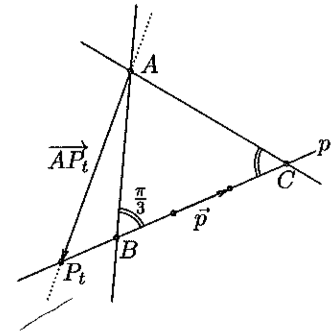
Opomba *1. in 2. način reševanja sta ti dala različni enačbi premice r. Preveri, da opisujeta isto premico!*

▷▷▷ 29.

Rešitev 31. naloge

1. način reševanja. Glej sliko 7. Preberi smerni vektor $\vec{p} = (2,-2,1)$ premice p. Zapelji se po premici p in označi tekočo točko s $P_t(2t+2, 1-2t, t)$. Iščeš tako premico skozi točki A in P_t, ki oklepa s premico p kot $\frac{\pi}{3}$. (V resnici dobiš dve taki premici!) Ta pogoj prepiši v enačbo

$$\frac{|\vec{p}\cdot\overrightarrow{AP_t}|}{|\vec{p}||\overrightarrow{AP_t}|} = \cos\frac{\pi}{3}.$$



Slika 7

Ko vstaviš podatke, kvadriraš ter pokrajšaš, dobiš kvadratno enačbo

$$243t^2 + 378t - 191 = 0.$$

Naj bosta njeni rešitvi števili t_1 in t_2. Potem zapiši $B(2t_1+2, 1-2t_1, t_1)$ in $C(2t_2+2, 1-2t_2, t_2)$.

2. način reševanja. Podobno kot zgoraj se zapelji po premici p s točko $P_t(2t+2, 1-2t, t)$. Postavi še pogoje za enakostranični trikotnik,

$$\mathrm{d}(A,B)^2 = \mathrm{d}(B,C)^2 = \mathrm{d}(C,A)^2,$$

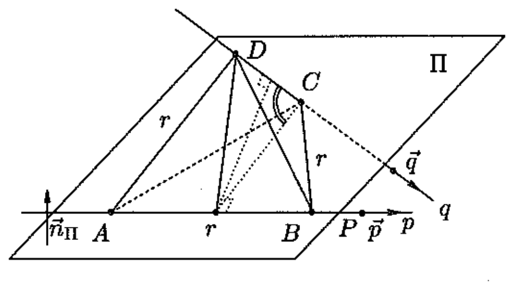
ki te pripeljejo do iste kvadratne enačbe kot zgoraj.

3. način reševanja. Označi s Π ravnino skozi A, ki je pravokotna na p. Potem središče S daljice $\overline{BC}$ leži v preseku $p \cap \Pi$. Izračunaj razdaljo $\mathrm{d}(A,p)$ in odtod dolžino $a = 2\mathrm{d}(A,p)/\sqrt{3}$ stranice trikotnika $\triangle ABC$. Nato se za $\pm a/2$ sprehodi iz točke S vzdolž premice p, da dobiš točki B in C.

Rešitev 32. naloge

1. način reševanja. Najprej si nariši dobro sliko (slika 8) in z r označi dolžino roba tetraedra $ABCD$. Kolikšen je kot φ, ki ga v tetraedru $ABCD$ oklepa rob $\overline{CD}$ s ploskvijo ABC? Izračunaj

$$\cos\varphi = \frac{\frac{2}{3}\frac{r\sqrt{3}}{2}}{r} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



Slika 8

Oglišče C je v preseku ravnine Π, ki nosi ploskev ABC, in premice q. Za Π velja, da vsebuje premico p in da njen normalni vektor $\vec{n}_\Pi = (a,b,c)$ oklepa s premico q kot, ki je komplementaren kotu φ. Ustrezi najprej pogoju, da je p vzporedna s Π: $0 = \vec{n}_\Pi \cdot \vec{p} = (a,b,c)\cdot(2,-2,0) = 2a - 2b$, torej $a = b$, zato je $\vec{n}_\Pi = (a, a, c)$. Ker te pri vektorju $\vec{n}_\Pi$ zanima samo njegova smer, smeš predpostaviti, da je normiran, torej $\vec{n}_\Pi = (a, a, \pm\sqrt{1-2a^2})$. Ta vektor mora oklepati kot $\frac{\pi}{2} - \varphi$ s premico q, torej

$$\frac{|\vec{n}_\Pi \cdot \vec{q}|}{|\vec{q}|} = \left|\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi)\right| = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

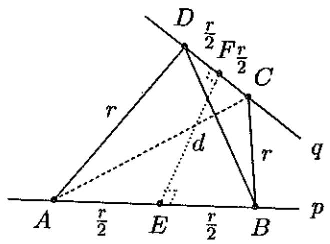
Ko rešiš postavljeno enačbo, dobiš štiri rešitve:

$$a_1 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{in} \quad a_2 = \pm\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

Za $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ je $\vec{n}_\Pi = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$. Upoštevaj $P(1,-2,1) \in p \in \Pi$ in zapiši Π: $x + y + 1 = 0$. Presečišče ravnine Π in premice q je $C(2,-3,0)$. Pri $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ dobiš isto ravnino Π in isto oglišče C. Za $a = \frac{\sqrt{2}}{6}$ je $\vec{n}_\Pi = (\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}, +\frac{\sqrt{8}}{3})$. Zdaj je presečišče ravnine Π in premice q enako $D(\frac{8}{3}, -\frac{7}{3}, \frac{2}{3})$. Pri $a = -\frac{\sqrt{2}}{6}$ dobiš isto ravnino Π in isto točko D.

Če želiš izračunati še oglišči $A(2 + \frac{\sqrt{6}}{6}, -3 - \frac{\sqrt{6}}{6}, 1)$ in $B(2 - \frac{\sqrt{6}}{6}, -3 + \frac{\sqrt{6}}{6}, 1)$, moraš začeti znova z ravnino Ω, ki nosi premico q in seka premico p pod kotom $\frac{\pi}{2} - \varphi$ v točkah A in B.

2. način reševanja. Spet si nariši lepo sliko (slika 9). Opazi, da sta središči mimobežnih robov AB in CD v tetraedru ravno točki, ki določata razdaljo d med robovoma AB in CD. Hkrati pa je ta razdalja v tetraedru z robom r enaka $\frac{r\sqrt{2}}{2}$. Torej: na mimobežnicah p in q poišči točki $E(2,-3,1)$ in $F(\frac{7}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{1}{3})$, ki sta si najbližje, in iz njune medsebojne razdalje $d = \frac{\sqrt{6}}{3}$ izračunaj dolžino roba $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Iz dobljenih točk se nato sprehodi za $\frac{r}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ navzgor in navzdol vzdolž premice nosilke, pa dobiš vsa štiri oglišča.



Slika 9

Opomba *Kateremu pogoju morata zadoščati premici p in q, da je naloga rešljiva?*

⊳⊳⊳ 26.

Rešitev 33. naloge

Naj bo Π: $ax + by + cz = d$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, taka ravnina, da je

$$\mathrm{d}(\Pi, p) = \mathrm{d}(\Pi, q) = 1. \tag{47}$$

Potem je Π vzporedna s premicama p in q. Ker je normalni vektor $\vec{n}_\Pi = (a,b,c)$ ravnine Π pravokoten na smerni vektor $\vec{p} = \vec{q} = (1,1,1)$ premic p in q, velja

$$a + b + c = 0. \tag{48}$$

Točki $P(0,0,0) \in p$ in $Q(2,0,0) \in q$ sta za 1 oddaljeni od Π, zato

$$1 = \mathrm{d}(\Pi, p) = \mathrm{d}(\Pi, P) = |-d|, \quad 1 = \mathrm{d}(\Pi, q) = \mathrm{d}(\Pi, Q) = |2a - d|.$$

Torej je bodisi $d = 1$ in $a \in \{0, 1\}$ bodisi $d = -1$ in $a \in \{-1, 0\}$. Iz $a = \pm 1$ sledi $b^2 + c^2 = 0$ oziroma $b = c = 0$; iz (48) zdaj sklepaj $a = 0$, protislovje. Iz $a = 0$ dobiš $b = \pm 1/\sqrt{2}$ in

$c = \mp 1/\sqrt{2}$. Torej sta edini možni ravnini

$$\Pi_1\colon\ y - z = \sqrt{2}, \qquad \Pi_2\colon\ y - z = -\sqrt{2}.$$

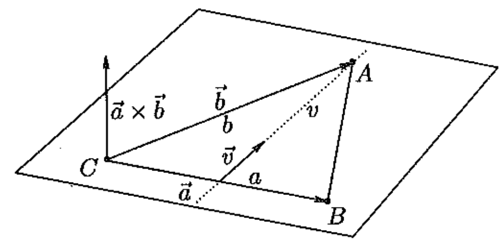
Opomba *Ker imaš pri nalogi opravka z oddaljenostjo točk od ravnine Π, je bilo smiselno predpostaviti, da je normalni vektor ravnine Π normiran.*

⊳⊳⊳ 27., 28.

Rešitev 34. naloge

Glej sliko 10. Označi $\vec{a} := \overrightarrow{CB}$ in $\vec{b} := \overrightarrow{CA}$. Nosilka višine na stranico a je premica v, ki gre skozi točko A, leži v ravnini, ki jo določa trikotnik $\triangle ABC$, in je pravokotna na stranico a. Poišči najprej njen smerni vektor $\vec{v}$, ki je pravokoten na $\vec{a}$ in je vzporeden z ravnino trikotnika $\triangle ABC$. Premisli (z geometrijskim tolmačenjem vektorskega produkta), da smeš vzeti vektor

$$\vec{v} := (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a}.$$



Slika 10

(Lahko razmišljaš tudi takole: vektorju $\vec{b}$ odšteješ njegovo pravokotno projekcijo na vektor $\vec{a}$, torej $\vec{v} = \vec{b} - (\frac{\vec{a}}{a} \cdot \vec{b})\frac{\vec{a}}{a} = \vec{b} - \frac{1}{a^2}(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a}$. Lahko se tudi prepričaš, da sta vektorja $\vec{v}$, dobljena na prvi in drugi način, kolinearna. Glej nalogo 50.) Zdaj lahko zapišeš:

$$v\colon\ \vec{r} = \vec{r}_A + t(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{a} = \vec{r}_A + t(\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{CA}) \times \overrightarrow{CB}.$$

⊳⊳⊳ 35., 50.

Rešitev 35. naloge

Premica p gre skozi oglišče C in skozi težišče T trikotnika $\triangle ABC$,

$$\vec{r}_T = (\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C)/3 = (0, 2/3, 2/3),$$

zato je p vzporedna z vektorjem $\vec{r}_T - \vec{r}_C = (1, -1/3, 2/3)$ in ima enačbo

$$p\colon\ \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}.$$

Premico q določiš podobno kot v nalogi 34: q vsebuje točko C in je vzporedna z vektorjem

$$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \times \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB})\overrightarrow{AC} - (\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB})\overrightarrow{AB} = 2(-2,1,-1) - 3(-1,1,0) =$$
$$= (-1,-1,-2)$$

Zdaj lahko zapišeš kanonsko obliko enačbe

$$q\colon\ x + 1 = y - 1 = \frac{z}{2}.$$

⊳⊳⊳ 34.

Rešitev 36. naloge

Glej sliko 11. Naj izbrane točke zapovrstjo odsekajo $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ na vektorjih $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Potem je enačba ravnine Π s parametroma s in t enaka

$$\Pi\colon\ \vec r = \frac{\vec b}{y} + s\left(\frac{\vec a}{x} - \frac{\vec b}{y}\right) + t\left(\frac{\vec c}{z} - \frac{\vec b}{y}\right) \qquad s,t \in \mathbb{R}.$$

Poiskati moraš presek te ravnine z nosilko glavne telesne diagonale d, ki ima s parametrom $u \in \mathbb{R}$ zapis

$$d\colon\ \vec r = u(\vec a + \vec b + \vec c).$$

Ko enačbi izenačiš (saj iščeš točko, ki leži hkrati v Π in na d, torej v njunem preseku) in preurediš, dobiš

$$\left(\frac{s}{x} - u\right)\vec a + \left(\frac{1}{y} - \frac{s}{y} - \frac{t}{y} - u\right)\vec b + \left(\frac{t}{z} - u\right)\vec c = \vec 0.$$

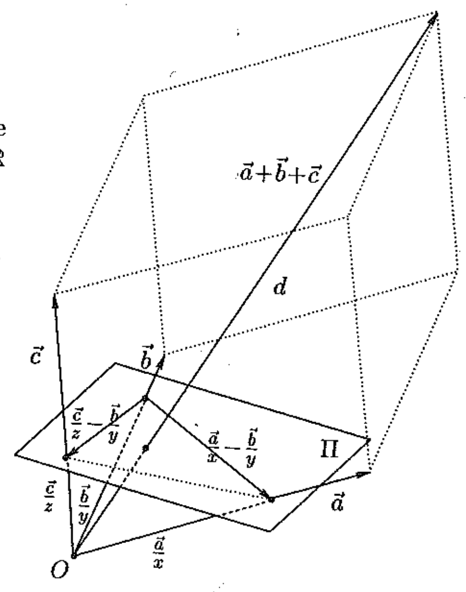
Ker so vektorji $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ po predpostavki linearno neodvisni, velja

$$\frac{s}{x} - u = 0, \quad \frac{1}{y} - \frac{s}{y} - \frac{t}{y} - u = 0, \quad \frac{t}{z} - u = 0.$$

Reši sistem in zapiši

$$u = \frac{1}{x+y+z}.$$

⋙ 37.



Slika 11

Rešitev 37. naloge

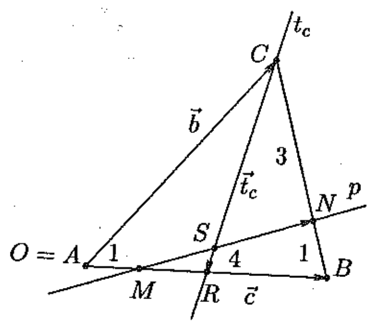
Glej sliko 12. Vektorja $\vec b := \overrightarrow{AC}$ in $\vec c := \overrightarrow{AB}$ nista kolinearna, saj je trikotnik $\triangle ABC$ neizrojen. Naj bo v točki A izhodišče O. Potem ima premica skozi točki M in N enačbo

$$p\colon\ \vec r = \vec r_M + u\overrightarrow{MN} = \frac{1}{5}\vec c + u\left(\frac{4}{5}\vec c + \frac{1}{4}(\vec b - \vec c)\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\vec c + u\left(\frac{11}{20}\vec c + \frac{1}{4}\vec b\right), \quad u \in \mathbb{R},$$

in nosilka težiščnice na c enačbo

$$t_c\colon\ \vec r = \vec b + u\vec t_c = \vec b + u\left(\frac{1}{2}\vec c - \vec b\right), \quad u \in \mathbb{R}.$$



Slika 12

Iščeš točko $S \in p \cap t_c$. Ker leži točka S hkrati na premicah p in t_c, krajevni vektor $\vec r_S$ točke S ustreza obema enačbama hkrati, torej

$$\frac{1}{5}\vec c + u_0\left(\frac{11}{20}\vec c + \frac{1}{4}\vec b\right) = \vec r_S = \vec b + v_0\left(\frac{1}{2}\vec c - \vec b\right) \quad \text{za neka } u_0, v_0 \in \mathbb{R}.$$

To enačbo preuredi v enačbo

$$\left(\frac{1}{4}u_0 + v_0 - 1\right)\vec b = \left(-\frac{11}{20}u_0 + \frac{1}{2}v_0 - \frac{1}{5}\right)\vec c.$$

Ker $\vec b$ in $\vec c$ ne ležita na isti premici (drugače rečeno: vektorja $\vec b$ in $\vec c$ sta linearno neodvisna), sta koeficienta pred njima enaka 0, zato

$$\frac{1}{4}u_0 + v_0 - 1 = 0 \quad \text{in} \quad -\frac{11}{20}u_0 + \frac{1}{2}v_0 - \frac{1}{5} = 0.$$

Ta sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama ima rešitev

$$u_0 = \frac{4}{9} \quad \text{in} \quad v_0 = \frac{8}{9}.$$

Sklepaj, da je $CS : SR = 8 : 1$, kjer je R razpolovišče stranice $\overline{AB}$.

⋙ 36.

Rešitev 38. naloge

Težišče T trikotnika $\triangle ABC$ ima krajevni vektor

$$\vec r_T = (\vec r_A + \vec r_B + \vec r_C)/3 = (1,2,1).$$

Krajevni vektor točke A_1, ki je zrcalna točka točke A glede na točko T, je potem

$$\vec r_{A_1} = \vec r_A + 2(\vec r_T - \vec r_A) = 2\vec r_T - \vec r_A = (1,1,3).$$

(Ali pa: $\vec r_{A_1} = \vec r_T - (\vec r_A - \vec r_T) = \ldots$) Podobno dobiš $\vec r_{B_1} = (3,3,0)$ in $\vec r_{C_1} = (-1,2,0)$.

Presek trikotnikov $\triangle ABC$ in $\triangle A_1B_1C_1$ je šestkotnik s paroma vzporednimi nasprotnimi stranicami. Prepričaj se, da so vsi novonastali trikotniki podobni trikotniku $\triangle ABC$ in da ima vsak (razen $\triangle A_1B_1C_1$) ploščino $P/9$, kjer je P ploščina trikotnika $\triangle ABC$. Torej je ploščina preseka enaka

$$P - 3P/9 = 2P/3 = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|/3 = \sqrt{21}.$$

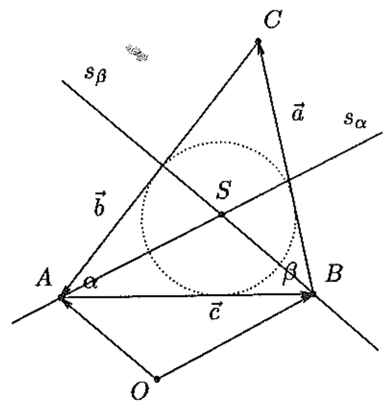
Rešitev 39. naloge

Glej sliko 13. Naj bodo $\vec a := \overrightarrow{BC}$, $\vec b := \overrightarrow{CA}$, $\vec c := \overrightarrow{AB}$. Središče S trikotniku $\triangle ABC$ včrtanega kroga leži v ravnini trikotnika in v preseku simetral notranjih kotov tega trikotnika. Očitno ima simetrala s_α kota α pri oglišču A parametrično enačbo

$$s_\alpha\colon\ \vec r = \overrightarrow{OA} + s\left(\frac{\vec c}{|\vec c|} - \frac{\vec b}{|\vec b|}\right), \quad t \in \mathbb{R},$$

in podobno simetrala s_β kota β pri oglišču B parametrično enačbo

$$s_\beta\colon\ \vec r = \overrightarrow{OB} + t\left(\frac{\vec a}{|\vec a|} - \frac{\vec c}{|\vec c|}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$



Slika 13

Ker je $S \in s_\alpha \cap s_\beta$, moraš izenačiti zgornji enačbi. Upoštevaj še enakosti $\vec a = -\vec b - \vec c$ in $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA} = -\vec c$, da dobiš enačbo, kjer nastopata samo nekolinearna vektorja $\vec b$ in $\vec c$:

$$\left(-\frac{s}{|\vec b|} + \frac{t}{|\vec a|}\right)\vec b + \left(\frac{s}{|\vec c|} + \frac{t}{|\vec a|} + \frac{t}{|\vec c|} - 1\right)\vec c = \vec 0.$$

Ker sta $\vec{b}$ in $\vec{c}$ linearno neodvisna, sta koeficienta v zgornji enačbi enaka 0. Torej je

$$s = \frac{|\vec{b}||\vec{c}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}|} \quad \text{in} \quad t = \frac{|\vec{a}||\vec{c}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}|}.$$

Zato je krajevni vektor točke S enak

$$\vec{r}_S = \vec{r}_A + \frac{|\vec{b}|\vec{c} - |\vec{c}|\vec{b}}{|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}|}.$$

Opomba *Preden pri iskanju točke S izenačiš enačbi simetral s_α in s_β, mora v vsaki od njiju nastopati različen parameter.*
Če želiš rešiti to nalogo na konkretnem primeru, poskusi z nalogo 40c.

⊳⊳⊳ 40.

Rešitev 40. naloge

(a) Ploščino dobiš iz dolžine vektorskega produkta:

$$p(\triangle ABC) = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}|(1,1,-2)| = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

obseg pa iz vsote razdalj med točkami:

$$o(\triangle ABC) = \mathrm{d}(A,B) + \mathrm{d}(B,C) + \mathrm{d}(C,A) = \sqrt{21} + \sqrt{35} + \sqrt{2}.$$

(b) Središče očrtanega kroga je točka $S(x,y,z)$, ki leži v ravnini Π trikotnika in je enako oddaljena od oglišč A, B, C. To pomeni, da koordinate točke S zadoščajo enačbam

$$x + y - 2z - 1 = 0,$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = (x-3)^2 + (y+2)^2 + z^2 = x^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2.$$

Zadnji enačbi razpadeta na dve neodvisni enačbi, ki po krajšanju postaneta enačbi ravnin

$$\Delta_1\colon\ 4x - 8y - 2z - 7 = 0$$

in

$$\Delta_2\colon\ -6x + 10y + 2z + 3 = 0.$$

(Kot se vidi iz postavljenega pogoja, je Δ_1 množica točk, ki so enako oddaljene od oglišč A in B, torej je ravnina Δ_1 simetrala daljice AB.) Ker je $S \in \Delta_1 \cap \Delta_2 \cap \Pi$, moraš rešiti sistem enačb, ki določajo Δ_1, Δ_2 in Π. Rešitev sistema je točka $S(-4,-2,-\frac{7}{2})$.

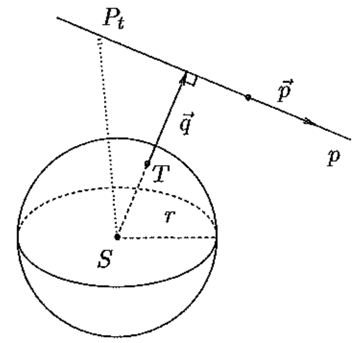
(c) V nalogi 39 preberi obrazec za središče T trikotniku včrtanega kroga. Tako dobiš rešitev

$$\begin{aligned}\vec{r}_T &= \vec{r}_A + t\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} - \frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|}\right)\\ &= (1,2,1) + \frac{\sqrt{42}}{\sqrt{35}+\sqrt{2}+\sqrt{21}}\left(\frac{1}{\sqrt{21}}(2,-4,-1) - \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)\right).\end{aligned}$$

Opomba *V točki (b) se naučiš elegantno računati simetrale daljic! Enačbo simetrale daljice lahko tudi neposredno nastaviš, naprimer,*

$$\Delta_1\colon (\vec{r} - \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_B}{2})(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = 0.$$

⊳⊳⊳ 39.



Slika 14

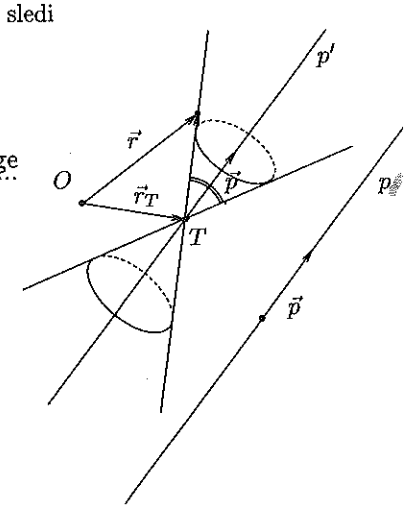
Rešitev 41. naloge

Glej sliko 14. Ko preurediš enačbo sfere, dobiš $(x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 1$. Odtod prebereš središče $S(2,-1,0)$ sfere $\mathcal{K}$ in njen polmer $r = 1$. Premica skozi iskano točko in središče S, označi jo s q, je pravokotna na premico p in jo seka. Kako najti q? Naj bo $P_t(t+4, 2t+3, -5t-4)$ tekoča točka na p. Iščeš tak $t \in \mathbb{R}$, da bo vektor $\vec{q} := \overrightarrow{SP}_t = (t+2, 2t+4, -5t-4)$ pravokoten na smerni vektor $\vec{p} = (1,2,-5)$ premice p. Torej zahtevaš

$$0 = \vec{q} \cdot \vec{p} = 30t + 30,$$

zato je $t = -1$ in $\vec{q} = (1,2,1)$. Iz definicije vektorja $\vec{q}$ zdaj sledi

$$\vec{r}_T = \vec{r}_S + r\frac{\vec{q}}{|\vec{q}|} = (2,-1,0) + \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1).$$



Slika 15

Rešitev 42. naloge

Glej sliko 15. Iz enačbe za p prebereš smerni vektor $\vec{p} = (-2,6,-3)$. Točka s krajevnim vektorjem $\vec{r} = (x,y,z)$ leži na plašču stožca natanko takrat, ko vektor $\vec{r} - \vec{r}_T$ oklepa z vektorjem $\vec{p}$ kot $\frac{\pi}{6}$ ali $\frac{5\pi}{6}$, kar zapišeš z enačbo $|\vec{p}(\vec{r} - \vec{r}_T)| = |\vec{r} - \vec{r}_T||\vec{p}|\cos\frac{\pi}{6}$. Ko vstaviš konkretne podatke in kvadriraš, dobiš enačbo

$$131x^2 + 3y^2 + 111z^2 + 96xy - 48xz +$$
$$+ 144yz - 860x - 66y - 114z + 902 = 0.$$

Rešitev 43. naloge

Označi iskano urejeno trojico vektorjev z $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Naj velja

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}). \tag{49}$$

Loči tri primere: (a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 = \vec{b} \cdot \vec{c}$ ali (b) $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$ ali (c) $\vec{b} \cdot \vec{c} \neq 0$. Premisli, da iz teh treh primerov dobiš urejene trojice $\vec{a}, \lambda\vec{a} \times \vec{c}, \vec{c}$ ali $\vec{a}, \vec{b}, \lambda\vec{a}$ ali $\lambda\vec{c}, \vec{b}, \vec{c}$, kjer so $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ poljubni vektorji iz $\mathbb{R}^3$ in $\lambda \in \mathbb{R}$ poljuben skalar.

Na koncu moraš še preveriti, da te trojke res zadoščajo enačbi (49).

Opomba *Poišči tri konkretne vektorje $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$, da zanje (49) ne velja!*

Rešitev 44. naloge

Naj bo Σ neka ravnina, ki je enako oddaljena od nekomplanarnih točk $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$. Nobena od teh točk ne pripada ravnini Σ, sicer bi ji pripadale vse, in bi zato bile komplanarne. Podobno ne pride v poštev, da bi vse točke A, B, C, D ležale v istem polprostoru glede na Σ. Torej nastopita dve možnosti:

(i) v enem polprostoru, določenem z ravnino Σ, leži ena, v drugem pa ležijo ostale tri izmed točk A, B, C, D;

(ii) v vsakem polprostoru ležita po dve izmed točk A, B, C, D.

Označi z $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$, $\vec{r}_C$, $\vec{r}_D$ krajevne vektorje točk A, B, C, D in se loti obravnave.

(i) Predpostavi, da točka A leži v enem, točke B, C, D pa v drugem polprostoru glede na Σ. Potem je vektor

$$\vec{n}_\Sigma := (\vec{r}_C - \vec{r}_B) \times (\vec{r}_D - \vec{r}_B)$$

neničeln in pravokoten na Σ. Ker mora Σ vsebovati razpolovišče daljice $\overline{AB}$, ima Σ vektorsko enačbo

$$\Sigma\colon\ \vec{n}_\Sigma(\vec{r} - \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_B}{2}) = 0. \tag{50}$$

Iz geometrijskega tolmačenja gornje konstrukcije je razvidno, da enačba (50) določa ravnino, ki ustreza pogoju (i) in je enako oddaljena od točk A, B, C in D. Za vsako izmed točk A, B, C, D dobiš po eno ravnino, ki spadajo pod (i), torej obstajajo natanko 4 take ravnine.

(ii) Predpostavi, da A in B ležita v enem, C in D pa v drugem polprostoru glede na Σ. Vektorja $\vec{r}_B - \vec{r}_A$ in $\vec{r}_D - \vec{r}_C$ si nista vzporedna, vsak od njiju pa je vzporeden z ravnino Σ. Torej je vektor

$$\vec{n}_\Sigma = (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times (\vec{r}_D - \vec{r}_C)$$

neničeln in pravokoten na Σ. Vektorska enačba ravnine Σ se glasi:

$$\Sigma\colon\ \vec{n}_\Sigma(\vec{r} - \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_C}{2}) = 0. \tag{51}$$

Iz geometrijskega tolmačenja gornje konstrukcije je razvidno, da enačba (51) določa ravnino, ki ustreza pogoju (ii) in je enako oddaljena od točk A, B, C in D. Za vsako razbitje množice $\{A, B, C, D\}$ na unijo dveh podmnožic s po dvema elementoma dobiš po eno ravnino, ki sodi k (ii), zato obstajajo natanko 3 take ravnine.

Torej natanko sedem ravnin reši zastavljeno nalogo. V podanem konkretnem primeru so to ravnine

$$\begin{aligned}
-3x + 2y + 2z &= -1/2,\\
2x - 3y + 2z &= -1/2,\\
2x + 2y - 3z &= -1/2,\\
x + y + z &= 7/2,\\
x + y - 4z &= -3/2,\\
x - 4y + z &= -3/2,\\
-4x + y + z &= -3/2.
\end{aligned}$$

Opomba *Razmisli, kako rešiš nalogo, če imaš namesto štirih podane tri ali pet točk.*

Rešitev 45. naloge

Uporabi obrazec, ki izrazi dvojni vektorski produkt kot linearno kombinacijo nastopajočih vektorjev, pa dobiš enačbi (3) enakovredno enačbo

$$(\vec{x}\vec{a} + \vec{x}^2)\vec{a} + (-\vec{a}\vec{x} - \vec{a}^2)\vec{x} = 0. \tag{52}$$

Smiselno je ločiti naslednje primere:

(a) Če je $\vec{a} = \vec{0}$, potem očitno reši enačbo (3) vsak vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

(b) Če je $\vec{a} \neq 0$ in sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{x}$ vzporedna, obstaja tak skalar $\alpha \in \mathbb{R}$, da velja $\vec{x} = \alpha\vec{a}$. Prepričaj se, da tak $\vec{x}$ zadošča enačbi (3).

(c) Če vektorja $\vec{a}$ in $\vec{x}$ nista vzporedna, sta koeficienta v enačbi (52) enaka 0, torej

$$\vec{x}\vec{a} + \vec{x}^2 = 0 \quad \text{in} \quad -\vec{a}\vec{x} - \vec{a}^2 = 0. \tag{53}$$

Odtod sledi $\vec{a}^2 = \vec{x}^2$, in zato $|\vec{a}| = |\vec{x}|$. Ko to vstaviš v prvo enačbo v (53), dobiš $|\vec{x}|^2 \cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{x}) = |\vec{x}||\vec{a}| \cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{x}) = \vec{x}\vec{a} = -|\vec{x}|^2$. Sklepaj, da je zato $\cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{x}) = -1$, torej je kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{x}$ enak π. To pa je v protislovju s predpostavko, da vektorja $\vec{a}$ in $\vec{x}$ nista vzporedna. (Ali pa: iz (53) sledi $\vec{x}^2 + 2\vec{a}\vec{x} + \vec{a}^2 = 0$ oziroma $(\vec{x} + \vec{a})^2 = 0$, odtod $\vec{x} + \vec{a} = 0$, protislovje z nevzporednostjo vektorjev $\vec{x}$ in $\vec{a}$.)

Združi gornje ugotovitve: če je $\vec{a} \neq 0$, je rešitev enačbe (3) vsak vektor oblike $\vec{x} = \alpha\vec{a}$, kjer je $\alpha \in \mathbb{R}$; če je $\vec{a} = \vec{0}$, reši enačbo (3) vsak vektor iz $\mathbb{R}^3$.

Opomba *Ne pozabi, da je $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ za vsak vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$.*

⊳⊳⊳ 46., 48., 49.

Rešitev 46. naloge

Poglej najprej primer, ko vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ nista vzporedna. Potem vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{a} \times \vec{b}$ tvorijo bazo prostora $\mathbb{R}^3$. Zato lahko zapišeš $\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{a} \times \vec{b}$ za neke $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, vstaviš v enačbo, preoblikuješ dvojni vektorski produkt po znanem obrazcu in dobiš

$$-\gamma(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a} + (\gamma\vec{a}^2 - 1)\vec{b} + \beta\vec{b} \times \vec{a} = 0.$$

Ker so vektorji $\vec{a}, \vec{b}, \vec{b} \times \vec{a}$ linearno neodvisni, je

$$\gamma\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \quad \gamma\vec{a}^2 - 1 = 0, \quad \beta = 0.$$

Odtod dobiš $\gamma = 1/\vec{a}^2$ in tudi pogoj $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ (saj je $\gamma \neq 0$), torej morata biti v tem primeru podana vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ pravokotna, kar je bilo moč opaziti že na začetku naloge. Tako dobiš rešitev

$$\vec{x} = \alpha\vec{a} + \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\vec{a}^2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \tag{54}$$

ki predstavlja premico s smernim vektorjem $\vec{a}$. Preveri, če (54) res zadošča začetni enačbi!

Če sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ kolinearna, ločiš tri primere: če je $\vec{a} = 0 = \vec{b}$, reši enačbo vsak $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$; če je $\vec{a} = \vec{0}$ in $\vec{b} \neq 0$, enačba nima rešitve; če pa je $\vec{a} \neq 0$ in $\vec{b} = \vec{0}$, je očitno $\vec{x} = \alpha\vec{a}$ za poljuben $\alpha \in \mathbb{R}$.

⊳⊳⊳ 45., 47., 48., 49.

Rešitev 47. naloge

Označi s p podano premico in s Σ podano ravnino. Iz podatkov prebereš smerni vektor $\vec{p} = (-1, 1, 1)$ premice p in normalni vektor $\vec{n}_\Sigma = (1, -1, -1)$ ravnine Σ. Ker sta $\vec{p}$ in $\vec{n}_\Sigma$ vzporedna, je premica p pravokotna na ravnino Σ, zato je iskani kot $\sphericalangle(p, \Sigma) = \pi/2$.

Koordinatni enačbi premice in ravnine sta

$$p\colon\ x = 5 - t,\ y = -3 + t,\ z = t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

$$\Sigma\colon\ x - y - z = -1.$$

Če je $T(x, y, z) \in p \cap \Sigma$, potem je $t = 3$. Torej je iskano presečišče v točki $T(2, 0, 3)$.

Opomba *Katere oblike enačbe premice poznaš?*

▷▷▷ 46.

Rešitev 48. naloge

Loči dve možnosti:

(a) Če sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno odvisna, potem velja $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ za neki $\alpha \in \mathbb{R}$ (saj $\vec{a} \neq \vec{0}$). Enačbo (4) preoblikuj v

$$(\vec{a}\vec{x})\alpha\vec{a} + \vec{a} \times \vec{x} = \vec{0}$$

oziroma v

$$\alpha(\vec{a}\vec{x})\vec{a} = \vec{x} \times \vec{a}.$$

Sklepaj, da je

$$\alpha(\vec{a}\vec{x}) = 0 \text{ in } \vec{x} \times \vec{a} = \vec{0}. \tag{55}$$

Če je $\alpha = 0$, potem je $\vec{b} = \alpha\vec{a} = \vec{0}$; začetna enačba (4) je v tem primeru enakovredna enačbi $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{0}$, njene rešitve so natanko vektorji $\vec{x} = \beta\vec{a}$, $\beta \in \mathbb{R}$. Če $\alpha \neq 0$, potem iz (55) sledi hkrati $\vec{a}\vec{x} = 0$ in $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{0}$, torej je $\vec{x} = \vec{0}$; enačba (4) je v tem primeru le trivialno rešljiva.

(b) Če sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna, potem tvorijo vektorji $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ bazo prostora $\mathbb{R}^3$, zato smeš zapisati

$$\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma(\vec{a} \times \vec{b})$$

za neke $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Enačbo (4) preoblikuj v

$$\begin{aligned}
\vec{0} &= (\vec{a}(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma(\vec{a} \times \vec{b})))\vec{b} + \vec{a} \times (\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma(\vec{a} \times \vec{b})) \\
&= \alpha|\vec{a}|^2\vec{b} + \beta(\vec{a}\vec{b})\vec{b} + \gamma\vec{0} + \alpha\vec{0} + \beta(\vec{a} \times \vec{b}) + \gamma(\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})) \\
&= (\alpha|\vec{a}|^2 + \beta(\vec{a}\vec{b}))\vec{b} + \beta(\vec{a} \times \vec{b}) + \gamma((\vec{a}\vec{b})\vec{a} - |\vec{a}|^2\vec{b}) \\
&= \gamma(\vec{a}\vec{b})\vec{a} + (\alpha|\vec{a}|^2 - \gamma|\vec{a}|^2 + \beta(\vec{a}\vec{b}))\vec{b} + \beta(\vec{a} \times \vec{b}).
\end{aligned}$$

Sklepaj, da velja

$$\gamma(\vec{a}\vec{b}) = 0, \quad \alpha|\vec{a}|^2 - \gamma|\vec{a}|^2 + \beta(\vec{a}\vec{b}) = 0, \quad \beta = 0.$$

Če vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ nista pravokotna, je $\gamma = 0$ in odtod tudi $\alpha = 0$, torej $\vec{x} = \vec{0}$; enačba (4) je v tem primeru samo trivialno rešljiva (kar je razvidno tudi iz geometrijskega tolmačenja zadane naloge). Iz $\vec{a} \perp \vec{b}$ in $\alpha = \gamma$ pa sledi $\vec{x} = \alpha(\vec{a} + \vec{a} \times \vec{b}), \alpha \in \mathbb{R}$.

Strni gornje ugotovitve: enačba (4) je vedno rešljiva. Neničelne rešitve ima samo v primeru, ko sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ pravokotna: tedaj je množica rešitev enačbe (4) premica skozi izhodišče s smernim vektorjem $\vec{a} + \vec{a} \times \vec{b}$.

Opomba *Pomni zvijačo: če sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno neodvisna, je vsak vektor iz $\mathbb{R}^3$ linearna kombinacija vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{a} \times \vec{b}$.*
Pomni tudi, da sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ linearno odvisna natanko tedaj, ko je ali $\vec{a} = \vec{0}$ ali $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ za neki $\alpha \in \mathbb{R}$.

▷▷▷ 45., 46., 49.

Rešitev 49. naloge

Pri reševanju prve enačbe v (5) si pomagaj z nalogo 46.

(a) Če vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ nista pravokotna, enačba nima rešitve, zato je v tem primeru sistem (5) nerešljiv.

(b) Če sta neničelna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ pravokotna, sta linearno neodvisna, zato dobiš kot v nalogi 46 množico rešitev prve enačbe:

$$\vec{x} = \alpha\vec{a} + \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\vec{a}^2}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Vstavi jo v drugo enačbo v (5) in sklepaj:

(i) Če je $\vec{a} \cdot \vec{c} \neq 0$, je

$$\alpha = \frac{1}{\vec{a} \cdot \vec{c}}\left(d - \frac{1}{\vec{a}^2}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\right).$$

(ii) Če je $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ in $\vec{a}^2 d = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, je skalar α poljubno realno število. Sicer je sistem (5) nerešljiv.

Opomba *Razmisli o geometrijskem tolmačenju enačb (5) in njunih rešitev: v neizrojenem primeru predstavlja prva enačba premico, druga enačba ravnino, rešitev $\vec{x}$ pa je krajevni vektor njunega presečišča.*

▷▷▷ 45., 46., 48.

Rešitev 50. naloge

Oglej si naslednje tri pristope.

(a) Če $\vec{x}$ leži v ravnini, ki jo določata $\vec{a}$ in $\vec{b}$, potem velja

$$\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \tag{56}$$

za neka $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Če sta $\vec{x}$ in $\vec{a}$ povrhu pravokotna, dobiš iz (56) enakosti

$$0 = \vec{x} \cdot \vec{a} = (\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) \cdot \vec{a} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{a}) + \beta(\vec{b} \cdot \vec{a}).$$

Ker $\vec{a} \neq 0$, smeš izraziti

$$\alpha = -\beta\frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

in odtod

$$\vec{x} = \beta(-\frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\vec{a} + \vec{b}). \tag{57}$$

Torej: če je neničelni vektor $\vec{x}$ pravokoten na $\vec{a}$ in leži v ravnini, ki jo določata $\vec{a}$ in $\vec{b}$, potem velja (57) za neki neničelni $\beta \in \mathbb{R}$. Preveri še obrat: če velja (57) za neki neničelni $\beta \in \mathbb{R}$, potem $\vec{x}$ zadošča zahtevanim pogojem.

(b) Glej sliko 16 in preveri, da vektor

$$\vec{y} = \vec{b} - \left(\vec{b}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right)\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

zadošča zahtevanim pogojem. Nato zapiši lepše

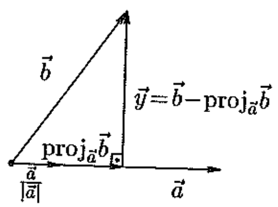
$$\vec{y} = \vec{b} - \frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}.$$

(c) Definiraj $\vec{z} = (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}$. Iz geometrijskega pomena vektorskega produkta sledi, da je vektor $\vec{z}$ pravokoten na $\vec{a}$ in na $\vec{a}\times\vec{b}$. Slednje pomeni tudi, da leži $\vec{z}$ v ravnini skozi izhodišče in z normalnim vektorjem $\vec{a}\times\vec{b}$, torej v ravnini, ki jo razpenjata $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

Pristop (a) ne zahteva nobene geometrijske predstave, temveč zgolj razumevanje pojmov, kot so ravnina, pravokotnost, skalarni produkt... Z nastavkom (56) prideš do potrebnega pogoja (57), ki mu mora rešitev ustrezati, nato še preveriš zadostnost tega pogoja.

Pristop (b) je geometrijski. Zveza med (a) in (b) je očitna: če je $\beta = 1$, je $\vec{x} = \vec{y}$.

Pristop (c) je geometrijski in bistveno uporablja lastnost prostora $\mathbb{R}^3$: obstoj in pomen vektorskega produkta. Za zvezo med (a) in (c) poskrbi obrazec za dvojni vektorski produkt:



Slika 16

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\vec{c})\vec{a},$$

torej

$$\vec{z} = (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a} = (\vec{a}\vec{a})\vec{b} - (\vec{b}\vec{a})\vec{a}.$$

Sklepaj, da za $\beta = \vec{a}\cdot\vec{a}$ velja $\vec{x} = \vec{z}$.

Opomba *V pristopih (a) in (b) je zaslutiti prvi korak postopka, znanega kot Gram-Schmidtova ortogonalizacija.*

⊳⊳⊳ 10.

Rešitev 51. naloge

Iščeš taki točki $A \in p$ in $B \in q$, da bo $\overline{AB}$ najkrajša. Zapiši krajevna vektorja $\vec{r}_A = \vec{r}_P + s\vec{p}$ in $\vec{r}_B = \vec{r}_Q + t\vec{q}$ za neka $s, t \in \mathbb{R}$ in si oglej vektor

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_Q - \vec{r}_P + t\vec{q} - s\vec{p}.$$

Poiskati moraš taka $s, t \in \mathbb{R}$, da bo dolžina vektorja $\overrightarrow{AB}$ najkrajša. Iz nevzporednosti premic p in q sledi, da so vektorji $\vec{p}, \vec{q}, \vec{p}\times\vec{q}$ linearno neodvisni. Zato obstajajo taki $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, da velja

$$\vec{r}_Q - \vec{r}_P = \alpha\vec{p} + \beta\vec{q} + \gamma(\vec{p}\times\vec{q}).$$

Torej je

$$\overrightarrow{AB} = (\alpha - s)\vec{p} + (\beta + t)\vec{q} + \gamma(\vec{p}\times\vec{q}). \tag{58}$$

Ker sta vektorja $(\alpha - s)\vec{p} + (\beta + t)\vec{q}$ in $\gamma(\vec{p}\times\vec{q})$ pravokotna, velja po Pitagorovem izreku

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |(\alpha - s)\vec{p} + (\beta + t)\vec{q}|^2 + |\gamma(\vec{p}\times\vec{q})|^2. \tag{59}$$

Ker je $|\gamma(\vec{p}\times\vec{q})|^2$ konstanta, je število (59) najmanjše natanko tedaj, ko je $|(\alpha-s)\vec{p}+(\beta+t)\vec{q}|^2 = 0$, kar je enakovredno zahtevi

$$(\alpha - s)\vec{p} + (\beta + t)\vec{q} = 0. \tag{60}$$

Vektorja $\vec{p}$ in $\vec{q}$ sta linearno neodvisna, zato iz (60) sledi

$$s = \alpha \quad \text{in} \quad t = -\beta. \tag{61}$$

Skleni

$$\vec{r}_A = \vec{r}_P + \alpha\vec{p}, \quad \vec{r}_B = \vec{r}_Q - \beta\vec{q}.$$

Iz (58) in (61) pa dobiš

$$\overrightarrow{AB} = \gamma(\vec{p}\times\vec{q}), \tag{62}$$

torej je daljica $\overline{AB}$ pravokotna na p in na q.

Opomba *Gornji dokaz ima uporabno vrednost: v njem najdeš postopek določanja koordinat tistih dveh točk $A \in p$ in $B \in q$, ki sta si najbližji. Povrhu, iz (62) zlahka izračunaš dolžino daljice $\overline{AB}$. Oglej si nalogo 26!*

⊳⊳⊳ 26.

Vektorski prostori

Rešitev 52. naloge

Označi $u = (2z, w, z)$, $u' = (2z', w', z')$ in $u'' = (2z'', w'', z'')$.
1. način reševanja. Preveri, ali tako postavljeni U zadošča vsem aksiomom v definiciji vektorskega prostora. (Namesto zaporednih števil je vsak aksiom poimenovan.)

(a) Množica U ni prazna, saj je $(0,0,0) = (2 \cdot 0, 0, 0) \in U$.

(b) Predlagano seštevanje je res notranja operacija na U: Za poljubna $u, u' \in U$ velja

$$u + u' = (2z, w, z) + (2z', w', z') = (2(z+z'), w + w', z + z') \in U. \tag{63}$$

(c) Asociativnost seštevanja: Za poljubne $u, u', u'' \in U$ velja

$$\begin{aligned}(u + u') + u'' &\overset{(i)}{=} ((2z + 2z') + 2z'', (w + w') + w'', (z + z') + z'')\\ &\overset{(ii)}{=} (2z + (2z' + 2z''), w + (w' + w''), z + (z' + z''))\\ &\overset{(iii)}{=} u + (u' + u'').\end{aligned}$$

Pri (i) dvakrat uporabiš definicijo seštevanja vektorjev v U, pri (ii) asociativnost seštevanja realnih števil in pri (iii) spet dvakrat definicijo seštevanja vektorjev v U. (Čeprav se seštevanje vektorjev v U in seštevanje realnih števil oba pišeta z znakom $+$, sta to različni operaciji. S katero imaš opraviti, enostavno razpoznaš iz narave elementov, ki ju seštevaš: če znak $+$ stoji med vektorjema, je seštevanje vektorjev; če stoji med realnima številoma, je $+$ seštevanje realnih števil.) Zato je seštevanje vektorjev asociativno.

(d) Obstoj nevtralnega elementa za seštevanje: Ker je $(0,0,0) = (2 \cdot 0, 0, 0) \in U$ in ker za poljuben $u \in U$ velja

$$u + (0,0,0) = (2z, w, z) + (0,0,0) = (2z + 0, w + 0, z + 0) = (2z, w, z) = u,$$

$$(0,0,0) + u = (0,0,0) + (2z, w, z) = (0 + 2z, 0 + w, 0 + z) = (2z, w, z) = u,$$

je $(0,0,0)$ nevtralni element za seštevanje v U.

(e) Obstoj nasprotnega elementa: Za poljuben $u = (2z, w, z) \in U$ vzameš

$$-u := (2(-z), -w, -z) \in U.$$

Preveri, da potem velja $u + (-u) = (0,0,0) = 0$.

(f) Komutativnost seštevanja: Če sta $u, u' \in U$, velja

$$\begin{aligned}u + u' &\overset{(i)}{=} (2z + 2z', w + w', z + z')\\ &\overset{(ii)}{=} (2z' + 2z, w' + w, z' + z)\\ &\overset{(iii)}{=} u' + u.\end{aligned}$$

Pri (i) uporabiš definicijo seštevanja vektorjev v U, pri (ii) komutativnost seštevanja realnih števil in pri (iii) spet definicijo seštevanja vektorjev v U. Zato je seštevanje vektorjev komutativno.

(g) Predlagano množenje res slika iz $\mathbb{C} \times U$ v U. Za poljubna $u \in U$ in $\lambda \in \mathbb{C}$ velja

$$\lambda \cdot u = (\lambda 2z, \lambda w, \lambda z) = (2(\lambda z), \lambda w, \lambda z) \in U. \tag{64}$$

(h) Asociativnost množenja vektorja s skalarjem: Za poljubne $u \in U$ in $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ velja

$$\begin{aligned}\lambda \cdot (\mu \cdot u) &\overset{(i)}{=} (\lambda(\mu 2z), \lambda(\mu w), \lambda(\mu z))\\ &\overset{(ii)}{=} ((\lambda\mu)2z, (\lambda\mu)w, (\lambda\mu)z)\\ &\overset{(iii)}{=} (\lambda\mu) \cdot u.\end{aligned}$$

Pri (i) dvakrat uporabiš definicijo množenja vektorja s skalarjem v U, pri (ii) asociativnost množenja realnih števil in pri (iii) spet definicijo množenja vektorja s skalarjem v U. (Množenje vektorja s skalarjem se zapiše z znakom $\cdot$, medtem ko se ponavadi znak za množenje realnih števil izpusti, razen izjemoma, kar si lahko ogledaš v točki (a).) Zato je množenje vektorja s skalarjem komutativno.

(i) Distributivnost množenja s skalarjem glede na seštevanje vektorjev: Za poljubne $u, u' \in U$ in $\lambda \in \mathbb{C}$ velja

$$\begin{aligned}\lambda \cdot (u + u') &\overset{(i)}{=} (\lambda(2z + 2z'), \lambda(w + w'), \lambda(z + z'))\\ &\overset{(ii)}{=} (\lambda 2z + \lambda 2z', \lambda w + \lambda w', \lambda z + \lambda z')\\ &\overset{(iii)}{=} (\lambda 2z, \lambda w, \lambda z) + (\lambda 2z', \lambda w', \lambda z')\\ &\overset{(iv)}{=} \lambda \cdot u + \lambda \cdot u'.\end{aligned}$$

Pri (i) uporabiš definicijo seštevanja vektorjev in množenja vektorja s skalarjem v U, pri (ii) distributivnost realnih števil, pri (iii) definicijo seštevanja vektorjev v U in pri (iv) spet definicijo množenja vektorja s skalarjem v U. Zato je množenje s skalarjem distributivno glede na seštevanje vektorjev.

(j) Distributivnost množenja s skalarjem glede na seštevanje skalarjev: Za poljubne $u \in U$ in $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ velja

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \cdot u &= ((\lambda + \mu)2z, (\lambda + \mu)w, (\lambda + \mu)z)\\ &= (\lambda 2z + \mu 2z, \lambda w + \mu w, \lambda z + \mu z)\\ &= (\lambda 2z, \lambda w, \lambda z) + (\mu 2z, \mu w, \mu z)\\ &= \lambda \cdot u + \mu \cdot u.\end{aligned}$$

Utemelji enačaje! Zato je množenje s skalarjem distributivno glede na seštevanje skalarjev.

(k) Množenje z $1 \in \mathbb{C}$ ohranja vektor: Ker je

$$1 \cdot u = 1 \cdot (2z, w, z) = (1 \cdot 2z, 1w, 1z) = (2z, w, z) = u,$$

je ta aksiom izpolnjen.

2. način reševanja. Če veš, da je množica $\mathbb{C}^3$ z običajnim seštevanjem in množenjem s skalarjem vektorski prostor nad $\mathbb{C}$, lahko ubereš precej krajšo pot – zadošča pokazati, da je U vektorski podprostor prostora $\mathbb{C}^3$: Iz (a) sledi, da je $0_{\mathbb{C}^3} \in U$. Vzemi poljubne $u, u', u'' \in U$ in $\lambda \in \mathbb{C}$. Potem iz enakosti (63) in (64) sledi, da je $U \leq \mathbb{C}^3$.

Poiskati moraš še razsežnost prostora U. Vektorski prostor U zapišeš drugače

$$U = \{(2z, w, z) |\ z, w \in \mathbb{C}\} = \{z(2,0,1) + w(0,1,0) |\ z, w \in \mathbb{C}\}.$$

Zato vektorja $(2,0,1)$ in $(0,1,0)$ razpenjata prostor U. Ker sta povrhu še linearno neodvisna, sestavljata njegovo bazo. Zato je $\dim U = 2$.

Rešitev 53. naloge

Označi $x := (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

(a) Ker je $0 \in U_1$, je U_1 neprazna podmnožica prostora $\mathbb{R}^n$. Če sta $x, y \in U_1$, je $(x+y)_1 - (x+y)_n = (x_1 + y_1) - (x_n + y_n) = (x_1 - x_n) + (y_1 - y_n) = 0 + 0 = 0$. Za poljuben $\lambda \in \mathbb{R}$, dobiš $\lambda x \in \mathbb{R}^n$ in $(\lambda x)_1 - (\lambda x)_n = \lambda x_1 - \lambda x_n = \lambda(x_1 - x_n) = \lambda \cdot 0 = 0$. Zato je $U_1 \leq \mathbb{R}^n$.

(b) Vsak podprostor vsebuje ničelni vektor celotnega prostora. Ker velja $0 \notin U_2$, U_2 ni vektorski podprostor.

(c) Tukaj je potrebni pogoj $0 \in U_3$ za vektorski podprostor izpolnjen, pa U_3 kljub temu ni podprostor, saj sta vektorja $(1,0,\ldots,0)$ in $(0,0,\ldots,1)$ v U_3, njuna vsota $(1,0,\ldots,1)$ pa ni v U_3.

(d) Ker $0 \notin U_4$, množica U_4 ni podprostor v $\mathbb{R}^n$.

(e) Vektor $x := (1,0,\ldots,0)$ je v U_5, toda vektor $(-1) \cdot x = (-1, 0 \ldots, 0)$ ni v U_5. Zato U_5 ni podprostor.

Opomba *Pomni: Naj bo V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ in $U \subseteq V$ njegova podmnožica. Potem je $U \leq V$ natanko tedaj, ko velja: (1) $0_V \in U$; (2) za vsaka $u_1, u_2 \in U$ je $u_1 + u_2 \in U$; (3) za vsak $\lambda \in \mathbb{F}$ in za vsak $u \in U$ je $\lambda u \in U$.*

Rešitev 54. naloge

Pomni, da je $\dim \mathbb{R}_5[x] = 6$.

(a) Ker je $|N_1| = 5 < 6$, množica N ni ne ogrodje ne baza prostora $\mathbb{R}_5[x]$. Linearno neodvisnost množice N_1 preveriš na običajen način: Naj za neke $\alpha_1, \ldots, \alpha_5 \in \mathbb{R}$ velja

$$\alpha_1(x-1) + \alpha_2(x^2 - x) + \alpha_3(x^3 - x^2) + \alpha_4(x^4 - x^3) + \alpha_5(x^5 - x^4) = 0.$$

Gornjo enakost preuredi v

$$(-\alpha_1)1 + (\alpha_1 - \alpha_2)x + (\alpha_2 - \alpha_3)x^2 + (\alpha_3 - \alpha_4)x^3 + (\alpha_4 - \alpha_5)x^4 + \alpha_5 x^5 = 0.$$

Iz linearne neodvisnosti polinomov $1, x, \ldots, x^5$ dobiš sistem linearnih enačb

$$-\alpha_1 = 0,\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0,\ \alpha_2 - \alpha_3,\ \alpha_3 - \alpha_4 = 0,\ \alpha_4 - \alpha_5 = 0,\ \alpha_5 = 0,$$

ki ima rešitev

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0.$$

Torej so vektorji $x - 1, x^2 - x, x^3 - x^2, x^4 - x^3, x^5 - x^4$ linearno neodvisni, zato je množica N_1 linearno neodvisna. (Linearno neodvisnost lahko preveriš tudi s kriterijem v opombi.)

(b) Podobno kot zgoraj ugotoviš, da N_2 ni ne ogrodje ne baza in da je linearno neodvisna množica.

(c) Množica N_3 ni linearno neodvisna, saj $0 \in N_3$. Zato N_3 ni baza prostora $\mathbb{R}_5[x]$. Ker velja

$$\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\} \subset \mathcal{L}(N_3),$$

je $\mathbb{R}_5[x] \leq \mathcal{L}(N_3)$. Sklepaj, da je N_3 ogrodje prostora $\mathbb{R}_5[x]$.

Opomba *Velja: vektorji $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ so linearno neodvisni natanko takrat, ko je $v_1 \neq 0$ in ko noben od vektorjev v_i, $2 \leq i \leq k$, ni linearna kombinacija vektorjev $v_1, \ldots, v_{i-1}$.*

⋙ 55.

Rešitev 55. naloge

Preuči najprej množico M_1: Moč množice M_1 je n, razsežnost prostora $\mathbb{R}_n[x]$ pa je $n+1$. Zato M_1 ni ogrodje prostora $\mathbb{R}_n[x]$. (Opaziš tudi lahko, da se naprimer vektor 1 ne da izraziti z elementi množice M_1.) Zato M_1 ni baza prostora $\mathbb{R}_n[x]$. Preveri še, da iz enakosti

$$\lambda_1(1+x) + \lambda_2(x + x^2) + \cdots + \lambda_n(x^{n-1} + x^n) = 0$$

sledi

$$\lambda_1 1 + (\lambda_1 + \lambda_2)x + \cdots + (\lambda_{n-1} + \lambda_n)x^{n-1} + \lambda_n x^n = 0$$

in odtod $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. Torej je M_1 linearno neodvisna.

Ker je $0 \cdot x = 0 \in M_2$, je M_2 linearno odvisna, saj velja

$$1 \cdot 0 + 0 \cdot x^2 + \ldots + 0 \cdot (n-1)x^n = 0.$$

Zato M_2 tudi ni baza prostora $\mathbb{R}_n[x]$. Ker je moč množice M_2 enaka n, ni ogrodje prostora $\mathbb{R}_n[x]$.

Iz enakosti

$$\lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1(1+x) + \lambda_2(1 + x + x^2) + \cdots + \lambda_n(1 + x + x^2 + \cdots + x^n) = 0$$

sledi

$$(\lambda_0 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n)1 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)x + \cdots + \lambda_n x^n = 0$$

in odtod

$$\begin{aligned} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n &= 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n &= 0, \\ &\vdots \\ \lambda_n &= 0. \end{aligned}$$

Zato je $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ in M_3 je linearno neodvisna.

Ker je moč množice M_3 enaka $n+1$, je M_3 baza prostora $\mathbb{R}_n[x]$, in zato je tudi njegovo ogrodje.

Opomba *Pomni, da je $\dim \mathbb{R}_n[x] = n + 1$.*
Če je $0 \in M \subseteq V$, kjer je V vektorski prostor, je M linearno odvisna.
Glej tudi opombi k nalogama 54 in 57.

⋙ 54.

Rešitev 56. naloge

(a) Če je U podprostor v $\mathbb{R}^3$, potem vsebuje ničlo $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$. Torej je $0-t(0+2\cdot 0-2)=4$ oziroma $t=2$. Obratno, če je $t=2$, potem je

$$U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-2y-4z=0\}.$$

Preveri, da je U v tem primeru podprostor v $\mathbb{R}^3$, takole.

- Iz $0-2\cdot 0-4\cdot 0=0$ sledi, da je $(0,0,0)\in U$.
- Vzemi poljubna $u=(x_1,y_1,z_1)$ in $v=(x_2,y_2,z_2)$ iz U. Pogledati moraš, ali vsota

$$u+v=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$$

pripada podprostoru U. Ker sta $u,v\in U$, velja $x_1-2y_1-4z_1=0$ in $x_2-2y_2-4z_2=0$. Izračunaj

$$(x_1+x_2)-2(y_1+y_2)-4(z_1+z_2)=(x_1-2y_1-4z_1)+(x_2-2y_2-4z_2)=0+0=0.$$

Torej je $u+v\in U$.

- Vzemi poljuben $\lambda\in\mathbb{R}$ in poljuben $u=(x,y,z)$ iz U. Pogledati moraš ali produkt

$$\lambda u=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)$$

pripada podprostoru U. Ker je $u\in U$, velja $x-2y-4z=0$. Izračunaj

$$(\lambda x)-2(\lambda y)-4(\lambda z)=\lambda(x-2y-4z)=\lambda\cdot 0=0.$$

Torej je $\lambda u\in U$.

Sklep: $U\leq\mathbb{R}^3$ natanko za $t=2$.

(b) Bodi odslej $t=2$. Ker velja

$$\begin{aligned} U &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-2y-4z=0\}\\ &= \{(x,y,z) \mid x=2y+4z,\ y,z\in\mathbb{R}\}\\ &= \{(2y+4z,y,z) \mid y,z\in\mathbb{R}\}\\ &= \{y(2,1,0)+z(4,0,1) \mid y,z\in\mathbb{R}\}\\ &= \mathcal{L}\{(2,1,0),(4,0,1)\}\end{aligned}$$

in ker sta $(2,1,0)$ in $(4,0,1)$ linearno neodvisna, je $B:=\{(2,1,0),(4,0,1)\}$ baza podprostora U in $\dim U=2$.

(Lahko pa razmišljaš takole. Ker vektor $(1,0,0)$ ne pripada podprostoru U, velja $U\neq\mathbb{R}^3$. Zato je $\dim U\leq 2$. Ker sta naprimer $(2,1,0)$ in $(0,2,-1)$ dva linearno neodvisna vektorja iz U, tvorita neko bazo C prostora U.)

(c) Iz $\dim\mathbb{R}^3-\dim U=1$ sledi, da zadošča poiskati en sam vektor iz $\mathbb{R}^3\setminus U$, naprimer $(1,0,0)$. Z njim dopolni bazo B podprostora U do baze

$$B\cup\{(1,0,0)\}$$

celotnega prostora. (Množico C smeš dopolniti z istim vektorjem.)

⊳⊳⊳ 64., 83.

Rešitev 57. naloge

Množica B ima tri elemente in je podmnožica trirazsežnega prostora $\mathbb{R}_2[x]$, zato zadošča ugotoviti, kdaj je B linearno neodvisna. Iz

$$\alpha(1-cx)+\beta(1-x^2)+\gamma(x-x^2)=0,\quad \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R},$$

sklepaj

$$\alpha+\beta=0,\quad -c\alpha+\gamma=0,\quad -\beta-\gamma=0$$

oziroma $\alpha=-\beta=\gamma$ in $\alpha(1-c)=0$. Če je $c=1$, je sistem netrivialno rešljiv, naprimer $\alpha=\gamma=1$, $\beta=-1$. Za $c\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ pa velja $\alpha=\beta=\gamma=0$. Torej je B linearno neodvisna množica natanko pri $c\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$, natanko tedaj je B tudi baza prostora $\mathbb{R}_2[x]$.

Opomba *Pomni, če ima vektorski prostor V končno bazo z n elementi, potem ima vsaka linearno neodvisna množica v V kvečjemu n elementov, vsako ogrodje v V ima vsaj n elementov. Posebej, vse baze prostora V imajo n elementov.*

⊳⊳⊳ 58.

Rešitev 58. naloge

1. način reševanja. Vektorji $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ tvorijo bazo trirazsežnega prostora $\mathbb{R}^3$ natanko tedaj, ko so linearno neodvisni, to je natanko takrat, ko so nekomplanarni, kar velja natanko takrat, ko je njihov mešani produkt neničeln. Izračunaj mešani produkt

$$(\vec{x},\vec{y},\vec{z})=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a^2+a-1\\ 1 & a^2-a+1 & -1\\ -2 & -2 & a^2+a+2\end{vmatrix}=3a^2(a+1)(a-1).$$

Torej je množica $\{\vec{x},\vec{y},\vec{z}\}$ baza v $\mathbb{R}^3$ natanko za $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$.

2. način reševanja. Oglej si preglednice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a^2+a-1\\ 1 & a^2-a+1 & -1\\ -2 & -2 & a^2+a+2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & 1 & a^2+a-1\\ 0 & a^2-a & -a^2-a\\ 0 & 0 & 3a^2+3a\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 1 & a^2+a-1\\ 0 & a(a-1) & -a^2-a\\ 0 & 0 & 3a(a+1)\end{bmatrix}.$$

Sklepaj, da je $\{\vec{x},\vec{y},\vec{z}\}$ baza prostora $\mathbb{R}^3$ natanko za $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$.

Opomba *Utemeljitev 2. načina reševanja si oglej v nalogi 73.*

⊳⊳⊳ 57.

Rešitev 59. naloge

Takole:

(a) Prostor $\mathbb{R}_3[x]$ je štirirazsežen in $|\Omega|=4$, zato zadošča preveriti samo enega od pogojev za bazo: bodisi dokaži, da je Ω linearno neodvisna množica, bodisi dokaži, da je Ω ogrodje prostora $\mathbb{R}_3[x]$.

1. način reševanja. Naj za neke $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ velja

$$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot (1 + x^2) + \gamma \cdot (1 - x^2 + x^3) + \delta \cdot (-x - 2x^2 + x^3) = 0.$$

Preoblikuj gornjo enakost v

$$(\alpha + \beta + \gamma) \cdot 1 + (-\delta) \cdot x + (\beta - \gamma - 2\delta) \cdot x^2 + (\gamma + \delta) \cdot x^3 = 0.$$

Ker so $1, x, x^2, x^3$ linearno neodvisni vektorji (polinomi), velja

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad -\delta = 0, \quad \beta - \gamma - 2\delta = 0, \quad \gamma + \delta = 0.$$

Sklepaj, da velja $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, torej je Ω linearno neodvisna množica.

2. način reševanja. Zadošča preveriti, da je vsak polinom $a + bx + cx^2 + dx^3$ iz $\mathbb{R}_3[x]$ linearno izrazljiv s polinomi iz množice Ω. V ta namen poišči take skalarje $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, da velja

$$a + bx + cx^2 + dx^3 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot (1 + x^2) + \gamma \cdot (1 - x^2 + x^3) + \delta \cdot (-x - 2x^2 + x^3).$$

Gornjo enakost preoblikuj v

$$0 = (\alpha + \beta + \gamma - a) \cdot 1 + (-\delta - b) \cdot x + (\beta - \gamma - 2\delta - c) \cdot x^2 + (\gamma + \delta - d) \cdot x^3$$

in sklepaj

$$\alpha + \beta + \gamma - a = 0, \ -\delta - b = 0, \ \beta - \gamma - 2\delta - c = 0, \ \gamma + \delta - d = 0.$$

Odtod dobiš

$$\alpha = a - 2d - c, \ \beta = -b + d + c, \ \gamma = b + d, \ \delta = -b.$$

Ker se torej da vsak vektor iz $\mathbb{R}_3[x]$ linearno izraziti z vektorji iz množice Ω, je Ω ogrodje prostora $\mathbb{R}_3[x]$. (Zdaj je rešitev naloge (b) na dlani.)

3. način reševanja. Po nalogi 73 velja

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{1, 1 + x^2, 1 - x^2 + x^3, -x - 2x^2 + x^3\} &= \mathcal{L}\{1, x^2, -x^2 + x^3, -x - 2x^2 + x^3\} \\
&= \mathcal{L}\{1, x^2, x^3, -x + x^3\} \\
&= \mathcal{L}\{1, x^2, x^3, -x\} \\
&= \mathcal{L}\{1, x, x^2, x^3\},
\end{aligned}$$

torej je $\mathcal{L}(\Omega) = \mathbb{R}_3[x]$, in zato je Ω ogrodje prostora $\mathbb{R}_3[x]$.

(b) Iščeš take $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, da velja

$$-1 - 3x - x^2 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot (1 + x^2) + \gamma \cdot (1 - x^2 + x^3) + \delta \cdot (-x - 2x^2 + x^3).$$

Dobiš sistem enačb

$$\alpha + \beta + \gamma = -1, \quad -\delta = -3, \quad \beta - \gamma - 2\delta = -1, \quad \gamma + \delta = 0.$$

Sklepaj, da je $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $\gamma = -3$, $\delta = 3$ oziroma

$$-1 - 3x - x^2 = 0 \cdot 1 + 2 \cdot (1 + x^2) + (-3) \cdot (1 - x^2 + x^3) + 3 \cdot (-x - 2x^2 + x^3).$$

⋙ 73.

Rešitev 60. naloge

Označi z $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \vec{m}_3$ vektorje iz množice M in z $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ vektorje iz množice N.

- Nastavi enačbo

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{m}_1 + \lambda_2 \vec{m}_2 + \lambda_3 \vec{m}_3,$$

torej

$$(1, 1, 0) = \lambda_1(1, -1, 1) + \lambda_2(2, 0, 1) + \lambda_3(-1, 3, -2).$$

Odtod dobiš sistem linearnih enačb

$$1 = \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3, \quad 1 = -\lambda_1 + 3\lambda_3, \quad 0 = \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3,$$

ki ima enoparametrično družino rešitev

$$\lambda_1 = 3t - 2, \quad \lambda_2 = 1 - t, \quad \lambda_3 = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Zato obstaja neskončno mnogo različnih linearnih izrazitev:

$$(1, 1, 0) = (3t - 2)(1, -1, 1) + (1 - t)(2, 0, 1) + t(-1, 3, -2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Vektor $\vec{u}$ se da izraziti z vektorji iz množice M, zato je $\vec{u} \in \mathcal{L}(M)$. Ker je več različnih linearnih izrazitev, so vektorji $\vec{m}_1, \vec{m}_2, \vec{m}_3$ linearno odvisni.

- Iz enačbe

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{m}_1 + \lambda_2 \vec{m}_2 + \lambda_3 \vec{m}_3$$

dobiš protislovni sistem linearnih enačb

$$3 = \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3, \quad -1 = -\lambda_1 + 3\lambda_3, \quad 1 = \lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3,$$

zato vektor $\vec{v}$ ni linearna kombinacija vektorjev iz množice M. To pomeni, da $\vec{v} \notin \mathcal{L}(M)$.

- Iz enačbe

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{n}_1 + \lambda_2 \vec{n}_2 + \lambda_3 \vec{n}_3,$$

torej

$$(1, 1, 0) = \lambda_1(1, -1, 1) + \lambda_2(2, 0, 1) + \lambda_3(1, 1, 1),$$

dobiš sistem linearnih enačb

$$1 = \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3, \quad 1 = -\lambda_1 + \lambda_3, \quad 0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,$$

ki ima natanko eno rešitev

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 0.$$

Zato obstaja natanko ena linearna izrazitev vektorja $\vec{u}$ z vektorji iz množice N:

$$(1, 1, 0) = -(1, -1, 1) + (2, 0, 1) + 0(1, 1, 1).$$

To pomeni, da je $\vec{u} \in \mathcal{L}(N)$ in da so vektorji $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ linearno neodvisni.

- Podobno kot v prejšnji točki tudi tu dobiš natanko eno linearno izrazitev vektorja $\vec{v}$ z vektorji $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$:

$$(3, -1, 1) = -2(1, -1, 1) + 3(2, 0, 1) - (1, 1, 1).$$

To pomeni, da je $\vec{v} \in \mathcal{L}(N)$ in da so vektorji $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ linearno neodvisni.

Rešitev 61. naloge

Ugotoviti moraš, ali so elementi množice U vsebovani v množici V. Kateri polinomi sploh ležijo v U? Za polinom $p = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ iz $\mathbb{R}_4[x]$ velja

$$p \in U \iff p'' = 0 \iff 2c + 6dx + 12ex^2 = 0 \iff c = d = e = 0.$$

Torej je

$$U = \{a + bx \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}\{1, x\}. \tag{65}$$

Zato zadošča preveriti, ali sta 1 in x vsebovana v V. Oglej si polinom 1: iščeš take $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, da velja

$$1 = \alpha(1 + x) + \beta(x + x^2) + \gamma(x^2 + x^3) + \delta(x^3 + x^4).$$

Preoblikuj gornjo enačbo v

$$0 = (\alpha - 1) \cdot 1 + (\alpha + \beta)x + (\beta + \gamma)x^2 + (\gamma + \delta)x^3 + \delta x^4.$$

Iz linearne neodvisnosti polinomov $1, x, x^2, x^3, x^4$ zdaj sledi

$$\alpha - 1 = 0, \quad \alpha + \beta = 0, \quad \beta + \gamma = 0, \quad \gamma + \delta = 0, \quad \delta = 0. \tag{66}$$

Sistem linearnih enačb (66) je protisloven. Sklepaj, da $1 \notin V$, zato U ni podprostor v prostoru V.

⋙ 62.

Rešitev 62. naloge

Vzemi poljuben $p \in U$, torej je $p''(1) = 2p(0)$ in $p(-1) = 0$. Ugotoviti moraš, ali p pripada množici (podprostoru) V. S tem namenom si oglej izraz

$$p''(1) + p(-1) = 2p(0) + 0 = 2p(0)$$

in sklepaj, da je $p \in V$. Torej je $U \leq V$.

Da odgovoriš na drugo vprašanje, moraš bodisi dokazati še $V \leq U$ (odgovor: ja) bodisi poiskati kakšen polinom iz V, ki ne leži v U (odgovor: ne). Pred tem si podrobneje oglej oba podprostora:

$$\begin{aligned} U &= \{p \in \mathbb{R}_3[x] \mid p''(1) = 2p(0),\ p(-1) = 0\} \\ &= \{a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid 2c + 6d = 2a,\ a - b + c - d = 0\} \\ &= \{a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid a - c - 3d = 0,\ a - b + c - d = 0\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \{p \in \mathbb{R}_3[x] \mid p''(1) + p(-1) = 2p(0)\} \\ &= \{a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid (2c + 6d) + (a - b + c - d) = 2a\} \\ &= \{a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid a + b - 3c - 5d = 0\}. \end{aligned}$$

Izberi naprimer $a = 1$, $b = -1$ in $c = d = 0$. Potem polinom $a + bx + cx^2 + dx^3 = 1 - x$ pripada podprostoru V in ne podprostoru U. Torej velja $U \neq V$.

⋙ 61., 84., 85.

Rešitev 63. naloge

Najprej preveri, da sta množici S in T vsebovani v U, množica R pa ne, torej R ni baza podprostora U. Nato se prepričaj, da sta S in T linearno neodvisni. Torej S in T napenjata trirazsežna podprostora v U. Ugotoviti moraš, ali je tudi U trirazsežen. V ta namen si oglej podprostor U:

$$\begin{aligned} U &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 - x_2 = 0,\ x_2 + x_4 = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 = -x_4,\ x_2 = -x_4\} \\ &= \{(-x_4, -x_4, x_3, x_4, x_5) \mid x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_4(-1, -1, 0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1, 0, 0) + x_5(0, 0, 0, 0, 1) \mid x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathcal{L}\{(-1, -1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}. \end{aligned}$$

Ker so vektorji $(-1, -1, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 0, 1)$ linearno neodvisni, je $\dim U = 3$. Sklepaj, da sta S in T bazi podprostora U.

⋙ 84., 85.

Rešitev 64. naloge

(a) Predpostavi, da sta U in V vektorska podprostora v $\mathbb{R}_3[x]$. Potem vsebujeta ničelni polinom $p_0 = 0 \in \mathbb{R}_3[x]$, torej je

$$\alpha = p_0''(\tfrac{1}{2}) = 0, \quad \beta = \int_0^1 p_0(t)dt = 0.$$

Ne pozabi preveriti še obratne smeri: če je $\alpha = \beta = 0$, sta U in V podprostora.

(b) Naj bo $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x]$. Potem je $p \in U$ natanko tedaj, ko velja

$$a + b + c + d = a - b + c - d, \quad 2c + 3d = 0.$$

Reši linearni sistem in sklepaj, da polinoma $p_1(x) := 1$ in $p_2(x) := 2x + 3x^2 - 2x^3$ tvorita bazo prostora U. Podobno dobiš bazo $q_1(x) := 1 - 4x^3$, $q_2(x) := 2 - 2x - 3x^2$ za V. Unija $\{p_1, p_2, q_1, q_2\}$ obeh baz je ogrodje vsote $U + V$. Skrči jo do linearno neodvisne množice $\{p_1, p_2, q_1\}$, ki je hkrati iskana baza vsote $U + V$.

Opomba *Glej opombo k nalogi 53.*

⋙ 56.

Rešitev 65. naloge

(a) Ničelno zaporedje $0 \in V$ pripada podmnožici U, zato $U \neq \emptyset$. Če sta $f, g \in U$, potem za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $f(n+2) = 2f(n)$ in $g(n+2) = 2g(n)$, zato je

$$(f + g)(n + 2) = f(n + 2) + g(n + 2) = 2f(n) + 2g(n) = 2(f(n) + g(n)) = 2((f + g)(n)).$$

Torej je $f + g \in U$, množica U je aditivna. Če je povrhu $\lambda \in \mathbb{R}$, potem za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$(\lambda f)(n + 2) = \lambda(f(n + 2)) = \lambda(2f(n)) = 2(\lambda f(n)) = 2((\lambda f)(n)).$$

Torej je tudi $\lambda f \in U$, množica U je homogena. Sklepaj, da je $U \leq V$.

(b) Preveri, da množico U sestavljajo zaporedja oblike

$$(a_1, a_2, 2a_1, 2a_2, 2^2a_1, 2^2a_2, 2^3a_1, 2^3a_2, \ldots), \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

Sklepaj, da zaporedji

$$(1, 0, 2, 0, 2^2, 0, 2^3, 0, \ldots),$$
$$(0, 1, 0, 2, 0, 2^2, 0, 2^3, \ldots).$$

tvorita bazo prostora U, torej je U dvorazsežen.

Rešitev 66. naloge

(a) Operacija + je notranja, ker je $(a_1+b_1\sqrt{5})+(a_2+b_2\sqrt{5}) = (a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{5} \in M_1$, če so $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Q}$. M_1 je komutativna grupa za +, saj je $0 = 0+0\sqrt{5} \in M_1$ nevtralni element za +, nasprotni element elementu $a + b\sqrt{5} \in M_1$ je $(-a) + (-b)\sqrt{5} \in M_1$, asociativnost in komutativnost operacije + pa sledita iz istih lastnosti seštevanja realnih števil. Poglej še množenje s skalarjem: rezultat množenja je spet vektor iz M_1, ostale lastnosti pa sledijo iz lastnosti množenja realnih števil. Torej je množica M_1 z operacijama + in $\cdot$ res vektorski prostor nad $\mathbb{Q}$.

Iz definicije množice M_1 vidiš, da je $\{1, \sqrt{5}\}$ njeno ogrodje. Pokaži, da sta vektorja 1 in $\sqrt{5}$ linearno neodvisna: Nastavi $\alpha \cdot 1 + \beta\sqrt{5} = 0$, kjer sta $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$. Če je $\beta = 0$, je $\alpha = 0$. Če je $\beta \neq 0$, potem je $\sqrt{5} = -\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$. To pa je protislovje, saj $\sqrt{5}$ ni racionalno število. (Ali znaš dokazati $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$?) Torej sta vektorja 1 in $\sqrt{5}$ linearno neodvisna, zato je množica $\{1, \sqrt{5}\}$ baza prostora M_1 in $\dim M_1 = 2$.

(b) Podobno kot zgoraj preveri, da je M_2 vektorski prostor. Ker je $M_2 \subseteq \mathbb{R}$ in ker za poljuben $r \in \mathbb{R}$ velja $r = 1 \cdot r + 0 \cdot \sqrt{5} \in M_2$, je $M_2 = \mathbb{R}$. Pokaži, da $M_2 = \mathbb{R}$ nima končnega ogrodja:

1. način. Predpostavi, da končno ogrodje $\{r_1, \ldots, r_n\} \subseteq M_2$ obstaja. Potem bi se dalo vsako realno število r linearno izraziti kot $r = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \cdots + \lambda_n r_n$, kjer so $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{Q}$. Torej bi bilo realnih števil števno mnogo, kar pa ni res, saj ima $\mathbb{R}$ moč kontinuuma. (Če te to zanima podrobneje, poišči Cantorjev postopek v kakem učbeniku iz analize.) Ker M_2 nima končnega ogrodja, tudi nima končne baze.

2. način. Naj bo p_k k-to zaporedno praštevilo. Preveri, da je vsaka od množic $P_k := \{\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_k}\}$ $(k \in \mathbb{N})$ linearno neodvisna v vektorskem prostoru M_2 nad $\mathbb{Q}$. Torej premore M_2 linearno neodvisne množice poljubnih končnih moči. Sklepaj, da M_2 nima končnega ogrodja.

(c) Podobno kot pri M_1 premisli, da je M_3 vektorski prostor nad obsegom $\mathbb{R}$ in da velja $M_3 = \mathbb{R}$. Ker lahko poljuben $r \in \mathbb{R}$ zapišeš kot $r = r \cdot 1$, je množica $\{1\}$ ogrodje prostora M_3. Ker sestavlja ogrodje en sam neničeln vektor, je ogrodje linearno neodvisno, in je zato baza. Torej $\dim M_3 = 1$.

(d) Množica M_4 ni vektorski prostor nad $\mathbb{R}$, ker lahko pri množenju z realnim skalarjem dobiš vektor, ki ni v M_4. Primer: Če pomnožiš vektor 1 s skalarjem $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, dobiš vektor $\sqrt{2}$. Toda $\sqrt{2} \notin M_4$, saj bi sicer iz linearne izrazitve $\sqrt{2} = a + b\sqrt{5}$ $(a, b \in \mathbb{Q})$ po kvadriranju sledilo, da je $\sqrt{5}$ racionalno število.

Opomba *Definicija seštevanja vektorjev v točki (a), strogo gledano, ni dovolj natančna. Namesto običajnega seštevanja* $+\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *bi morali vzeti njegovo zožitev* $+|_{M_1 \times M_1}\colon M_1 \times M_1 \to \mathbb{R}$. *Podobno razmisli o množenju s skalarjem v* M_1. *Kako je z operacijami v točkah (b), (c) in (d)?*
Opazi, kako zelo različni so si vektorski prostori nad različnimi obsegi, kljub temu, da so zgrajeni iz iste množice.

Rešitev 67. naloge

(a) Premisli, da po znanih enakostih za kotne funkcije velja

$$(\sin\frac{x}{2})^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos x) = \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot \cos x,$$

zato funkcija $x \mapsto (\sin\frac{x}{2})^2$ pripada V.

(b) Predpostavi, da obstajajo taki skalarji $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, da velja

$$\sin(2x) = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot \cos x + \gamma \cdot \sin x \quad \text{za vsak } x \in \mathbb{R}. \tag{67}$$

1. način reševanja. V enakost (67) namesto x vstavi $x + \pi$. Potem dobiš enakost

$$\sin(2x) = \alpha \cdot 1 - \beta \cdot \cos x - \gamma \cdot \sin x \quad \text{za vsak } x \in \mathbb{R}. \tag{68}$$

Seštej enakosti (67) in (68), pa dobiš enakost

$$\sin(2x) = 2\alpha \cdot 1 \quad \text{za vsak } x \in \mathbb{R}.$$

To pa je protislovje, saj funkcija sin ni konstantna funkcija.

2. način reševanja. V enakost (67) namesto x vstavi $0, \pi/2, \pi$ in $\pi/4$ in pridelaj protislovje.

(c) Predpostavi, da obstajajo taki skalarji $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, da velja

$$|\sin x| = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot \cos x + \gamma \cdot \sin x \quad \text{za vsak } x \in \mathbb{R}. \tag{69}$$

V enakost (69) vstavi vrednosti $x := 0, x := \pi, x := \frac{\pi}{2}$ in $x := -\frac{\pi}{2}$, in dobiš protisloven sistem enačb

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta, \\ 0 &= \alpha - \beta, \\ 1 &= \alpha + \gamma, \\ 1 &= \alpha - \gamma. \end{aligned}$$

Zato funkcija $x \mapsto |\sin x|$ ni v V.

(d) Opazi, da ima vsaka nekonstantna funkcija f iz V osnovno periodo enako 2π: Če je $f \in V$, zapiši in preoblikuj

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda + \mu\cos x + \nu\sin x \qquad \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R} \\ &= \lambda + \sqrt{\mu^2 + \nu^2}\left(\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\cos x + \frac{\nu}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\sin x\right) \\ &= \lambda + \sqrt{\mu^2 + \nu^2}\sin(x + x_0), \end{aligned}$$

za vsako takšno realno število $x_0 \in \mathbb{R}$, za katerega je $\sin x_0 = \mu/\sqrt{\mu^2+\nu^2}$ in $\cos x_0 = \nu/\sqrt{\mu^2+\nu^2}$. Torej je 2π res osnovna perioda funkcije f.

Po drugi strani velja:

(i) če je $\alpha = 0$, je $f_\alpha(x) = \sin(\alpha x) = \sin(0x) = 0$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, zato je $f_0 = 0 \in V$;

(ii) če je $\alpha = 1$, je $f_\alpha(x) = \sin x \in V$;

(iii) če je $\alpha = -1$, je $f_\alpha(x) = -\sin x \in V$;

(iv) če je $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}$, ima funkcija $f_\alpha(x) = \sin(\alpha x)$ osnovno periodo enako $2\pi/|\alpha|$. Za $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}$ se torej osnovni periodi funkcij iz V in f_α razlikujeta, za take α velja $f_\alpha \notin V$.

Sklep: $f_\alpha \in V$ samo za $\alpha \in \{-1,0,1\}$.

Rešitev 68. naloge

Predpostavi, da so $v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0$ linearno neodvisni in da za neke skalarje $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{F}$ velja

$$\lambda_0(v_0 - v_n) + \lambda_1(v_1 - v_n) + \cdots + \lambda_{n-1}(v_{n-1} - v_n) = 0$$

oziroma strnjeno

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i(v_i - v_n) = 0.$$

Potem je

$$0 = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i(v_i - v_0 + v_0 - v_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i(v_i - v_0) + \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i(v_0 - v_n). \tag{70}$$

Definiraj $\lambda_n := -\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i$. Potem lahko enakost (70) zapišeš takole:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(v_i - v_0). \tag{71}$$

Vektorji $v_1 - v_0, \dots, v_n - v_0$ so po predpostavki linearno neodvisni, zato iz (71) sledi

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

in odtod še $\lambda_0 = -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$. Torej so vektorji $v_0 - v_n, \dots, v_{n-1} - v_n$ linearno neodvisni.

Opomba *Kako dokažeš obrat?*

Rešitev 69. naloge

($\Rightarrow$). Dokaz s protislovjem: recimo, da predpostavka velja, posledica pa ne, torej $X \cup Y \leq Z$, $X \not\subseteq Y$ in $Y \not\subseteq X$. Potem obstajata $x \in X\backslash Y$ in $y \in Y\backslash X$. Ker sta $x, y \in X \cup Y$ in je $X \cup Y$ podprostor, je tudi $x + y \in X \cup Y$. To pomeni, da je $x + y = x' \in X$ ali $x + y = y' \in Y$. V prvem primeru dobiš $y = x' - x \in X$, saj je X podprostor, protislovje s predpostavko $y \in Y\backslash X$. V drugem podobno dobiš $x = y' - y \in Y$, saj je Y podprostor. Tu prideš v protislovje s predpostavko, da je $x \in X\backslash Y$.
($\Leftarrow$). Če je $X \subseteq Y$, je $X \cup Y = Y$ podprostor v Z zaradi predpostavke $Y \leq Z$. Če pa je $Y \subseteq X$, je zaradi $X \leq Z$ tudi $X \cup Y = X$ podprostor v Z.

Opomba *Iz teorije veš, da sta $X \cap Y$ in $X + Y$ podprostora v Z. Gornja naloga pa ti pove, kdaj natanko je tudi $X \cup Y$ podprostor v Z.*

⊳⊳⊳ 70., 71.

Rešitev 70. naloge

(a) Vzemi poljuben $v \in X + (Y \cap Z)$. Potem obstajata taka $x \in X$ in $v' \in Y \cap Z$, da velja $v = x + v'$. Pokazati želiš, da se v nahaja hkrati v podprostorih $X + Y$ in $X + Z$. Ker je $v' \in Y \cap Z$, je $v' \in Y$ in $v' \in Z$, in zato je $v = x + v' \in X + Y$ ter $v = x + v' \in X + Z$. Končno sklepaš, da je $v \in (X + Y) \cap (X + Z)$.

(b) Poglej $V := \mathbb{R}^2$. Naj bodo X x-os, Y y-os in Z simetrala lihih kvadrantov. Potem je $X + Y$ ravnina, ki jo napenjata premici X in Y, torej $X + Y = V$. Podobno sklepaš, da je $X + Z = V$. Zato je desna stran v (7) enaka $(X + Y) \cap (X + Z) = V$. Po drugi strani je $Y \cap Z = \{0\}$, in zato je $X + (Y \cap Z) = X$. V tem primeru je torej leva stran v (7) strogo vsebovana v desni.

(c) Dve množici sta enaki, če je prva podmnožica druge in druga podmnožica prve. Če v inkluziji (6) upoštevaš $X \subseteq Y$, dobiš

$$X + (Y \cap Z) \subseteq Y \cap (X + Z).$$

Zato zadošča pokazati, da je desna stran v (8) podmnožica leve: Vzemi poljuben v iz $Y \cap (X + Z)$. Potem je v v Y in v $X + Z$, zato obstajata taka x iz X in z iz Z, da je $v = x + z$. Ker sta v in x v Y, je tudi $z = v - x$ v Y. Ker je $x \in X$ in $z \in Y \cap Z$, je končno $v = x + z \in X + (Y \cap Z)$.

Opomba *Opazi, da sklep v točki (a) velja, tudi če predpostaviš, da so X, Y in Z samo neprazne podmnožice prostora V. V točki (c) pa bistveno upoštevaš, da so podane podmnožice podprostori.*
Na podoben način razišči še distributivnost preseka podprostorov glede na vsoto podprostorov.

⊳⊳⊳ 69., 71.

Rešitev 71. naloge

($\Rightarrow$). Predpostavi, da je $U \cap (V + W) \subseteq W$. Dokazati želiš $V \cap (U + W) \subseteq W$. V ta namen vzemi poljuben $v \in V \cap (U + W)$. Potem je $v \in V$ in $v \in U + W$, zato je $v = u + w$ za neka $u \in U$, $w \in W$. Odtod dobiš $v - w = u \in U \cap (V + W) \subseteq W$. Torej je $u \in W$ in zato tudi $v = u + w \in W$, kar je bilo treba dokazati.
($\Leftarrow$). V gornji, že dokazani implikaciji zamenjaj vlogi prostorov U in V. Kaj dobiš?

Opomba *Še enkrat se sprehodi skozi gornji dokaz. Katere lastnosti množic U, V in W so uporabljene?*

⊳⊳⊳ 69., 70.

Rešitev 72. naloge

Dokaži naprimer verigo implikacij $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)$:

(a) $\Rightarrow$ (b). Naj velja (a). Potem je $V = V_1 + \cdots + V_k$, saj za vsak $v \in V$ obstajajo taki $v_i \in V_i$, da je $v = v_1 + \cdots + v_k$. Vzemi poljuben nabor neničelnih vektorjev, ki paroma pripadajo različnim podprostorom V_i. Smeš privzeti, da je ta nabor sestavljen iz nekih neničelnih vektorjev $u_1 \in V_1, u_2 \in V_2, \ldots, u_r \in V_r$ (sicer preoštevilči podprostore). Zapiši

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r = 0,$$

kjer so $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ skalarji iz polja, nad katerim je zgrajen prostor V. Velja tudi $0 = 0 + \cdots + 0$. Iz enoličnosti razcepa potem sledi $\alpha_i u_i = 0$ za vsak $1 \le i \le k$. Ker so izbrani vektorji neničelni, dobiš $\alpha_i = 0$ za vse i. Torej so vektorji $u_1, \ldots, u_k$ linearno neodvisni in velja (b).

(b) $\Rightarrow$ (c). Naj velja (b). Predpostavi, da za neki $1 \le i \le k$ velja

$$V_i \cap (V_1 + \cdots + V_{i-1} + V_{i+1} + \cdots + V_k) \neq 0.$$

Privzeti smeš, da je $i = 1$ (sicer preoštevilči podprostore). Torej obstaja neničeln $v_1 \in V_1 \cap (V_2 + \cdots + V_k)$ oziroma $v_1 = v_2 + \cdots + v_k$ za neke $v_i \in V_i$, $1 \le i \le k$. Spet smeš privzeti, da so vektorji $v_2, \ldots, v_r$ neničelni, ostali $v_{r+1}, \ldots, v_k$ pa so enaki nič (sicer spet preoštevilči podprostore). Vektorji $v_1, \ldots, v_r$ so po (b) linearno neodvisni, iz gornje enakosti pa sledi tudi

$$0 = (-1)v_1 + v_2 + \cdots + v_r,$$

protislovje. Torej

$$V_1 \cap (V_2 + \cdots + V_k) = 0$$

in velja (c).

(c) $\Rightarrow$ (a). Naj velja (c). Vzemi poljuben $v \in V$. Ker velja $V = V_1 + \cdots + V_k$, obstajajo taki vektorji $v_i \in V_i$, $1 \le i \le k$, da je $v = v_1 + \cdots + v_k$. Dokazati moraš še enoličnost teh vektorjev v_i. V ta namen predpostavi, da velja tudi $v = u_1 + \cdots + u_k$ za neke $u_i \in V_i$, $1 \le i \le k$. Potem je

$$0 = v - v = (v_1 - u_1) + \cdots + (v_k - u_k).$$

Vektor

$$-(v_1 - u_1) = (v_2 - u_2) + \cdots + (v_k - u_k)$$

pripada preseku $V_1 \cap (V_2 + \cdots + V_k)$, zato iz (c) sledi $v_1 - u_1 = 0$, odtod pa $v_1 = u_1$. Na podoben način dobiš $v_i = u_i$ za vse i. Torej velja (a).

Opomba *Ali je končnorazsežnost prostora V potreben pogoj?*

⋙ 410.

Rešitev 73. naloge

Naj bo $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$, kjer so vektorji m_i paroma različni. Transformirano množico označi z M'.

(a) Naj bo M linearno neodvisna. Predpostavi, da je M' dobljena iz M s transformacijo (i). Ker vrstni red vektorjev v množici M ni pomemben, smeš predpostaviti, da je $M' = \{\mu \cdot m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ za neki skalar $\mu \neq 0$. Naj bo

$$\lambda_1 \cdot (\mu \cdot m_1) + \lambda_2 \cdot m_2 + \cdots + \lambda_n \cdot m_n = 0,$$

kjer so λ_i skalarji. Potem velja

$$(\lambda_1 \mu) \cdot m_1 + \lambda_2 \cdot m_2 + \cdots + \lambda_n \cdot m_n = 0.$$

Ker so vektorji m_i linearno neodvisni, dobiš sistem enačb $\lambda_1 \mu = 0$, $\lambda_2 = 0$, ..., $\lambda_n = 0$. Iz $\mu \neq 0$ sledi $\lambda_i = 0$ za vse $i = 1, \ldots, n$. Zato je množica M' linearno neodvisna.

Če množico M' dobiš iz M s transformacijo (ii), lahko brez škode za splošnost predpostaviš, da je $M' = \{m_1 + \mu m_2, m_2, \ldots, m_n\}$ za neki skalar $\mu \in \mathbb{F}$. Poglej enakost

$$\lambda_1 \cdot (m_1 + \mu m_2) + \lambda_2 \cdot m_2 + \cdots + \lambda_n \cdot m_n = 0,$$

iz katere sledi

$$\lambda_1 \cdot m_1 + (\lambda_1 \mu + \lambda_2) \cdot m_2 + \cdots + \lambda_n \cdot m_n = 0.$$

Ker so vektorji m_i $(i = 1, \ldots, n)$ linearno neodvisni, velja $\lambda_1 = 0$, $\lambda_1 \mu + \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0, \ldots$, $\lambda_n = 0$, torej $\lambda_i = 0$ za vsak $i = 1, \ldots, n$. Zato je tudi v tem primeru množica M' linearno neodvisna.

(b) Recimo, da množico M spremeniš v množico M' s transformacijo (i). Kot zgoraj smeš predpostaviti, da je $M' = \{\mu \cdot m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ za neki $\mu \neq 0$. Ali je potem $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M')$?

Najprej dokaži $\mathcal{L}(M) \subseteq \mathcal{L}(M')$. Vzemi poljuben vektor $v \in \mathcal{L}(M)$. Potem je

$$v = \lambda_1 \cdot m_1 + \lambda_2 \cdot m_2 + \cdots + \lambda_n \cdot m_n,$$

kjer so $\lambda_i \in \mathbb{F}$ neki skalarji. Zato lahko vektor v linearno izraziš z vektorji iz M',

$$v = \left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right) \cdot (\mu \cdot m_1) + \lambda_2 \cdot m_2 + \cdots + \lambda_n \cdot m_n,$$

saj $\mu \neq 0$. To pa je bilo potrebno dokazati! Neenakost $\mathcal{L}(M) \supseteq \mathcal{L}(M')$ dokažeš podobno.

Oglej si še primer, ko množico M spremeniš v množico M' s transformacijo (ii). Spet je $M' = \{m_1 + \mu m_2, m_2, \ldots, m_n\}$ za neki $\mu \in \mathbb{F}$. Ali je potem $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M')$?

Najprej dokaži $\mathcal{L}(M) \subseteq \mathcal{L}(M')$. Vzemi poljuben vektor $v \in \mathcal{L}(M)$. Potem je

$$v = \lambda_1 \cdot m_1 + \lambda_2 \cdot m_2 + \cdots + \lambda_n \cdot m_n,$$

kjer so $\lambda_i \in \mathbb{F}$ skalarji. Zato lahko vektor v linearno izraziš z vektorji iz M' takole:

$$v = \lambda_1 \cdot (m_1 + \mu m_2) + (\lambda_2 - \lambda_1 \mu) \cdot m_2 + \cdots + \lambda_n \cdot m_n.$$

To pa je bilo potrebno dokazati! Neenakost $\mathcal{L}(M) \supseteq \mathcal{L}(M')$ dokažeš podobno.

Opomba *Ta naloga ti da močno orodje, ki ga lahko uporabiš za reševanje mnogih linearnih problemov (iskanje baze, reševanje sistemov linearnih enačb, računanje ranga, računanje determinante matrike,...) v postopku, imenovanem Gaussov postopek eliminacije.*

⋙ 12., 79., 80., 81., 84.

Rešitev 74. naloge

Naj bo
$$B_U = \{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$$
baza podprostora U. S poljubnim vektorjem $v \in V \backslash U$ jo dopolni do baze
$$B_V = \{u_1, \ldots, u_{n-1}, v\}$$
prostora V. Ker velja $v \notin U$, vektorji $u_i + v$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ ne pripadajo U, kajti sicer bi veljalo $u_i + v = u$ za neki $u \in U$ oziroma $v = u - u_i \in U$. Po nalogi 73 je množica
$$B'_V := \{u_1 + v, \ldots, u_{n-1} + v, v\}$$
spet linearno neodvisna in zaradi $n = \dim V$ tudi baza prostora V.

Opomba *Za katere razsežnosti podprostora U lahko napraviš isti zaključek? Podaj geometrijsko tolmačenje naloge v $\mathbb{R}^2$ in v $\mathbb{R}^3$.*

⋙ 73., 75.

Rešitev 75. naloge

(a) Ker je $0 \in U$, je U neprazna množica. Če so x, y iz U in λ iz $\mathbb{R}$, velja
$$(x+y)_1 + (x+y)_3 = (x_1 + y_1) + (x_3 + y_3) = (x_1 + x_3) + (y_1 + y_3) = 0 + 0 = 0$$
in
$$(\lambda x)_1 + (\lambda x)_3 = \lambda x_1 + \lambda x_3 = \lambda(x_1 + x_3) = \lambda \cdot 0 = 0.$$
Ko podobno preveriš še, da je vsota druge in četrte koordinate vektorjev $x+y$ in λx enaka 0, dokažeš, da je U podprostor v $\mathbb{R}^4$.

(b) Iz enačb v opisu podprostora U dobiš
$$x_3 = -x_1 \quad \text{in} \quad x_4 = -x_2.$$
Zato je $x \in U$ natanko takrat, ko je $x = (x_1, x_2, -x_1, -x_2)$ za neka $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, ali zapisano drugače $x = x_1(1, 0, -1, 0) + x_2(0, 1, 0, -1)$ za neka $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Ker je množica
$$B_U := \{(1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1)\}$$
ogrodje podprostora U in je linearno neodvisna, je njegova baza.

(c) Bazo B_U lahko dopolniš do baze prostora $\mathbb{R}^4$ z vektorjema $(1, 0, 0, 0)$ in $(0, 1, 0, 0)$, pa dobiš bazo
$$B_{\mathbb{R}^4} := \{(1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, -1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\}.$$
Če odšteješ od prvega vektorja tretji vektor in od drugega četrti, dobiš bazo,
$$B'_{\mathbb{R}^4} := \{(0, 0, -1, 0), (0, 0, 0, -1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\},$$
ki zadošča postavljenim pogojem.

⋙ 74.

Rešitev 76. naloge

Najprej podaj rešitev za neprazno podmnožico $A \subseteq V$.

(a) $(\subseteq)$. Če je $a \in A$, je $a = 1 \cdot a \in \mathcal{L}(A)$, zato je $A \subseteq \mathcal{L}(A)$

$(\leq)$. Vzemi $v, v' \in \mathcal{L}(A)$. Potem po definiciji ogrinjače obstajajo taki vektorji
$$a_1, \ldots, a_m, a'_1, \ldots, a'_n \in A$$
in taki skalarji
$$\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda'_1, \ldots, \lambda'_n \in \mathbb{F},$$
da velja $v = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m$ in $v' = \lambda'_1 a'_1 + \cdots + \lambda'_n a'_n$. Potem vektor
$$v + v' = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m + \lambda'_1 a'_1 + \cdots + \lambda'_n a'_n$$
pripada $\mathcal{L}(A)$ po definiciji ogrinjače. Da za poljubna $v \in \mathcal{L}(A)$ in $\mu \in \mathbb{F}$ velja $\mu v \in \mathcal{L}(A)$, se prepričaš podobno. Zato je $\mathcal{L}(A)$ podprostor prostora V.

(b) $(\Rightarrow)$. Predpostavi, da je $\mathcal{L}(A) = A$. Po točki (a) je $\mathcal{L}(A)$ podprostor v V. Zato je tudi A podprostor v V.

$(\Leftarrow)$. Predpostavi, da je A podprostor. Dokazati moraš, da je $A = \mathcal{L}(A)$: $(\subseteq)$. Po točki (a) je $A \subseteq \mathcal{L}(A)$. $(\supseteq)$. Vzemi poljuben $v \in \mathcal{L}(A)$. Potem je
$$v = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n,$$
za neke vektorje $a_1, \ldots, a_n \in A$ in neke skalarje $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Ta zapis že pove, da je $v \in A$, saj je A podprostor.

(c) Ker je po točki (a) množica $\mathcal{L}(A)$ tudi podprostor, jo lahko vstaviš v enakost v točki (b), pa je naloga rešena.

Tudi za prazno množico veljajo trditve: (a) $\mathcal{L}(\emptyset) = \{0\}$ je podprostor; (b) $\mathcal{L}(\emptyset) \neq \emptyset$ in $\emptyset$ ni podprostor v V; (c) $\mathcal{L}(\mathcal{L}(\emptyset)) = \mathcal{L}(\{0\}) = \{0\} = \mathcal{L}(\emptyset)$.

⋙ 77., 78.

Rešitev 77. naloge

(a) $(\subseteq)$. Vzemi poljuben $v \in \mathcal{L}(A + B)$. Potem je
$$v = \lambda_1(a_1 + b_1) + \cdots + \lambda_n(a_n + b_n) \tag{72}$$
kjer so $a_i \in A$, $b_i \in B$ in $\lambda_i \in \mathbb{F}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Zato je
$$v = (\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n) + (\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n) \in \mathcal{L}(A) + \mathcal{L}(B),$$
po definiciji ogrinjač množic A in B.

$(\neq)$. Če pogledaš vektorski prostor $\mathbb{R}^2$ in vzameš $A := \{\vec{\imath}\}$ in $B := \{\vec{\jmath}\}$, je
$$\mathcal{L}(A) = \{\lambda(1, 0) | \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda, 0) | \lambda \in \mathbb{R}\},$$

to je abcisna os,

$$\mathcal{L}(B) = \{\lambda(0,1) | \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(0,\lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\},$$

to je ordinatna os, in

$$\mathcal{L}(A+B) = \mathcal{L}\{(1,1)\} = \{\lambda(1,1) | \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda,\lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\},$$

to je simetrala lihih kvadrantov. Na desni strani izraza je vsa ravnina:

$$\mathcal{L}(A) + \mathcal{L}(B) = \{(\lambda,0) | \lambda \in \mathbb{R}\} + \{(0,\lambda) | \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda,\mu) | \lambda,\mu \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2.$$

(b) ($\subseteq$). Če je $A \cap B = \emptyset$, potem je

$$\mathcal{L}(A \cap B) = \mathcal{L}(\emptyset) = \{0\} \subseteq \mathcal{L}(A) \cap \mathcal{L}(B).$$

Zato smeš privzeti, da je $A \cap B \neq \emptyset$. Vzemi poljuben $v \in \mathcal{L}(A \cap B)$. Potem je

$$v = \lambda_1 c_1 + \cdots + \lambda_n c_n,$$

kjer so $c_i \in A \cap B$ in $\lambda_i \in \mathbb{F}$ ($i = 1, \ldots, n$). Zato so $c_i \in A$, in odtod je $v \in \mathcal{L}(A)$. Podobno velja $v \in \mathcal{L}(B)$. Torej končno dobiš $v \in \mathcal{L}(A) \cap \mathcal{L}(B)$.

($\neq$). Za dokaz neenakosti vzemi $A := \{1\}$ in $B := \{2\}$ v prostoru $\mathbb{R}$ nad poljem $\mathbb{R}$. Potem je $\mathcal{L}(A \cap B) = \mathcal{L}(\emptyset) = \{0\}$ in $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(B) = \mathcal{L}(A) \cap \mathcal{L}(B) = \mathbb{R}$.

(c) ($\subseteq$). Bodi $v \in \mathcal{L}(A)$. Potem je $v = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$ za neke $a_i \in A$ in $\lambda_i \in \mathbb{F}$ ($i = 1, \ldots, n$). Naj bo U tak podprostor v V, da velja $A \subseteq U$. Torej velja tudi $a_i \in U$. Ker je U podprostor, pa sledi

$$v = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \in U.$$

Zato je $\mathcal{L}(A) \subseteq U$ in odtod

$$\mathcal{L}(A) \subseteq \bigcap_{A \subseteq U \leq V} U.$$

($\supseteq$). Vzemi zdaj poljuben $v \in \cap_{A \subseteq U \leq V} U$. Ker je po točki (a) naloge 76 podprostor $\mathcal{L}(A)$ element družine množic $\{U \mid A \subseteq U \leq V\}$, je $v \in \mathcal{L}(A)$, in zato velja inkluzija tudi v to smer.

Opomba *Ali velja (c) tudi za $A = \emptyset$?*
Opazi, da lahko linearno ogrinjačo podmnožice A definiramo tudi kot najmanjši podprostor v V, ki vsebuje podmnožico A.

⊳⊳⊳ 76., 78.

Rešitev 78. naloge

(a) *1. način reševanja.* Vzemi poljuben $v \in \mathcal{L}(A)$. Torej je $v = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$ za neke $a_1, \ldots, a_n \in A$ in neke $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$. Ker je $A \subseteq B$, so vsi $a_1, \ldots, a_n \in B$, torej je $v \in \mathcal{L}(B)$.

2. način reševanja. Iz naloge 76(c) dobiš

$$\mathcal{L}(A) = \bigcap_{A \subseteq U \leq V} U. \tag{73}$$

Zato je

$$\mathcal{L}(A) = \bigcap_{A \subseteq U \leq V} U \subseteq \bigcap_{B \subseteq U \leq V} U = \mathcal{L}(B).$$

(b) Ker je po predpostavki

$$A \subseteq B \subseteq \mathcal{L}(A),$$

je po točki (a) in nalogi 76(b)

$$\mathcal{L}(A) \subseteq \mathcal{L}(B) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{L}(A)) = \mathcal{L}(A).$$

Opomba *Nalogo (b) lahko rešiš strogo po definiciji linearne ogrinjače, toda taka rešitev je nepregledna.*

⊳⊳⊳ 76., 77.

Rešitev 79. naloge

Vektorje prepišeš v vrstice preglednice, kot vidiš spodaj. Naloge se lotiš z elementarnimi transformacijami vrstic v preglednici (glej nalogo 73):

(i) Poljubno vrstico lahko pomnožiš s poljubnim neničelnim skalarjem.

(ii) K poljubni vrstici lahko prišteješ poljuben večkratnik poljubne druge vrstice.

Povrhu:

(iii) Vrstni red vrstic lahko zamenjaš.

Tvoj namen je pridobiti tako obliko preglednice, iz katere bo razvidna linearna neodvisnost vrstic. Izkaže se, da je smiselno pridelati preglednico, v kateri so pod prvim neničelnim koeficientom vsake vrstice same ničle.

Spreminjanju neničelnih koeficientov v ničelne rečemo uničevanje koeficientov preglednice. Število, s katerim trenutno uničuješ, se imenuje pivot. Uničevanja se lotiš zaporedoma po stolpcih, začenši s prvim – če je prvi stolpec ničeln, se lotiš drugega... Za pivot izbereš (najprimernejše) neničelno število v prvem stolpcu. Če je le mogoče, je dobro izbrati števili 1 ali −1 v vrstici, ki ima čimveč ničel. Pri računanju lahko ubereš naslednjo pot:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 4 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & -4 & 2 \end{bmatrix} \sim$$

(Znak $\sim$ stoji v vednost, da je naslednja preglednica dobljena iz prejšnje s pomočjo elementarnih transformacij vrstic. Pozneje bomo rekli, da sta matriki ekvivalentni.) Naj bo najprej pivot uokvirjena enica v prvi vrstici preglednice. Z elementarno transformacijo (ii) uničiš vse neničelne koeficiente pod izbranim pivotom. Naprimer: minus enico v drugi vrstici uničiš tako, da drugi vrstici prišteješ prvo (ali v jeziku točke (ii): drugi vrstici prišteješ z 1 pomnoženo prvo vrstico). Podobno storiš še pri ostalih koeficientih prvega stolpca, pa dobiš preglednico

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

Smiselno je tretjo vrstico deliti z 2 (ali v jeziku točke (i): pomnožiti jo z 1/2), nato pa po točki (iii) zamenjati drugo in tretjo vrstico:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

Zdaj se lotiš uničevanja koeficientov v drugem stolpcu. Naj bo tokrat pivot uokvirjeno število -1. Ko z elementarnimi transformacijami uničiš koeficiente pod pivotom, dobiš preglednico

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

Do cilja te loči samo še korak. Z izbranim pivotom narediš še eno elementarno transformacijo:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Razvidno je, da so neničelne vrstice v zadnji preglednici linearno neodvisne. Naloga 73 zagotavlja, da vrstice v zadnji preglednici razpenjajo isti podprostor kot tiste v prvi (dodana transformacija (iii) – zamenjava vrstnega reda vrstic – ohranja množico vrstic, torej tudi njeno linearno ogrinjačo). Zaradi tega so neničelne vrstice v zadnji preglednici baza linearne ogrinjače tistih v prvi. Torej je množica

$$B_U := \{(1,0,1,0,1), (0,-1,1,0,0), (0,0,3,2,0)\}$$

baza prostora U.

Opomba *Pomni, v kakšnem vrstnem redu poteka uničevanje koeficientov.*
Ta preprosti postopek se imenuje Gaussov eliminacijski postopek. Srečaš ga še pri reševanju sistemov linearnih enačb, računanju ranga, determinante in obrata matrike,...
Izkaže se, da je gornji postopek mogoče izpeljati samo z uporabo transformacije (ii).

⊳⊳⊳ 73., 80., 81., 86.

Rešitev 80. naloge

V nalogi 79 je podrobneje opisan postopek pridobivanja baze iz ogrodja podprostora. Tu si preglednice sledijo brez komentarjev in posebej označenih pivotov.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odtod prebereš, da je množica vektorjev

$$B_V := \{(1,2,-1,0,1), (0,1,2,2,0), (0,0,1,-1,1)\}$$

baza prostora V. (Ker je $\dim V = 3$, je tudi začetno ogrodje baza prostora V.)

⊳⊳⊳ 73., 79., 81.

Rešitev 81. naloge

1. način reševanja. Uporabi rezultate iz nalog 79 in 80 ter prepiši vektorje iz baz prostorov U in V v skupno preglednico. Poimenuj vsak vektor v vrsticah preglednice: vektorje iz podprostora U lahko označiš z u_i, iz podprostora V pa z v_i. Razširi preglednico na desni strani s stolpcem imen. Evidenco na desni strani moraš voditi samo v primeru, ko te zanima baza preseka $U \cap V$, sicer to nadležno opravilo izpustiš. Pri naši nalogi torej ne bo šlo brez tega. Z elementarno transformacijo (ii) (glej nalogo 79 ali 73) sistematično uničuješ koeficiente. Pivotov ni treba posebej označevati.

$$\left[\begin{array}{ccccc|l} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & u_1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & u_3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & v_1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & v_3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|l} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & u_1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & u_3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & v_1 - u_1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & v_3 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|l} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & u_1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & u_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_1 - u_1 + 2u_2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & v_2 + u_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & v_3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|l} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & u_1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_1 - u_1 + 2u_2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -3 & v_2 + u_2 - 3v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -3 & u_3 - 3v_3 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|l} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & u_1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -3 & v_2 + u_2 - 3v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & v_1 - u_1 + 2u_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_3 - v_2 - u_2 \end{array}\right].$$

Opazi, da so vse neničelne vrstice v zadnji preglednici linearno neodvisne. Zato sestavljajo bazo

$$B_{U+V} := \{(1,0,1,0,1),(0,-1,1,0,0),(0,0,1,-1,1),(0,0,0,5,-3)\}$$

prostora $U+V$.

Za izračun baze preseka $U \cap V$ uporabi evidenco z desne strani ničelnih vrstic zadnje preglednice. Sklepaš lahko, da velja $v_1 = u_1 - 2u_2 = (1,2,-1,0,1)$ in $v_2 = u_3 - u_2 = (0,1,2,2,0)$. Ker sta ta dva vektorja iz podprostora $U \cap V$ linearno neodvisna in ker velja $\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U+V) = 3+3-4 = 2$, lahko vzameš množico

$$B_{U\cap V} := \{(1,2,-1,0,1),(0,1,2,2,0)\}$$

za bazo prostora $U \cap V$.

2. način reševanja. (Ta način reševanja opisuje samo pridobivanje baze preseka $U \cap V$.) Vektor $x \in \mathbb{R}^5$ pripada preseku $U \cap V$ natanko takrat, ko se ga da izraziti v obliki

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = x = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \mu_3 v_3,$$

kjer so u_1, u_2, u_3 elementi urejene baze podprostora U, v_1, v_2, v_3 elementi urejene baze podprostora V in $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1,2,3)$ neki skalarji. Ko vstaviš podatke, dobiš sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mu_1, \\ -\lambda_2 &= 2\mu_1 + \mu_2, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 &= -\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3, \\ 2\lambda_3 &= 2\mu_2 - \mu_3, \\ \lambda_1 &= \mu_1 + \mu_3. \end{aligned}$$

Odtod sledi $\mu_1 = \lambda_1$, $\mu_2 = -2\lambda_1 - \lambda_2$, $\mu_3 = 0$, $\lambda_3 = -2\lambda_1 - \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Zato je

$$x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + (-2\lambda_1 - \lambda_2) u_3 =$$

$$= \lambda_1(u_1 - 2u_3) + \lambda_2(u_2 - u_3) = \lambda_1(1,0,-5,-4,1) + \lambda_2(0,-1,-2,-2,0).$$

Ker sta vektorja $w_1 := (1,0,-5,-4,1)$ in $w_2 := (0,1,2,2,0)$ linearno neodvisna in ker po zgornjem razpenjata podprostor $U \cap V$, lahko vzameš za bazo preseka $U \cap V$ množico

$$B_{U\cap V} := \{w_1, w_2\}.$$

⋙ 73., 79., 80., 82., 83., 86., 161., 165.

Rešitev 82. naloge

Brez škode lahko podprostore P, R, $P \cap R$ in $P+R$ preučuješ kot podprostore v vektorskem prostoru $\mathbb{R}_3[x]$, saj stopnje njihovih elementov (polinomov) ne presegajo 3. Za iskanje baz prostorov P in R uporabi postopek iz naloge 79. Pri tem, naprimer, zapiši vsak polinom $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ iz $\mathbb{R}_3[x]$ kot urejeno četverico (a_0, a_1, a_2, a_3). (Seštevanju polinomov in množenju polinoma s skalarjem ustreza pač običajno seštevanje četveric in običajno množenje četverice s skalarjem po komponentah.) V enotni preglednici piši nad prečko četverice, ki pripadajo ogrodju prostora P,

pod prečko pa tiste iz ogrodja prostora R. Nato z elementarnimi transformacijami vrstic, ločeno nad in pod prečko, preoblikuj začetno preglednico.

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Odtod prebereš bazi

$$B_P := \{1 + x^2 + 2x^3, x - x^3, x^2 + 3x^3\},$$

$$B_R := \{1 + x^3, x - x^3, x^3\}.$$

(Ker je $\dim P = 3$ in $\dim R = 3$, sta tudi podani začetni ogrodji prostorov P oziroma R njuni bazi.)

Nadaljuj z enotno preglednico in dodatno evidenco na njeni desni. Tokrat lahko celo izbereš dva pivota hkrati (tako prihraniš čas in prostor):

$$\left[\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & 1 & 2 & p_1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & p_2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & p_3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & r_1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & r_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & 0 & 1 & r_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & p_1 - r_1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & p_2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_2 - p_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_3 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & 0 & 1 & r_1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & p_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & p_1 - r_1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & p_1 + p_3 - r_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_2 - p_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|l} 1 & 0 & 0 & 1 & r_1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & p_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & p_1 - r_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_2 - p_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_1 + p_3 - (r_1 + 2r_3) \end{array}\right].$$

Ker so vse štiri neničelne vrstice v zadnji preglednici linearno neodvisne, je $\dim(P+R) = 4 = \dim \mathbb{R}_3[x]$, zato

$$P + R = \mathbb{R}_3[x] \quad \text{in} \quad B_{P+R} := \{1, x, x^2, x^3\}.$$

Iz evidence ob ničelnih vrsticah prebereš $r_2 = p_2 = x - x^3$ in $r_1 - 2r_3 = p_1 + p_3 = 1 - x^3$. Ker je po Grassmanovi enakosti

$$\dim(P \cap R) = \dim P + \dim R - \dim(P+R) = 3 + 3 - 4 = 2,$$

lahko za bazo preseka vzameš

$$B_{P\cap R} := \{x - x^3, 1 - x^3\}.$$

⋙ 79., 80., 81., 83.

Rešitev 83. naloge

(a) Če sta U in V vektorska podprostora v $\mathbb{R}_3[x]$, potem vsebujeta ničelni polinom $0 \in \mathbb{R}_3[x]$. Zato veljata enakosti $\alpha = \beta$ in $0 = \beta + 1$, odkoder dobiš $\alpha = \beta = -1$. Preveri še, da iz $\alpha = \beta = -1$ sledi, da sta U in V podprostora v $\mathbb{R}_3[x]$!

(b) Podprostora U in V zapiši takole

$$U = \{a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid a + 2b = 0\},$$
$$V = \{a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid a - 2c = 0,\ a - b + c - d = 0\}.$$

Polinom $a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x]$ pripada preseku $U \cap V$ natanko tedaj, ko je

$$a + 2b = 0, \quad a - 2c = 0, \quad a - b + c - d = 0.$$

Iz tega sistema enačb sledi $b = -a/2$, $c = a/2$, $d = 2a$, $a \in \mathbb{R}$. Sklepaj, da je $B_{U\cap V} = \{2 - x + x^2 + 4x^3\}$ baza preseka $U \cap V$.

Razsežnosti preseka in vsote podprostorov veže Grassmanova enakost

$$\dim U + \dim V = \dim(U \cap V) + \dim(U + V).$$

Podprostor U je trirazsežen z bazo $B_U = \{2 - x, x^2, x^3\}$, podprostor V pa je dvorazsežen in ima bazo $B_V = \{2 + x^2 + 3x^3, x - x^3\}$. Sklepaj, da je $\dim(U + V) = 4$, torej $U + V = \mathbb{R}_3[x]$ in $B_{U+V} = \{1, x, x^2, x^3\}$ je baza te vsote.

⋙ 56., 81., 82.

Rešitev 84. naloge

Zanima te, ali velja $\mathcal{L}(B) = \mathcal{L}(C)$.

1. način reševanja. Preveri, ali velja hkrati $B \subseteq \mathcal{L}(C)$ in $C \subseteq \mathcal{L}(B)$. Torej za vsak vektor iz B ugotovi, ali je linearna kombinacija vektorjev iz množice C, in obratno, za vsak vektor iz C ugotovi, ali je linearna kombinacija vektorjev iz množice B.

2. način reševanja. Najprej skrči množici B in C do linearno neodvisnih množic

$$B' := \{(4,1,5,2), (0,1,2,1), (2,1,0,5)\},$$
$$C' := \{(0,1,3,0), (2,0,1,1), (0,0,1,-1)\}.$$

Ker je $\dim \mathcal{L}(B') = 3 = \mathcal{L}(C')$, zadošča zdaj preveriti samo eno od vsebovanosti $B' \subseteq \mathcal{L}(C')$ ali $C' \subseteq \mathcal{L}(B')$.

3. način reševanja. S pomočjo metode iz naloge 73 se reševanje poenostavi. Oglej si preglednico

$$\left[\begin{array}{cccc} 4 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 5 & -8 \\ \hline 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right]. \tag{74}$$

V vrsticah nad prečko so zapisani koeficienti vektorjev iz množice B, pod prečko pa koeficienti vektorjev iz množice C. Z ločenimi elementarnimi transformacijami vrstic nad in pod prečko preoblikuj (74) v

$$\left[\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -8 \\ 0 & -1 & 5 & -8 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Iz zadnje preglednice je razvidno, da je $\dim \mathcal{L}(B) = 3 = \dim \mathcal{L}(C)$. Izloči ničelni vrstici in nadaljuj z elementarnimi transformacijami vrstic tako, da z vrsticami nad prečko uničuješ tiste izpod nje.

$$\left[\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Sklepaj, da je $\mathcal{L}(C) \subseteq \mathcal{L}(B)$. Ker imata povrhu prostora $\mathcal{L}(C)$ in $\mathcal{L}(B)$ enako razsežnost, sta enaka. Sklep: množica B je ogrodje prostora $\mathcal{L}(C)$.

⋙ 62., 63., 73., 85.

Rešitev 85. naloge

(a) Ker je množica S ogrodje svoje ogrinjače $\mathcal{L}(S)$, moraš samo še preveriti, ali je S linearno neodvisna. To napraviš na običajen način ali pa sestaviš preglednico, ki jo preoblikuješ z elementarnimi transformacijami vrstic (ločeno nad in pod prečko – samo za (a) delo pod prečko ni potrebno):

$$\left[\begin{array}{ccccc} -1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & -2 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc} -1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 4 & -4 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc} -1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & -5 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \tag{75}$$

Sklepaj, da je $\dim \mathcal{L}(S) = 3$. Ker ima ogrodje S toliko elementov, kolikor je razsežnost prostora $\mathcal{L}(S)$, je S baza prostora $\mathcal{L}(S)$.

(b) Iz gornjih preglednic prebereš tudi $\dim \mathcal{L}(T) = 2$. Če nadaljuješ z elementarnimi transformacijami vrstic celotne preglednice (75), dobiš

$$(75) \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Torej je $\dim(\mathcal{L}(S) + \mathcal{L}(T)) = 5$, iz Grassmanove enakosti pa sledi

$$\dim(\mathcal{L}(S) \cap \mathcal{L}(T)) = \dim \mathcal{L}(S) + \dim \mathcal{L}(T) - \dim(\mathcal{L}(S) + \mathcal{L}(T)) = 3 + 2 - 5 = 0.$$

Sklepaj, da je

$$\mathcal{L}(S) + \mathcal{L}(T) = \mathbb{R}^5, \quad \mathcal{L}(S) \cap \mathcal{L}(T) = \{0\},$$

in zato

$$\mathbb{R}^5 = \mathcal{L}(S) \oplus \mathcal{L}(T).$$

⋙ 62., 63., 84.

Rešitev 86. naloge

(a) Ker je V prostor n-teric nad poljem $\mathbb{F}$ in ker ima $\mathbb{F}$ natanko dva elementa, je vseh n-teric 2^n, torej $|V| = 2^n$.

(b) Naj bosta $u, v \in V$ linearno odvisna vektorja. Potem obstajata taka skalarja $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, ki nista hkrati ničelna, da velja

$$\alpha u + \beta v = 0. \tag{76}$$

Ker ima $\mathbb{F}$ samo dva elementa, nastopa ena od naslednjih možnosti:

(i) $\alpha = 1$ in $\beta = 0$,

(ii) $\alpha = 0$ in $\beta = 1$,

(iii) $\alpha = 1$ in $\beta = 1$.

Ob upoštevanju enakosti (76) sklepaš, da iz (i) sledi $u = 0$, iz (ii) sledi $v = 0$, iz (iii) pa sledi $u + v = 0$ oziroma $u = -v = (-1)v = 1v = v$, saj v polju $\mathbb{F}$ velja $-1 = 1$.

Torej velja potrebni pogoj: če sta $u, v \in V$ linearno odvisna, potem je $u = 0$ ali $v = 0$ ali $u = v$. Preveri še zadostnost tega pogoja.

(c) Uporabi naprimer postopek, ki je opisan v nalogah 79 in 81. Pri računanju v $\mathbb{F}$ naj ti bosta v pomoč poštevanki

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \text{in} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}.$$

Takole:

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Torej sta množici

$$B_P = \{(1,1,0,0),\ (0,1,0,1)\}, \quad B_Q = \{(1,0,0,0),\ (0,1,0,1)\}$$

bazi podprostorov P oziroma Q. Izloči ničelne vrstice in prečko iz zadnje preglednice in nadaljuj s postopkom

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vsota $P + Q$ ima torej bazo

$$\{(1,0,0,0),\ (0,1,0,0),\ (0,0,0,1)\}.$$

Ugotovi tudi, da je presek $P \cap Q$ enorazsežen in da ima bazo $\{(0,1,0,1)\}$.

⋙ 79., 81.

Rešitev 87. naloge

Ker je $1 \cdot u + (-1) \cdot u = 0$ in $0 \cdot u + 0 \cdot u = 0 + 0 = 0$, sta oba vektorja ničelna, zato sta enaka.

Kako pa je z linearnima kombinacijama? Kaj je sploh linearna kombinacija? Oglej si naslednji definiciji, ki, pozor pozor, nista enakovredni. V obeh primerih je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$.

I. Vektor $v \in V$ je linearna kombinacija vektorjev $v_1, \ldots, v_n \in V$, $n \geq 1$, če obstajajo taki skalarji $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$, da velja

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

II. Naj bodo $v_1, \ldots, v_n \in V$, $n \geq 1$, vektorji in $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ skalarji. Potem je izraz

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

linearna kombinacija vektorjev $v_1, \ldots, v_n$.

Najprej pojasnilo k definicijama. Po prvi je *linearna kombinacija* vektor, pojasnilo ni potrebno. Druga je sumljiva: kaj je "izraz"? Če ne veš, kaj je izraz, potem dveh izrazov ne smeš primerjati. Ena možnost je definirati, da je izraz

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

samo drugi zapis zaporedja

$$\alpha_1, v_1, \ldots, \alpha_n, v_n.$$

V tem primeru znaš primerjati izraze: izraza sta enaka, če sta si pripadajoči zaporedji enaki. Zdaj lahko odgovoriš, ali pa ne, na vprašanje o enakosti podanih linearnih kombinacij v (10) v odvisnosti od privzete definicije linearne kombinacije.

I. Obe linearni kombinaciji sta enaki vektorju 0, zato sta enaki.

II. Ker zaporedji $1, u, -1, u$ in $0, u, 0, u$ nista enaki, linearni kombinaciji v (10) nista enaki.

Opomba *Pomni: pri razumevanju pojma linearne kombinacije je potrebna previdnost.*

Linearne preslikave

Rešitev 88. naloge

(a) Preslikava $\mathcal{A}$ je aditivna, saj za poljubna $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ velja

$$\mathcal{A}(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{a} \times (\vec{x}+\vec{y}) + (\vec{x}+\vec{y}) = \vec{a}\times\vec{x} + \vec{a}\times\vec{y} + \vec{x} + \vec{y} =$$
$$= (\vec{a}\times\vec{x}+\vec{x}) + (\vec{a}\times\vec{y}+\vec{y}) = \mathcal{A}\vec{x} + \mathcal{A}\vec{y},$$

in homogena, saj za vsak $\lambda \in \mathbb{R}$ in za vsak $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ velja

$$\mathcal{A}(\lambda\vec{x}) = \vec{a} \times (\lambda\vec{x}) + (\lambda\vec{x}) = \lambda(\vec{a}\times\vec{x}) + \lambda\vec{x} = \lambda(\vec{a}\times\vec{x}+\vec{x}) = \lambda\mathcal{A}\vec{x},$$

zato je linearna.

(b) *1. način.* Preslikava je injektivna natanko takrat, ko imata vsaki različni točki različni sliki. Predpostavi, da je $\mathcal{A}\vec{x} = \mathcal{A}\vec{y}$. Odtod sledi $(\vec{x}-\vec{y}) \times \vec{a} = \vec{x} - \vec{y}$. Oglej si to enačbo in se vprašaj: Kateri vektor je pravokoten nase? Ker je $\vec{a} \neq \vec{0}$, sledi $\vec{x} - \vec{y} = \vec{0}$, in zato je $\vec{x} = \vec{y}$. Torej je $\mathcal{A}$ injektivna.

2. način. Ker je $\mathcal{A}$ linearna, zadošča preveriti, da ima trivialno jedro. V ta namen vzemi poljuben $\vec{x} \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$, torej

$$\vec{a}\times\vec{x}+\vec{x} = \vec{0}. \tag{77}$$

Enakost (77) skalarno pomnoži z vektorjem $\vec{x}$ in sklepaj, da je $|\vec{x}|^2 = 0$ oziroma $\vec{x} = \vec{0}$.

(c) Ker je $\mathcal{A}$ injektivna, je $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{0\}$. Zato je $\dim \operatorname{Im}\mathcal{A} = \dim\mathbb{R}^3 - \dim\operatorname{Ker}\mathcal{A} = 3$, torej velja $\operatorname{Im}\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$. Zato je $\mathcal{A}$ surjektivna in obstaja obrat $\mathcal{A}^{-1}$.

Opomba *Če je linearna preslikava obrnljiva, je njen obrat spet linearna preslikava.*

⊳⊳⊳ 89., 91., 93., 94.

Rešitev 89. naloge

Naj bosta $\vec{v} = (x, y)$ in $\vec{v}' = (x', y')$ poljubna vektorja iz $\mathbb{R}^2$ in $\lambda \in \mathbb{R}$ poljuben skalar.

(a) Ker je preslikava $\mathcal{A}$ aditivna,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\vec{v}+\vec{v}') &= \mathcal{A}((x,y)+(x',y')) = \mathcal{A}(x+x', y+y')\\ &= (x+x', 0) = (x,0) + (x',0)\\ &= \mathcal{A}(x,y) + \mathcal{A}(x',y') = \mathcal{A}\vec{v} + \mathcal{A}\vec{v}',\end{aligned}$$

in homogena,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\lambda\vec{v}) &= \mathcal{A}(\lambda(x,y)) = \mathcal{A}(\lambda x, \lambda y)\\ &= (\lambda x, 0) = \lambda(x,0)\\ &= \lambda\mathcal{A}(x,y) = \lambda\mathcal{A}\vec{v},\end{aligned}$$

je linearna.

(b) Ker je preslikava $\mathcal{B}$ aditivna,

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\vec{v}+\vec{v}') &= \mathcal{B}((x,y)+(x',y')) = \mathcal{B}(x+x',y+y')\\ &= (0,x+x') = (0,x)+(0,x')\\ &= \mathcal{B}(x,y)+\mathcal{B}(x',y') = \mathcal{B}\vec{v}+\mathcal{B}\vec{v}',\end{aligned}$$

in homogena,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\lambda\vec{v}) &= \mathcal{A}(\lambda(x,y)) = \mathcal{A}(\lambda x,\lambda y)\\ &= (0,\lambda x) = \lambda(0,x)\\ &= \lambda\mathcal{A}(x,y) = \lambda\mathcal{A}\vec{v},\end{aligned}$$

je linearna.

(c) Ker slika vektorja $\vec{0}=(0,0)$ ni enaka vektorju $\vec{0}$,

$$\mathcal{C}\vec{0} = \mathcal{C}(0,0) = (1,0) \neq (0,0),$$

preslikava $\mathcal{C}$ ni linearna. (Lahko pa preveriš, da $\mathcal{C}$ ni niti homogena niti aditivna.)

(d) Ker je preslikava $\mathcal{D}$ aditivna,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\vec{v}+\vec{v}') &= \mathcal{B}((x,y)+(x',y')) = \mathcal{B}(x+x',y+y')\\ &= (2(x+x'),y+y') = (2x,y)+(2x',y')\\ &= \mathcal{B}(x,y)+\mathcal{B}(x',y') = \mathcal{B}\vec{v}+\mathcal{B}\vec{v}',\end{aligned}$$

in homogena,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\lambda\vec{v}) &= \mathcal{D}(\lambda(x,y)) = \mathcal{D}(\lambda x,\lambda y)\\ &= (2\lambda x,\lambda y) = \lambda(2x,y)\\ &= \lambda\mathcal{D}(x,y) = \lambda\mathcal{D}\vec{v},\end{aligned}$$

je linearna.

(e) Postavi $\lambda := -1$ in $\vec{v} := (1,0)$ ter izračunaj

$$\mathcal{E}(\lambda\vec{v}) = \mathcal{E}(-(1,0)) = \mathcal{E}(-1,0) = (1,0),$$

$$\lambda\mathcal{E}\vec{v} = -\mathcal{E}(1,0) = -(1,0) = (-1,0).$$

Ker dobiš različni sliki, $\mathcal{E}$ ni homogena preslikava, in zato ni linearna.

(f) Ker slika vektorja $\vec{0}=(0,0)$ ni enaka vektorju $\vec{0}$,

$$\mathcal{F}\vec{0} = \mathcal{F}(0,0) = (0,1) \neq (0,0),$$

preslikava $\mathcal{F}$ ni linearna.

(g) Postavi $\lambda := 2$ in $\vec{v} := (0,\pi/2)$. Potem je

$$\mathcal{G}(\lambda\vec{v}) = \mathcal{G}(2(0,\pi/2)) = \mathcal{G}(0,\pi) = (0,0),$$

$$\lambda\mathcal{G}\vec{v} = 2\mathcal{G}(0,\pi/2) = 2(0,1) = (0,2).$$

Preslikava $\mathcal{G}$ ni homogena, torej ni linearna.

⊳⊳⊳ 88., 91., 93., 94.

Rešitev 90. naloge

- Preslikave $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}\mathcal{A}$, $\mathcal{A}\mathcal{C}$, $\mathcal{B}^2 = \mathcal{B}\mathcal{B}$, $\mathcal{B}\mathcal{C}$, $\mathcal{C}\mathcal{B}$ in $\mathcal{C}^2 = \mathcal{C}\mathcal{C}$ ne obstajajo, ker mora biti pri sestavljanju preslikav zaloga vrednosti preslikave, ki slika prva, podmnožica definicijskega območja preslikave, ki slika druga. Tako, naprimer, preslikava $\mathcal{A}\mathcal{C}$ ne obstaja, ker je zaloga vrednosti preslikave $\mathcal{C}$ v $\mathbb{R}_2[t]$, preslikava $\mathcal{A}$ pa slika iz prostora $\mathbb{R}^3$.
- Ker je zaloga vrednosti preslikave $\mathcal{B}$ v $\mathbb{R}^3$ in je $\mathcal{A}$ definirana na vsem prostoru $\mathbb{R}^3$, sestavljena preslikava $\mathcal{A}\mathcal{B}$ obstaja. Vzemi poljuben vektor $\vec{r} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ in izračunaj

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}\mathcal{B})\vec{r} &= (\mathcal{A}\mathcal{B})(x,y)\\ &= \mathcal{A}(\mathcal{B}(x,y))\\ &= \mathcal{A}(x+y,x,y)\\ &= ((x+y)-x,x-y)\\ &= (y,x-y).\end{aligned}$$

- Ker je zaloga vrednosti preslikave $\mathcal{A}$ v $\mathbb{R}^2$ in je preslikava $\mathcal{B}$ definirana na $\mathbb{R}^2$, sestavljena preslikava $\mathcal{B}\mathcal{A}$ obstaja. Vzemi poljuben vektor $\vec{r} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ in izračunaj

$$\begin{aligned}(\mathcal{B}\mathcal{A})\vec{r} &= (\mathcal{B}\mathcal{A})(x,y,z)\\ &= \mathcal{B}(\mathcal{A}(x,y,z))\\ &= \mathcal{B}(x-y,y-z)\\ &= ((x-y)+(y-z),x-y,y-z)\\ &= (x-z,x-y,y-z).\end{aligned}$$

- Ker je zaloga vrednosti preslikave $\mathcal{A}$ v $\mathbb{R}^2$ in je preslikava $\mathcal{C}$ definirana na $\mathbb{R}^2$, sestavljena preslikava $\mathcal{C}\mathcal{A}$ obstaja. Vzemi poljuben vektor $\vec{r} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ in izračunaj

$$\begin{aligned}(\mathcal{C}\mathcal{A})\vec{r} &= (\mathcal{C}\mathcal{A})(x,y,z)\\ &= \mathcal{C}(\mathcal{A}(x,y,z))\\ &= \mathcal{C}(x-y,y-z)\\ &= t((x-y)-t)\\ &= (x-y)t-t^2.\end{aligned}$$

V zadnji vrstici je napisan polinom druge stopnje v nedoločenki t. Skalar $(x-y)$ je koeficient pri potenci prve stopnje nedoločenke t.

Opomba *Pomni, kako pišemo sestavljene preslikave. Velja dogovor(!), da v zapisu $\mathcal{B}\mathcal{A}$ deluje najprej prelikava $\mathcal{A}$ in šele nato $\mathcal{B}$, in ne, kot bi pričakovali v skladu z pisanjem z leve proti desni, najprej preslikava $\mathcal{B}$ in za njo $\mathcal{A}$.*
Na primeru preslikav $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ opazi, da sestavljanje preslikav ni komutativno, torej da ne velja vedno $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$.
Ali so preslikave $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ linearne?

Rešitev 91. naloge

Linearne so natanko tiste preslikave, ki so aditivne in homogene.

(a) Ker za poljubna $p, r \in \mathbb{R}[x]$ velja

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}(p+r))(x) &= (p+r)(x^2) = p(x^2) + r(x^2)\\ &= (\mathcal{A}p)(x) + (\mathcal{A}r)(x) = (\mathcal{A}p + \mathcal{A}r)(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}),\end{aligned}$$

je $\mathcal{A}(p+r) = \mathcal{A}p + \mathcal{A}r$, torej je $\mathcal{A}$ aditivna. Če je povrhu $\lambda \in \mathbb{R}$ poljuben skalar, je

$$(\mathcal{A}(\lambda p))(x) = (\lambda p)(x^2) = \lambda p(x^2) = \lambda(\mathcal{A}p)(x) = (\lambda \mathcal{A}p)(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}),$$

torej je $\mathcal{A}(\lambda p) = \lambda \mathcal{A}p$, zato je $\mathcal{A}$ tudi homogena. Tako je $\mathcal{A}$ linearna.

Poišči še njeno jedro: $\mathcal{A}p = 0 \iff (\mathcal{A}p)(x) = 0$ za vsak $x \in \mathbb{R} \iff p(x^2) = 0$ za vsak $x \in \mathbb{R} \iff p = 0$. Zato je $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{0\}$.

Dokaži, da je $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ enaka prostoru

$$P := \{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x] \mid a_i = 0 \text{ za lihe } i \in \mathbb{N}\},$$

takole. Očitno je $\mathcal{A}p \in P$ za vsak $p \in \mathbb{R}[x]$. Obratno, če je polinom $r(x) = b_{2m}x^{2m} + b_{2m-2}x^{2m-2} + \cdots + b_2 x^2 + b_0 \in P$, potem za $p(x) := b_{2m}x^m + b_{2m-2}x^{m-1} + \cdots + b_2 x + b_0$ velja $(\mathcal{A}p)(x) = r(x)$. Zato je res $\operatorname{Im}\mathcal{A} = P$.

(b) Če vzameš $p(x) := x$ in $r(x) := 1$, dobiš

$$(\mathcal{B}(p+r))(x) = (p+r)((p+r)(x)) = (p+r)(p(x)+r(x)) =$$

$$= (p+r)(x+1) = p(x+1) + r(x+1) = (x+1) + 1 = x+2,$$

toda

$$(\mathcal{B}p)(x) + (\mathcal{B}r)(x) = p(p(x)) + r(r(x)) = p(x) + r(1) = x+1,$$

zato $\mathcal{B}$ ni aditivna. Torej $\mathcal{B}$ ni linearna preslikava.

(c) Preveri, da za poljubna $p, r \in \mathbb{R}[x]$ velja

$$(\mathcal{C}(p+r))(x) = ((p+r)(x))^2 = (p(x)+r(x))^2 = (p(x))^2 + 2p(x)r(x) + (r(x))^2$$

in

$$(\mathcal{C}p)(x) + (\mathcal{C}r)(x) = (p(x))^2 + (r(x))^2.$$

Naspoloh izraza nista enaka, vzemi recimo $p(x) := 1$ in $r(x) := 1$. Zato $\mathcal{C}$ ni linearna preslikava.

Opomba *Lahko preveriš, da preslikavi $\mathcal{B}$ in $\mathcal{C}$ nista homogeni.*

⊳⊳⊳ 88., 89., 93.

Rešitev 92. naloge

(a) Poglej točko $T \in \mathbb{R}^3$ in njen krajevni vektor $\vec{r}_T$. Potem je slika točke T točka s krajevnim vektorjem $\mathcal{A}\vec{r}_T$.

(b) Poglej premico p s točko $P \in p$ in smernim vektorjem $\vec{p}$ zapisano v parametrični obliki

$$p\colon\ \vec{r} = \vec{r}_P + s\vec{p}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Potem velja

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(p) &= \mathcal{A}\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{r} = \vec{r}_P + s\vec{p}, s \in \mathbb{R}\}\\ &= \mathcal{A}\{\vec{r}_P + s\vec{p} \mid s \in \mathbb{R}\}\\ &= \{\mathcal{A}(\vec{r}_P + s\vec{p}) \mid s \in \mathbb{R}\}\\ &= \{\mathcal{A}\vec{r}_P + s\mathcal{A}\vec{p} \mid s \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Odtod sklepaš:

(i) Če je $\mathcal{A}\vec{p} = \vec{0}$, je slika premice p enaka točki s krajevnim vektorjem $\mathcal{A}\vec{r}_P$.

(ii) Če je $\mathcal{A}\vec{p} \neq \vec{0}$, je slika premice p enaka premici p' s parametrično enačbo

$$p'\colon\ \vec{r} = \mathcal{A}\vec{r}_P + s\mathcal{A}\vec{p}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

(c) Zapiši ravnino Π, ki poteka skozi točko $P \in \Pi$ in je vzporedna vektorjema $\vec{p}$ in $\vec{q}$, v parametrični obliki

$$\Pi\colon\ \vec{r} = \vec{r}_P + s\vec{p} + t\vec{q}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Podobno kot v prejšnji točki velja:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\Pi) &= \mathcal{A}\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{r} = \vec{r}_P + s\vec{p} + t\vec{q}, s, t \in \mathbb{R}\}\\ &= \mathcal{A}\{\vec{r}_P + s\vec{p} + t\vec{q} \mid s, t \in \mathbb{R}\}\\ &= \{\mathcal{A}(\vec{r}_P + s\vec{p} + t\vec{q}) \mid s, t \in \mathbb{R}\}\\ &= \{\mathcal{A}\vec{r}_P + s\mathcal{A}\vec{p} + t\mathcal{A}\vec{q} \mid s, t \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Odtod sklepaš:

(i) Če je $\mathcal{A}\vec{p} = \vec{0} = \mathcal{A}\vec{q}$, je slika ravnine Π enaka točki s krajevnim vektorjem $\mathcal{A}\vec{r}_P$.

(ii) Če sta vektorja $\mathcal{A}\vec{p}$ in $\mathcal{A}\vec{q}$ linearno odvisna in ne oba enaka $\vec{0}$, (naj bo $\mathcal{A}\vec{p} \neq 0$, sicer zamenjaj oznaki vektorjev $\vec{p}$ in $\vec{q}$), je slika ravnine Π enaka premici p' s parametrično enačbo

$$p'\colon\ \vec{r} = \mathcal{A}\vec{r}_P + s\mathcal{A}\vec{p}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

(iii) Če sta vektorja $\mathcal{A}\vec{p}$ in $\mathcal{A}\vec{q}$ linearno neodvisna, je slika ravnine Π enaka ravnini Π' s parametrično enačbo

$$\Pi'\colon\ \vec{r} = \mathcal{A}\vec{r}_P + s\mathcal{A}\vec{p} + t\mathcal{A}\vec{q}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

⊳⊳⊳ 108., 389.

Rešitev 93. naloge

(a) Za poljubna $f, g \in \mathbb{R}^{[0,1]}$ si oglej

$$(\mathcal{A}(f+g))(t) = \sqrt[3]{(f+g)(t)}$$

in

$$(\mathcal{A}f + \mathcal{A}g)(t) = (\mathcal{A}f)(t) + (\mathcal{A}g)(t) = \sqrt[3]{f(t)} + \sqrt[3]{g(t)}.$$

Sklepaj, da $\mathcal{A}$ ni aditivna (vzemi naprimer $f := 1$ in $g := 1$), zato ni linearna.

(b) Naj bosta f in g poljubni funkciji iz $\mathbb{R}^{[0,1]}$ in $\lambda \in \mathbb{R}$ poljuben skalar. Potem za vsak $t \in [0,1]$ velja

$$\begin{aligned}(\mathcal{B}(f+g))(t) &= (f+g)(1-t) = f(1-t) + g(1-t)\\ &= (\mathcal{B}f)(t) + (\mathcal{B}g)(t)\\ &= (\mathcal{B}f + \mathcal{B}g)(t)\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}(\mathcal{B}(\lambda f))(t) &= (\lambda f)(1-t) = \lambda f(1-t)\\ &= \lambda(\mathcal{B}f)(t) = (\lambda\mathcal{B}f)(t).\end{aligned}$$

Torej je $\mathcal{B}(f+g) = \mathcal{B}f + \mathcal{B}g$ in $\mathcal{B}(\lambda f) = \lambda\mathcal{B}f$, zato je $\mathcal{B}$ linearna.

Bodi zdaj $f \in \operatorname{Ker}\mathcal{B}$, torej $(\mathcal{B}f)(t) = f(1-t) = 0$ za vsak $t \in [0,1]$. Potem je $f(t) = f(1-(1-t)) = 0$ za vsak $(1-t) \in [0,1]$, zato tudi za vsak $t \in [0,1]$. V jedru je torej le funkcija, ki je na $[0,1]$ identično enaka nič (oznaka zanjo je 0). Sklepaj, da je $\operatorname{Ker}\mathcal{B} = \{0\}$.

Preveri, da je $\mathcal{B}$ surjektivna, torej da je $\operatorname{Im}\mathcal{B} = \mathbb{R}^{[0,1]}$: Naj bo $g \in \mathbb{R}^{[0,1]}$. Če vzameš $f(t) := g(1-t) \in \mathbb{R}^{[0,1]}$, je potem $(\mathcal{B}f)(t) = f(1-t) = g(1-(1-t)) = g(t)$.

Odtod sklepaj, da je $\mathcal{B}$ celo bijekcija. (Velja celo $\mathcal{B}^{-1} = \mathcal{B}$. Geometrijsko tolmačenje: zrcaljenje grafa preko premice $x = 1/2$.)

(c) Ker je $\mathcal{C}$ aditivna

$$\begin{aligned}(\mathcal{C}(f+g))(t) &= t((f+g)(t)) = t(f(t)+g(t))\\ &= tf(t) + tg(t) = (\mathcal{C}f)(t) + (\mathcal{C}g)(t)\\ &= (\mathcal{C}f + \mathcal{C}g)(t) \quad (\forall t \in [0,1])\end{aligned}$$

in homogena

$$\begin{aligned}(\mathcal{C}(\lambda f))(t) &= t(\lambda f)(t) = t(\lambda f(t))\\ &= \lambda(tf(t)) = \lambda(\mathcal{C}f)(t)\\ &= (\lambda\mathcal{C}f)(t) \quad (\forall t \in [0,1]),\end{aligned}$$

je $\mathcal{C}$ linearna.

Preveri, da je jedro $\operatorname{Ker}\mathcal{C}$ enako množici

$$F := \{f \in \mathbb{R}^{[0,1]} \mid f(t) = 0 \text{ za } t \in (0,1]\},$$

takole. Če je $(\mathcal{C}f)(t) = tf(t) = 0$ za vsak $t \in [0,1]$, je $f(t) = 0$ za vsak $t \in (0,1]$, zato $\operatorname{Ker}\mathcal{C} \subseteq F$. Obratno, če je $f \in F$, je $f(t) = 0$ za $t \in (0,1]$, zato je $(\mathcal{C}f)(t) = tf(t) = 0$ za vsak $t \in [0,1]$.

Premisli, da je zaloga vrednosti $\operatorname{Im}\mathcal{C}$ enaka množici

$$G := \{f \in \mathbb{R}^{[0,1]} \mid f(0) = 0\},$$

takole. Ker je $(\mathcal{C}f)(0) = 0f(0) = 0$, je $\operatorname{Im}\mathcal{C} \subseteq G$. Obratno, če je $g \in G$, vzemi funkcijo

$$f(t) := \begin{cases} 0 & \text{za } t = 0;\\ \frac{g(t)}{t} & \text{za } t \in (0,1]\end{cases}$$

in preveri, da velja $(\mathcal{C}f)(t) = g(t)$.

(d) Oglej si

$$(\mathcal{D}(f+g))(t) = \ln(|(f+g)(t)|+1) = \ln(|f(t)+g(t)|+1)$$

in

$$(\mathcal{D}f)(t) + (\mathcal{D}g)(t) = \ln(|f(t)|+1) + \ln(|g(t)|+1).$$

Vzemi naprimer $f := 1$ in $g := 1$ in sklepaj, da preslikava $\mathcal{D}$ ni aditivna, in zato ni linearna.

Opomba *Če ni drugače povedano, je prostor funkcij opremljen s seštevanjem in množenjem s skalarjem po točkah.*

⊳⊳⊳ 88., 89., 91., 94.

Rešitev 94. naloge

(a) Potrebni pogoj za linearnost preslikave $\mathcal{B}_a$ je $0 = \mathcal{B}_a 0 = a^n - 1$. Torej je a neki n-ti koren enote, to je

$$a \in \left\{a_k := \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \mid k = 1,\ldots,n\right\}.$$

Ali taki a_k tudi zadoščajo pogoju, da je $\mathcal{B}_{a_k}$ linearna preslikava? Ker za poljubna $p, q \in \mathbb{C}_n[z]$ velja

$$\begin{aligned}(\mathcal{B}_{a_k}(p+q))(z) &= z(p+q)(a_k z) = zp(a_k z) + zq(a_k z)\\ &= (\mathcal{B}_{a_k}p)(z) + (\mathcal{B}_{a_k}q)(z) = (\mathcal{B}_{a_k}p + \mathcal{B}_{a_k}q)(z) \quad (\forall z \in \mathbb{C}),\end{aligned}$$

je $\mathcal{B}_{a_k}(p+q) = \mathcal{B}_{a_k}p + \mathcal{B}_{a_k}q$, in zato je preslikava $\mathcal{B}_{a_k}$ aditivna za vsak $k = 1,\ldots,n$. Podobno za poljubna $p \in \mathbb{C}_n[z]$ in $\lambda \in \mathbb{C}$ velja

$$\begin{aligned}(\mathcal{B}_{a_k}(\lambda p))(z) &= z(\lambda p)(a_k z) = z\lambda p(a_k z)\\ &= \lambda zp(a_k z) = \lambda(\mathcal{B}_{a_k}p)(z) = (\lambda\mathcal{B}_{a_k}p)(z) \quad (\forall z \in \mathbb{C}),\end{aligned}$$

zato je $\mathcal{B}_{a_k}(\lambda p) = \lambda\mathcal{B}_{a_k}p$, torej je preslikava $\mathcal{B}_{a_k}$ homogena. Ker je $\mathcal{B}_{a_k}$ aditivna in homogena, je linearna.

(b) Razišči še jedro preslikave: Vzemi poljuben $p \in \operatorname{Ker}\mathcal{B}_{a_k}$. Potem je $0 = (\mathcal{B}_{a_k}p)(z) = zp(a_k z)$ za vsak $z \in \mathbb{C}$, torej $p(a_k z) = 0$ za vsak $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Potemtakem ima polinom p neskončno ničel, saj je $a_k \neq 0$. Zato je $p = 0$. Torej je $\operatorname{Ker}\mathcal{B}_{a_k} = \{0\}$.

(c) Preveri, da je $\operatorname{Im}\mathcal{B}_{a_k} = \{p(z) \in \mathbb{C}_{n+1}[z] \mid p(0) = 0\}$: ($\subseteq$). Ker je $(\mathcal{B}_{a_k}p)(0) = 0 \cdot p(a_k 0) = 0$, velja napisana vsebovanost. ($\supseteq$). Če za polinom $q \in \mathbb{C}_{n+1}[z]$ velja $q(0) = 0$, je njegov svobodni člen enak 0, torej se ga da zapisati v obliki $q(z) = z(b_{n+1}z^n + \cdots + b_2 z + b_1)$ za neke $b_i \in \mathbb{C}$. Označi polinom v oklepaju s $p(z)$ in preveri, da za polinom $r(z) := p(\frac{z}{a_k}) \in \mathbb{C}_n[z]$ velja

$$(\mathcal{B}_{a_k}r)(z) = q(z) \quad (\forall z \in \mathbb{C}).$$

(d) Iz $\operatorname{Ker}\mathcal{B}_{a_k} = \{0\}$ sklepaj, da je $\mathcal{B}_{a_k}$ injektivna za vsak $k = 1,\ldots,n$.

(e) Zaradi $\operatorname{Im}\mathcal{B}_{a_k} \neq \mathbb{C}_{n+1}[z]$ preslikava $\mathcal{B}_{a_k}$ ni surjektivna. To velja za vsak $k = 1,\ldots,n$.

(f) Ker $\mathcal{B}_{a_k}$ ni surjektivna, ni bijektivna. To velja za vsak $k = 1,\ldots,n$.

⊳⊳⊳ 88., 89., 93.

Rešitev 95. naloge

(a) Loči dva primera.

(i) Če je prostor V trivialen, potem je vsaka preslikava iz U v V ničelna, zato je linearna. Odgovor je ne.

(ii) Če V ni trivialen prostor, potem vzemi poljuben neničeln vektor $v_0 \in V$ in definiraj preslikavi $\mathcal{A}, \mathcal{B}$: $U \to V$ s predpisoma

$$\mathcal{A}u = v_0, \quad \mathcal{B}u = -v_0$$

za vse $u \in U$. Ker velja $\mathcal{A}0 = v_0 \neq 0$, preslikava $\mathcal{A}$ ni linearna. Podobno sklepaj za $\mathcal{B}$. Ker za vsak $u \in U$ velja

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})u = \mathcal{A}u + \mathcal{B}u = v_0 + (-v_0) = 0,$$

je $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ ničelna preslikava, torej je linearna. Odgovor je ja.

(b) Naj bosta preslikavi $\mathcal{A}, \mathcal{B}$: $U \to V$ taki, da sta $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ in $\mathcal{A}-\mathcal{B}$ linearni. Ker je množica Lin (U,V) vseh linearnih preslikav iz U v V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ za običajni operaciji seštevanja preslikav in množenja preslikave s skalarjem, sta linearni tudi preslikavi

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}((\mathcal{A}+\mathcal{B}) + (\mathcal{A}-\mathcal{B})) \text{ in } \mathcal{B} = \frac{1}{2}((\mathcal{A}+\mathcal{B}) - (\mathcal{A}-\mathcal{B})).$$

Opomba *Prostor Lin (U,V) včasih označujemo s Hom(U,V).*
Ali smeš v gornji nalogi nadomestiti $\mathbb{R}$ s poljubnim poljem $\mathbb{F}$?

Rešitev 96. naloge

Ker je U končnorazsežen, ima vsaka linearno neodvisna množica iz U le končno ($\leq \dim U$) elementov. Naj bo $\{u_1, \ldots, u_k\} \subseteq U$ linearno neodvisna množica, pri čemer so vektorji u_i paroma različni. Dokazati moraš, da je tudi množica $\{\mathcal{A}u_1, \ldots, \mathcal{A}u_k\}$ linearno neodvisna. Ker je $\mathcal{A}$ injektivna, so vektorji $\mathcal{A}u_1, \ldots, \mathcal{A}u_k$ paroma različni. Predpostavi $\lambda_1\mathcal{A}u_1 + \cdots + \lambda_k\mathcal{A}u_k = 0$. Iz linearnosti preslikave $\mathcal{A}$ sledi $\mathcal{A}(\lambda_1u_1 + \cdots + \lambda_ku_k) = 0$. Ker je $\mathcal{A}$ injektivna, je $\lambda_1u_1 + \cdots + \lambda_ku_k = 0$. Ker so po predpostavki vektorji $u_1, \ldots, u_k$ linearno neodvisni, je $\lambda_i = 0$ za $i = 1, \ldots, k$. Zato so vektorji $\mathcal{A}u_1, \ldots, \mathcal{A}u_k$ linearno neodvisni.

Opomba *Premisli, da velja trditev tudi v neskončnorazsežnih prostorih.*

Rešitev 97. naloge

(a) Oglej si verigo ekvivalenc

$$\begin{aligned} w \in \operatorname{Im}\mathcal{A} &\iff \exists (u,v) \in U \times V : w = \mathcal{A}(u,v) \\ &\iff \exists u \in U,\ \exists v \in V : w = u - v \\ &\iff w \in U + V. \end{aligned}$$

Torej je $\operatorname{Im}\mathcal{A} = U + V$.

(b) Oglej si verigo ekvivalenc

$$(u,v) \in \operatorname{Ker}\mathcal{A} \iff \mathcal{A}(u,v) = 0 \iff u - v = 0 \iff u = v \in U \cap V \iff$$

$$\iff (u,v) \in \{(x,x) \mid x \in U \cap V\}.$$

Torej je $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{(x,x) \mid x \in U \cap V\}$.

(c) Ker je $\mathcal{A}$ linearna preslikava, velja

$$\dim(U \times V) = \dim \operatorname{Ker}\mathcal{A} + \dim \operatorname{Im}\mathcal{A}.$$

Iz (b) in iz naloge 109 sledi, da sta $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ in $U \cap V$ izomorfna prostora, zato imata enako razsežnost. Upoštevaj še (a) in $\dim(U \times V) = \dim U + \dim V$, pa dobiš Grassmanovo enakost

$$\dim U + \dim V = \dim(U \cap V) + \dim(U + V).$$

⊳⊳⊳ 109.

Rešitev 98. naloge

Pokazati moraš, da veljata enakosti

$$\operatorname{Ker}\mathcal{P} \cap \operatorname{Im}\mathcal{P} = \{0\} \tag{78}$$

in

$$\operatorname{Ker}\mathcal{P} + \operatorname{Im}\mathcal{P} = V. \tag{79}$$

Najprej (78). Vzemi poljuben $x \in \operatorname{Ker}\mathcal{P} \cap \operatorname{Im}\mathcal{P}$. Potem velja $\mathcal{P}x = 0$ in obstaja tak $y \in V$, da je $x = \mathcal{P}y$. Slednjo enakost pomnoži z leve s $\mathcal{P}$ in upoštevaj predpostavke, pa dobiš

$$0 = \mathcal{P}x = \mathcal{P}^2y = \mathcal{P}y = x.$$

Začetek in konec verige enakosti ti povesta, da je $x = 0$. Zato enakost (78) velja.
Zdaj še (79). Vzemi poljuben $x \in V$ in zapiši

$$x = (x - \mathcal{P}x) + \mathcal{P}x.$$

Prvi člen je v $\operatorname{Ker}\mathcal{P}$, saj je $\mathcal{P}(x - \mathcal{P}x) = \mathcal{P}x - \mathcal{P}^2x = \mathcal{P}x - \mathcal{P}x = 0$. Drugi člen pa je očitno v $\operatorname{Im}\mathcal{P}$. Zato velja enakost (79), dokaz je končan.

Opomba *Tako linearno preslikavo $\mathcal{P}$ imenujemo projektor. Njegovo delovanje opišemo z besedami takole: projektor $\mathcal{P}$ slika na $\operatorname{Im}\mathcal{P}$ vzdolž $\operatorname{Ker}\mathcal{P}$.*
Opazi, da je V lahko tudi neskončnorazsežen.

⊳⊳⊳ 279., 354.

Rešitev 99. naloge

($\Rightarrow$). Naj velja $\mathcal{BA} = 0$. Želiš dokazati $\operatorname{Im}\mathcal{A} \le \operatorname{Ker}\mathcal{B}$. V ta namen vzemi poljuben $v \in \operatorname{Im}\mathcal{A}$, torej obstaja tak $u \in U$, da je $v = \mathcal{A}u$. Ker je

$$\mathcal{B}v = \mathcal{B}(\mathcal{A}u) = (\mathcal{BA})u = (0)u = 0,$$

je $v \in \operatorname{Ker}\mathcal{B}$, kar je bilo treba dokazati.
($\Leftarrow$). Naj velja $\operatorname{Im}\mathcal{A} \le \operatorname{Ker}\mathcal{B}$. Za vsak $u \in U$ drži

$$(\mathcal{BA})u = \mathcal{B}(\mathcal{A}u) = 0,$$

saj je $\mathcal{A}u \in \operatorname{Im}\mathcal{A} \le \operatorname{Ker}\mathcal{B}$. Sklepaj, da je $\mathcal{BA} = 0$.

▷▷▷ 101.

Rešitev 100. naloge

Endomorfizem $\mathcal{A}$ je injektiven, zato velja $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = 0$. Iz enakosti

$$\dim \mathbb{R}^5 = \dim \operatorname{Ker}\mathcal{A} + \dim \operatorname{Im}\mathcal{A}$$

izračunaš $\dim \operatorname{Im}\mathcal{A} = 5$ in sklepaš $\operatorname{Im}\mathcal{A} = \mathbb{R}^5$. Ker je $\operatorname{Ker}\mathcal{B} = \operatorname{Im}\mathcal{A} = \mathbb{R}^5$, je $\mathcal{B}$ ničelna preslikava.

▷▷▷ 101.

Rešitev 101. naloge

Če je $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}\cdot\mathcal{A} = 0$, je $\operatorname{Im}\mathcal{A} \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A}$. Zato je $\dim\operatorname{Im}\mathcal{A} \le \dim\operatorname{Ker}\mathcal{A}$. Poleg tega velja enakost

$$\dim\operatorname{Im}\mathcal{A} + \dim\operatorname{Ker}\mathcal{A} = 5. \tag{80}$$

Če bi bil $\operatorname{rang}\mathcal{A} = \dim\operatorname{Im}\mathcal{A} \ge 3$, bi veljalo $\dim\operatorname{Ker}\mathcal{A} \ge 3$, skupaj torej $\dim\operatorname{Im}\mathcal{A} + \dim\operatorname{Ker}\mathcal{A} \ge 6$. To je v protislovju z (80), zato je $\operatorname{rang}\mathcal{A} \le 2$.

▷▷▷ 99., 100., 416.

Rešitev 102. naloge

Najprej dokaži enoličnost take preslikave ob predpostavki, da obstaja. Če je $\mathcal{A}\colon U \to V$ linearna preslikava, ki zadošča enakostim (11), potem preslika $\mathcal{A}$ vektor $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \in U$ v vektor

$$\mathcal{A}u = \mathcal{A}(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{A}e_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i \in V.$$

Ker tvorijo vektorji $e_1, \ldots, e_n$ bazo prostora U, so skalarji $\alpha_i \in \mathbb{F}$ enolično določeni z izborom vektorja $u \in U$. Torej enakosti (11) enolično določajo sliko

$$\mathcal{A}u = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$$

vektorja $u \in U$. Zato je preslikava $\mathcal{A}$ z zahtevanimi lastnostmi, če obstaja, ena sama.

Zdaj pa obstoj take preslikave. Nič se ne obotavljaj, le definiraj preslikavo $\mathcal{A}\colon U \to V$ tako, kot veleva gornji premislek: vsak $u \in U$ najprej zapiši v obliki $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ za primerne $\alpha_i \in \mathbb{F}$, nato predpiši

$$\mathcal{A}u := \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i. \tag{81}$$

Iz zapisanega je razvidno, da je preslikava $\mathcal{A}\colon U \to V$ dobro definirana. Zdaj moraš še preveriti, ali preslikava $\mathcal{A}$ ustreza zahtevanim pogojem. Najprej linearnost. Vzemi poljubna $u, v \in U$. Potem je $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ in $v = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i$ za primerne skalarje $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{F}$ in velja

$$\mathcal{A}(u+v) = \mathcal{A}(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^n \beta_i e_i) = \mathcal{A}(\sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) e_i) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) f_i =$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i + \sum_{i=1}^n \beta_i f_i = \mathcal{A}(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i) + \mathcal{A}(\sum_{i=1}^n \beta_i e_i) = \mathcal{A}u + \mathcal{A}v.$$

Torej je $\mathcal{A}$ aditivna preslikava. Podobno dokaži, da je $\mathcal{A}$ homogena, zatorej linearna.
Prepričaj se še, da $\mathcal{A}$ zadošča enakostim (11): za vsak $i = 1, \ldots, n$ velja

$$\mathcal{A}e_i = \mathcal{A}(\sum_{j=1}^n \delta_{ij} e_j) = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} f_j = f_i.$$

Pri tem pomeni Kroneckerjev delta

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Opomba *Če je preslikava $\mathcal{A}$ definirana na linearno neodvisni množici v U, jo lahko razširiš do linearne preslikave tako, da najprej dopolniš linearno neodvisno množico do baze prostora U, predpišeš slike novih vektorjev in uporabiš gornjo nalogo. Prepričaj se, da V sme biti neskončnorazsežen.*

▷▷▷ 103., 105., 107., 330., 356.

Rešitev 103. naloge

Linearna preslikava (linearen funkcional) je natanko določena s svojimi vrednostmi na poljubni bazi.
Upoštevaj opombo k rešitvi naloge 102. Vektorja $p(x) := x^2 - x$ in $q(x) := x + 1$ sta linearno neodvisna, zato množico $\{p, q\}$ dopolni do baze prostora $\mathbb{R}_2[x]$, naprimer z vektorjem $r(x) := 1$. Ker vektor r ni v $\mathcal{L}\{p, q\}$, lahko vrednost $f(1)$ postaviš poljubno:

$$f(1) := \lambda,$$

kjer je λ neko realno število. Potem je

$$f(x) = f((x+1) - 1) = f(x+1) - f(1) = 2 - \lambda$$

in

$$f(x^2) = f((x^2 - x) + x) = f(x^2 - x) + f(x) = 1 + (2 - \lambda) = 3 - \lambda.$$

Zato pri vsakem realnem številu λ dobiš linearni funkcional f, ki slika takole:

$$\begin{aligned} f(a_0 + a_1x + a_2x^2) &= f(a_0) + f(a_1x) + f(a_2x^2) \\ &= a_0f(1) + a_1f(x) + a_2f(x^2) \\ &= a_0\lambda + a_1(2-\lambda) + a_3(3-\lambda). \end{aligned}$$

Tu bistveno uporabiš linearnost funkcionala f!

⊳⊳⊳ 102., 104., 330.

Rešitev 104. naloge

Označi podane štiri vektorje zapovrstjo z v_1, v_2, v_3 in v_4. Z Gaussovim postopkom poiščeš bazo prostora $\mathcal{L}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$:

$$\left[\begin{array}{cccc|l} 1 & 1 & 2 & 0 & v_1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & v_2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & v_3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & v_4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|l} 1 & 1 & 2 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & v_2 - v_1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & v_3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & v_4 - v_1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|l} 1 & 1 & 2 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & v_2 - v_1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & v_3 - v_2 + v_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v_4 + v_2 - 2v_1 \end{array}\right]$$

Torej so vektorji v_1, v_2, v_3, v_4 linearno odvisni in velja zveza

$$v_4 = 2v_1 - v_2, \tag{82}$$

za bazo pa zadoščajo vektorji v_1, v_2 in v_3. Ker je f linearna preslikava in je v_4 v prostoru $\mathcal{L}\{v_1, v_2, v_3\}$, je slika vektorja v_4 že natanko določena s slikami vektorjev v_1, v_2 in v_3. Torej z upoštevanjem enakosti (82) dobiš

$$f(v_4) = f(2v_1 - v_2) = f(2v_1) - f(v_2) = 2f(v_1) - f(v_2) = 2 \cdot 2 - 2 = 2.$$

To je v protislovju z enakostjo $f(v_4) = 0$ v nalogi, zato takšen linearen funkcional f ne obstaja.

⊳⊳⊳ 103., 105., 330.

Rešitev 105. naloge

Na vprašanje (a) odgovori takoj: ne, saj ima $\mathbb{R}^4$ večjo razsežnost od prostora $\mathbb{R}^3$.

Pri ostalih si pomagaj z nalogo 102. Najprej preveri, da so podani vektorji $u_1 := (2, -1, 3, 1)$, $u_2 := (0, 1, 3, 0)$, $u_3 := (1, 0, 1, 0)$ iz $\mathbb{R}^4$ linearno neodvisni. Dopolni jih z nekim vektorjem $u_4 \in \mathbb{R}^4$ do baze prostora $\mathbb{R}^4$ (naprimer $u_4 := (0, 0, 0, 1)$). Zapiši še $v_1 := (4, 0, 2)$, $v_2 := (1, -1, 0)$ in $v_3 := (3, 1, 2)$. Po nalogi 102 obstaja za vsak $v_4 \in \mathbb{R}^3$ natanko ena linearna preslikava $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, da je

$$\mathcal{A}u_i = v_i, \quad i = 1, 2, 3, 4. \tag{83}$$

Preden se lotiš odgovorov na posamezna vprašanja, preveri še, da so vektorji v_1, v_2, v_3 linearno odvisni in da velja $\mathcal{L}\{v_1, v_2, v_3\} = \mathcal{L}\{v_1, v_2\}$.

(b) Ja. Dopolni v_1, v_2 z nekim vektorjem $v_4 \in \mathbb{R}^3$ do baze prostora $\mathbb{R}^3$ (naprimer $v_4 := (1, 0, 0)$) in definiraj $\mathcal{A}u_4 = v_4$. Po zgornjem obstaja (ena sama) linearna preslikava $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, ki zadošča enakostim (83). Ker je $\operatorname{Im}\mathcal{A} = \mathcal{L}\{v_1, v_2, v_4\} = \mathbb{R}^3$, je $\mathcal{A}$ surjektivna.

(c) Ja. Definiraj naprimer $\mathcal{A}u_4 := (0, 0, 0)$ (seveda zadošča izbrati $\mathcal{A}u_4$ iz $\mathcal{L}\{v_1, v_2\}$). Spet obstaja (ena sama) taka linearna preslikava $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, da velja (83). Ker je $\operatorname{Im}\mathcal{A} = \mathcal{L}\{v_1, v_2\}$ in ker sta v_1 in v_2 linearno neodvisna, je $\operatorname{rang}\mathcal{A} = 2$.

(d) Ja. Vzemi preslikavo $\mathcal{A}$ iz točke (c). Iz $4 = \dim \mathbb{R}^4 = \dim \operatorname{Ker}\mathcal{A} + \dim \operatorname{Im}\mathcal{A}$ sklepaj, da je $\dim \operatorname{Ker}\mathcal{A} = 2$.

⊳⊳⊳ 102., 104., 106., 107.

Rešitev 106. naloge

Odgovor je ne. Označi podane vektorje zaporedoma z $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ in $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^4$, kot v nalogi 105.

1. način reševanja. Oglej si preglednice

$$\left[\begin{array}{ccc|l} 4 & 0 & 2 & v_1 \\ 1 & -1 & 0 & v_2 \\ 3 & 1 & 2 & v_3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|l} 1 & -1 & 0 & v_2 \\ 0 & 4 & 2 & v_1 - 4v_2 \\ 0 & 4 & 2 & v_3 - 4v_2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|l} 1 & -1 & 0 & v_2 \\ 0 & 4 & 2 & v_1 - 4v_2 \\ 0 & 0 & 0 & -v_1 + v_2 + v_3 \end{array}\right].$$

Torej je $v_1 = v_2 + v_3$. Če za linearno preslikavo $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ velja $\mathcal{A}v_2 = u_3$ in $\mathcal{A}v_3 = u_3$, potem velja

$$\mathcal{A}v_1 = \mathcal{A}(v_2 + v_3) = \mathcal{A}v_2 + \mathcal{A}v_3 = (0, 1, 3, 0) + (1, 0, 1, 0) = (1, 1, 4, 0) \neq u_1.$$

Torej ne obstaja linearna preslikava, ki bi zadoščala pogojem naloge.

2. način reševanja. Iz naloge 105 sledi, da so vektorji v_1, v_2, v_3 linearno odvisni, vektorji u_1, u_2, u_3 pa niso. Torej ne obstaja linearna preslikava $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, ki zadošča enakostim $\mathcal{A}v_i = u_i$, $i = 1, 2, 3$.

⊳⊳⊳ 105., 107.

Rešitev 107. naloge

Označi podane vektorje iz $\mathbb{R}^5$ zaporedoma z u_1, u_2, u_3, u_4, tiste iz $\mathbb{R}^4$ z v_1, v_2, v_3, v_4, vektorje ogrodja prostora S pa z s_1, s_2, s_3.

Sestavi si načrt reševanja:

- najprej ugotovi, ali obstaja linearna preslikava $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, ki zadošča danim enakostim in enakostim $\mathcal{A}s_j = 0$, $j = 1, 2, 3$; če ne, je odgovor ne, sicer nadaljuj;
- poglej, ali ima kakšna od dobljenih linearnih preslikav jedro enako prostoru S.

Z namenom ugotoviti, ali je razširjeni predpis neprotisloven, poglej, kakšne so linearne zveze med vektorji $u_1, u_2, u_3, u_4, s_1, s_2, s_3$. Sestavi naprimer preglednico in jo preoblikuj z elementarnimi transformacijami vrstic:

$$\left[\begin{array}{ccccc|l} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & u_1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 2 & u_2 \\ 1 & -3 & -3 & 1 & 3 & u_3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & u_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & s_3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|l} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & u_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & s_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & u_2 + s_1 \\ 0 & -3 & -3 & 1 & 3 & u_3 - s_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & u_4 - s_1 \end{array}\right] \sim \cdots \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|l} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & u_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & u_2+s_1+s_2-s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3u_1-3u_2+u_3-4s_1-6s_2+2s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_1-u_2+u_4-2s_1-3s_2+s_3 \end{array}\right].$$

Sklepaj, da je

$$\mathcal{L}\{u_1,u_2,u_3,u_4,s_1,s_2,s_3\} = \mathcal{L}\{s_1,s_2,s_3,u_1,u_2\} = \mathbb{R}^5$$

in da velja

$$u_3 = -3u_1 + 3u_2 + 4s_1 + 6s_2 - 2s_3, \quad u_4 = -u_1 + u_2 + 2s_1 + 3s_2 - s_3.$$

Če linearna preslikava $\mathcal{A}$ zadošča enakostim

$$\mathcal{A}u_i = v_i,\ i = 1,2, \qquad \mathcal{A}s_j = 0,\ j = 1,2,3, \tag{84}$$

potem velja

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(-3u_1 + 3u_2 + 4s_1 + 6s_2 - 2s_3) &= -3\mathcal{A}u_1 + 3\mathcal{A}u_2 + 4\mathcal{A}s_1 + 6\mathcal{A}s_2 - 2\mathcal{A}s_3 = \\ &= -3v_1 + 3v_2 = (3,3,6,-6)\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(-u_1 + u_2 + 2s_1 + 3s_2 - s_3) &- \mathcal{A}u_1 + \mathcal{A}u_2 + 2\mathcal{A}s_1 + 3\mathcal{A}s_2 - \mathcal{A}s_3 = \\ &= -v_1 + v_2 = (1,1,2,-2),\end{aligned}$$

torej sta predpisa $\mathcal{A}u_3 = v_3$ in $\mathcal{A}u_4 = v_4$ posledici enakosti (84). Množica

$$\{s_1, s_2, s_3, u_1, u_2\}$$

pa je baza prostora $\mathbb{R}^5$, zato obstaja pa nalogi 102 natanko ena linearna preslikava $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, ki zadošča enakostim (84).

Kaj je $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$? Iz predpostavk je razvidno, da je $S \le \operatorname{Ker}\mathcal{A}$. Ker je $\operatorname{Im}\mathcal{A} = \mathcal{L}\{v_1, v_2\}$ in ker sta v_1 in v_2 linearno neodvisna, velja $\operatorname{rang}\mathcal{A} = 2$. Torej je $\dim\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \dim\mathbb{R}^5 - \operatorname{rang}\mathcal{A} = 3$. Prostor S je trirazsežen in vsebovan v trirazsežnem jedru, zato je $S = \operatorname{Ker}\mathcal{A}$.

Odgovor se torej glasi: ja (in taka linearna preslikava $\mathcal{A}$ je ena sama).

⋙ 102., 105., 106.

Rešitev 108. naloge

Oglej si nalogo 92 ter zapiši ravnino Σ in premico p v parametrični obliki: Pri ravnini Σ vzemi dva linearno neodvisna vektorja, ki sta pravokotna na $\vec{n}_\Sigma$, naprimer $\vec{a} := (1,1,0)$ in $\vec{b} := (0,1,2)$. Potem vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ razpenjata ravnino Σ, naprimer iz točke $S \in \Sigma$ s krajevnim vektorjem $\vec{r}_S := (0,0,1)$. Zato je parametrična enačba ravnine Σ enaka

$$\Sigma\colon\ \vec{r} = \vec{r}_S + s\vec{a} + t\vec{b}, \quad s,t \in \mathbb{R}.$$

Podobno dobiš parametrično enačbo premice

$$p\colon\ \vec{r} = \vec{r}_P + u\vec{p}, \quad u \in \mathbb{R},$$

kjer je $\vec{r}_P := (1,-1,1)$ in $\vec{p} := (3,1,-1)$.

Po nalogi 92 postaviš $\mathcal{A}\vec{r}_S := \vec{r}_P$, $\mathcal{A}\vec{a} := \vec{p}$, $\mathcal{A}\vec{b} := \vec{0}$, torej $\mathcal{A}(0,0,1) := (1,-1,1)$, $\mathcal{A}(1,1,0) = (3,1,-1)$ in $\mathcal{A}(0,1,2) := (0,0,0)$. Ker so vektorji $\vec{r}_S, \vec{a}, \vec{b}$ linearno neodvisni, lahko po nalogi 102 tako predpisani $\mathcal{A}$ linearno razširiš na ves prostor $\mathbb{R}^3$. Pomagaš si z enakostmi $\vec{k} = \vec{r}_S$, $\vec{\jmath} = \vec{b} - 2\vec{r}_S$, $\vec{\imath} = \vec{a} - \vec{\jmath} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{r}_S$ in za poljuben vektor $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ dobiš

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x,y,z) &= \mathcal{A}(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}) = x\mathcal{A}\vec{\imath} + y\mathcal{A}\vec{\jmath} + z\mathcal{A}\vec{k} \\ &= x\mathcal{A}(\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{r}_S) + y\mathcal{A}(\vec{b} - 2\vec{r}_S) + z\mathcal{A}(\vec{r}_S) \\ &= x\mathcal{A}\vec{a} - x\mathcal{A}\vec{b} + 2x\mathcal{A}\vec{r}_S + y\mathcal{A}\vec{b} - 2y\mathcal{A}\vec{r}_S + z\mathcal{A}\vec{r}_S \\ &= (2x - 2y + z)\mathcal{A}\vec{r}_S + x\mathcal{A}\vec{a} + (-x + y)\mathcal{A}\vec{b} \\ &= (2x - 2y + z)(1,-1,1) + x(3,1,-1) + (-x + y)(0,0,0) \\ &= (5x - 2y + z, -x + 2y - z, x - 2y + z).\end{aligned}$$

⋙ 92., 102.

Rešitev 109. naloge

(a) Ker je $(0,0) \in D$, množica D ni prazna. Vzemi poljubna (v,v) in (v',v') iz D. Torej sta $v, v' \in V$, in zato tudi $v + v' \in V$, saj je V vektorski prostor. Sklepaj, da je

$$(v,v) + (v',v') = (v + v', v + v') \in D.$$

Če je povrhu $\lambda \in \mathbb{F}$, je $\lambda v \in V$, in zato

$$\lambda(v,v) = (\lambda v, \lambda v) \in D.$$

Torej je D podprostor prostora $V \times V$.

(b) Definiraj preslikavo $\mathcal{A}\colon V \to D$ s predpisom

$$\mathcal{A}v = (v,v)$$

za vse $v \in V$. Preslikava $\mathcal{A}$ je linearna, saj za vse $v, v' \in V$ in za vse $\lambda \in \mathbb{F}$ velja

$$\mathcal{A}(v + v') = (v + v', v + v') = (v,v) + (v',v') = \mathcal{A}v + \mathcal{A}v',$$

$$\mathcal{A}(\lambda v) = (\lambda v, \lambda v) = \lambda(v,v) = \lambda\mathcal{A}v.$$

Linearna preslikava $\mathcal{A}$ je injektivna, saj ima trivialno jedro:

$$v \in \operatorname{Ker}\mathcal{A} \iff \mathcal{A}v = 0_{V\times V} \iff (v,v) = (0,0) \iff v = 0.$$

Preveri še, da je $\operatorname{Im}\mathcal{A} = D$. Torej je $\mathcal{A}$ izomorfizem prostora V na prostor D. Ker obstaja izomorfizem med njima, sta prostora V in D izomorfna.

(Dokaza se lahko lotiš tudi takole: najprej definiraš preslikavo $\mathcal{A}\colon V \to V \times V$ z istim predpisom kot zgoraj, dokažeš, da je linearna, njena zaloga vrednosti pa je enaka D; od tod sklepaš, da je D podprostor v prostoru $V \times V$; preveriš, da je $\mathcal{A}$ injektivna, in sklepaš, da sta V in D izomorfna prostora.)

⋙ 97., 110.

Rešitev 110. naloge

Najprej preveriš, če sta zgrajena nad istim obsegom:

(a) Če nista, potem prostora nista izomorfna. (Glej definicijo izomorfizma vektorskih prostorov!)

(b) Če sta, lahko nadaljuješ na dva načina:

(i) Poiščeš izomorfizem med njima.

(ii) Ugotoviš, da imata enako razsežnost.

Opomba *Način (i) je zgolj definicija izomorfnosti prostorov, drugi je posledica izreka, da je vsak n-razsežen vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ izomorfen prostoru $\mathbb{F}^n$.*

⊳⊳⊳ 109., 111.

Rešitev 111. naloge

Oglej si nalogo 110. Ker so vsi gornji prostori razen prostora $\mathbb{R}[x]$ končnorazsežni, je dovolj pri vsakem določiti razsežnost in polje, nad katerim je zgrajen. Preveri:

- $\mathbb{R}_n[x]$ je $(n+1)$-razsežen vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$;
- $\mathbb{R}_n[t]$ je $(n+1)$-razsežen vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$;
- $\mathbb{C}_n[x]$ je $(n+1)$-razsežen nad poljem $\mathbb{C}$;
- $\mathbb{R}^n$ je n-razsežen nad poljem $\mathbb{R}$;
- $\mathbb{R}^{n+1}$ je $(n+1)$-razsežen nad poljem $\mathbb{R}$;
- $\mathbb{R}^{n\times 1}$ je n-razsežen nad poljem $\mathbb{R}$;
- $\mathbb{R}^{1\times n}$ je n-razsežen nad poljem $\mathbb{R}$;
- $\mathbb{R}^{n\times n}$ je n^2-razsežen nad poljem $\mathbb{R}$.

Zato so prostori $\mathbb{R}_n[x]$, $\mathbb{R}_n[t]$ in $\mathbb{R}^{n+1}$ paroma izomorfni. Prav tako so prostori $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n\times 1}$, $\mathbb{R}^{1\times n}$ paroma izomorfni. Prostori $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}_n[x]$ in $\mathbb{R}^{n\times n}$ niso izomorfni nobenemu od naštetih prostorov, razen samim sebi.

⊳⊳⊳ 110.

Rešitev 112. naloge

Po definiciji ranga je $\operatorname{rang}(\mathcal{A}) = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}$. Povrhu je

$$\begin{aligned} \operatorname{rang}(\mathcal{BA}) &= \dim \operatorname{Im}(\mathcal{BA}) = \dim((\mathcal{BA})U) \\ &= \dim(\mathcal{B}(\mathcal{A}U)) = \dim(\mathcal{B}(\operatorname{Im}\mathcal{A})). \end{aligned} \tag{85}$$

Ker razsežnost zaloge vrednosti linearne preslikave ne presega razsežnosti njenega definicijskega območja, je $\dim(\mathcal{B}(\operatorname{Im}\mathcal{A})) \le \dim(\operatorname{Im}\mathcal{A})$. Zato odtod in iz (85) sledi neenakost (12).

Podobno kot zgoraj velja $\operatorname{rang}(\mathcal{B}) = \dim \operatorname{Im} \mathcal{B} = \dim(\mathcal{B}V)$. Ker je $\operatorname{Im}\mathcal{A} \le V$, je tudi $\mathcal{B}(\operatorname{Im}\mathcal{A}) \le \mathcal{B}V$, odtod $\dim \mathcal{B}(\operatorname{Im}\mathcal{A}) \le \dim \mathcal{B}V = \operatorname{rang}(\mathcal{B})$, in zato velja (13).

Opomba *Premisli, kdaj v (12) in (13) veljata enakosti.*

⊳⊳⊳ 113., 116., 117., 360.

Rešitev 113. naloge

Premisli verigo sklepov

$$\begin{aligned} \operatorname{rang}(\mathcal{A}+\mathcal{B}) &= \dim \operatorname{Im}(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = \dim((\mathcal{A}+\mathcal{B})U) \le \\ &\le \dim(\mathcal{A}U + \mathcal{B}U) = \dim(\mathcal{A}U) + \dim(\mathcal{B}U) - \dim(\mathcal{A}U \cap \mathcal{B}U) \le \\ &\le \dim(\mathcal{A}U) + \dim(\mathcal{B}U) = \dim \operatorname{Im}\mathcal{A} + \dim \operatorname{Im}\mathcal{B} = \operatorname{rang}\mathcal{A} + \operatorname{rang}\mathcal{B}. \end{aligned}$$

Pri sklepanju v drugi vrstici uporabiš Grassmanovo enakost.

⊳⊳⊳ 112., 116., 117., 360.

Rešitev 114. naloge

Zožitev $\mathcal{A}|_{U'}$ je taka preslikava iz U' v V, da za vsak $u \in U'$ velja $(\mathcal{A}|_{U'})u = \mathcal{A}u$. Zaloga vrednosti zožitve je torej

$$\operatorname{Im}(\mathcal{A}|_{U'}) = \{(\mathcal{A}|_{U'})u \mid u \in U'\} = \{\mathcal{A}u \mid u \in U'\} = \mathcal{A}U',$$

njeno jedro pa

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(\mathcal{A}|_{U'}) &= \{u \in U' \mid (\mathcal{A}|_{U'})u = 0\} \\ &= \{u \in U' \mid \mathcal{A}u = 0\} \\ &= \{u \in U' \mid u \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}\} \\ &= U' \cap \operatorname{Ker}\mathcal{A}. \end{aligned}$$

⊳⊳⊳ 115., 116.

Rešitev 115. naloge

Zožitev $\mathcal{A}|_{U'}$ je injektivna natanko tedaj, ko je njeno jedro $\operatorname{Ker}(\mathcal{A}|_{U'})$ ničelno. V rešitvi naloge 114 prebereš, da je

$$\operatorname{Ker}(\mathcal{A}|_{U'}) = \operatorname{Ker}\mathcal{A} \cap U'.$$

Zato sklepaš, da je zožitev $\mathcal{A}|_{U'}$ injektivna natanko takrat, ko je $\operatorname{Ker}\mathcal{A} \cap U' = \{0\}$. Med takimi U' iščeš tistega z največjo razsežnostjo. Če zmoreš, skleneš, da so taki prostori U' natanko dopolnilni prostori jedra $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$, ali pa s pomočjo Grassmanove neenakosti dokažeš neenakost

$$\begin{aligned} \dim U' &= \dim(\operatorname{Ker}\mathcal{A} + U') + \dim(\operatorname{Ker}\mathcal{A} \cap U') - \dim \operatorname{Ker}\mathcal{A} \\ &= \dim(\operatorname{Ker}\mathcal{A} + U') - \dim \operatorname{Ker}\mathcal{A} \\ &\le \dim U - \dim \operatorname{Ker}\mathcal{A} \end{aligned} \tag{86}$$

in skleneš: podprostor U' ima največjo možno razsežnost, če je v (86) enačaj, torej če je

$$\operatorname{Ker}\mathcal{A} \oplus U' = U.$$

⊳⊳⊳ 114.

Rešitev 116. naloge

(a) Definiraj endomorfizem $\mathcal{B}'\colon \operatorname{Im}\mathcal{A} \to V$ s predpisom $\mathcal{B}'v = \mathcal{B}v$ za vsak $v \in \operatorname{Im}\mathcal{A}$. (Torej je preslikava $\mathcal{B}'$ zožitev operatorja $\mathcal{B}$ na podprostor $\operatorname{Im}\mathcal{A}$.) Potem velja

$$\dim \operatorname{Im}\mathcal{A} = \dim \operatorname{Ker}\mathcal{B}' + \dim \operatorname{Im}\mathcal{B}'. \tag{87}$$

V enakosti (87) upoštevaj

$$\operatorname{Ker}\mathcal{B}' = \{v \in \operatorname{Im}\mathcal{A} \mid \mathcal{B}'v = 0\} = \{v \in \operatorname{Im}\mathcal{A} \mid \mathcal{B}v = 0\} = \operatorname{Im}\mathcal{A} \cap \operatorname{Ker}\mathcal{B}$$

in

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\mathcal{B}' &= \{v \in V \mid \exists u \in \operatorname{Im}\mathcal{A} : v = \mathcal{B}'u = \mathcal{B}u\} \\ &= \{v \in V \mid \exists x \in V : v = \mathcal{B}\mathcal{A}x\} \\ &= \operatorname{Im}\mathcal{B}\mathcal{A} \end{aligned}$$

in izpelji enakost (14).

(b) Iz enakosti (14) sledi

$$\dim \operatorname{Im}\mathcal{B}\mathcal{A} = \dim \operatorname{Im}\mathcal{A} - \dim(\operatorname{Im}\mathcal{A} \cap \operatorname{Ker}\mathcal{B}).$$

Torej je

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Ker}\mathcal{B}\mathcal{A} &= \dim V - \dim \operatorname{Im}\mathcal{B}\mathcal{A} \\ &= \dim V - \dim \operatorname{Im}\mathcal{A} + \dim(\operatorname{Im}\mathcal{A} \cap \operatorname{Ker}\mathcal{B}) \\ &= \dim \operatorname{Ker}\mathcal{A} + \dim(\operatorname{Im}\mathcal{A} \cap \operatorname{Ker}\mathcal{B}) \\ &\le \dim \operatorname{Ker}\mathcal{A} + \dim \operatorname{Ker}\mathcal{B}, \end{aligned}$$

neenakost (15) je dokazana.

Opomba *Kaj pa v primeru $\mathcal{A}\colon U \to V$ in $\mathcal{B}\colon V \to W$?*

⊳⊳⊳ 112., 113., 114.

Rešitev 117. naloge

(a) Premisli, da velja veriga ekvivalenc

$$\begin{aligned} \operatorname{rang}(\mathcal{A}) = \operatorname{rang}(\mathcal{B}\mathcal{A}) &\overset{(i)}{\iff} \dim \operatorname{Im}\mathcal{A} = \dim \operatorname{Im}(\mathcal{B}\mathcal{A}) = \dim(\mathcal{B}(\operatorname{Im}\mathcal{A})) \\ &\overset{(ii)}{\iff} \operatorname{Ker}(\mathcal{B}|_{\operatorname{Im}\mathcal{A}}) = \{0\} \quad (\mathcal{B}|_{\operatorname{Im}\mathcal{A}} \text{ je injektivna}) \\ &\overset{(iii)}{\iff} \operatorname{Ker}\mathcal{B} \cap \operatorname{Im}\mathcal{A} = \{0\}, \end{aligned}$$

saj velja (i) po definiciji ranga preslikave, (ii) zaradi enakosti

$$\dim \operatorname{Ker}(\mathcal{B}|_{\operatorname{Im}\mathcal{A}}) = \dim \operatorname{Im}\mathcal{A} - \dim \operatorname{Im}(\mathcal{B}|_{\operatorname{Im}\mathcal{A}}) = \dim \operatorname{Im}\mathcal{A} - \dim \operatorname{Im}(\mathcal{B}\mathcal{A})$$

in (iii) po nalogi 114. Začetek in konec verige govorita o pomembni ekvivalenci

$$\operatorname{rang}(\mathcal{A}) = \operatorname{rang}(\mathcal{B}\mathcal{A}) \iff \operatorname{Ker}\mathcal{B} \cap \operatorname{Im}\mathcal{A} = \{0\}. \tag{88}$$

Zdaj se loti implikacije (a). Predpostavi, da velja $\operatorname{rang}(\mathcal{A}) = \operatorname{rang}(\mathcal{B}\mathcal{A})$. Potem iz (88) sledi $\operatorname{Ker}\mathcal{B} \cap \operatorname{Im}\mathcal{A} = \{0\}$. Zato sledi

$$\operatorname{Ker}\mathcal{B} \cap \operatorname{Im}(\mathcal{A}\mathcal{C}) \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{B} \cap \operatorname{Im}\mathcal{A} = \{0\},$$

in zato po (88)

$$\operatorname{rang}(\mathcal{A}\mathcal{C}) = \operatorname{rang}(\mathcal{B}(\mathcal{A}\mathcal{C})) = \operatorname{rang}(\mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{C}).$$

To pa je bilo treba dokazati.

(b) *1. način reševanja.* V implikacijo (a) vstavi $\mathcal{A}^n$ namesto $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ namesto $\mathcal{B}$ in $\mathcal{C}$, pa pridelaš implikacijo (b).

2. način reševanja. Ker je $\mathcal{A}^{n+1}x = \mathcal{A}^n(\mathcal{A}x)$, je $\operatorname{Im}\mathcal{A}^{n+1} \le \operatorname{Im}\mathcal{A}^n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Torej velja

$$\operatorname{rang}(\mathcal{A}^n) = \operatorname{rang}(\mathcal{A}^{n+1}) \iff \operatorname{Im}\mathcal{A}^n = \operatorname{Im}\mathcal{A}^{n+1}.$$

Nadaljuj.

Opomba *Premisli, da ne velja sklep:*

$$\operatorname{rang}(\mathcal{A}) = \operatorname{rang}(\mathcal{B}) \Rightarrow \operatorname{rang}(\mathcal{A}\mathcal{C}) = \operatorname{rang}(\mathcal{B}\mathcal{C}).$$

⊳⊳⊳ 112., 113., 407.

Rešitev 118. naloge

Dokazati moraš $\operatorname{Im}\mathcal{B}\mathcal{A} = \operatorname{Im}\mathcal{B}$. Najprej $\operatorname{Im}\mathcal{B}\mathcal{A} \subseteq \operatorname{Im}\mathcal{B}$: Vzemi poljuben $x \in \operatorname{Im}\mathcal{B}\mathcal{A}$. Potem obstaja tak $y \in V$, da je $x = (\mathcal{B}\mathcal{A})y = \mathcal{B}(\mathcal{A}y)$, zato je $x \in \operatorname{Im}\mathcal{B}$.

Obrata $\operatorname{Im}\mathcal{B} \subseteq \operatorname{Im}\mathcal{B}\mathcal{A}$ se lahko lotiš vsaj na naslednje tri načine.

1. način. Vzemi poljuben $x \in \operatorname{Im}\mathcal{B}$. Potem obstaja tak $y \in V$, da je $x = \mathcal{B}y$. Ker je V prema vsota podprostorov $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ in $\operatorname{Ker}\mathcal{B}$, lahko zapišeš $y = z + z'$ za neka $z \in \operatorname{Im}\mathcal{A}$, $z' \in \operatorname{Ker}\mathcal{B}$. Torej je

$$x = \mathcal{B}y = \mathcal{B}(z + z') = \mathcal{B}z + \mathcal{B}z' = \mathcal{B}z.$$

Ker pa je $z \in \operatorname{Im}\mathcal{A}$, lahko pišeš $z = \mathcal{A}u$ za neki $u \in V$, in zato $x = \mathcal{B}z = \mathcal{B}\mathcal{A}u \in \operatorname{Im}\mathcal{B}\mathcal{A}$.

2. način. Po nalogi 116 velja

$$\dim \operatorname{Im}\mathcal{A} = \dim(\operatorname{Im}\mathcal{A} \cap \operatorname{Ker}\mathcal{B}) + \dim \operatorname{Im}\mathcal{B}\mathcal{A},$$

zato iz $\operatorname{Im}\mathcal{A} \cap \operatorname{Ker}\mathcal{B} = 0$ sklepaš

$$\dim \operatorname{Im}\mathcal{B}\mathcal{A} = \dim \operatorname{Im}\mathcal{A} = \dim V - \dim \operatorname{Ker}\mathcal{B} = \dim \operatorname{Im}\mathcal{B}.$$

Prostor $\operatorname{Im}\mathcal{B}\mathcal{A}$ je vsebovan v $\operatorname{Im}\mathcal{B}$, oba imata enako razsežnost, zato sta enaka.

3. način. Oglej si verigo enakosti

$$\dim \operatorname{Im}\mathcal{B}\mathcal{A} = \dim(\mathcal{B}\operatorname{Im}\mathcal{A}) = \dim \operatorname{Im}\mathcal{A} = \dim V - \dim \operatorname{Ker}\mathcal{B} = \dim \operatorname{Im}\mathcal{B}$$

in jih utemelji. Nato sklepaj kot v 2. načinu.

⊳⊳⊳ 116.

Rešitev 119. naloge

Premisli (s pomočjo naloge 99), da veljata ekvivalenci

$$\mathcal{AB} \neq 0 \iff \operatorname{Im}\mathcal{B} \not\subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A}$$

in

$$\mathcal{BA} = 0 \iff \operatorname{Im}\mathcal{A} \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{B}.$$

Ker $\mathcal{A}$ ni obrnljiv, je $\operatorname{Im}\mathcal{A} \neq V$, in ker je neničeln, je $\operatorname{Ker}\mathcal{A} \neq V$. Zato obstajata taka neničelna podprostora $V', V'' \leq V$, da veljata razcepa

$$V = V' \oplus \operatorname{Im}\mathcal{A}$$

in

$$V = V'' \oplus \operatorname{Ker}\mathcal{A}.$$

Naj imata podprostora V' in V'' urejeni bazi $\{v_1', \ldots, v_k'\}$ in $\{v_1'', \ldots, v_l''\}$. Potem naj preslikava $\mathcal{B}$ slika vektor v_1' v vektor v_1'', vektorje $v_2', \ldots, v_k'$ ter podprostor $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ v 0. Množica $\{v_1', \ldots, v_k'\}$ je baza podprostora V', zato obstaja po nalogi 102 natanko ena linearna razširitev preslikave $\mathcal{B}$ na celoten prostor V – to razširitev označi z isto črko. Premisli, da tako definirani endomorfizem $\mathcal{B}$ prostora V zadošča postavljenim pogojem.

⋙ 99., 102.

Rešitev 120. naloge

($\Rightarrow$). Predpostavi $\mathcal{AXB} = 0$ in vzemi poljuben $w \in \operatorname{Im}(\mathcal{X}|_{\operatorname{Im}\mathcal{B}}) \subseteq W$. Potem obstaja tak vektor $v \in \operatorname{Im}\mathcal{B} \subseteq V$, in zato tudi $u \in U$, da velja $w = \mathcal{X}v = \mathcal{XB}u$. Zato sklepaš

$$\mathcal{A}w = \mathcal{A}(\mathcal{XB}u) = (\mathcal{AXB})u = 0u = 0,$$

torej je $w \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$.

($\Leftarrow$). Predpostavi, da je $\operatorname{Im}(\mathcal{X}|_{\operatorname{Im}\mathcal{B}}) \subseteq \operatorname{Ker}\mathcal{A}$, in vzemi poljuben $u \in U$. Potem je

$$\mathcal{AXB}u = \mathcal{A}(\mathcal{X}(\mathcal{B}u)) = 0, \tag{89}$$

saj je $\mathcal{B}u \in \operatorname{Im}\mathcal{B}$ in $\mathcal{X}(\mathcal{B}u) \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$. Ker velja (89) za poljuben $u \in U$, je $\mathcal{AXB}$ ničelna preslikava. S tem je ekvivalenca (16) dokazana.

⋙ 164.

Rešitev 121. naloge

V pomoč naj ti bo naslednji diagram.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\mathcal{A}"] \arrow[d, "\mathcal{Y}"'] & V \\ W \arrow[r, "\mathcal{B}"'] & Z \arrow[u, "\mathcal{X}"'] \end{tikzcd}$$

Naj bo $a := \operatorname{rang}(\mathcal{A})$ in $b := \operatorname{rang}(\mathcal{B})$.

Če je $a = 0$, velja $\mathcal{A} = 0$, zato smeš v tem primeru izbrati $\mathcal{X} = 0$ in $\mathcal{Y} = 0$ in dokaz je končan.

Za $a > 0$ najprej k podprostoru $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ poišči dopolnilo U' v U: $U = U' \oplus \operatorname{Ker}\mathcal{A}$. Označi z $\mathcal{B}_{U'} = \{u_1, \ldots, u_a\}$ neko bazo podprostora U'. Podobno postopaj pri preslikavi B: k podprostoru $\operatorname{Ker}\mathcal{B}$ poišči dopolnilni podprostor, torej tak podprostor W', da bo veljalo $W = W' \oplus \operatorname{Ker}\mathcal{B}$, in izberi neko bazo $\mathcal{B}_{W'} = \{w_1, \ldots, w_b\}$ prostora W'. Iz nalog 96 in 115 sledi, da so vektorji $\mathcal{B}w_1, \ldots, \mathcal{B}w_b \in Z$ linearno neodvisni. Naj bo $Z' := \mathcal{L}\{\mathcal{B}w_1, \ldots, \mathcal{B}w_b\}$ in Z'' njegov dopolnilni podprostor v Z, torej

$$Z = Z' \oplus Z''.$$

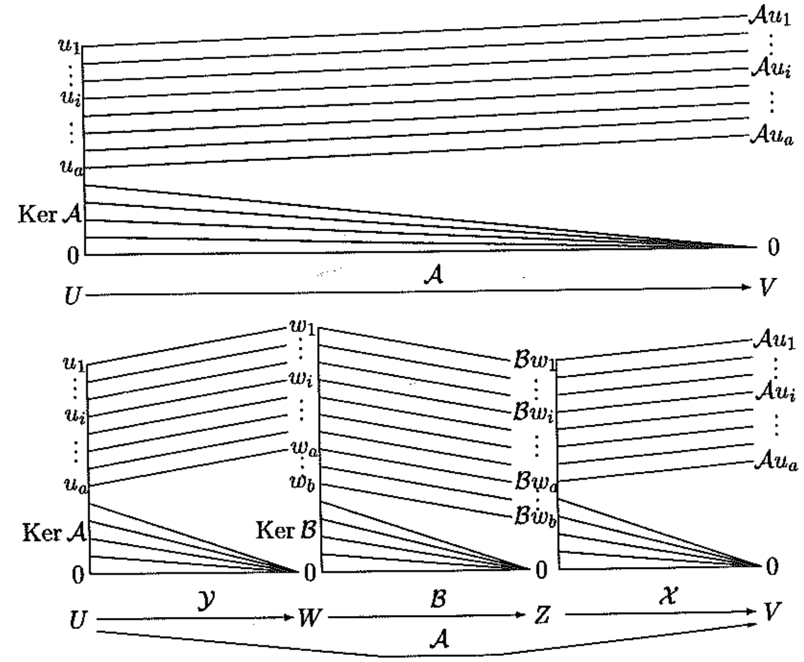
Zdaj lahko definiraš

$$\mathcal{Y}\colon\ U(= U' \oplus \operatorname{Ker}\mathcal{A}) \to W(= W' \oplus \operatorname{Ker}\mathcal{B}),$$

kjer postaviš $\mathcal{Y}u_i := w_i$ za $i = 1, \ldots, a$, $\mathcal{Y}(\operatorname{Ker}\mathcal{A}) := 0$ in nato $\mathcal{Y}$ linearno razširiš na ves prostor U. Podobno definiraš tudi

$$\mathcal{X}\colon\ Z(= Z' \oplus Z'') \to V,$$

kjer postaviš $\mathcal{X}(\mathcal{B}w_i) := \mathcal{A}u_i$ $(i = 1, \ldots, a)$, $\mathcal{X}(\mathcal{B}w_i) := 0$ $(i = a+1, \ldots, b)$, $\mathcal{X}(Z'') := 0$, in nato $\mathcal{X}$ linearno razširiš na ves prostor Z. S pomočjo slike 17 premisli, da tako definirani linearni preslikavi $\mathcal{X}$ in $\mathcal{Y}$ zadoščata postavljenim pogojem.



Slika 17

Opomba *Z nalogo 112 premisli, da velja tudi obrat trditve iz naloge 121.*

⋙ 164., 213., 214.

Matrike in sistemi linearnih enačb

Rešitev 122. naloge

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad Ax = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix},$$

$$x^t x = [14], \quad xx^t = \begin{bmatrix} 9 & -3 & -6 \\ -3 & 1 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$A + C^t = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad x^t C = [\,-18 \quad -7\,].$$

Produkt AB^t ni definiran, saj ima A tri stolpce in B^t štiri vrstice. Podobno nista definirani vsoti $x + x^t$ in $A + B$, saj je vsota definirana samo za matrike istih velikosti.

Pri računanju nekaterih produktov je smiselno postaviti oklepaje tako, da je račun kratek. Povrhu, smeš upoštevati gornje rezultate:

$$x^t A^t A x = (x^t A^t)(Ax) = (Ax)^t (Ax) = [68], \quad x^t A^t C^t x = (Ax)^t (x^t C)^t = [-92].$$

Rešitev 123. naloge

Matrika

$$D = Q^t A Q = \begin{bmatrix} * & -3+6y \\ -3+6y & * \end{bmatrix}$$

je diagonalna natanko tedaj, ko velja $-3 + 6y = 0$ oziroma $y = 1/2$.

Rešitev 124. naloge

Označi $c = \cos\varphi$ in $s = \sin\varphi$. Potem je

$$A^2 = \begin{bmatrix} c^2 & 0 & cs \\ 0 & c^2+s^2 & 0 \\ cs & 0 & s^2 \end{bmatrix}$$

in

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & c(c^2+s^2) & 0 \\ c(c^2+s^2) & 0 & s(c^2+s^2) \\ 0 & s(c^2+s^2) & 0 \end{bmatrix} = (c^2+s^2)A.$$

Ker je $c^2 + s^2 = 1$, velja $A^3 = A$. Zato je $A^4 = AA^3 = AA = A^2$, $A^5 = AA^4 = AA^2 = A^3 = A$, in tako prideš do domneve

$$A^n = \begin{cases} A, & \text{če je } n \text{ liho število;} \\ A^2, & \text{če je } n \text{ sodo število,} \end{cases}$$

ki jo dokaži z indukcijo!

⋙ 125.

Rešitev 125. naloge

Matriko, ki jo moraš potencirati, zaznamuj z A. Potem je $A^1 = A$,

$$A^2 = \begin{bmatrix} ab & 0 & ab \\ 0 & 2ab & 0 \\ ab & 0 & ab \end{bmatrix} = ab \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = abB,$$

kjer je B matrika $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$A^3 = A \cdot A^2 = abAB = ab \begin{bmatrix} 0 & 2a & 0 \\ 2b & 0 & 2b \\ 0 & 2a & 0 \end{bmatrix} = 2abA$$

in tudi $A^4 = 2a^2b^2B$, $A^5 = 4a^2b^2A$,... Smeš domnevati, da za vsak $k \in \mathbb{N}$ velja

$$A^{2k} = 2^{k-1}a^k b^k B, \quad A^{2k+1} = 2^k a^k b^k A.$$

Svojo domnevo potrdi še z indukcijskim dokazom!

⋙ 124.

Rešitev 126. naloge

Preveri, da je ij-koeficient matrike A^2 enak

$$(A^2)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{1}{n^2}n = \frac{1}{n}$$

in zato $A^2 = A$. Odtod sklepaj, da je $A^k = A$ za vsak $k \in \mathbb{N}$.

Opomba *Ali je $A^k = A$ za vsak $k \in \mathbb{Z}$?*

⋙ 128.

Rešitev 127. naloge

1. način reševanja. Zapiši $A = I + B$, kjer je $B := A - I$. Matrika I komutira z vsako matriko iste velikosti, zato velja binomski izrek in

$$A^n = (I+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^{n-k} B^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k.$$

Potrebno je torej poznati potence matrike B, kar v splošnem ni lažje delo. V našem primeru pa opaziš, da je $B^3 = 0$. Zato je

$$A^n = I + nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -n & -\frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. način reševanja. Izračunaš A^2, A^3, $A^4, \ldots$, razbereš obrazec za splošno potenco in z indukcijo dokažeš njegovo pravilnost.

Opomba *Razmisli, zakaj je bilo smiselno razstaviti matriko A na vsoto identične matrike in strogo zgornje trikotne matrike. Pomni to zvijačo!*
Ali velja dobljeni rezultat tudi za $n \in \mathbb{Z}$?

▷▷▷ 128., 131.

Rešitev 128. naloge

Označi z E kvadratno matriko velikosti $m \times m$, ki ima vse koeficiente enake 1. Potem lahko matriko A zapišeš $A = bE + (a-b)I$. Z indukcijo dokaži, da je $E^k = m^{k-1}E$ za vsak $k \in \mathbb{N}$. Ker matriki E in I komutirata (saj identiteta komutira z vsako matriko), lahko uporabiš binomski obrazec:

$$A^n = (bE + (a-b)I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (bE)^k ((a-b)I)^{n-k} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b^k m^{k-1} (a-b)^{n-k} \right) E + (a-b)^n I.$$

▷▷▷ 126., 127.

Rešitev 129. naloge

(a) *1. način reševanja.* Označi koeficiente matrik A, B in AB z a_{ij}, b_{ij} in c_{ij}. Potem po pravilih množenja matrik velja, da je vsota koeficientov v i-ti vrstici matrike AB enaka

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(a_{ik}\sum_{j=1}^{n} b_{kj}) = \sum_{k=1}^{n}(a_{ik}\cdot 1) = 1.$$

2. način reševanja. Naj bo $e := [1,1,\dots,1]^t$ stolpec višine n. Potem iz predpostavk sledita enakosti $Ae = e$ in $Be = e$. Ker je $(AB)e = A(Be) = Ae = e$, je trditev dokazana.

(b) Rešuješ lahko podobno kot prejšnji točki ali pa si pomagaš s trditvijo (a): matriki A^t in B^t zadoščata predpostavkam točke (a), zato za $AB = (B^tA^t)^t$ velja (b).

(c) Postavi $e' := [1,-1,1\dots,(-1)^{n+1}]$ in sklepaj $(AB)e' = A(Be') = Ae = e$.

Opomba *Dokaži posplošitev: če je A ista kot v točki (a) in je stolpec $e := [1,1,\dots,1]^t$ (višine n) linearna kombinacija stolpcev matrike B, se e na isti način linearno izraža s stolpci matrike AB.*

Rešitev 130. naloge

Iščeš A^{-1}, torej tako matriko, da bo veljalo

$$AA^{-1} = I = A^{-1}A.$$

Nastavi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix},$$

kjer so $b_{ij} \in \mathbb{R}$. Pomnoži prvo vrstico matrike A^{-1} s prvim, drugim, tretjim ter četrtim stolpcem matrike A in upoštevaj enakost $A^{-1}A = I$, pa dobiš sistem enačb

$$\begin{aligned} 1 &= (A^{-1})_{(1)}A^{(1)} = b_{11}, \\ 0 &= (A^{-1})_{(1)}A^{(2)} = 2b_{11} + 3b_{12}, \\ 0 &= (A^{-1})_{(1)}A^{(3)} = 3b_{11} + 5b_{12} + 4b_{13}, \\ 0 &= (A^{-1})_{(1)}A^{(4)} = 2b_{11} + 8b_{12} + b_{13} - 2b_{14}. \end{aligned}$$

Njegove rešitve so $b_{11} = 1$, $b_{12} = -2/3$, $b_{13} = 1/12$ in $b_{14} = -13/8$. Potem pomnoži drugo vrstico matrike A^{-1} z vsemi stolpci matrike A. Reši sistem, da dobiš rešitve $b_{21} = 0$, $b_{22} = 1/3$, $b_{23} = -5/12$ in $b_{24} = 9/8$. Za izračun ti preostaneta še dve vrstici matrike A^{-1}, ki ju uženeš podobno. Na ta način dobiš obrat

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 1/12 & -13/8 \\ 0 & 1/3 & -5/12 & 9/8 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Na koncu še preveri, da je zadoščeno tudi pogoju $AA^{-1} = I$.

Opomba *Opazi, da so bili sistemi linearnih enačb enostavno rešljivi, ker je matrika A zgornje trikotna. Pri Gaussovem postopku za iskanje obrata matrike prav tako rešuješ sisteme linearnih enačb, samo da je tam reševanje sistemov, v katerih izpustiš pisanje neznank, hitro in sistematično.*

▷▷▷ 131.

Rešitev 131. naloge

Preveri, da je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Obrat

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

lahko izračunaš z običajnim postopkom (zapišeš bločno matriko $[A|I]$ in jo z Gaussovimi eliminacijami po vrsticah preoblikuješ v $[I|A^{-1}]$) ali pa opaziš, da je $(I-A)^3 = 0$ in zato

$$A^{-1} = (I - (I-A))^{-1} = \sum_{k=0}^{2}(I-A)^k = I + (I-A) + (I-A)^2.$$

Opomba *Pri razpršenih obrnljivih matrikah lahko na pamet preveriš eno od enakosti $AA^{-1} = I$ ali $A^{-1}A = I$.*
Premisli o uporabnosti identitete $1 - x^{n+1} = (1-x)(1 + x + \cdots + x^n)$, $x \in \mathbb{R}$, kjer namesto števila 1 postaviš identično matriko I in namesto realnega števila x kvadratno matriko X.

Rešitev 132. naloge

Enakosti imata smisel le za obrnljive matrike A. Takrat obstaja taka matrika A^{-1}, da velja

$$AA^{-1} = I = A^{-1}A. \tag{90}$$

Enakosti (90) transponiraj, pa dobiš enakosti

$$(A^{-1})^t A^t = I \quad \text{in} \quad A^t (A^{-1})^t = I.$$

Torej je matrika $(A^{-1})^t$ tista, ki zadošča pogoju za obrat matrike A^t. Ker je obrat matrike en sam, je $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Podobno dokažeš drugo enakost.

▷▷▷ 135.

Rešitev 133. naloge

1. način reševanja. Minimalni polinom $m_A(\lambda) = \lambda^s + c_{s-1}\lambda^{s-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$ je polinom najnižje stopnje izmed vseh neničelnih polinomov s čelnim koeficientom 1, ki imajo A za ničlo. Stopnja s polinoma m_A je enaka najmanjšemu $k \in \mathbb{N}$, za katerega so $I, A, \ldots, A^k$ linearno odvisne matrike. Ker sta I in A linearno neodvisni in ker velja

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} = -2A + 3I,$$

je $s = 2$. Iz $A^2 + 2A - 3I = 0$ zdaj sklepaj, da je

$$m_A(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3.$$

2. način reševanja. Izračunaj karakteristični polinom

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (-1)^4 \det(A - \lambda I) \\ &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} + \\ &\quad + \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \ldots \\ &= (\lambda - 1)^3(\lambda + 3). \end{aligned}$$

Ker imata minimalni polinom m_A in karakteristični polinom p_A isti ničli in ker $m_A \mid p_A$, je $m_A(\lambda) = (\lambda - 1)^a(\lambda + 3)$ za neki $1 \leq a \leq 3$. Eksponent a je najmanjši izmed vseh, za katere je

$$\dim \operatorname{Ker}(A - I)^a = \dim \operatorname{Ker}(A - I)^{a+1}.$$

Preveri, da je $\dim \operatorname{Ker}(A - I)^1 = 3 = \dim \operatorname{Ker}(A - I)^2$. Odtod dobiš $a = 1$ in $m_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 3)$.

Opomba *Pomni zvezo med stopnjo minimalnega polinoma in linearno neodvisnostjo zaporednih potenc endomorfizma.*

▷▷▷ 275., 284., 295., 424.

Rešitev 134. naloge

Ker je A ničla svojega minimalnega polinoma, je

$$0 = m_A(A) = A^4 - 2A^3 + 5A^2 + 3I.$$

Odtod izrazi identično matriko in izpostavi matriko A, da dobiš

$$I = A \cdot \frac{1}{3}(-A^3 + 2A^2 - 5A) = \frac{1}{3}(-A^3 + 2A^2 - 5A) \cdot A.$$

Zato lahko vzameš

$$A^{-1} = \frac{1}{3}(-A^3 + 2A^2 - 5A).$$

Opomba *Bodi B poljubna kvadratna matrika. Razmisli, da B^{-1} obstaja (in se da izraziti kot polinom matrike B) natanko tedaj, ko je prosti člen minimalnega polinoma m_B neničeln.*

▷▷▷ 135.

Rešitev 135. naloge

Iz enakosti

$$0 = m_A(A) = A^5 - 3A^4 + A^2 + 7A - 2I \tag{91}$$

najprej ugotovi, da obrat matrike A obstaja, saj ga lahko izračunaš kot v nalogi 134, ker 0 ni ničla polinoma m_A. Nato pomnoži (91) z A^{-5}, da dobiš

$$0 = I - 3A^{-1} + A^{-3} + 7A^{-4} - 2A^{-5} = I - 3A^{-1} + (A^{-1})^3 + 7(A^{-1})^4 - 2(A^{-1})^5.$$

Zato polinom

$$p(\lambda) := 1 - 3\lambda + \lambda^3 + 7\lambda^4 - 2\lambda^5$$

uniči matriko A^{-1}. Če bi bila A^{-1} ničla kakega polinoma stopnje manjše kot 5, bi podobno kot zgoraj sledilo, da je tudi A ničla nekega polinoma stopnje manjše od 5; protislovje. Zato je

$$m_{A^{-1}}(\lambda) = cp(\lambda)$$

za tak skalar $c \neq 0$, da je vodilni koeficient minimalnega polinoma enak 1. Torej je $c = -1/2$ in

$$m_{A^{-1}}(\lambda) = -\frac{1}{2}p(\lambda) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\lambda - \frac{1}{2}\lambda^3 - \frac{7}{2}\lambda^4 + \lambda^5.$$

Opomba *Premisli: če je A obrnljiva matrika, imata minimalna polinoma m_A in $m_{A^{-1}}$ isto stopnjo.*

⊳⊳⊳ 134.

Rešitev 136. naloge

Ker matrika A komutira z vsako matriko oblike $\alpha_0 I + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_k A^k$, je

$$\mathcal{L}\{I, A, \ldots, A^{s-1}\} \leq V,$$

kjer je s stopnja minimalnega polinoma m_A. Premisli, da so vektorji (matrike) $I, A, \ldots, A^{s-1}$ linearno neodvisni v $\mathbb{F}^{n\times n}$. Zato je razsežnost prostora V večja ali enaka stopnji minimalnega polinoma m_A.

⊳⊳⊳ 160., 161.

Rešitev 137. naloge

($\Rightarrow$). Predpostavi, da velja $Ax_0 = b$ in $Ax = b$. Razlika obeh enakosti je enakost $A(x - x_0) = 0$. Torej je $x - x_0 \in \operatorname{Ker} A$, in zato $x \in x_0 + \operatorname{Ker} A$.
($\Leftarrow$). Predpostavi, da je $Ax_0 = b$ in $x \in x_0 + \operatorname{Ker} A$. Potem je $x = x_0 + y$ za neki $y \in \operatorname{Ker} A$, in zato velja

$$Ax = A(x_0 + y) = Ax_0 + Ay = b + 0 = b.$$

Opomba *Vektor x_0 imenujemo partikularna (delna ali posamična) rešitev linearnega sistema $Ax = b$, medtem ko je množica* $\operatorname{Ker} A$ *množica rešitev homogenega linearnega sistema $Ax = 0$.*

⊳⊳⊳ 138.

Rešitev 138. naloge

Pomagaj si z nalogo 137: množica rešitev sistema linearnih enačb $Aw = b$ je enaka $w_0 + \operatorname{Ker} A$, kjer je w_0 neka partikularna rešitev sistema, torej $Aw_0 = b$. Izberi naprimer $w_0 := [0,0,1]^t$. Odtod sklepaj: $M = [0,0,1]^t + \operatorname{Ker} A$, zato je

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker} A &= M - [0,0,1]^t \\
&= \{[x, y, z-1]^t \in \mathbb{R}^{3\times 1} \mid 3x - y + z = 1\} \\
&= \{[x, y, z]^t \in \mathbb{R}^{3\times 1} \mid 3x - y + z = 0\} \\
&= \{[x, y, 1 - 3x + y]^t \mid x, y \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

Ker je jedro $\operatorname{Ker} A$ dvorazsežno, je

$$\operatorname{rang}(A) = \dim \operatorname{Im} A = 3 - \operatorname{Ker} A = 1.$$

Povrhu iz enakosti (17) sledi, da je $[3,-2,1]^t \in \operatorname{Im} A$. Zato je $\operatorname{Im} A = \mathcal{L}\{[3,-2,1]^t\}$.

⊳⊳⊳ 137.

Rešitev 139. naloge

Zapiši razširjeno matriko sistema $[A|b]$ in jo preoblikuj z vrstičnimi Gaussovimi eliminacijami, naprimer takole:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrrr|r} 3 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & -8 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & -7 & 4 & 2 & 7 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -10 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ker je $\operatorname{rang} A = 3 = \operatorname{rang}[A|b]$, je sistem rešljiv in ima enoparametrično rešitev, saj je $\dim \operatorname{Ker} A = 4 - \operatorname{rang} A = 1$. Partikularna rešitev je, naprimer,

$$(x_p, y_p, z_p, w_p) := (1, -1, 0, 0),$$

prostor rešitev prirejenega homogenega sistema pa napenja četverica

$$(x_0, y_0, z_0, w_0) := (-3, 2, 6, -5).$$

Splošno rešitev lahko zdaj zapišeš kot

$$(x, y, z, w) = (1, -1, 0, 0) + t(-3, 2, 6, -5), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Opomba *Ko rešiš linearni sistem, je smiselno preveriti, ali rešitev homogenega sistema in partikularne rešitve zadoščajo postavljenim pogojem, saj se tako izogneš nepotrebnim napakam.*

⊳⊳⊳ 140.

Rešitev 140. naloge

Skrči razširjeno matriko sistema

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -3 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -4 & -9 \\ 0 & 3 & -2 & 3 & -5 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -3 & -3 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 7 & 21 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 5 & 15 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ker je $\operatorname{rang} A = 3 = \operatorname{rang}[A|b]$, je sistem rešljiv. Partikularna rešitev je, naprimer,

$$(2, 0, 3, 0, 0),$$

bazo prostora rešitev prirejenega homogenega sistema pa tvorita

$$(1,1,0,-1,0),\ (0,1,-1,0,1).$$

Splošno rešitev torej lahko zapišeš takole:

$$(x,y,z,u,v) = (2,0,3,0,0) + s(1,1,0,-1,0) + t(0,1,-1,0,1), \quad s,t \in \mathbb{R}.$$

⋙ 139.

Rešitev 141. naloge

Homogeni linearni sistem ima netrivialne rešitve, če je rang njegove matrike manjši od števila neznank. Z vrstičnimi Gaussovimi eliminacijami preoblikuj matriko A danega sistema:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & a \\ a-2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & a+2 \\ 0 & a-1 & a+2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -(a+2) \\ 0 & 0 & a(a+2) \end{bmatrix}.$$

Torej je $\operatorname{rang} A < 3$ natanko tedaj, ko je $a \in \{0,-2\}$. V obeh primerih je $\operatorname{rang} A = 2$, rešitvi sta enoparametrični: pri $a=0$ dobiš $(x,y,z) = (3t,2t,t)$, $t \in \mathbb{R}$, pri $a=-2$ pa $(x,y,z) = (t,0,t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Rešitev 142. naloge

Označi z A matriko sistema in z b njegovo desno stran. Zapiši razširjeno matriko sistema $[A|b]$ in jo preoblikuj z vrstičnimi Gaussovimi eliminacijami:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & 1-a & -1 & 1-a \\ 0 & -1 & 0 & 1+a & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -a & -1 & -1-a \\ 0 & -1 & 0 & 1+a & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 1+a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Če je $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, je $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}[A|b] = 4$, zato je sistem rešljiv. Ker je $\dim \operatorname{Ker} A = 4 - \operatorname{rang} A = 0$, je prirejeni homogeni sistem le trivialno rešljiv. Torej je začetni sistem enolično rešljiv, njegova edina (partikularna) rešitev je

$$(x,y,z,u) = (1-a,a,1,1).$$

Pri $a=0$ pa je $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}[A|b] = 3$, sistem je spet rešljiv in ima enoparametrično rešitev: baza prostora rešitev homogenega sistema je

$$(x_0,y_0,z_0,u_0) := (1,0,-1,0),$$

partikularna rešitev je, naprimer,

$$(x_p,y_p,z_p,u_p) := (1,0,1,1),$$

splošna rešitev pa je

$$(x,y,z,u) = (1,0,1,1) + t(1,0,-1,0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

⋙ 143., 144., 145.

Rešitev 143. naloge

Z vrstičnimi Gaussovimi eliminacijami preoblikuj razširjeno matriko sistema $[A|b]$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 1 & 2 & 3-a \\ -2 & 0 & -1-a & -1 & -4+a \\ 0 & a & 0 & 2 & 2-a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & a & 0 & 1 & 1-a \\ 0 & 0 & 1-a & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Za $a \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ sta ranga matrike A in razširjene matrike $[A|b]$ enaka 4, zato je sistem enolično rešljiv: $(x,y,z,u) = (2,-1,-1,1)$. Pri $a=1$ sta ranga matrik A in $[A|b]$ enaka 3, sistem je rešljiv in ima enoparametrično rešitev $(x,y,z,u) = (1,-1,0,1) + t(1,0,-1,0)$, $t \in \mathbb{R}$. Pri $a=0$ sta ranga spet enaka 3, rešitev je enoparametrična: $(x,y,z,u) = (2,0,-1,1) + t(0,1,0,0)$, $t \in \mathbb{R}$.

⋙ 142., 144., 145.

Rešitev 144. naloge

Označi z A matriko sistema in z b njegovo desno stran. Z Gaussovimi eliminacijami po vrsticah se loti razširjene matrike $[A|b]$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a & -a^2 & 1 & a & 0 \\ 1 & a & 2 & 4a & 4 \\ 0 & a & 1 & 2a & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a & 2 & 4a & 4 \\ 0 & a & 1 & 2a & 2 \\ 0 & -2a^2 & 1-2a & a-4a^2 & -4a \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 2a & 2 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \end{array}\right].$$

Če $a \neq 0$, je $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}[A|b] = 3$, zato je sistem rešljiv in ima enoparametrično rešitev: prostor vseh rešitev prirejenega homogenega sistema napenja vektor

$$(x_0,y_0,z_0,y_0) := (a,1,a,-1),$$

partikularna rešitev je

$$(x_p,y_p,z_p,u_p) := (a+2,\frac{a+2}{a},a,-1),$$

splošna rešitev je potem

$$(x,y,z,u) = (a+2,\frac{a+2}{a},a,-1) + t(a,1,a,-1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Če je $a=0$, je $\operatorname{rang} A = 2$, $\operatorname{rang}[A|b] = 3$, zato sistem ni rešljiv.

⋙ 142., 143., 145.

Rešitev 145. naloge

Napiši razširjeno matriko sistema $[A|b]$ in jo z vrstičnimi Gaussovimi eliminacijami preoblikuj:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1) & 1-\lambda & \lambda-1 \\ -1 & \lambda & 0 & \lambda & \lambda^2-\lambda \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1) & 1-\lambda & \lambda-1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \lambda^2-\lambda \end{array}\right].$$

Za $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ je $\operatorname{rang} A = 4 = \operatorname{rang}[A|b]$, zato je sistem enolično rešljiv z rešitvijo

$$(x,y,z,u) = (\lambda, 1, 1, \lambda - 1).$$

Pri $\lambda = 0$ je $\operatorname{rang} A = 3 = \operatorname{rang}[A|b]$, sistem je rešljiv in ima enoparametrično rešitev

$$(x,y,z,u) = (0,0,1,-1) + t(0,1,0,0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pri $\lambda = 1$ je desna stran sistema ničelna, zato je sistem homogen. Rang matrike sistema je enak 3, zato je rešitev enoparametrična:

$$(x,y,z,u) = t(1,1,1,0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

⊳⊳⊳ 142., 143., 144.

Rešitev 146. naloge

Obdelaj razširjeno matriko $[A|b]$ sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -\lambda & 2-\lambda \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda-1 & 1-\lambda \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -\lambda-3 & -3-\lambda \end{array}\right].$$

Za $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ je sistem enolično rešljiv. Pri $\lambda = -3$ pa je $\operatorname{rang} A = 2 = \operatorname{rang}[A|b]$, torej je sistem rešljiv z enoparametrično rešitvijo

$$(x,y,z) = (1,-2,0) + t(1,-1,-1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Rešitev 147. naloge

Označi z A matriko sistema in z b njegovo desno stran. Če je linearni sistem $Ax = b$ rešljiv in je p število parametrov v njegovi splošni rešitvi, potem je p enak razsežnosti prostora rešitev homogene enačbe $Ax = 0$ oziroma $p = \dim \operatorname{Ker} A = 5 - \operatorname{rang} A$. Skrči razširjeno matriko sistema z vrstičnimi Gaussovimi eliminacijami:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & -4 & -1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & a & 2 & 7 & 1 \\ -1 & 2 & -5 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -4 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & a+12 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 4 & -9 & -4 & 4 & 2 \end{array}\right] \sim$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -4 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & a+12 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & -14 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -4 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 14/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15-14(a+12)/9 \end{array}\right].$$

Sistem je rešljiv natanko tedaj, ko je $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}[A|b]$, torej natanko tedaj, ko je $15 - 14(a+12)/9 = 0$ oziroma ko je $a = -33/14$. V tem primeru je rešitev dvoparametrična.

Rešitev 148. naloge

Prepiši koeficiente v matriko in poženi Gaussov postopek

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & n & 0 & \dots & 0 & 0 & n+1 \\ 2 & 2n+1 & n & \dots & 0 & 0 & 3(n+1) \\ 0 & 3 & 3n+1 & \dots & 0 & 0 & 4(n+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1)n+1 & n & n(n+1) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n & n^2+1 & n^2+n+1 \end{array}\right] \sim$$
$$\sim \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & n & 0 & \dots & 0 & 0 & n+1 \\ 0 & 1 & n & \dots & 0 & 0 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & n+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & n & n+1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Zato je $x_1 = \dots = x_n = 1$.

Rešitev 149. naloge

Pri iskanju ranga matrike A je smiselno najprej zamenjati prvi in tretji stolpec, nato nadaljevati z Gaussovimi eliminacijami po vrsticah (enako za B):

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & 1 \\ -2 & 0 & -2a & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -a \\ 0 & a & 1 & a+1 \\ 1 & 0 & 0 & -a-2 \\ 2 & 0 & 4 & a^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -a \\ 0 & a & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+2a \end{bmatrix}.$$

Torej je

$$\operatorname{rang} A = \begin{cases} 2, & \text{če je } a = 0; \\ 3, & \text{če je } a = 1; \\ 4, & \text{sicer;} \end{cases} \qquad \operatorname{rang} B = \begin{cases} 2, & \text{če je } a = 0; \\ 3, & \text{če je } a = -2; \\ 4, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Ranga sta različna le pri $a = -2$ in pri $a = 1$. Če je $a = -2$, je homogeni sistem $Ax = 0$ le trivialno rešljiv, saj je $\operatorname{rang} A = 4$. Za $a = 1$ pa je prostor rešitev homogene enačbe $Ax = 0$ enorazsežen, napenja ga stolpec $[1, 0, -1, 0]^t$.

Opomba *Pri Gaussovi eliminaciji si lahko s primerno zamenjavo vrstic in stolpcev močno poenostaviš računanje. Toda pozor! Zamenjava stolpcev pomeni pri reševanju linearnega sistema zamenjavo neznank, zato le previdno!*

Rešitev 150. naloge

Ker je

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & a-1 & a^2-1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-1 \end{bmatrix},$$

lahko sestaviš preglednico:

a	$\operatorname{rang} A$	$\operatorname{Ker} A$
1	1	$\mathcal{L}\{[1,0,1]^t; [2,-1,0]^t\}$
-1	2	$\mathcal{L}\{[1,0,1]^t\}$
sicer	3	$\{0\}$

Rešitev 151. naloge

1. način reševanja. Prevedi navodilo v matrični jezik: poišči tako matriko $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ in tak stolpec $b \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, da velja

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}[A|b] = 4 - 1 = 3$$

in da je

$$A[-1,0,3,0]^t = 0, \quad A[1,-2,1,3]^t = b. \tag{92}$$

Torej moraš najti tako matriko A ranga 3, da bo veljala prva enakost v (92), nato izračunaš b po drugi enakosti v (92). Naprimer vzemi

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = A[1,-2,1,3]^t = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Tako dobiš linearni sistem enačb

$$3x + z = 4, \quad y = -2, \quad u = 3.$$

(Tu ni bilo težko poiskati zahtevane matrike A. Sicer si lahko pomagaš takole. Bazo jedra $\operatorname{Ker} A$ dopolni do baze Ω prostora $\mathbb{R}^4$, naprimer

$$\Omega := \{(-1,0,3,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}.$$

Če z $\mathcal{A}$ označiš linearno preslikavo, ki jo določa matrika A v običajnih bazah Σ_4 in Σ_3 prostorov $\mathbb{R}^4$ oziroma $\mathbb{R}^3$, velja

$$A = \mathrm{M}_{\Sigma_3}^{\Sigma_4}(\mathcal{A}) = \mathrm{M}_{\Sigma_3}^{\Omega}(\mathcal{A})\mathrm{M}_{\Omega}^{\Sigma_4}(\mathcal{I}).$$

Zaradi zahteve $\operatorname{rang} A = 3$ smeš izbrati

$$\mathrm{M}_{\Sigma_3}^{\Omega}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj A.)

2. način reševanja. Isto rešitev dobiš, če iz sistema $x = 1 - t$, $y = -2$, $z = 1 + 3t$, $u = 3$ izločiš parameter t. Opravi še preizkus!

⋙ 209.

Rešitev 152. naloge

Iskana matrika X je velikosti 4×2. Označi z A znano matriko na levi strani enakosti (18), z B pa desno stran iste enakosti. Torej rešuješ enačbo $AX = B$. Če z x_1, x_2, b_1, b_2 označiš stolpce matrik X in B, potem je enačba (18) ekvivalentna dvema linearnima sistemoma

$$Ax_1 = b_1 \quad \text{in} \quad Ax_2 = b_2.$$

Oba sistema rešuješ hkrati tako, da razširjeno matriko $[A|B] = [A|b_1, b_2]$ preoblikuješ z vrstičnimi Gaussovimi eliminacijami:

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 2 & -1 & 9 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 16 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 7 & 5 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 2 & -1 & 9 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & -6 & -2 & 8 & -4 & -4 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 2 & -1 & 9 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ker je $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}[A|B]$, sta sistema rešljiva. Obema sistemoma je prirejen isti homogeni sistem $Ax = 0$, njegov dvorazsežni prostor rešitev napenjata stolpca

$$y := [4,1,-3,0]^t, \quad z := [-5,4,0,3]^t.$$

Partikularna rešitev enačbe $Ax_1 = b_1$ je $v_1 := [9,1,-1,0]^t$, partikularna rešitev enačbe $Ax_2 = b_2$ pa je $v_2 := [0,1,-1,0]^t$. Matrike X, ki zadoščajo enakosti (18), imajo torej obliko

$$X = [v_1 + \alpha y + \beta z, v_2 + \gamma y + \delta z] = \begin{bmatrix} 9 + 4\alpha - 5\beta & 4\gamma - 5\delta \\ 1 + \alpha + 4\beta & 1 + \gamma + 4\delta \\ -1 - 3\alpha & -1 - 3\gamma \\ 3\beta & 3\delta \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}.$$

⋙ 150., 153., 154.

Rešitev 153. naloge

Ravnaj podobno kot v nalogi 152. Iskana matrika X je velikosti 3×3. Enačbo 19 si lahko razlagaš kot tri enačbe oblike $AX^{(i)} = B^{(i)}$ za $i = 1,2,3$. Vsaka taka je sistem treh linearnih enačb s tremi neznankami, ki ga uženeš z Gaussovim postopkom. Toda namesto reševanja treh ločenih sistemov se lahko z Gaussovim postopkom lotiš vseh treh hkrati tako, da nastaviš razširjeno matriko $[A|B]$. V tem primeru torej dobiš

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 & 0 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & -6 & -5 & 3 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Zato je

$$X = \begin{bmatrix} -1 + 2t_1 & 1 + 2t_2 & 3 + 2t_3 \\ 2 & 0 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{bmatrix}, \quad t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}.$$

Opomba *Pozor: parametri v stolpcih rešitve so različni!*
Premisli, koliko zahtevnejši je nespameten postopek, kjer najprej raziščeš obstoj obrata matrike A in v primeru, ko ta obstaja, izračunaš $X = A^{-1}B$.

⋙ 152., 154., 155.

Rešitev 154. naloge

Napiši enačbo v obliki $XA = B$ in jo s transponiranjem prevedi v enačbo $A^tX^t = B^t$, ki se je lotiš kot v nalogi 153. Prepiši jo v razširjeno matriko $[A^t|B^t]$ in z Gaussovim postopkom

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 & 3 & 7 & 8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & -2 \end{array}\right]$$

ugotovi, da enačba nima rešitve, saj dobiš $2 = \operatorname{rang}(A^t) \neq \operatorname{rang}([A^t|B^t]) = 3$.

Opomba *Primerjaj nalogi 153 in 154: enačba $AX = B$ je rešljiva, $XA = B$ pa ne. Zakaj?*

⋙ 152., 153., 155.

Rešitev 155. naloge

Označi matrike tako, da bo $AXB = C$.

(a) *1. način reševanja.* Ker sta matriki A in B obrnljivi, lahko zapišeš

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} (-\tfrac{1}{2}) \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 68 & -40 \\ -\frac{119}{2} & 35 \end{bmatrix}.$$

2. način reševanja. Enačbo rešiš z dvakratno uporabo Gaussovega postopka: Reši najprej enačbo $A(XB) = C$, torej enačbo $AY = C$.

$$\left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 6 & 2 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & -14 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & -8 & 16 \\ 0 & 1 & 7 & -14 \end{array}\right].$$

Zato je

$$Y = \begin{bmatrix} -8 & 16 \\ 7 & -14 \end{bmatrix}.$$

Zdaj rešuješ enačbo $XB = Y$. Namesto te se zaradi narave Gaussovega postopka loti raje enačbe $B^tX^t = Y^t$, torej

$$\left[\begin{array}{rr|rr} 4 & 7 & -8 & 7 \\ 2 & 3 & 16 & -14 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 68 & -\frac{119}{2} \\ 0 & 1 & -40 & 35 \end{array}\right].$$

Po transponiranju dobiš končno

$$X = \begin{bmatrix} 68 & -40 \\ -\frac{119}{2} & 35 \end{bmatrix}.$$

3. način reševanja. Nastavi

$$X = \begin{bmatrix} d & e \\ f & g \end{bmatrix},$$

kjer so $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, vstavi v enačbo in dobiš isto rešitev. (Tu seveda rešuješ sistem štirih linearnih enačb s štirimi neznankami. Za njegovo reševanje je najprimerneje uporabiti Gaussov postopek, zato je smiselno že na začetku ubrati 2. način reševanja)

(b) V tem primeru matrika A ni obrnljiva, zato gornji 1. način reševanja ne pride v poštev. Uporabi Gaussov postopek kot v gornjem 2. načinu:

$$\left[\begin{array}{rr|rr} -1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 6 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Zato je

$$Y = \begin{bmatrix} 3+2s & -1+2t \\ s & t \end{bmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Zdaj reši enačbo $XB = Y$ oziroma enakovredno enačbo $B^tX^t = Y^t$, torej

$$\left[\begin{array}{rr|rr} 5 & 7 & 3+2s & s \\ 2 & 3 & -1+2t & t \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 16+6s-14t & 3s-7t \\ 0 & 1 & -11-4s+10t & -2s+5t \end{array}\right].$$

Po transponiranju dobiš

$$X = \begin{bmatrix} 16+6s-14t & -11-4s+10t \\ 3s-7t & -2s+5t \end{bmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

⋙ 152., 153., 154.

Rešitev 156. naloge

1. način reševanja. Ugotovi, da imajo matrike A, B, C, D, E, F isto velikost in da lahko zapišeš začetni sistem v enakovredno bločno obliko

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ F \end{bmatrix}. \tag{93}$$

Sistem (93) zdaj rešiš z običajnim Gaussovim postopkom.
2. način reševanja. Sistem prevedi v dve matrični enačbi

$$(E^{-1}D - B^{-1}A)X = E^{-1}F - B^{-1}C,$$

$$(D^{-1}E - A^{-1}B)Y = D^{-1}F - A^{-1}C,$$

ki ju rešiš z Gaussovim postopkom. Pazi, matriki pred X in Y v splošnem nista obrnljivi!

Opomba *Opazi, da pri 1. načinu reševanja ne potrebuješ predpostavk o obrnljivosti matrik A, B, C, D.*

Rešitev 157. naloge

(a) Za vsaka $u, v \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ velja

$$\mathcal{A}(u+v) = a\cdot(u+v)^t = a\cdot(u^t+v^t) = a\cdot u^t + a\cdot v^t = \mathcal{A}u + \mathcal{A}v,$$

torej je $\mathcal{A}$ aditivna preslikava. Za vsak $\lambda \in \mathbb{R}$ in za vsak $v \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ velja

$$\mathcal{A}(\lambda v) = a\cdot(\lambda v)^t = a\cdot(\lambda v^t) = \lambda(a\cdot v^t) = \lambda\mathcal{A}v,$$

torej je $\mathcal{A}$ homogena preslikava. Ker je $\mathcal{A}$ aditivna in homogena, je linearna preslikava.

(b) Označi koeficiente podanega stolpca $a \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ takole: $a = [a_1, a_2, \ldots, a_n]^t$. Zapiši $v = [v_1, v_2, \ldots, v_n]^t \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ in si oglej matriko

$$\mathcal{A}v = a\cdot v^t = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1v_1 & a_1v_2 & \cdots & a_1v_n \\ a_2v_1 & a_2v_2 & \cdots & a_2v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nv_1 & a_nv_2 & \cdots & a_nv_n \end{bmatrix}.$$

Vzemi poljuben $v \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$. Potem je $\mathcal{A}v = 0$ in zato

$$a_iv_j = 0 \tag{94}$$

za vse $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Iz $a \neq 0$ sledi, da je vsaj en skalar $a_i \neq 0$. Iz (94) zdaj sklepaj, da je $v_j = 0$ za vse j in od tod $v = 0$. Torej je $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \{0\}$, linearna preslikava $\mathcal{A}$ je injektivna.

(c) Izračunaj

$$\operatorname{rang}\mathcal{A} = \dim\operatorname{Im}\mathcal{A} = \dim\mathbb{R}^{n\times 1} - \dim\operatorname{Ker}\mathcal{A} = n - 0 = n.$$

(Lahko poveš še več: v zalogi vrednosti $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ so natanko tiste matrike iz $\mathbb{R}^{n\times n}$, katere stolpci so mnogokratniki stolpca a.)

(d) Linearna preslikava je obrnljiva natanko tedaj, ko je bijektivna. Ker iz gornjega sledi, da je $\mathcal{A}$ injektivna, zadošča preveriti, ali je tudi surjektivna. Linearna preslikava $\mathcal{A}$ je surjektivna natanko takrat, ko je $\operatorname{Im}\mathcal{A} = \mathbb{R}^{n\times n}$ oziroma $\operatorname{rang}\mathcal{A} = n^2$. Upoštevaj gornje ugotovitve in sklepaj, da je $\mathcal{A}$ obrnljiva samo za $n = 1$.

⊳⊳⊳ 245.

Rešitev 158. naloge

(a) Za vsaki matriki $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in \mathbb{F}^{n\times n}$ velja

$$\operatorname{sled}(A+B) = \sum_{k=1}^{n}(A+B)_{kk} = \sum_{k=1}^{n}(a_{kk}+b_{kk}) = \sum_{k=1}^{n}a_{kk} + \sum_{k=1}^{n}b_{kk} = \operatorname{sled}A + \operatorname{sled}B.$$

Torej je preslikava sled aditivna. Ker za vsak $\alpha \in \mathbb{F}$ in za vsak $A = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{n\times n}$ velja

$$\operatorname{sled}(\alpha A) = \sum_{k=1}^{n}(\alpha A)_{kk} = \sum_{k=1}^{n}(\alpha a_{kk}) = \alpha\sum_{k=1}^{n}a_{kk} = \alpha\operatorname{sled}A,$$

je sled tudi homogena preslikava, zato je linearna.

(b) Vzemi poljuben $\alpha \in \mathbb{F}$. Iščeš tako matriko $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, da je $\operatorname{sled}A = \alpha$. Ker je skalar $\operatorname{sled}A$ enak vsoti diagonalnih koeficientov matrike A, lahko izbereš, naprimer, matriko

$$A := \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Odtod sklepaj, da je sled surjektivna linearna preslikava.

(c) Linearna preslikava je injektivna natanko tedaj, ko ima trivialno jedro. Prostor $\mathbb{F}^{n\times n}$ ima razsežnost n^2, zaloga vrednosti preslikave sled pa je enorazsežna. Iz enakosti

$$\dim\mathbb{F}^{n\times n} = \dim\operatorname{Ker}\operatorname{sled} + \dim\operatorname{Im}\operatorname{sled} \tag{95}$$

zato sklepaš, da je sled injektivna samo za $n = 1$. (Ali pa elementarno, brez uporabe lastnosti linearnih preslikav: Za $n \geq 2$ izberi naprimer $A = 0$, matrika $B \neq 0$ pa naj ima same ničle na diagonali. Potem $A \neq B$ in $\operatorname{sled}A = 0 = \operatorname{sled}B$. Torej za $n \geq 2$ preslikava sled ni injektivna. Če je $n = 1$, predpostavi, da velja $\operatorname{sled}A = \operatorname{sled}B$ za $A, B \in \mathbb{F}^{1\times 1}$. Potem je $a_{11} = b_{11}$ in zato $A = B$.) Iz enakosti (95) sledi $\dim\operatorname{Ker}\operatorname{sled} = n^2 - 1$.

Opomba *Ali znaš poiskati kakšno bazo tega jedra? Opazi, da je* sled *neničeln linearen funkcional na prostoru* $\mathbb{F}^{n\times n}$.

⊳⊳⊳ 171., 286., 313.

Rešitev 159. naloge

Za začetek si pripravi preglednico

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	_	a	b	c	č	d	e	f	g	h
1	i	j	k	l	m	n	o	p	r	s
2	š	t	u	v	z	ž				

Če želiš razumeti sporočilo

34 44 25 24 24 10 16 27 27 38 48 31,

ga moraš preoblikovati s šifriranju obratnim postopkom: zapiši stolpce

$$\begin{bmatrix} 34 \\ 44 \\ 25 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 24 \\ 24 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 16 \\ 27 \\ 27 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 38 \\ 48 \\ 31 \end{bmatrix},$$

z leve jih pomnoži z matriko

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

da dobiš stolpce

$$\begin{bmatrix} 15 \\ 10 \\ 19 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 14 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 16 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 21 \\ 10 \\ 17 \end{bmatrix}.$$

Kaj mu je sporočila?

Opomba *Janko se ni pustil zmesti.*

Rešitev 160. naloge

Matrika $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ pripada podprostoru V natanko tedaj, ko je $AX = XA$, torej

$$\begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2a+2c & 2b+2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2b & a+2b \\ c+2d & c+2d \end{bmatrix}.$$

Rešiti moraš homogeni linearni sistem štirih enačb s štirimi neznankami

$$\begin{aligned} 2b - c &= 0, \\ a + b - d &= 0, \\ 2a + c - 2d &= 0, \\ 2b - c &= 0. \end{aligned}$$

Rang matrike tega sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

je enak 2, torej je prostor rešitev sistema dvorazsežen. Prepričaj se, da je

$$V = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\right\} = \mathcal{L}\{I, A\}.$$

Ena od baz prostora V je $\{I, A\}$.

⋙ 136., 161.

Rešitev 161. naloge

Matrika $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ pripada podprostoru U natanko tedaj, ko je $AX = XA$, kar je ekvivalentno pogoju

$$\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{bmatrix}.$$

Torej je $c = 0$ in $a = d$ in odtod

$$U = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \mid a, b, \in \mathbb{R}\right\} = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} = \mathcal{L}\{I, A\}.$$

Podobno dobiš $V = \mathcal{L}\{I, B\}$. Torej je $\{I, A\}$ baza podprostora U, $\{I, B\}$ pa podprostora V. Ker so matrike I, A, B linearno neodvisne, sestavljajo bazo vsote $U + V$. Presek $U \cap V$ ima bazo $\{I\}$, kar lahko preveriš tako, da iz pogoja $X \in U \cap V$ poiščeš koeficiente matrike X, ali pa s tem premislekom: razsežnost preseka je

$$\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U + V) = 2 + 2 - 3 = 1,$$

torej zadošča poiskati en neničeln vektor v preseku; iz gornjega je očitno, da je $I \in U \cap V$.

⋙ 81., 136., 160., 165.

Rešitev 162. naloge

(a) Ničelna matrika $0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pripada množici V, saj velja $A0 - 0A^t = 0$. Torej $V \neq \emptyset$. Za vsaka $X, Y \in V$ je

$$A(X+Y) - (X+Y)A^t = AX - XA^t + AY - YA^t = 0 + 0 = 0,$$

zato je $X + Y \in V$. Za vsak $\lambda \in \mathbb{R}$ in vsak $A \in V$ pa je

$$A(\lambda X) - (\lambda X)A^t = \lambda AX - \lambda XA^t = \lambda(AX - XA^t) = \lambda 0 = 0,$$

zato je $\lambda X \in V$. Torej je V vektorski podprostor v $\mathbb{R}^{n\times n}$.

(b) Za

$$X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in V$$

upoštevaj $AX - XA^t = 0$ in zapiši

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} d-b & e-c & f \\ g-e & h-f & i \\ -h & -i & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Torej je $f = i = h = 0$, $d = b$ in $e = c = g$, zato je

$$V = \left\{\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$$

in $\dim V = 3$.

⋙ 163.

Rešitev 163. naloge

(a) Če je U vektorski podprostor v $\mathbb{F}^{n\times n}$, potem U vsebuje ničelno matriko $0 \in \mathbb{F}^{n\times n}$, zato je

$$C = A0B^{\mathrm{t}} = 0.$$

Obratno, če je $C = 0$, potem za vsaka $X, Y \in U$ velja

$$A(X+Y)B^{\mathrm{t}} = AXB^{\mathrm{t}} + AYB^{\mathrm{t}} = 0 + 0 = 0,$$

in zato $X + Y \in U$. Za vsak $\lambda \in \mathbb{F}$ in vsak $X \in U$ pa je

$$A(\lambda X)B^{\mathrm{t}} = \lambda(AXB^{\mathrm{t}}) = \lambda 0 = 0,$$

in zato $\lambda X \in U$. Torej je $U \leq \mathbb{F}^{n\times n}$ natanko tedaj, ko je $C = 0$.

(b) Naj bo

$$X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in U.$$

Potem je $AXA^{\mathrm{t}} = 0$, torej

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e+h+f+i & f+i & 0 \\ h+i & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sklepaj, da je $e = f = h = i = 0$ in da podprostor U sestavljajo matrike oblike

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad a, b, c, d, g \in \mathbb{R}.$$

Elementarne matrike $E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{31} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tvorijo bazo podprostora U, zato je $\dim U = 5$.

⋙ 162., 164., 167.

Rešitev 164. naloge

Naj bodo $\mathcal{A}\colon \mathbb{F}^m \to \mathbb{F}^l$, $\mathcal{X}\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$, $\mathcal{B}\colon \mathbb{F}^p \to \mathbb{F}^n$ preslikave, ki jih določajo matrike A, X, B na običajen način.

Namesto problema iz naloge si zastavi enakovreden problem: kolikšna je razsežnost prostora

$$U' := \{\mathcal{X}\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m \mid \mathcal{A}\mathcal{X}\mathcal{B} = 0\}?$$

Pomagaj si z ekvivalenco (16) iz naloge 120 in premišljuj takole: Bazo jedra $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ dopolni do baze celega prostora $\mathbb{F}^m$ in jo označi z M. Prav tako dopolni bazo slike $\operatorname{Im}\mathcal{B}$ do baze celega prostora $\mathbb{F}^n$ in jo označi z N. Potem preslikava $\mathcal{X}$ pripada prostoru U' natanko takrat, ko ima v urejenih bazah N in M zapis z matriko oblike

$$\mathrm{M}_M^N(\mathcal{X}) = \left[\begin{array}{c|c} H & H' \\ \hline 0 & H'' \end{array}\right],$$

kjer je blok H velikosti $\dim\operatorname{Ker}\mathcal{A} \times \dim\operatorname{Im}\mathcal{B}$, blok H' velikosti $\dim\operatorname{Ker}\mathcal{A} \times (n - \dim\operatorname{Im}\mathcal{B})$, blok H'' pa velikosti $(m - \dim\operatorname{Ker}\mathcal{A}) \times (n - \dim\operatorname{Im}\mathcal{B})$. Koeficienti blokov H, H' in H'' so poljubni skalarji iz polja $\mathbb{F}$.

Zato skleni

$$\begin{aligned} \dim U &= \dim U' \\ &= mn - (m - \dim\operatorname{Ker}\mathcal{A})\dim\operatorname{Im}\mathcal{B} \\ &= mn - \operatorname{rang}(A)\operatorname{rang}(B). \end{aligned}$$

Opomba *Ali znaš poiskati še bazo prostora U?*

⋙ 120., 163.

Rešitev 165. naloge

(a) Ničelna matrika $0 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ pripada množici V, saj je $A0 = 0$; torej $V \neq \emptyset$. Za vsaka $X, Y \in V$ velja

$$A(X+Y) = AX + AY = 0 + 0 = 0,$$

zato je $X + Y \in V$. Za vsaka $\alpha \in \mathbb{R}$, $X \in V$ drži

$$A(\alpha X) = \alpha(AX) = \alpha 0 = 0,$$

zato je $\alpha X \in V$. Torej je V podprostor v $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(b) Najprej ugotovi, katere matrike $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ pripadajo podprostoru V: iz $AX = 0$ dobiš $c = d = 0$ oziroma

$$V = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}.$$

Nato skrči ogrodje podprostora W do baze, naprimer takole: če razviješ vektorje iz ogrodja po običajni urejeni bazi prostora $\mathbb{R}^{2\times 2}$, zapišeš dobljene koeficiente v vrstice matrike in nato dobljeno matriko preoblikuješ z Gaussovimi vrstičnimi eliminacijami, dobiš

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Torej je

$$W = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

Zato so iskane baze

$$B_V = \{E_{11}, E_{12}\}, \quad B_W = \{E_{11}, E_{21}, E_{22}\},$$
$$B_{V+W} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}, \quad B_{V\cap W} = \{E_{11}\}.$$

Pri tem E_{ij} označuje ij-to elementarno matriko iz $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

⋙ 81., 161.

Rešitev 166. naloge

1. način. Ta dokaz je elementaren. Naj bo $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$. Potem je

$$M^2 = \begin{bmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{bmatrix}, \quad M^3 = \begin{bmatrix} a^3+2abc+bcd & b(a^2+bc+ad+d^2) \\ c(a^2+ad+bc+d^2) & abc+2bcd+d^3 \end{bmatrix}.$$

Predpostavi, da $M^2 \neq 0$ in da je $M^3 = 0$. Loči dva primera.

(a) Če je $a^2+ad+bc+d^2 \neq 0$, je $b = c = 0$ in $a = d = 0$, torej $M = 0$, protislovje.

(b) Če je $a^2+ad+bc+d^2 = 0$, potem lahko to enakost pomnožiš z a, jo odštejeÅ¡ od enakosti $a^3+2abc+bcd = 0$ in dobiš

$$abc+bcd-a^2d-ad^2 = 0$$

oziroma

$$(a+d)(bc-ad) = 0.$$

Če je $a+d = 0$, potem je

$$M^2 = \begin{bmatrix} a^2+bc & 0 \\ 0 & bc+a^2 \end{bmatrix}$$

in zaradi $0 = a^2+ad+bc+d^2 = a^2+bc$ sledi $M^2 = 0$, protislovje. Podobno sklepaj, da iz $bc-ad = 0$ sledi $a+d = 0$, in zato spet $M^2 = 0$, protislovje.

2. način. Če za matriko $M \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ velja $M^3 = 0$, potem je M nilpotent, njegova edina lastna vrednost je nič, zato je karakteristični polinom matrike M enak $p_M(\lambda) = \lambda^2$. Ker je M ničla svojega karakterističnega polinoma, velja $M^2 = 0$. Torej iz $M^3 = 0$ sledi $M^2 = 0$ oziroma iz $M^2 \neq 0$ sledi $M^3 \neq 0$.

Opomba *Ali velja izjava: če je $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ in $M^n \neq 0$, potem je $M^{n+1} \neq 0$?*

⊳⊳⊳ 403., 404.

Rešitev 167. naloge

(a) Za vsaka $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in vsaka $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ velja

$$\mathcal{L}_A(\alpha X+\beta Y) = A(\alpha X+\beta Y)A^t = A(\alpha X)A^t + A(\beta Y)A^t =$$

$$= \alpha AXA^t + \beta AYA^t = \alpha\mathcal{L}_A X + \beta\mathcal{L}_A Y.$$

Torej je $\mathcal{L}_A$ linearna preslikava.

(b) Naj bo

$$X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in \operatorname{Ker}\mathcal{L}_A.$$

Potem je $AXA^t = 0$ oziroma

$$\begin{bmatrix} e & d+f & -e \\ b+h & a+g+c+i & -b-h \\ -e & -d-f & e \end{bmatrix} = 0.$$

Torej je $e = 0$, $f = -d$, $h = -b$, $i = -a-g-c$ in

$$X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & 0 & -d \\ g & -b & -a-g-c \end{bmatrix}.$$

Sklepaj, da je $\operatorname{Ker}\mathcal{L}_A$ linearna ogrinjača matrik

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Naslednje matrike dopolnjujejo gornje matrike do baze prostora $\mathbb{R}^{3\times 3}$, in zato tvorijo bazo iskanega dopolnilnega podprostora jedra $\operatorname{Ker}\mathcal{L}_A$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

⊳⊳⊳ 163., 164.

Rešitev 168. naloge

(a) Naj bo $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{2\times 2}$. Izračunaj A^2 in preveri, da je

$$\operatorname{sled} A = a+d, \quad \operatorname{sled} A^2 = a^2+2bc+d^2.$$

Torej matrika A zadošča enakosti (20) natanko tedaj, ko je $ad = bc$ oziroma $ad-bc = 0$. Če veš, da je $ad-bc = \det A$ in da je determinanta matrike ničelna natanko tedaj, ko so njeni stolpci (vrstice) linearno odvisni, je prvi del naloge končan. Sicer se loti dokaza, naprimer takole: če je $ad-bc = 0$ potem je

$$d[a,c]^t - c[b,d]^t = [0,0]^t,$$

zato sta stolpca matrike A linearno odvisna. Ali zmoreš obratno smer?

(b) Vzemi matriko $A \in \mathbb{F}^{2\times 2}$, ki ne zadošča enakosti (20). Potem ima bločna 3×3 matrika

$$B = \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

linearno odvisne stolpce (vrstice) in ne zadošča enakosti (20).

Rešitev 169. naloge

(a) Ničelna matrika $0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pripada podprostoru U, saj je $0+0^t$ diagonalna (ničelna) matrika. Torej množica U ni prazna. Naprej, za vsaka $A, B \in U$ velja

$$(A+B)+(A+B)^t = (A+A^t)+(B+B^t)$$

in ta matrika je diagonalna, saj je vsota dveh diagonalnih. Torej je $A+B \in U$. Podobno, za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$ in za vsak $A \in U$ je

$$\alpha A + (\alpha A)^t = \alpha(A+A^t)$$

diagonalna matrika, zato je tudi $\alpha A \in U$. Iz napisanega sledi, da je $U \leq \mathbb{R}^{n\times n}$.

(b) Naj bo $A \in U$. Ker je $A + A^t$ diagonalna, velja

$$(A+A^t)_{ij} = a_{ij} + a_{ji} = 0 \text{ za } i \neq j.$$

Če z E_{ij} označiš ij-to elementarno matriko iz $\mathbb{R}^{n\times n}$, potem je

$$A = \sum_{i,j} a_{ij}E_{ij} = \sum_{i<j} a_{ij}(E_{ij} - E_{ji}) + \sum_i a_{ii}E_{ii}.$$

Množica

$$\{E_{ij} - E_{ji} \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{E_{ii} \mid 1 \leq i \leq n\}$$

ima $1+2+\cdots+(n-1)+n$ elementov, je linearno neodvisna in je ogrodje podprostora U, torej je baza podprostora U in $\dim U = n(n+1)/2$.

⊳⊳⊳ 170.

Rešitev 170. naloge

Glej nalogo 169. Razsežnost prostora W je $\dim W = n(n-1)/2$, baza pa je

$$\{E_{ij} - E_{ji} \mid 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Opomba *Če za matriko A velja $A^t = -A$, jo imenujemo poševno simetrična.*

⊳⊳⊳ 169.

Rešitev 171. naloge

Oglej si elementarne matrike $E_{ij} \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Izberi $A := E_{ij}$ in $B := E_{kl}$ in ju vstavi v enakost $\mathcal{S}(AB) = \mathcal{S}(BA)$. Ker velja $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$, kjer je δ_{jk} Kroneckerjev delta, dobiš

$$\delta_{jk}\mathcal{S}(E_{il}) = \delta_{li}\mathcal{S}(E_{kj}). \tag{96}$$

(a) Če vzameš $l = i$ in $k = j$, dobiš iz enakosti (96) enakost $\mathcal{S}(E_{ii}) = \mathcal{S}(E_{jj})$ za vsaka $i,j = 1,\ldots,n$. Zato definiraj $\lambda := \mathcal{S}(E_{ii})$.

(b) Če vzameš $l = i$ in $k \neq j$, dobiš $0 = \mathcal{S}(E_{kj})$ za vsaka $k,j = 1,\ldots,n$, kjer je $k \neq j$.

Tako imaš znane vrednosti preslikave $\mathcal{S}$ na vseh vektorjih standardne baze $\{E_{ij} \mid i,j = 1,\ldots,n\}$ prostora $\mathbb{F}^{n\times n}$. Ker je $\mathcal{S}$ linearna preslikava, te vrednosti določajo vrednost preslikave na poljubnem vektorju vektorskega prostora $\mathbb{F}^{n\times n}$: vzemi poljubno matriko $A = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{n\times n}$ in izračunaj

$$\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(\sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n} a_{ij}E_{ij}) = \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n} a_{ij}\mathcal{S}(E_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\lambda = \lambda\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \lambda \cdot \operatorname{sled} A.$$

⊳⊳⊳ 158.

Rešitev 172. naloge

Rang matrike A je enak največjemu številu linearno neodvisnih stolpcev matrike A. Naj bodo $s_1,\ldots,s_k$ poljubni stolpci matrike A.

Če so $s_1,\ldots,s_k$ linearno odvisni nad $\mathbb{R}$, potem obstajajo skalarji $\alpha_1,\ldots,\alpha_k \in \mathbb{R}$, ne vsi enaki nič, da velja

$$\alpha_1 s_1 + \cdots + \alpha_k s_k = 0. \tag{97}$$

Glej skalarje $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ kot kompleksna števila (drugače rečeno: na običajen način jih vloži v množico kompleksnih števil) in vektorje $s_1,\ldots,s_k$ kot kompleksne stolpce. Iz enakosti (97) sledi, da so vektorji $s_1,\ldots,s_k \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ linearno odvisni. Zato lahko sklepaš, da iz linearne neodvisnosti stolpcev $s_1,\ldots,s_k$ nad $\mathbb{C}$ sledi njihova linearna neodvisnost nad $\mathbb{R}$. Zato je $\operatorname{rang}_{\mathbb{R}}(A) \geq \operatorname{rang}_{\mathbb{C}}(A)$.

Obratno, če so stolpci $s_1,\ldots,s_k$ matrike A linearno odvisni nad $\mathbb{C}$, obstajajo taki skalarji $\gamma_1,\ldots,\gamma_k \in \mathbb{C}$, ne vsi enaki nič, da velja

$$\gamma_1 s_1 + \cdots + \gamma_k s_k = 0. \tag{98}$$

Vsako kompleksno število γ_j razstavi na vsoto realne in imaginarne komponente, torej $\gamma_j = \operatorname{Re}\gamma_j + i\operatorname{Im}\gamma_j$. To upoštevaj v (98) in zapiši

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma_1 s_1 + \cdots + \gamma_k s_k \\ &= (\operatorname{Re}\gamma_1 s_1 + \cdots + \operatorname{Re}\gamma_k s_k) + i(\operatorname{Im}\gamma_1 s_1 + \cdots + \operatorname{Im}\gamma_k s_k). \end{aligned}$$

Ker so stolpci $s_1,\ldots,s_k$ realni, sklepaj da velja

$$\operatorname{Re}\gamma_1 s_1 + \cdots + \operatorname{Re}\gamma_k s_k = 0 \text{ in } \operatorname{Im}\gamma_1 s_1 + \cdots + \operatorname{Im}\gamma_k s_k = 0.$$

Po predpostavki je vsaj en skalar $\gamma_1,\ldots,\gamma_k$ neničeln, zato je vsaj eno od realnih števil

$$\operatorname{Re}\gamma_1,\ldots,\operatorname{Re}\gamma_k,\operatorname{Im}\gamma_1,\ldots,\operatorname{Im}\gamma_k$$

neničelno. Torej so stolpci linearno odvisni tudi nad $\mathbb{R}$. Sklepaj, da iz linearne neodvisnosti stolpcev $s_1,\ldots,s_k$ nad $\mathbb{R}$ sledi njihova linearna neodvisnost nad $\mathbb{C}$. Zato je $\operatorname{rang}_{\mathbb{R}}(A) \leq \operatorname{rang}_{\mathbb{C}}(A)$.

Iz obeh neenakosti sledi $\operatorname{rang}_{\mathbb{R}}(A) = \operatorname{rang}_{\mathbb{C}}(A)$.

Opomba *Premisli, da lahko gornjo trditev dokažeš tudi tako, da se skličeš na Gaussov postopek eliminacije.*

Rešitev 173. naloge

Vzemi naprimer

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj $\operatorname{rang}(A) = 1 = \operatorname{rang}(B)$ in $\operatorname{rang}(A^2) = 1 \neq 0 = \operatorname{rang}(B^2)$.

Rešitev 174. naloge

1. način reševanja. Podani matriki A in B sta si podobni natanko tedaj, ko obstaja taka obrnljiva matrika $P = \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix}$ nad istim poljem, da velja $A = PBP^{-1}$, to je

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{xv-yu}\begin{bmatrix} v & -y \\ -u & x \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{xv-yu}\begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v-bu & -y+bx \\ -u & x \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{xv-yu}\begin{bmatrix} xv-xbu-yu & bx^2 \\ -bu^2 & -uy+bxu+xv \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

torej $-bu^2 = 0$, $xbu = 0$ in $a = bx^2(xv-yu)^{-1}$. Sklepaj, da taka matrika P obstaja natanko tedaj, ko sta

(a) bodisi a in b hkrati ničelna (vzemi naprimer $P := I$)

(b) bodisi a in b hkrati neničelna (vzemi naprimer $P := \begin{bmatrix} a/b & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$).

2. način reševanja. Kompleksni kvadratni matriki sta si podobni natanko takrat, ko imata enaki jordanski matriki (do permutacije celic natanko). Obe podani matriki imata lastno vrednost $\lambda = 1$ z algebrsko kratnostjo 2. Edini jordanski matriki z isto lastnostjo sta

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ali} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Prva je identiteta, ki je podobna samo sebi: $PIP^{-1} = I$. Zato končno sklepamo: matriki sta si podobni tedaj in le tedaj, ko $a = 0 = b$ ali $a \neq 0 \neq b$.

Opomba *Iz 1. rešitve je razvidno, kdaj sta si taki matriki podobni nad poljubnim poljem $\mathbb{F}$: isti pogoj kot pri $\mathbb{C}$.*

Vektorji in stolpci ter linearne preslikave in matrike

Rešitev 175. naloge

(a) Ker je $(1,2,3) = 1\cdot(1,0,0) + 2\cdot(0,1,0) + 3\cdot(0,0,1)$, je $X_\Sigma(1,2,3) = [1,2,3]^t$.

(b) Ker je $(1,2,3) = 1\cdot(1,2,3) + 0\cdot(2,3,1) + 0\cdot(3,1,2)$, je $X_\Omega(1,2,3) = [1,0,0]^t$.

(c) $v = 1\cdot(1,2,3) + 2\cdot(2,3,1) + 3\cdot(3,1,2) = (14,11,11)$.

(d) Označi $X_\Sigma(1,a,1) = [b,2,c]^t$ in računaj $(1,a,1) = b\cdot(1,0,0) + 2\cdot(0,1,0), c\cdot(0,0,1) = (b,2,c)$. Zato je $a = 2, b = 1, c = 1$.

(e) Označi $X_\Omega(1,a,b) = [c,-1,0]^t$ in računaj $(1,a,b) = c\cdot(1,2,3)+(-1)\cdot(2,3,1)+0\cdot(3,1,2) = (c-2, 2c-3, 3c-1)$. Zato je $c = 3$, in odtod $a = 3$, $b = 8$.

⊳⊳⊳ 176., 177., 181.

Rešitev 176. naloge

Iščeš stolpce $X_\Sigma(v)$, $X_\Omega(v)$, $X_\Pi(v)$, $X_\Delta(v)$.

(a) Iz zapisa

$$v = 2\cdot(1,0,0,0) + 1\cdot(0,1,0,0) + (-3)\cdot(0,0,1,0) + 0\cdot(0,0,0,1)$$

sledi $X_\Sigma(v) = [2,1,-3,0]^t$.

(b) Poiskati moraš koeficiente razvoja vektorja v po urejeni bazi Ω, torej označi vektorje iz urejene baze Ω zaporedoma z u_1, u_2, u_3, u_4 in določi tiste realne skalarje $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, za katere je

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4.$$

Dobiš linearni sistem, ki se ga lotiš naprimer z Gaussovim postopkom:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Torej je $X_\Omega(v) = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]^t = [2,-1,-4,3]^t$.

(c) Če vektorje iz urejene baze Π označiš zaporedoma z v_1, v_2, v_3, v_4, potem bodisi opaziš bodisi izračunaš kot zgoraj

$$v = 1\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + 0\cdot v_3 + 0\cdot v_4,$$

zato je $X_\Pi(v) = [1,0,0,0]^t$.

(d) Zlahka zapišeš

$$v = 1 \cdot (0,1,0,0) + 0 \cdot (0,0,0,1) + 2 \cdot (1,0,0,0) + (-3) \cdot (0,0,1,0),$$

od koder dobiš $X_\Delta(v) = [1,0,2,-3]^t$.

Opomba *Urejena baza končnorazsežnega prostora V je zaporedje vektorjev, ki tvorijo bazo prostora V. Čeprav urejeno bazo zapisujemo kakor množico, torej z zavitimi oklepaji – gre za zlorabo oznak – ne pozabimo, da je vrstni red elementov v urejeni bazi pomemben. Oglej si še enkrat primera (a) in (d) v gornji nalogi.*

⊳⊳⊳ 175., 177., 182., 183.

Rešitev 177. naloge

Označi s p podani polinom.

(a) Ker je

$$p = 2 \cdot 1 + (-3) \cdot x + 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3 + (-1) \cdot x^4,$$

pripada polinomu p v običajni urejeni bazi Σ stolpec $X_\Sigma(p) = [2,-3,0,1,-1]^t$.

(b) Poišči take $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$, da bo

$$p = \alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot (1-x) + \alpha_2 \cdot (1-x^2) + \alpha_3 \cdot (1-x^3) + \alpha_4 \cdot (1-x^4).$$

Iz

$$p = (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) \cdot 1 + (-\alpha_1) \cdot x + (-\alpha_2) \cdot x^2 + (-\alpha_3) \cdot x^3 + (-\alpha_4) \cdot x^4$$

in linearne neodvisnosti polinomov $1, x, x^2, x^3, x^4$, dobiš preprost sistem linearnih enačb, ki ga rešiš neposredno ali preko razširjene matrike sistema:

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Torej je $X_\Omega(p) = [-1,3,0,-1,1]^t$.

(c) Kot v (b) reši z Gaussovim postopkom sistem linearnih enačb za koeficiente razvoja:

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ -3 & -4 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

odkoder dobiš $X_\Pi(p) = [0,1,1,0,0]^t$.

(d) Iz

$$p = 0 \cdot x^2 + (-1) \cdot x^4 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot x^3 + (-3) \cdot x$$

sledi $X_\Delta(p) = [0,-1,2,1,-3]^t$.

⊳⊳⊳ 176.

Rešitev 178. naloge

Iz podatkov prebereš

$$q(x) = 2 \cdot (3-3x) + 6 \cdot (3x + 5x^2) + 10 \cdot 3x^2 = 6 + 12x + 60x^2.$$

Torej je

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}q)(x) &= \int_0^1 q(t)dt + \left(\int_0^1 tq(t)dt\right)x + \left(\int_0^1 t^2 q(t)dt\right)x^2 \\ &= \int_0^1 (6 + 12t + 60t^2)dt + \left(\int_0^1 (6t + 12t^2 + 60t^3)dt\right)x + \\ &\quad + \left(\int_0^1 (6t^2 + 12t^3 + 60t^4)dt\right)x^2 \\ &= (6+6+20) + (3+4+15)x + (2+3+12)x^2 \\ &= 32 + 22x + 17x^2. \end{aligned}$$

⊳⊳⊳ 193.

Rešitev 179. naloge

(a) Potrebni pogoj za linearnost preslikave $\mathcal{A}$ je, da $\mathcal{A}$ preslika ničlo prostora $\mathbb{R}_3[x]$ v ničlo prostora $\mathbb{R}^3$. Ker je $\mathcal{A}0 = (a,0,0)$, mora biti $a = 0$. Preveri še, da je za $a = 0$ preslikava $\mathcal{A}$ linearna.

(b) Pribij $a = 0$, izračunaj

$$\mathcal{A}(1) = (0,2,12),\ \mathcal{A}(x) = (1,1,6),\ \mathcal{A}(x^2) = (0,1,4),\ \mathcal{A}(x^3) = (0,1,3)$$

in zapiši (brez težav, saj je Σ običajna urejena baza prostora $\mathbb{R}^3$) matriko

$$M_\Sigma^\Omega(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 12 & 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

(c) Tudi tu je $a = 0$.

1. način reševanja. Napiši in preoblikuj

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}\mathcal{A} &= \{p \in \mathbb{R}_3[x] \mid \mathcal{A}p = 0\} \\ &= \{a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid (b, 2a+b+c+d, 12a+6b+4c+3d) = (0,0,0)\} \\ &= \{a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid b = 0,\ 2a+b+c+d = 0,\ 12a+6b+4c+3d = 0\} \\ &= \{a + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid 2a+c+d = 0,\ 12a+4c+3d = 0\} \\ &= \{a + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid 2a+c+d = 0,\ -2c-3d = 0\} \\ &= \{a + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x] \mid a = d/4,\ c = -3d/2\} \\ &= \{d(1/4 + (-3/2)x^2 + x^3) \mid d \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathcal{L}\{1 - 6x^2 + 4x^3\}. \end{aligned}$$

2. način reševanja. Zadošča poiskati stolpce, ki sestavljajo bazo jedra matrike $A := \mathrm{M}^{\Omega}_{\Sigma}(\mathcal{A})$, in nato zapisati, katerim polinomom iz $\mathbb{R}_3[x]$ pripadajo ti stolpci:

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix},$$

torej je $\operatorname{rang} A = 3$, $\dim \operatorname{Ker} A = 4 - 3 = 1$ in stolpec $v := [1, 0, -6, 4]^t$ razpenja $\operatorname{Ker} A$. Stolpec v pripada v običajni urejeni bazi Ω prostora $\mathbb{R}_3[x]$ polinomu

$$p = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x - 6 \cdot x^2 + 4 \cdot x^3 = 1 - 6x^2 + 4x^3.$$

Slednji razpenja $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$.

Rešitev 180. naloge

Iskana matrika A je velikosti 4×4, njen i-ti stolpec sestavljajo koeficienti razvoja vektorja $\mathcal{A}e_i$ po vektorjih iz baze Π. Najprej zapiši

$$\begin{aligned} \mathcal{A}e_1 &= 0 &&= 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4, \\ \mathcal{A}e_2 &= 0 &&= 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4, \\ \mathcal{A}e_3 &= e_4 &&= 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + 1 \cdot e_4, \\ \mathcal{A}e_4 &= -e_3 &&= 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + (-1) \cdot e_3 + 0 \cdot e_4, \end{aligned}$$

nato pa dobljene koeficiente zapiši v stolpce matrike

$$A = \mathrm{M}^{\Pi}_{\Pi}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešitev 181. naloge

(a) Π; (b) $\mathcal{I}$; (c) $\mathcal{B}$; (d) $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}$; (e) Ψ.

⊳⊳⊳ 175.

Rešitev 182. naloge

Iščeš prehodne matrike $\mathrm{M}^{\Omega}_{\Sigma}(\mathcal{I})$, $\mathrm{M}^{\Pi}_{\Sigma}(\mathcal{I})$, $\mathrm{M}^{\Delta}_{\Sigma}(\mathcal{I})$. Premisli, da je

$$\mathrm{M}^{\Omega}_{\Sigma}(\mathcal{I}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{M}^{\Pi}_{\Sigma}(\mathcal{I}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{M}^{\Delta}_{\Sigma}(\mathcal{I}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

In tudi: $\mathrm{M}^{\Sigma}_{\Sigma}(\mathcal{I}) = I$.

⊳⊳⊳ 176., 183.

Rešitev 183. naloge

Pomagaj si z nalogo 182. Iskane prehodne matrike so obrati prehodnih matrik $\mathrm{M}^{\Omega}_{\Sigma}(\mathcal{I})$, $\mathrm{M}^{\Pi}_{\Sigma}(\mathcal{I})$, in $\mathrm{M}^{\Delta}_{\Sigma}(\mathcal{I})$, ki jih že poznaš. Torej

$$\mathrm{M}^{\Sigma}_{\Omega}(\mathcal{I}) = (\mathrm{M}^{\Omega}_{\Sigma}(\mathcal{I}))^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{M}^{\Sigma}_{\Pi}(\mathcal{I}) = (\mathrm{M}^{\Pi}_{\Sigma}(\mathcal{I}))^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 & -4/3 \\ 1 & -1 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{M}^{\Sigma}_{\Delta}(\mathcal{I}) = (\mathrm{M}^{\Delta}_{\Sigma}(\mathcal{I}))^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Iskane stolpce zdaj dobiš z množenjem gornjih matrik in stolpca $\mathrm{X}_{\Sigma}(v) = [2, 1, -3, 0]^t$, takole:

$$\mathrm{X}_{\Omega}(v) = \mathrm{M}^{\Sigma}_{\Omega}(\mathcal{I})\mathrm{X}_{\Sigma}(v), \quad \mathrm{X}_{\Pi}(v) = \mathrm{M}^{\Sigma}_{\Pi}(\mathcal{I})\mathrm{X}_{\Sigma}(v), \quad \mathrm{X}_{\Delta}(v) = \mathrm{M}^{\Sigma}_{\Delta}(\mathcal{I})\mathrm{X}_{\Sigma}(v).$$

Primerjaj izračune s tistimi iz naloge 176.

⊳⊳⊳ 176., 182.

Rešitev 184. naloge

(a) Iz

$$\begin{aligned} \mathcal{A}u_1 &= v_1 &&= 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n, \\ \mathcal{A}u_2 &= v_2 &&= 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_n, \\ &\ \vdots && \\ \mathcal{A}u_n &= v_n &&= 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 1 \cdot v_n \end{aligned}$$

sledi

$$\mathrm{M}^{\Omega}_{\Pi}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I.$$

(b) Oglej si naslednjo verigo enakosti:

$$\mathrm{M}^{\Omega}_{\Omega}(\mathcal{A}) = \mathrm{M}^{\Pi}_{\Omega}(\mathcal{I})\mathrm{M}^{\Omega}_{\Pi}(\mathcal{A}) = \mathrm{M}^{\Pi}_{\Omega}(\mathcal{I}) \cdot I = \mathrm{M}^{\Pi}_{\Omega}(\mathcal{I}).$$

⊳⊳⊳ 387., 388.

Rešitev 185. naloge

1. način. Naj ima matrika $\mathrm{M}_{\Psi}^{\Psi}(\mathcal{A})$ koeficiente a_{ij}, $1 \le i,j \le n$. Potem po definiciji matrike preslikave $\mathcal{A}$ velja

$$\mathcal{A}v_k = \sum_{l=1}^{n} a_{lk}v_l \text{ za vsak } 1 \le k \le n.$$

Pomnoži to enakost z λ, pa dobiš enakost

$$\mathcal{A}(\lambda v_k) = \sum_{l=1}^{n} a_{lk}(\lambda v_l) \text{ za vsak } 1 \le k \le n.$$

Odtod sledi enakost (21).
2. način. Zapiši

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}_{\Psi'}^{\Psi'}(\mathcal{A}) &= \mathrm{M}_{\Psi'}^{\Psi}(\mathcal{I})\mathrm{M}_{\Psi}^{\Psi}(\mathcal{A})\mathrm{M}_{\Psi}^{\Psi'}(\mathcal{I}) \\
&= (\lambda I)^{-1}\mathrm{M}_{\Psi}^{\Psi}(\mathcal{A})(\lambda I) \\
&= (\tfrac{1}{\lambda}I)\mathrm{M}_{\Psi}^{\Psi}(\mathcal{A})(\lambda I) \\
&= \tfrac{\lambda}{\lambda}\mathrm{M}_{\Psi}^{\Psi}(\mathcal{A}) \\
&= \mathrm{M}_{\Psi}^{\Psi}(\mathcal{A}).
\end{aligned}$$

⊳⊳⊳ 379.

Rešitev 186. naloge

(a) Iz funkcijskega predpisa in zahtevanega pogoja sklepaš

$$\begin{aligned}
-1 - 3x^2 - x^3 &= \mathcal{A}(x - 2x^2 + 2x^3) \\
&= (-1 + 2 - 2) + (b - 4 + 2)x^2 + (-3 - 2a + 4)x^3 \\
&= -1 + (b - 2)x^2 + (-2a + 1)x^3,
\end{aligned}$$

zato je $-3 = b - 2$ in $-1 = -2a + 1$ oziroma $a = 1$ in $b = -1$.

(b) Ker velja

$$\mathcal{A}p = p \iff (\mathcal{A} - \mathcal{I})p = 0,$$

je $U = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \mathcal{I})$. Napiši matriko, ki pripada endomorfizmu $\mathcal{A}$ v običajni urejeni bazi $\Sigma = \{1, x, x^2, x^3\}$ prostora $\mathbb{R}_3[x]$. Potem je

$$\mathrm{M}_{\Sigma}^{\Sigma}(\mathcal{A} - \mathcal{I}) = \mathrm{M}_{\Sigma}^{\Sigma}(\mathcal{A}) - I =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrika $\mathrm{M}_{\Sigma}^{\Sigma}(\mathcal{A} - \mathcal{I})$ ima rang 2, njeno jedro je dvorazsežno in ima bazo

$$\{[0, 0, 1, -1]^t, [1, 1, 0, -1]^t\},$$

zato ima $U = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \mathcal{I})$ bazo $\{x^2 - x^3, 1 + x - x^3\}$.

Rešitev 187. naloge

(a) Za vsaka $p_1, p_2 \in \mathbb{R}_3[x]$ velja

$$\begin{aligned}
(\mathcal{T}(p_1 + p_2))(x) &= (1 - x)(p_1 + p_2)(x) + (p_1 + p_2)'(x) + 4\int_0^x (p_1 + p_2)(t)\,dt \\
&= (1 - x)p_1(x) + (1 - x)p_2(x) + p_1'(x) + p_2'(x) + 4\int_0^x p_1(t)\,dt + \\
&\quad +4\int_0^x p_2(t)\,dt \\
&= (\mathcal{T}p_1)(x) + (\mathcal{T}p_2)(x).
\end{aligned}$$

Torej je $\mathcal{T}(p_1 + p_2) = \mathcal{T}p_1 + \mathcal{T}p_2$ in $\mathcal{T}$ je aditivna preslikava. Podobno preveri še homogenost preslikave $\mathcal{T}$.

(b,c) V običajni urejeni bazi $\Sigma := \{1, x, x^2, x^3\}$ prostora $\mathbb{R}_3[x]$ pripada endomorfizmu $\mathcal{T}$ matrika

$$T := \mathrm{M}_{\Sigma}^{\Sigma}(\mathcal{T}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uporabi izrek: endomorfizem $\mathcal{T}$ je obrnljiv natanko takrat, ko je obrnljiva matrika T. Prepričaj se, da je $\det T \neq 0$, ali pa da je rang matrike T enak 4. Slednje je v tem primeru smiselnejše, saj lahko istočasno rešuješ linearni sistem, ki pripada enačbi $\mathcal{T}p = q$, takole. Označi $b := \mathrm{X}_{\Sigma}(q) = [2, 4, 4, 1]^t$ in z Gaussovimi eliminacijami po vrsticah preoblikuj razširjeno matriko

$$[T|b] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Iz zadnje matrike prebereš, da je $\operatorname{rang} T = 4$, torej da je matrika T obrnljiva, in da je $p(x) := 1 + x + x^3 \in \mathbb{R}_3[x]$ edini polinom, ki ga $\mathcal{T}$ preslika v q.

Opomba *Včasih je linearno preslikavo (med končnorazsežnima prostoroma) lažje preučevati tako, da si ogledaš njeno matriko.*

Rešitev 188. naloge

Polinom $p(x) = a + bx + cx^2$ pripada podprostoru V natanko tedaj, ko je $0 = p(0) = a$ in $0 = p'(-1/2) = b - c$. Sklepaj, da je $\{x + x^2\}$ baza podprostora V. Dopolni jo, naprimer, do urejene baze $\Omega := \{x + x^2, 1, x\}$ prostora $\mathbb{R}_2[x]$. Iz

$$\mathcal{I}(x + x^2) = x + x^2 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot x^2,$$

$$\mathcal{I}(1) = 1 = 1\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2,$$
$$\mathcal{I}(x) = x = 0\cdot 1 + 1\cdot x + 0\cdot x^2$$

dobiš iskano matriko prehoda

$$\mathrm{M}^{\Omega}_{\Sigma}(\mathcal{I}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešitev 189. naloge

Ker je (preveri!) $\mathcal{A}^3 = \mathcal{I}$, je $\mathcal{A}^{1996} = \mathcal{A}$. Torej iščeš matriko, ki pripada preslikavi $\mathcal{A}$ v urejeni bazi Π. Izračunaj

$$\begin{aligned} \mathcal{A}e_1 &= e_2 = -1\cdot e_1 + 1\cdot(e_1+e_2) + 0\cdot(e_2+e_3), \\ \mathcal{A}(e_1+e_2) &= \mathcal{A}e_1 + \mathcal{A}e_2 = e_2 + e_3 = 0\cdot e_1 + 0\cdot(e_1+e_2) + 1\cdot(e_2+e_3), \\ \mathcal{A}(e_2+e_3) &= \mathcal{A}e_2 + \mathcal{A}e_3 = e_3 + e_1 = 2\cdot e_1 - 1\cdot(e_1+e_2) + 1\cdot(e_2+e_3) \end{aligned}$$

in zapiši

$$\mathrm{M}^{\Pi}_{\Pi}(\mathcal{A}^{1996}) = \mathrm{M}^{\Pi}_{\Pi}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Do te matrike lahko prideš tudi takole: iz podatkov določiš

$$\mathrm{M}^{\Sigma}_{\Sigma}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathrm{M}^{\Pi}_{\Sigma}(\mathcal{I}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

nato pa izračunaš

$$\mathrm{M}^{\Pi}_{\Pi}(\mathcal{A}) = \mathrm{M}^{\Sigma}_{\Pi}(\mathcal{I})\mathrm{M}^{\Sigma}_{\Sigma}(\mathcal{A})\mathrm{M}^{\Pi}_{\Sigma}(\mathcal{I}) = (\mathrm{M}^{\Pi}_{\Sigma}(\mathcal{I}))^{-1}\mathrm{M}^{\Sigma}_{\Sigma}(\mathcal{A})\mathrm{M}^{\Pi}_{\Sigma}(\mathcal{I}).$$

Rešitev 190. naloge

Označi z Ω podano urejeno bazo. Potem je

$$\begin{aligned} X_{\Sigma}(\mathcal{A}x) &= \mathrm{M}^{\Sigma}_{\Sigma}(\mathcal{A})X_{\Sigma}(x) \\ &= \mathrm{M}^{\Sigma}_{\Sigma}(\mathcal{A})\mathrm{M}^{\Omega}_{\Sigma}(\mathcal{I})X_{\Omega}(x) \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= [1 \ \ -1 \ \ -4 \ \ 5]^t. \end{aligned}$$

▹▹▹ 196., 202.

Rešitev 191. naloge

Označi z Λ podano novo urejeno bazo prostora $\mathbb{R}^4$, s Σ_2 oziroma Σ_4 običajni urejeni bazi prostorov $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^4$, z Ω in Π pa podani novi urejeni bazi v $\mathbb{R}^2$. Poiskati moraš matriko

$$\begin{aligned} \mathrm{M}^{\Sigma_4}_{\Pi}(\mathcal{A}) &= \mathrm{M}^{\Omega}_{\Pi}(\mathcal{I})\mathrm{M}^{\Lambda}_{\Omega}(\mathcal{A})\mathrm{M}^{\Sigma_4}_{\Lambda}(\mathcal{I}) \\ &= \mathrm{M}^{\Sigma_2}_{\Pi}(\mathcal{I})\mathrm{M}^{\Omega}_{\Sigma_2}(\mathcal{I})\mathrm{M}^{\Lambda}_{\Omega}(\mathcal{A})\mathrm{M}^{\Sigma_4}_{\Lambda}(\mathcal{I}) \\ &= (\mathrm{M}^{\Pi}_{\Sigma_2}(\mathcal{I}))^{-1}\mathrm{M}^{\Omega}_{\Sigma_2}(\mathcal{I})\mathrm{M}^{\Lambda}_{\Omega}(\mathcal{A})(\mathrm{M}^{\Lambda}_{\Sigma_4}(\mathcal{I}))^{-1}. \end{aligned}$$

Matrika $\mathrm{M}^{\Lambda}_{\Omega}(\mathcal{A})$ je podana, zapisati moraš še matrike

$$(\mathrm{M}^{\Pi}_{\Sigma_2}(\mathcal{I}))^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{M}^{\Omega}_{\Sigma_2}(\mathcal{I}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$(\mathrm{M}^{\Omega}_{\Sigma_4}(\mathcal{I}))^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nato z množenjem dobiš

$$\mathrm{M}^{\Sigma_4}_{\Pi}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 4 & -7 & 1 & 4 \\ -6 & 11 & -3 & -6 \end{bmatrix}.$$

▹▹▹ 194.

Rešitev 192. naloge

Podana je matrika $A = \mathrm{M}^{\Omega}_{\Pi}(\mathcal{A})$. Preoblikuj jo z Gaussovimi eliminacijami po vrsticah

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

in sklepaj, da je $\operatorname{rang}\mathcal{A} = \operatorname{rang} A = 2$. Zato sta jedri preslikave $\mathcal{A}$ in matrike A enorazsežni, $\operatorname{Ker} A = \mathcal{L}\{[-1,1,1]^t\}$. Elementi iz $\operatorname{Ker} A$ so natanko tisti stolpci, ki v bazi Ω pripadajo vektorjem iz $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$, saj za vse $x \in \mathbb{R}^3$ velja

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Ker}\mathcal{A} &\iff \mathcal{A}x = 0 \iff \mathrm{M}^{\Omega}_{\Pi}(\mathcal{A})X_{\Omega}(x) = 0 \iff AX_{\Omega}(x) = 0 \iff \\ &\iff X_{\Omega}(x) \in \operatorname{Ker} A. \end{aligned}$$

Stolpec $[-1,1,1]^t$ pripada v bazi Ω vektorju

$$(-1)\cdot(4,11,0) + 1\cdot(1,3,0) + 1\cdot(1,1,1) = (-2,-7,1),$$

torej je $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \mathcal{L}\{(-2,-7,1)\}$.

Ker je $\operatorname{rang} A = 2$, poljubna dva linearno neodvisna stolpca matrike A napenjata $\operatorname{Im} A$, naprimer $\operatorname{Im} A = \mathcal{L}\{[1,0,2,0]^t, [1,1,0,2]^t\}$. Da dobiš zalogo vrednosti $\operatorname{Im}\mathcal{A}$, moraš ugotoviti, katerima vektorjema iz $\mathbb{R}^4$ sta v bazi Π prirejena ta stolpca. Izračunaj torej

$$\operatorname{Im}\mathcal{A} = \mathcal{L}\{(3,0,-2,0), (0,3,2,2)\}.$$

▹▹▹ 195., 198., 200., 203.

Rešitev 193. naloge

Označi s $\Sigma := \{1, x, x^2\}$ običajno urejeno bazo, s Π pa novo urejeno bazo prostora $\mathbb{R}_2[x]$. Potem je

$$\mathrm{M}^{\Pi}_{\Pi}(\mathcal{A}) = \mathrm{M}^{\Sigma}_{\Pi}(\mathcal{I})\mathrm{M}^{\Sigma}_{\Sigma}(\mathcal{A})\mathrm{M}^{\Pi}_{\Sigma}(\mathcal{I}).$$

Iz predpisa v nalogi 178 izračunaš

$$\mathrm{M}^{\Sigma}_{\Sigma}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix},$$

iz podatkov naloge pa dobiš še

$$\mathrm{M}^{\Pi}_{\Sigma}(\mathcal{I}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Manjkajoča prehodna matrika je

$$\mathrm{M}^{\Sigma}_{\Pi}(\mathcal{I}) = (\mathrm{M}^{\Pi}_{\Sigma}(\mathcal{I}))^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zdaj lahko izračunaš

$$\mathrm{M}^{\Pi}_{\Pi}(\mathcal{A}) = \frac{1}{60}\begin{bmatrix} -31 & 30 & -51 \\ -50 & 30 & -80 \\ 58 & -35 & 93 \end{bmatrix}.$$

▷▷▷ 194.

Rešitev 194. naloge

Iz podatkov lahko prebereš matrike

$$\mathrm{M}^{\Pi}_{\Omega}(\mathcal{I}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{M}^{\Lambda}_{\Omega}(\mathcal{I}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{M}^{\Pi}_{\Pi}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ker je

$$\mathrm{M}^{\Lambda}_{\Lambda}(\mathcal{A}) = \mathrm{M}^{\Pi}_{\Lambda}(\mathcal{I})\mathrm{M}^{\Pi}_{\Pi}(\mathcal{A})\mathrm{M}^{\Lambda}_{\Pi}(\mathcal{I}) = \mathrm{M}^{\Omega}_{\Lambda}(\mathcal{I})\mathrm{M}^{\Pi}_{\Omega}(\mathcal{I})\mathrm{M}^{\Pi}_{\Pi}(\mathcal{A})\mathrm{M}^{\Omega}_{\Pi}(\mathcal{I})\mathrm{M}^{\Lambda}_{\Omega}(\mathcal{I}), \tag{99}$$

moraš še izračunati

$$\mathrm{M}^{\Omega}_{\Pi}(\mathcal{I}) = (\mathrm{M}^{\Pi}_{\Omega}(\mathcal{I}))^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

in

$$\mathrm{M}^{\Omega}_{\Lambda}(\mathcal{I}) = (\mathrm{M}^{\Lambda}_{\Omega}(\mathcal{I}))^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zmnoži matrike, kakor veleva (99), da dobiš

$$\mathrm{M}^{\Lambda}_{\Lambda}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 7 & 13 \\ -2 & -3 & -6 \end{bmatrix}.$$

▷▷▷ 191., 197.

Rešitev 195. naloge

Najprej izračunaj jedri preslikav $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$: $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A} = \mathcal{L}\{x := (1,0,0,1), y := (1,2,-1,0)\}$, $\mathrm{Ker}\,\mathcal{B} = \mathcal{L}\{u := (1,1,0,0), v := (1,0,1,0)\}$. Torej je $M := \{x, y, u, v\}$ ogrodje podprostora U. Poiskati moraš bazo podprostora, ki ga napenja množica M. To lahko opraviš s skrčitvijo množice M do linearno neodvisne množice – dobiš bazo $\{x, y, u\}$ – ali pa z naslednjimi Gaussovimi eliminacijami po vrsticah,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

od koder prebereš bazo $\{(1,0,0,1), (0,1,0,-1), (0,0,1,-1)\}$ podprostora U.

▷▷▷ 192., 198., 201.

Rešitev 196. naloge

1. način reševanja. Podana sta $\mathrm{M}^{\Lambda}_{\Lambda}(\mathcal{A})$ in $\mathrm{X}_{\Pi}(x)$. Povrhu, če s Σ označiš običajno urejeno bazo prostora $\mathbb{R}^3$, lahko iz podatkov prebereš matrike $\mathrm{M}^{\Lambda}_{\Sigma}(\mathcal{I})$, $\mathrm{M}^{\Omega}_{\Sigma}(\mathcal{I})$ in $\mathrm{M}^{\Pi}_{\Sigma}(\mathcal{I})$. Zdaj zapiši

$$\begin{aligned} \mathrm{X}_{\Omega}(\mathcal{A}x) &= \mathrm{M}^{\Pi}_{\Omega}(\mathcal{A})\mathrm{X}_{\Pi}(x) \\ &= \mathrm{M}^{\Lambda}_{\Omega}(\mathcal{I})\mathrm{M}^{\Lambda}_{\Lambda}(\mathcal{A})\mathrm{M}^{\Pi}_{\Lambda}(\mathcal{I})\mathrm{X}_{\Pi}(x) \\ &= \mathrm{M}^{\Sigma}_{\Omega}(\mathcal{I})\mathrm{M}^{\Lambda}_{\Sigma}(\mathcal{I})\mathrm{M}^{\Lambda}_{\Lambda}(\mathcal{A})\mathrm{M}^{\Sigma}_{\Lambda}(\mathcal{I})\mathrm{M}^{\Pi}_{\Sigma}(\mathcal{I})\mathrm{X}_{\Pi}(x). \end{aligned}$$

Poiskati moraš še matriki

$$\mathrm{M}^{\Sigma}_{\Omega}(\mathcal{I}) = (\mathrm{M}^{\Omega}_{\Sigma}(\mathcal{I}))^{-1} = \begin{bmatrix} -6 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

in

$$\mathrm{M}^{\Sigma}_{\Lambda}(\mathcal{I}) = (\mathrm{M}^{\Lambda}_{\Sigma}(\mathcal{I}))^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zdaj lahko izračunaš stolpec $\mathrm{X}_{\Omega}(\mathcal{A}x) = [1, 0, -1]^t$. (Pri tem prihraniš na času, če zaporedoma množiš stolpec s skrajno desno matriko).

2. način reševanja. Krajša rešitev, ki ne zahteva računanja obratov matrik, gre takole. Ker je endomorfizem $\mathcal{A}$ podan v bazi Λ, najprej prevedeš vektor x iz baze Π v bazo Λ (posredno preko običajne baze Σ). Nato ga preslikaš z matriko, ki pripada $\mathcal{A}$ v bazi Λ. Rezultat še prevedeš v bazo Ω. Natančneje. Izračunaj stolpec

$$\mathrm{X}_{\Sigma}(x) = \mathrm{M}^{\Pi}_{\Sigma}(\mathcal{I})\mathrm{X}_{\Pi}(x).$$

Stolpec $X_\Lambda(x)$ je rešitev linearnega sistema

$$\mathrm{M}_\Sigma^\Lambda(\mathcal{I})X_\Lambda(x) = X_\Sigma(x),$$

v katerem sta znani matrika in desna stran sistema. Nato izračunaj stolpec

$$X_\Lambda(\mathcal{A}x) = \mathrm{M}_\Lambda^\Lambda(\mathcal{A})X_\Lambda(x)$$

in ga pomnoži z leve z matriko $\mathrm{M}_\Sigma^\Lambda(\mathcal{I})$, da dobiš stolpec $X_\Sigma(\mathcal{A}x)$. Končno reši linearni sistem

$$\mathrm{M}_\Sigma^\Omega(\mathcal{I})X_\Omega(\mathcal{A}x) = X_\Sigma(\mathcal{A}x),$$

v katerem poznaš matriko in desno stran sistema, in dobiš iskani stolpec $X_\Omega(\mathcal{A}x)$.

Opomba *Pogosto se lahko pri spremembi baze ognemo iskanju obrata matrike, kakor v gornjem 2. načinu reševanja. Pri tem pridobimo na času (saj je manj računanja), a izgubimo na preglednosti.*

⊳⊳⊳ 190., 202.

Rešitev 197. naloge

Gornje urejene baze označi z Λ, Ω in Π, običajne urejene baze prostorov $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^4$ pa s Σ_2, Σ_3 in Σ_4. Iščeš matriko

$$\mathrm{M}_{\Sigma_2}^{\Sigma_3}(\mathcal{BA}) = \mathrm{M}_{\Sigma_2}^{\Pi}(\mathcal{I})\mathrm{M}_{\Pi}^{\Omega}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\Omega}^{\Sigma_4}(\mathcal{I})\mathrm{M}_{\Sigma_4}^{\Lambda}(\mathcal{A})\mathrm{M}_{\Lambda}^{\Sigma_3}(\mathcal{I}).$$

Iz podatkov prebereš

$$\mathrm{M}_{\Sigma_2}^{\Pi}(\mathcal{I}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{M}_{\Sigma_3}^{\Lambda}(\mathcal{I}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{M}_{\Sigma_4}^{\Omega}(\mathcal{I}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in še matriki $\mathrm{M}_{\Sigma_4}^{\Lambda}(\mathcal{A})$ in $\mathrm{M}_{\Pi}^{\Omega}(\mathcal{B})$. Izračunaj

$$\mathrm{M}_{\Lambda}^{\Sigma_3}(\mathcal{I}) = (\mathrm{M}_{\Sigma_3}^{\Lambda}(\mathcal{I}))^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{M}_{\Omega}^{\Sigma_4}(\mathcal{I}) = (\mathrm{M}_{\Sigma_4}^{\Omega}(\mathcal{I}))^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

zmnoži matrike v pravilnem vrstnem redu in dobiš

$$\mathrm{M}_{\Sigma_2}^{\Sigma_3}(\mathcal{BA}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

⊳⊳⊳ 194.

Rešitev 198. naloge

(a) Ker velja ekvivalenca

$$\mathcal{A}x = 0 \iff \mathrm{M}_\Sigma^\Sigma(\mathcal{A})X_\Sigma(x) = 0,$$

zadošča poiskati bazo jedra $\operatorname{Ker}\mathrm{M}_\Sigma^\Sigma(\mathcal{A})$. Z Gaussovimi eliminacijami po vrsticah preoblikuj matriko

$$\mathrm{M}_\Sigma^\Sigma(\mathcal{A}) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jedro $\operatorname{Ker}\mathrm{M}_\Sigma^\Sigma(\mathcal{A})$ je enorazsežno, napenja ga stolpec $X_\Sigma(x) = [-2,1,0,1]^t$. Torej je $\{x := (-2,1,0,1)\}$ baza jedra $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$.

(b) Stolpec $X_\Pi(x)$ dobiš kot produkt

$$X_\Pi(x) = \mathrm{M}_\Pi^\Sigma(\mathcal{I})X_\Sigma(x) = (\mathrm{M}_\Sigma^\Pi(\mathcal{I}))^{-1}X_\Sigma(x)$$

ali kot rešitev enačbe

$$\mathrm{M}_\Sigma^\Pi(\mathcal{I})X_\Pi(x) = X_\Sigma(x).$$

Torej je $X_\Pi(x) = [-3,1,-1,1]^t$.

⊳⊳⊳ 192., 195.

Rešitev 199. naloge

Z Gaussovimi eliminacijami po vrsticah na matriki

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ugotoviš, da je $\dim\operatorname{Im}\mathcal{A} = 2 = \dim\operatorname{Ker}\mathcal{A}$. Takoj lahko sklepaš, da bo iskana matrika imela obliko

$$\mathrm{M}_{\Pi'}^{\Omega'}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Koeficienti, označeni z zvezdico, so odvisni od izbire baz. Če za $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ izbereš bazo

$$\Omega := \{v_1 := (1,-1,0,1), v_2 := (1,0,-1,2)\},$$

za $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ pa bazo

$$\Pi := \{w_1 := (0,1,0), w_2 := (-1,0,-2)\}$$

in ju z vektorjema $v_3 := (0,0,1,0)$, $v_4 := (0,0,0,1)$ oziroma z vektorjem $w_3 := (0,0,1)$ dopolniš do urejenih baz $\Omega' := \{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ in $\Pi' := \{w_1,w_2,w_3\}$ prostorov $\mathbb{R}^4$ oziroma $\mathbb{R}^3$, potem je

$$\mathrm{M}_{\Pi'}^{\Omega'}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Opomba *Poišči zvezo med gornjo nalogo in izrekom: vsaka matrika je ekvivalentna matriki, ki ima morebiti kakšne enice na glavni diagonali, ostali njeni koeficienti pa so ničelni. (Ali drugače: linearni preslikavi lahko vedno poiščeš „lepo" matriko, če smeš izbirati različni bazi.)*

Težji je problem, kakšni „lepi" matriki je podobna dana kvadratna matrika. (Ali: koliko „lepo" matriko lahko priredimo endomorfizmu glede na eno samo bazo.) Teorija reševanja tega problema je bogata: naprimer nad $\mathbb{C}$ nam odgovore dajeta Schurova lema in jordanska kanonska oblika, nad poljubnim poljem pa je rezultat racionalna kanonska oblika matrike oziroma endomorfizma.

⊳⊳⊳ 209., 211., 212., 213., 254., 298., 406.

Rešitev 200. naloge

Običajni urejeni bazi v $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^4$ označi s Σ_3 in Σ_4. Z vrstičnimi Gaussovimi eliminacijami na matriki

$$\mathrm{M}_{\Sigma_4}^{\Sigma_3}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ugotoviš, da je $\operatorname{rang}\mathcal{A} = 2$ in zato $\dim\operatorname{Ker}\mathcal{A} = 3 - \operatorname{rang}\mathcal{A} = 1$. Baza jedra $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ je, naprimer, $\{a_1 := (-1,1,1)\}$. Bazo zaloge vrednosti $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ dobiš, naprimer, iz dveh linearno neodvisnih stolpcev podane matrike: $\{b_1 := (1,0,2,0), b_2 := (0,-1,2,-2)\}$. Poiskati moraš stolpce $\mathrm{X}_\Omega(a_1)$, $\mathrm{X}_\Pi(b_1)$, $\mathrm{X}_\Pi(b_2)$. Najprej napiši prehodni matriki

$$\mathrm{M}_{\Sigma_3}^{\Omega}(\mathcal{I}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{M}_{\Sigma_4}^{\Pi}(\mathcal{I}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Do želenih stolpcev lahko prideš z reševanjem linearnih sistemov (npr. iz sistema

$$\mathrm{M}_{\Sigma_3}^{\Omega}(\mathcal{I})\mathrm{X}_\Omega(a_1) = \mathrm{X}_{\Sigma_3}(a_1),$$

izračunaš stolpec $\mathrm{X}_\Omega(a_1)$) ali pa s pomočjo obratov gornjih prehodnih matrik:

$$\begin{aligned} \mathrm{X}_\Omega(a_1) &= \mathrm{M}_{\Omega}^{\Sigma_3}(\mathcal{I})\mathrm{X}_{\Sigma_3}(a_1) \\ &= (\mathrm{M}_{\Sigma_3}^{\Omega}(\mathcal{I}))^{-1}\mathrm{X}_{\Sigma_3}(a_1) \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= [2 \ \ -2 \ \ 1]^t, \end{aligned}$$

$$\mathrm{X}_\Pi(b_1,b_2) = \mathrm{M}_{\Pi}^{\Sigma_4}(\mathcal{I})\mathrm{X}_{\Sigma_3}(b_1,b_2) = (\mathrm{M}_{\Sigma_4}^{\Pi}(\mathcal{I}))^{-1}\mathrm{X}_{\Sigma_3}(b_1,b_2) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ -2 & -5 \\ 2 & 4 \end{array}\right].$$

Dolguješ še eno matriko:

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_{\Pi}^{\Omega}(\mathcal{A}) &= \mathrm{M}_{\Pi}^{\Sigma_4}(\mathcal{I})\mathrm{M}_{\Sigma_4}^{\Sigma_3}(\mathcal{A})\mathrm{M}_{\Sigma_3}^{\Omega}(\mathcal{I}) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \\ -5 & -7 & -4 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

⊳⊳⊳ 192., 203.

Rešitev 201. naloge

Naj Σ označuje običajno urejeno bazo prostora $\mathbb{R}^4$ in Π podano novo bazo. Z Gaussovimi eliminacijami po vrsticah na matriki

$$\mathrm{M}_{\Sigma}^{\Sigma}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ker $M^{\pi}_{\pi}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}\{x;\ x := [-2,1,1,0]^t\}$

ugotoviš, da je $\operatorname{rang}\mathcal{A} = 3$ in da vektor $(-2,1,1,0)$ napenja jedro preslikave $\mathcal{A}$. Preslikave $\mathcal{B}$ se lotiš podobno,

$$\mathrm{M}_{\Pi}^{\Pi}(\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dobiš $\operatorname{rang}\mathcal{B} = 3$ in $\mathcal{L}\{x := [-1,1,0,-2]^t\} = \operatorname{Ker}\mathrm{M}_{\Pi}^{\Pi}(\mathcal{B})$. Stolpec x moraš pomnožiti z leve z matriko prehoda $\mathrm{M}_{\Sigma}^{\Pi}(\mathcal{I})$, da dobiš stolpec $[-1,1,-3,-3]^t$, ki pripada vektorju $(-1,1,-3,-3) \in \mathbb{R}^4$ v običajni bazi. Slednji napenja $\operatorname{Ker}\mathcal{B}$. Torej je

$$\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \mathcal{L}\{(-2,1,1,0)\} \text{ in } \operatorname{Ker}\mathcal{B} = \mathcal{L}\{(-1,1,-3,-3)\}.$$

Odtod dobiš $\operatorname{Ker}\mathcal{A} \cap \operatorname{Ker}\mathcal{B} = \{0\}$ in $\operatorname{Ker}\mathcal{A} + \operatorname{Ker}\mathcal{B} = \mathcal{L}\{(-2,1,1,0),(-1,1,-3,-3)\}$.

⊳⊳⊳ 195.

Rešitev 202. naloge

Označi s Σ_3 in Σ_4 običajni urejeni bazi prostorov $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^4$, z Ω pa novo urejeno bazo prostora $\mathbb{R}^4$. Podani sta matriki $\mathrm{M}_{\Sigma_4}^{\Sigma_4}(\mathcal{A})$ in $\mathrm{M}_{\Sigma_3}^{\Omega}(\mathcal{B})$. Najprej poišči kakšen stolpec iz jedra slednje matrike, naprimer

$$u := [0,0,0,1]^t \in \operatorname{Ker}\mathrm{M}_{\Sigma_3}^{\Omega}(\mathcal{B}).$$

Stolpec u pripada v bazi Ω vektorju

$$x = 0\cdot(1,0,1,0) + 0\cdot(0,-1,0,1) + 0\cdot(1,1,0,0) + 1\cdot(1,0,1,1),$$

torej je $x = (1,0,1,1) \in \operatorname{Ker}\mathcal{B}$. Ker je

$$\mathrm{X}_{\Sigma_3}(\mathcal{BA}x) = \mathrm{M}_{\Sigma_3}^{\Sigma_4}(\mathcal{B})\mathrm{M}_{\Sigma_4}^{\Sigma_4}(\mathcal{A})\mathrm{X}_{\Sigma_4}(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{M}^{\Omega}_{\Sigma_3}(\mathcal{B})\mathrm{M}^{\Sigma_4}_{\Omega}(\mathcal{I})\mathrm{M}^{\Sigma_4}_{\Sigma_4}(\mathcal{A})[1,0,1,1]^{\mathrm{t}}\\
&= \mathrm{M}^{\Omega}_{\Sigma_3}(\mathcal{B})\mathrm{M}^{\Sigma_4}_{\Omega}(\mathcal{I})[3,2,-3,-1]^{\mathrm{t}},
\end{aligned}
$$

lahko izračunaš $\mathrm{M}^{\Sigma_4}_{\Omega}(\mathcal{I}) = (\mathrm{M}^{\Omega}_{\Sigma_4}(\mathcal{I}))^{-1}$ in nadaljuješ z množenjem matrik s stolpcem, ali pa rešiš enačbo $\mathrm{M}^{\Omega}_{\Sigma_4}(\mathcal{I})\mathrm{X}_{\Omega}(\mathcal{A}x) = \mathrm{X}_{\Sigma_4}(\mathcal{A}x)$:

$$
\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right].
$$

Torej je $\mathrm{X}_{\Omega}(\mathcal{A}x) = [2,4,6,-5]^{\mathrm{t}}$ in zato

$$
\mathrm{X}_{\Sigma_3}(\mathcal{B}\mathcal{A}x) = \mathrm{M}^{\Omega}_{\Sigma_3}(\mathcal{B})\mathrm{X}_{\Omega}(\mathcal{A}x) = [2 \quad 14 \quad 6]^{\mathrm{t}}.
$$

Od tod dobiš vektor $\mathcal{B}\mathcal{A}x = (2, 14, 6)$.

⋙ 190., 196.

Rešitev 203. naloge

Če označiš z Ω urejeno bazo $\{1,\ 1+x,\ x+x^2,\ x^2+x^3,\ x^3+x^4\}$, s Σ pa običajno urejeno bazo $\{1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4\}$ prostora $\mathbb{R}_4[x]$, je

$$
\mathrm{M}^{\Omega}_{\Sigma}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathrm{M}^{\Omega}_{\Sigma}(\mathcal{I}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
$$

Izračunaj še

$$
\mathrm{M}^{\Sigma}_{\Omega}(\mathcal{I}) = (\mathrm{M}^{\Omega}_{\Sigma}(\mathcal{I}))^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
$$

Iskana matrika je

$$
\mathrm{M}^{\Sigma}_{\Sigma}(\mathcal{A}) = \mathrm{M}^{\Omega}_{\Sigma}(\mathcal{A})\mathrm{M}^{\Sigma}_{\Omega}(\mathcal{I}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.
$$

Iz nje dobiš

$$
\mathrm{Im}\,(\mathrm{M}^{\Sigma}_{\Sigma}(\mathcal{A})) = \mathcal{L}\{[1,0,0,0,0]^{\mathrm{t}}, [0,-1,1,0,0]^{\mathrm{t}}, [0,0,0,-1,1]^{\mathrm{t}}\},
$$

$$
\mathrm{Ker}\,(\mathrm{M}^{\Sigma}_{\Sigma}(\mathcal{A})) = \mathcal{L}\{[0,1,-1,0,0]^{\mathrm{t}}, [0,0,0,1,-1]^{\mathrm{t}}\}
$$

in opaziš, da je $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A} \subset \mathrm{Im}\,\mathcal{A}$, zato je

$$
\dim(\mathrm{Ker}\,\mathcal{A} \cap \mathrm{Im}\,\mathcal{A}) = \dim \mathrm{Ker}\,\mathcal{A} = 2.
$$

Če tega ne opaziš, poišči razsežnost vsote $\mathrm{Im}\,\mathcal{A} + \mathrm{Ker}\,\mathcal{A}$ in upoštevaj enakost $\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U+V)$.

⋙ 192., 200.

Rešitev 204. naloge

1. način reševanja. Iz zapisa $\mathrm{X}_{\Omega}(e_i) = [1,0,\ldots 0,1,0,\ldots,0]^{\mathrm{t}}$ sledi

$$
\begin{aligned}
e_1 &= f_1,\\
e_2 &= f_1 + f_2,\\
e_3 &= f_1 + f_3,\\
&\vdots\\
e_n &= f_1 + f_n.
\end{aligned}
$$

Torej velja $f_i = e_i - e_1$ za $i = 2,\ldots,n$ in $f_1 = e_1$. Poleg tega iz zapisa $\mathrm{X}_{\Psi}(f_i) = [1,\ldots,1,0\ldots,0]^{\mathrm{t}}$ sledi

$$
\begin{aligned}
f_1 &= g_1,\\
f_2 &= g_1 + g_2,\\
f_3 &= g_1 + g_2 + g_3,\\
&\vdots\\
f_n &= g_1 + \cdots + f_n.
\end{aligned}
$$

Odtod lahko izraziš $g_i = f_i - f_{i-1}$ za $i = 2,\ldots,n$ in $g_1 = f_1$. Zdaj sklepaš

$$
\begin{aligned}
g_1 &= f_1 = e_1,\\
g_2 &= f_2 - f_1 = (e_2 - e_1) - e_1 = e_2 - 2e_1,\\
g_i &= f_i - f_{i-1} = (e_i - e_1) - (e_{i-1} - e_1) = e_i - e_{i-1} \quad \text{za } i = 3,\ldots,n.
\end{aligned}
$$

Zato je $g_1 = (1,0,\ldots,0)$, $g_2 = (-2,1,0,\ldots,0)$ in $g_i = (0,\ldots,0,-1,1,0,\ldots,0)$, kjer je število 1 na i-tem mestu, za $i = 3,\ldots,n$.

2. način reševanja. Podatke prepiši v matriki

$$
\mathrm{M}^{\Sigma}_{\Omega}(\mathcal{I}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathrm{M}^{\Omega}_{\Psi}(\mathcal{I}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.
$$

Izrazi in izračunaj matriko

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}^{\Psi}_{\Sigma}(\mathcal{I}) &= \mathrm{M}^{\Omega}_{\Sigma}(\mathcal{I})\mathrm{M}^{\Psi}_{\Omega}(\mathcal{I}) \\
&= (\mathrm{M}^{\Sigma}_{\Omega}(\mathcal{I}))^{-1}(\mathrm{M}^{\Omega}_{\Psi}(\mathcal{I}))^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Opomba *Gornji produkt obratov matrik lahko zapišeš in izračunaš tudi kot obrat produkta matrik!*
Matrika $\mathrm{M}^{\Delta}_{\Gamma}(\mathcal{I})$ (kjer sta Δ in Γ neki urejeni bazi končnorazsežnega prostora) lahko služi enkrat kot „skladišče" vektorjev baze Δ zapisanih v bazi Γ, drugič pa kot prehodna matrika od baze Δ k bazi Γ.

Rešitev 205. naloge

Operatorju odvajanja $\mathcal{D}\colon \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ pripada v bazi Σ matrika $A = \mathrm{M}^{\Sigma}_{\Sigma}(\mathcal{D})$. Označi $S := \mathrm{M}^{\Omega}_{\Sigma}(\mathcal{I})$. Želiš dokazati, da je $AS = SA$. V ta namen definiraj matriko $B := \mathrm{M}^{\Omega}_{\Omega}(\mathcal{D})$ in preveri, da je

$$A = B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Iz $A = \mathrm{M}^{\Sigma}_{\Sigma}(\mathcal{D}) = \mathrm{M}^{\Omega}_{\Sigma}(\mathcal{I})\mathrm{M}^{\Omega}_{\Omega}(\mathcal{D})\mathrm{M}^{\Sigma}_{\Omega}(\mathcal{I}) = SBS^{-1} = SAS^{-1}$ sledi $AS = SA$, kar je bilo potrebno dokazati.

Opomba *V gornji rešitvi prebereš: matrika A komutira z obrnljivo matriko S natanko tedaj, ko endomorfizmu $\mathcal{A}$, ki ga določa A v običajni urejeni bazi, pripada v urejeni bazi, ki je določena z matriko S, spet matrika A. Pomni tudi: za obrnljive matrike S velja*

$$AS = SA \iff A = SAS^{-1} \iff A = S^{-1}AS.$$

Rešitev 206. naloge

Najprej zapiši

$$X = \{\mathcal{A} \in \mathrm{End}\,(U) \mid \mathcal{A}V \le W \text{ in } \mathcal{A}W \le V\}.$$

(a) Ker je $0V = 0 \le W$ in $0W = 0 \le V$, pripada ničelni endomorfizem $0 \in \mathrm{End}\,(U)$ množici X. Množica X torej ni prazna. Dalje, za vsaka $\mathcal{A}, \mathcal{A}' \in X$ in za vsak $v \in V$ velja

$$(\mathcal{A} + \mathcal{A}')v = \mathcal{A}v + \mathcal{A}'v \in W,$$

saj sta $\mathcal{A}v, \mathcal{A}'v \in W$ in $W \le U$. Zato je $(\mathcal{A}+\mathcal{A}')V \le W$. Podobno dobiš $(\mathcal{A}+\mathcal{A}')W \le V$ in sklepaš $\mathcal{A} + \mathcal{A}' \in X$. Preveri še, da za vsak $\lambda \in \mathbb{F}$ in vsak $\mathcal{A} \in X$ velja $\lambda\mathcal{A} \in X$, takole. Za vsak $v \in V$ je

$$(\lambda\mathcal{A})v = \lambda(\mathcal{A}v) \in W,$$

saj je $\mathcal{A}v \in W$ in $W \le U$. Torej je $(\lambda\mathcal{A})V \le W$. Podobno dokažeš $(\lambda\mathcal{A})W \le V$ in sklepaš $\lambda\mathcal{A} \in X$. Zato je $X \le \mathrm{End}\,(U)$.

(b) Naj bo $\Omega := \{v_1, v_2, w\}$ taka urejena baza prostora $U = V \oplus W$, da so $v_1, v_2 \in V$, $w \in W$. Če je $\mathcal{A} \in X$, velja

$$\mathcal{A}v_1 = \alpha w, \quad \mathcal{A}v_2 = \beta w, \quad \mathcal{A}w = \gamma v_1 + \delta v_2$$

za primerne skalarje $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{F}$. Torej je

$$\mathrm{M}^{\Omega}_{\Omega}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & \delta \\ \alpha & \beta & 0 \end{bmatrix}. \tag{100}$$

Odtod sklepaš, da je X izomorfen prostoru Y vseh matrik iz $\mathbb{F}^{3\times 3}$, ki imajo obliko (100), zato

$$\dim X = \dim Y = 4.$$

(c) Vsaka preslikava $\mathcal{A} \in X$ slika dvorazsežni prostor V v enorazsežni prostor W, torej $\mathcal{A}$ ni injektivna, in zato tudi ni obrnljiva. (Utemeljiš lahko tudi takole: ker matrika $\mathrm{M}^{\Omega}_{\Omega}(\mathcal{A})$ ni obrnljiva, tudi preslikava $\mathcal{A}$ ni.)

Rešitev 207. naloge

Označi podane vektorje z v_1, v_1, v_3 in podane stolpce z u_1, u_2, u_3 tako, da bo veljalo $\mathrm{X}_{\Omega}(v_1) = u_1$, $\mathrm{X}_{\Omega}(v_2) = u_2$ in $\mathrm{X}_{\Omega}(v_3) = u_3$.

1. način reševanja. Iščeš tako matriko $A := \mathrm{M}^{\Omega}_{\Sigma}(\mathcal{I})$, ki ima v stolpcih zložene vektorje iskane urejene baze Ω, zapisane v običajni urejeni bazi Σ, da bo veljalo

$$\mathrm{M}^{\Omega}_{\Sigma}(\mathcal{I})\mathrm{X}_{\Omega}(v_i) = \mathrm{X}_{\Sigma}(v_i) \quad \text{za } i = 1, 2, 3. \tag{101}$$

Ta sistem enačb lahko rešiš na neposreden način tako, da v neznani matriki $\mathrm{M}^{\Omega}_{\Sigma}(\mathcal{I})$ zapišeš njenih 9 neznanih koeficientov in jo skupaj z znanimi podatki vstaviš v (101). Tako pridelaš sistem 9 linearnih enačb z 9 neznankami, ki ga rešiš z Gaussovim postopkom.

Lahko pa ravnaš bolj zvito in računaš hitreje, takole: Če zložiš stolpce $\mathrm{X}_{\Omega}(v_i)$ in $\mathrm{X}_{\Sigma}(v_i)$ v dve matriki, dobiš enačbam (101) enakovredno enačbo

$$A[u_1, u_2, u_3] = [\mathrm{X}_{\Sigma}(v_1), \mathrm{X}_{\Sigma}(v_2), \mathrm{X}_{\Sigma}(v_3)], \tag{102}$$

kjer je matrika A neznana. Enačbo (102) transponiraj, vstavi podatke iz naloge in poženi Gaussov postopek:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 6 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 8 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

Zato je iskana urejena baza $\Omega = \{(1,0,1),(2,1,0),(-3,0,-1)\}$.

2. način reševanja. Preveri, da vektorji v_1, v_2, v_3 sestavljajo (urejeno) bazo prostora $\mathbb{R}^3$ in postavi $\Psi := \{v_1, v_2, v_3\}$. Potem lahko iz podatkov naloge prebereš matriki $\mathrm{M}_\Omega^\Psi(\mathcal{I})$ in $\mathrm{M}_\Sigma^\Psi(\mathcal{I})$. Poiskati bazo Ω je enakovredno poiskati matriko

$$\mathrm{M}_\Sigma^\Omega(\mathcal{I}) = \mathrm{M}_\Sigma^\Psi(\mathcal{I})\mathrm{M}_\Psi^\Omega(\mathcal{I}) = \mathrm{M}_\Sigma^\Psi(\mathcal{I})(\mathrm{M}_\Omega^\Psi(\mathcal{I}))^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev 208. naloge

1. način reševanja. Razmišljaj s pomočjo linearnih preslikav, takole. Matrika A določa endomorfizem $\mathcal{A}$ prostora $V := \mathbb{R}^{3\times 1}$ s predpisom $\mathcal{A}x := Ax$ za vsak $x \in V$, torej je $A = \mathrm{M}_\Sigma^\Sigma(\mathcal{A})$, kjer je Σ običajna urejena baza prostora stolpcev V. Zaradi $A^2 \neq 0$ obstaja tak $v \in V$, da je $\mathcal{A}^2 v \neq 0$. Potem je $\Pi := \{v, \mathcal{A}v, \mathcal{A}^2 v\}$ urejena baza prostora V. (To vidiš takole. Naj velja $\alpha v + \beta\mathcal{A}v + \gamma\mathcal{A}^2 v = 0$ za neke $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Pomnoži enakost z $\mathcal{A}^2$, upoštevaj $\mathcal{A}^3 = 0$ in dobiš $\alpha\mathcal{A}^2 v = 0$. Ker $\mathcal{A}^2 v \neq 0$, je $\alpha = 0$. Podobno dobiš tudi $\beta = 0$, odtod pa $\gamma = 0$. Torej je Π linearno neodvisna množica v trirazsežnem prostoru, zato je baza.) V bazi Π pripada endomorfizmu $\mathcal{A}$ matrika

$$\mathrm{M}_\Pi^\Pi(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = B.$$

Označi s $S := \mathrm{M}_\Sigma^\Pi(\mathcal{I})$ matriko prehoda iz običajne urejene baze Π v urejeno bazo Σ prostora V. Potem je

$$A = \mathrm{M}_\Sigma^\Sigma(\mathcal{A}) = \mathrm{M}_\Sigma^\Pi(\mathcal{I})\mathrm{M}_\Pi^\Pi(\mathcal{A})\mathrm{M}_\Pi^\Sigma(\mathcal{I}) = SBS^{-1}.$$

Torej sta matriki A in B podobni.

2. način reševanja. Ker je matrika A nilpotent reda 3, je njena edina lastna vrednost enaka 0, njen karakakteristični in minimalni polinom sta enaka $p_A(\lambda) = m_A(\lambda) = \lambda^3$ in A je podobna svoji jordanski matriki

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

s prehodno matriko $P = [v_1, v_2, v_3]$ za neke primerne stolpce v_1, v_2, v_3. Potem je s prehodno matriko $P' := [v_3, v_2, v_1]$ matrika A podobna matriki B.

Opomba *Ali velja trditev tudi za matriko s koeficienti iz poljubnega polja $\mathbb{F}$?*

⋙ 403., 404.

Rešitev 209. naloge

Tu sta dva možna pristopa k reševanju. Prvi prevede nalogo na reševanje linearnega sistema, drugi pa uporablja teorijo linearnih preslikav in prirejanja matrik v izbranih bazah.

1. način reševanja. Iz (b) sledi, da so stolpci matrike M linearne kombinacije stolpcev $[1,1,1,1]^t$ in $[0,2,1,0]^t$. Torej je

$$M = \begin{bmatrix} a & c & e & g \\ a+2b & c+2d & e+2f & g+2h \\ a+b & c+d & e+f & g+h \\ a & c & e & g \end{bmatrix}$$

za primerne $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}$. Iz pogoja (a) sledi, da je

$$M[1,-1,0,1]^t = 0, \quad M[0,1,2,0]^t = 0.$$

Tako dobiš (homogeni) linearni sistem osmih enačb

$$a - c + g = 0,\ a + 2b - c - 2d + g + 2h = 0,\ a + b - c - d + g + h = 0,\ a - c + g = 0,$$

$$c + 2e = 0,\ c + 2d + 2e + 4f = 0,\ c + d + 2e + 2f = 0,\ c + 2e = 0.$$

Rešitev tega sistema je štiriparametrična, naprimer

$$a = -2e - g,\ b = -2f - h,\ c = -2e,\ d = -2f,\quad e, f, g, h \in \mathbb{R}.$$

Pri izboru parametrov moraš paziti, da bo $\operatorname{rang} M = 2$. Naprimer, vzemi $e = h = 1$, $f = g = 0$. Potem je $a = c = -2$, $b = -1$ in $d = 0$, torej

$$M = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

in $\operatorname{rang} M = 2$. Iz gornjega je očitno, da ima naloga več rešitev.

2. način reševanja. Označi z $\mathcal{A}$: $\mathbb{R}^{4\times 1} \to \mathbb{R}^{4\times 1}$ poljubno linearno preslikavo, ki zadošča enakima pogojema kot matrika M. Dopolni bazo $\{x_1, x_2\}$ jedra $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ do urejene baze $\Pi := \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ celotnega prostora $\mathbb{R}^{4\times 1}$. Prav tako dopolni bazo $\{z_1, z_2\}$ zaloge vrednosti $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ do neke urejene baze $\Omega := \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ prostora $\mathbb{R}^{4\times 1}$. Potem je

$$\mathrm{M}_\Omega^\Pi(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

za neke $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ in $ad - bc \neq 0$, saj je $\operatorname{rang}\mathcal{A} = 2$. Iskana matrika M je matrika, ki pripada preslikavi $\mathcal{A}$ v običajni urejeni bazi Σ prostora $\mathbb{R}^{4\times 1}$:

$$M = \mathrm{M}_\Sigma^\Sigma(\mathcal{A}) = \mathrm{M}_\Sigma^\Omega(\mathcal{I})\mathrm{M}_\Omega^\Pi(\mathcal{A})\mathrm{M}_\Pi^\Sigma(\mathcal{I}). \tag{103}$$

Iz povedanega je jasno, da je iskanih matrik natanko toliko, kolikor je izborov četveric $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc \neq 0$.

V našem konkretnem primeru izberi, naprimer,

$$x_1 = [1,-1,0,1]^{\mathrm{t}},\ x_2 = [0,1,2,0]^{\mathrm{t}},\ z_1 = [1,1,1,1]^{\mathrm{t}},\ z_2 = [0,2,1,0]^{\mathrm{t}},$$

$$x_3 = z_3 = [0,0,1,0]^{\mathrm{t}},\ x_4 = z_4 = [0,0,0,1]^{\mathrm{t}}$$

in $a = d = 1$, $b = c = 0$. Potem je

$$\mathrm{M}^{\Pi}_{\Sigma}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{M}^{\Omega}_{\Sigma}(\mathcal{I}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Iz enakosti (103) izračunaj M.

⊳⊳⊳ 151., 199.

Rešitev 210. naloge

Naj bo $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ matrika ranga 1. Označi z $\mathcal{A}$ endomorfizem $\mathcal{A}\colon \mathbb{F}^{n\times 1} \to \mathbb{F}^{n\times 1}$, kjer $\mathcal{A}\colon v \mapsto A\cdot v$. Če s Σ označiš običajno urejeno bazo prostora $\mathbb{F}^{n\times 1}$, potem velja $A = \mathrm{M}^{\Sigma}_{\Sigma}(\mathcal{A})$. Ker je $\operatorname{rang}(\mathcal{A}) = 1$, je $\operatorname{Im}\mathcal{A} = \mathcal{L}\{x\}$ za neki neničelni $x \in \mathbb{F}^{n\times 1}$. Množico $\{x\}$ dopolni do baze $\Omega := \{x, v_2, \ldots, v_n\}$ prostora $\mathbb{F}^{n\times 1}$. Ker je $\mathcal{A}x = \lambda_1 x$, $\mathcal{A}v_2 = \lambda_2 x$, $\ldots$, $\mathcal{A}v_n = \lambda_n x$ za neke $\lambda_i \in \mathbb{F}$, pripada preslikavi $\mathcal{A}$ v urejeni bazi Ω matrika

$$\mathrm{M}^{\Omega}_{\Omega}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Zato velja

$$A = \mathrm{M}^{\Sigma}_{\Sigma}(\mathcal{A}) = \mathrm{M}^{\Omega}_{\Sigma}(\mathcal{I})\mathrm{M}^{\Omega}_{\Omega}(\mathcal{A})\mathrm{M}^{\Sigma}_{\Omega}(\mathcal{I}) = P\mathrm{M}^{\Omega}_{\Omega}(\mathcal{A})P^{-1},$$

kjer je $P = [x, v_2, \ldots, v_n]$.

Rešitev 211. naloge

Izberi poljuben neničeln vektor $v_1 \in V$. Naj bo W_1 dopolnilni prostor podprostora $\mathcal{L}\{v_1\}$, torej

$$V = \mathcal{L}\{v_1\} \oplus W_1.$$

Razstavi sliko $\mathcal{A}v_1 = a_{11}v_1 + w_1$, kjer je $w_1 \in W_1$ in $a_{11} \in \mathbb{F}$ neki skalar. Če je $w_1 \neq 0$, definiraj $v_2 := w_1$, sicer bodi v_2 poljuben neničeln vektor iz W_1.

V nadaljevanju spet razcepi prostor V na

$$V = \mathcal{L}\{v_1, v_2\} \oplus W_2.$$

Potem obstajajo natanko določeni $a_{12}, a_{22} \in \mathbb{F}$ in $w_2 \in W_2$, da velja $\mathcal{A}v_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + w_2$. Zdaj ravnaj podobno kot zgoraj: če je $w_2 \neq 0$, vzemi $v_3 := w_2$, sicer naj bo v_3 poljuben neničeln vektor iz W_2.

Postopek ponovi z vektorjem v_3. Tu pridelaš vektor v_4, nadalje $v_5, \ldots$ Ustaviš se pri vektorju v_n, pri čemer je n razsežnost prostora V. Potem pripada endomorfizmu $\mathcal{A}$ v urejeni bazi $\Omega := \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ matrika

$$\mathrm{M}^{\Omega}_{\Omega}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \delta_1 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & \delta_2 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

kjer je vsak δ_i za $i = 1, \ldots, n-1$ enak 0 ali 1.

Opomba *Oglej si opombo k nalogi 199.*

⊳⊳⊳ 199.

Rešitev 212. naloge

1. način reševanja. Z vrstičnimi in stolpčnimi elementarnimi transformacijami prevedi matriko A v matriko predpisane oblike.

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 2 & \boxed{-1} & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & -5 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & \boxed{-1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 5 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & -5 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 2 & 1 & 1 & -3 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & \boxed{-1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \boxed{5} & 0 & 5 & -5 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 2 & 1 & 1 & -3 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & \boxed{-1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ \boxed{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 1 & & & \\ 2 & 1 & -1 & -1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right]$$

Ko postaviš zadnjo vrstico deljeno s 5 na prvo mesto in drugo pomnožiš z (-1), končno dobiš željeno matriko

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 1 & & & \\ 2 & 1 & -1 & -1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right].$$

Odtod lahko prebereš prehodni matriki, ki sta nastali iz identičnih (dodanih na začetku spodaj in na desni strani matrike A) po opravljenih elementarnih transformacijah:

$$P := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/5 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{in} \qquad Q := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Če označiš

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

potem velja

$$B = P \cdot A \cdot Q.$$

2. način reševanja. Po krajšem računu dobiš

$$\operatorname{Ker} A = \mathcal{L}\left\{[1,-1,0,1]^t, [1,1,-1,0]^t\right\}.$$

Bazo jedra dopolni do urejene baze Φ prostora U, naprimer

$$\Phi := \{[1,0,0,0]^t, [0,1,0,0]^t, [1,-1,0,1]^t, [1,1,-1,0]^t\}.$$

Sliki prvih dveh baznih vektorjev sta linearno neodvisna vektorja v prostoru V. Dodaj jima tak vektor, da dobiš urejeno bazo prostora V, naprimer

$$\Omega := \{[2,1,5]^t, [-1,2,0]^t, [0,0,1]^t\}.$$

Premisli, da potem velja

$$\mathrm{M}_{\Omega}^{\Phi}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

kjer je $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ linearna preslikava A dobljena iz matrike A na običajen način. Ker je

$$\mathrm{M}_{\Omega}^{\Phi}(\mathcal{A}) = \mathrm{M}_{\Omega}^{\Sigma}(\mathcal{I})\mathrm{M}_{\Sigma}^{\Sigma}(\mathcal{A})\mathrm{M}_{\Sigma}^{\Phi}(\mathcal{I}) = (\mathrm{M}_{\Sigma}^{\Omega}(\mathcal{I}))^{-1} A \mathrm{M}_{\Sigma}^{\Phi}(\mathcal{I}),$$

smeš vzeti

$$P := (\mathrm{M}_{\Sigma}^{\Omega}(\mathcal{I}))^{-1} = \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 & 0 \\ -1/5 & 2/5 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad Q := \mathrm{M}_{\Sigma}^{\Phi}(\mathcal{I}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

ÞÞÞ 199., 213., 214.

Rešitev 213. naloge

Označi matrike tako, da bo $P \cdot A \cdot Q = B$.

1. način reševanja. Z elementarnimi transformacijami vrstic in stolpcev, ki jih beležiš na dodanih spodnji in desni matriki, spremeni matriko A v matriko B, recimo takole:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 2 & 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & -1 & -1 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & -1 & -1 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0 & -1 & 1 \\ \hline 1 & -2 & -2 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|ccc} -4 & -1 & -1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hline 0 & -2 & -2 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & & & \end{array}\right].$$

Iz zadnje matrike končno prebereš

$$P := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{in} \qquad Q := \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. način reševanja. Teorija zagotavlja, da sta matriki A in

$$R := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ekvivalentni (ker je rang $(A) = 2$, ima matrika R na diagonali dve enici). To pomeni, da obstajata taki obrnljivi matriki P_A in Q_A, da velja

$$P_A A Q_A = R.$$

Podobno sklepaš za matriko B, saj je tudi rang $(B) = 2$:

$$P_B B Q_B = R.$$

Odtod pa dobiš enakost

$$P_A A Q_A = P_B B Q_B \qquad \text{oziroma} \qquad (P_B^{-1} P_A) A (Q_A Q_B^{-1}) = B,$$

zato lahko končno vzameš $P := P_B^{-1} P_A$ in $Q := Q_A Q_B^{-1}$. Razcep $P_A A Q_A = R$ je opisan v nalogi 212.

ÞÞÞ 121., 199., 212., 214.

Rešitev 214. naloge

Tolmači matriki A in B kot preslikavi $\mathcal{A}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^6$ in $\mathcal{B}\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ na običajen način. V nalogi 121 je opisan postopek iskanja preslikav $\mathcal{X}\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^6$ in $\mathcal{Y}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$: Z Gaussovo eliminacijo brž najdeš jedro

$$\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \mathcal{L}\{(1,0,-2,1)\},$$

zato lahko za dopolnilni podprostor jedra $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ vzameš

$$U' := \mathcal{L}\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}.$$

Vektorje, na katere sta napeta podprostora U' in $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$, vzemi za urejeno bazo prostora $\mathbb{R}^4$ in jo označi s Π, torej

$$\Pi := \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(1,0,-2,1)\}.$$

Slike prvih treh vektorjev iz množice Π (prvi trije so baza podprostora U') preslikaj s preslikavo $\mathcal{A}$, pa dobiš po nalogi 96 bazo podprostora $\operatorname{Im}\mathcal{A}$. Dopolni jo do baze celotnega prostora $\mathbb{R}^6$ in jo označi s Ψ, torej

$$\begin{aligned}\Psi := \{&(2,1,-1,0,1,1),(0,1,1,-1,1-3),(1,2,0,0,1,0),\\ &(0,1,0,0,0,0),(0,0,0,0,1,0),(0,0,0,0,0,1)\}.\end{aligned}$$

Vrstična Gaussova eliminacija te pripelje tudi do jedra

$$\operatorname{Ker}\mathcal{B} = \mathcal{L}\{(0,-1,0,-1,1)\},$$

zato lahko za dopolnilni podprostor jedra $\operatorname{Ker}\mathcal{B}$ vzameš

$$W' := \mathcal{L}\{(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0)\}.$$

Vektorje, na katere sta napeta podprostora W' in $\operatorname{Ker}\mathcal{B}$, vzemi za urejeno bazo prostora $\mathbb{R}^5$ in jo označi z Ω, torej

$$\Omega := \{(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0),(0,-1,0,-1,1)\}.$$

Slike prvih štirih vektorjev iz množice Ω preslikaj s preslikavo $\mathcal{B}$, pa dobiš po nalogi 96 bazo podprostora $\operatorname{Im}\mathcal{B}$. Dopolni jo do baze celotnega prostora $\mathbb{R}^5$ in jo označi z Γ, torej

$$\Gamma := \{(1,2,1,0,1),(0,1,-1,1,2),(-3,0,-2,1,1),(0,0,2,1,0),(0,0,1,0,0)\}.$$

Naj oznaka Σ_n pomeni običajno urejeno bazo prostora $\mathbb{R}^n$. Iz predpisa v nalogi 121 sklepaj

$$X = \mathrm{M}_{\Sigma_6}^{\Sigma_5}(\mathcal{X}) = \mathrm{M}_{\Sigma_6}^{\Psi}(\mathcal{I})\mathrm{M}_{\Psi}^{\Gamma}(\mathcal{X})\mathrm{M}_{\Gamma}^{\Sigma_5}(\mathcal{I}) = \mathrm{M}_{\Sigma_6}^{\Psi}(\mathcal{I})\mathrm{M}_{\Psi}^{\Gamma}(\mathcal{X})(\mathrm{M}_{\Sigma_5}^{\Gamma}(\mathcal{I}))^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -5 & 14 & 0 & 0 & -7 \\ -5 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -10 & 0 & 0 & 9 \\ -2 & 4 & 0 & 0 & -6 \\ -2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ -7 & 18 & 0 & 0 & -21 \end{bmatrix}.$$

Matriko Y dobiš po receptu iz naloge 121 takole:

$$Y = \mathrm{M}_{\Sigma_5}^{\Sigma_4}(\mathcal{Y}) = \mathrm{M}_{\Sigma_5}^{\Omega}(\mathcal{I})\mathrm{M}_{\Omega}^{\Pi}(\mathcal{Y})\mathrm{M}_{\Pi}^{\Sigma_4}(\mathcal{I}) = \mathrm{M}_{\Sigma_5}^{\Omega}(\mathcal{I})\mathrm{M}_{\Omega}^{\Pi}(\mathcal{Y})(\mathrm{M}_{\Sigma_4}^{\Pi}(\mathcal{I}))^{-1}.$$

Po množenju matrik končno dobiš

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

⋙ 121., 213.

Determinante

Rešitev 215. naloge

1. način reševanja. Z Gaussovo eliminacijo po vrsticah (in stolpcih) pridelaj zgornje trikotno matriko, katere determinanta je produkt njenih diagonalcev:

$$
\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & -3 & 10 \\ 0 & -1 & 4 & -6 \\ 0 & -5 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & -19 & 34 \\ 0 & 0 & -20 & 39 \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -20 & 39 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -61 \end{vmatrix} = -61.
\end{aligned}
$$

2. način reševanja. Ker sta v zadnjem stolpcu dve ničli, je smiselno razviti determinanto po tem stolpcu. Zato je

$$
D = (-3)(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & -5 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 4(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}.
$$

Dobljeni determinanti matrik velikosti 3×3 izračunaj z Gaussovim postopkom ali spet razvij po vrstici ali stolpcu, ki ima največ ničel; pri prvi je to prva vrstica, pri drugi take ni, zato lahko vzameš prvo:

$$
\begin{aligned}
D &= 3\left(2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\right) \\
&\quad + 4\left(1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\right) \\
&= 3(2(-17) - 13) + 4(-17 - 2(-12) + 13) \\
&= -61.
\end{aligned}
$$

3. način reševanja. Včasih je najbolje uporabiti mešanico obeh metod. Gaussovo eliminacijo uporabi za pridobivanje ničel, potem pa determinanto razvij po tisti vrstici ali stolpcu, ki ima največ ničel. V našem primeru najprej v četrtem stolpcu pridelaj še eno ničlo tako, da prvo vrstico pomnožiš s 4 in prišteješ drugo vrstico, pomnoženo s 3:

$$
D = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 10 & 8 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \\ -2 & -5 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}4(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 10 & 8 & 1 \\ -2 & -5 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}.
$$

Ker so v zadnjem stolpcu absolutne vrednosti številk najmanjše, je zdaj smiselno pridelati (v

tem stolpcu) čimveč ničel in potem determinanto razviti po tem stolpcu:

$$
\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} 10 & 8 & 1 \\ -22 & -21 & 0 \\ -27 & -23 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -22 & -21 \\ -27 & -23 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -22 & 1 \\ -27 & 4 \end{vmatrix} \\
&= (-22)\cdot 4 - (-27)\cdot 1 \\
&= -61.
\end{aligned}
$$

Rešitev 216. naloge

Označi podano determinanto z D.
1. način reševanja. Izračunaj

$$
D = \cos\phi \sin\theta + \sin\phi\cos\theta = \sin(\phi + \theta) = \sin\pi = 0.
$$

2. način reševanja. Ker sta kota ϕ in θ suplementarna, velja $\cos\phi = \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$ in $\sin\phi = \sin(\pi - \theta) = \sin\theta$. Zato je

$$
D = \begin{vmatrix} -\cos\theta & -\cos\theta \\ \sin\theta & \sin\theta \end{vmatrix} = 0.
$$

Rešitev 217. naloge

Možen potek izračuna je naslednji. V zadnji vrstici pridelaj ničli in po tej vrstici razvij determinanto, pa dobiš

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 4-5i & 1-2i & 2-i \\ 11-i & 3-i & i+2 \\ -1 & -i & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6-6i & 2 & 2-i \\ 13 & 2+i & i+2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\
&= 6(1-i)(2+i) - 26 = 6(3-i) - 26 = -8 - 6i.
\end{aligned}
$$

Rešitev 218. naloge

1. način reševanja. Opazi, da ima matrika, katere determinanto računaš, v bločnem zapisu (s kvadratnima matrikama po diagonali) en ničelni blok, zato je

$$
\left|\begin{array}{c|c} X & 0 \\ \hline Y & Z \end{array}\right| = \det X \det Z.
$$

Torej trditev drži.
2. način reševanja. Razvij determinanto po zadnjem stolpcu in potem dobljeni determinanti spet po zadnjem stolpcu. Tako izračunaš $D = 9$.

Opomba *Seveda lahko računaš tudi drugače.*

Rešitev 219. naloge

Upoštevaj, da je D determinanta bločne zgornje trikotne matrike, in da je zato D enaka produktu determinant diagonalnih blokov, takole:

$$\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -6 \end{vmatrix} \\
&= 2 \cdot 4 \cdot (-32) \\
&= -256.
\end{aligned}$$

Opomba *Pomni, kako se računa determinanta bločne zgornje (spodnje) trikotne matrike. Premisli, da je determinanta matrike s celimi koeficienti celo število. To upoštevaj pri preverjanju izračunanih determinant.*

Rešitev 220. naloge

Opazi, da so koeficienti v prvem stolpcu deljivi s 7, v drugem z 11,... Zato lahko izpostaviš ta števila in število 19^3, in dobiš

$$D = 7 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 19^{3 \cdot 5} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19^{15} \cdot 23 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19^{15} \cdot 23 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -11 & -8 \\ 0 & 0 & -4 & -11 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19^{15} \cdot 23 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19^{15} \cdot 23 \cdot (-2) \cdot (-11) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2 \cdot 19^{15} \cdot 23.$$

Rešitev 221. naloge

Premisli, da lahko zadnji stolpec linearno izraziš s prvimi štirimi takole: prvi stolpec pomnožiš s 1000, mu prišteješ 100-kratnik drugega, potem 10-kratnik tretjega in končno še četrti stolpec. Zato so stolpci podane matrike linearno odvisni, torej je njena determinanta enaka 0.

Rešitev 222. naloge

Označi

$$A_i := \begin{bmatrix} i & i-1 \\ i+1 & i \end{bmatrix}.$$

Treba je izračunati $\det(A_1 A_2 \cdots A_n)$. Ker je determinanta produkta matrik enaka produktu determinant istih matrik, velja

$$\det(A_1 A_2 \cdots A_n) = \det A_1 \det A_2 \cdots \det A_n = 1 \cdot 1 \cdots 1 = 1,$$

saj je $\det A_i = 1$ za vsak $i \in \mathbb{N}$.

Rešitev 223. naloge

1. način reševanja. Uvedi konstanto $a := 1111111111$ in zapiši podani izraz kot

$$(2a-3)(3a+2) - (6a+1)(a-1) = (6a^2 - 5a - 6) - (6a^2 - 5a - 1) = -5.$$

2. način reševanja. Zapiši podani izraz kot determinanto 2×2 matrike:

$$D := \begin{vmatrix} 2222222219 & 1111111110 \\ 6666666667 & 3333333335 \end{vmatrix}. \tag{104}$$

Ko v matriki (104) odšteješ od druge vrstice trikratnik prve, dobiš enakost

$$D = \begin{vmatrix} 2222222219 & 1111111110 \\ 10 & 5 \end{vmatrix}.$$

Zdaj odštej od prvega stolpca dvakratnik drugega in zapiši

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 1111111110 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -5.$$

Rešitev 224. naloge

Označi $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Potem velja

$$\begin{aligned}
A^{t} E A = E \quad &\iff \quad \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&\iff \quad \begin{bmatrix} 0 & bc - ad \\ ad - bc & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&\iff \quad ad - bc = 1 \\
&\iff \quad \det A = 1.
\end{aligned}$$

Rešitev 225. naloge

Iz podatkov sledi, da je v matriki A kvečjemu $n-1$ koeficientov različnih od 0.
1. način. Oglej si obrazec za determinanto

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

in sklepaj, da je vsak člen enak 0, saj je vsaj en od faktorjev $a_{1\sigma(1)}, a_{2\sigma(2)}, \ldots, a_{n\sigma(n)}$ (ki so različni koeficienti matrike A) enak 0.
2. način. Opazi, da je vsaj ena vrstica (oziroma stolpec) matrike A ničelna.

Rešitev 226. naloge

Označi podano matriko z J_n.
1. način reševanja. Iz definicije determinante vidiš, da je determinanta enaka $\operatorname{sgn}(\pi)$, kjer je π permutacija

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & n-1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Torej je $\det J_n = \operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.
2. način reševanja. Če razviješ determinanto po prvem stolpcu, dobiš rekurzivno zvezo

$$J_n = (-1)^{n+1} J_{n-1},$$

torej

$$J_n = (-1)^{n+1}(-1)^n \cdots (-1)^3 J_1 = (-1)^{(n+1)+n+\cdots+3} = (-1)^{\frac{(n+2)(n+1)}{2}-3} = (-1)^{\frac{(n+4)(n-1)}{2}}$$

kjer upoštevaš, da je $J_1 = 1$.
3. način reševanja. Z zamenjavo prve in zadnje vrstice matrike J_n, druge in predzadnje,... dobiš identično matriko I. Torej je

$$\det J_n = (-1)^{[n/2]} \det I = (-1)^{[n/2]},$$

kjer je $[n/2]$ največje naravno število, ki ne presega $n/2$.

Opomba *Premisli, da so rezultati, izračunani po gornjih treh poteh, enaki.*

Rešitev 227. naloge

Ker so matrike kvadratne in velja $3A^2X = XB$, je $\det(3A^2X) = \det(XB)$. Iz lastnosti determinante sledi zato

$$\det(3I)\det(A^2)\det X = \det X \det B,$$

in odtod

$$3^n(\det A)^2 \det X = \det X \det B.$$

Upoštevaj enakost $\det B = \det A - 1$ in vpelji oznaki $a := \det A$, $x := \det X$, pa dobiš enačbo

$$(3^n a^2 - a + 1)x = 0.$$

Ker je diskriminanta $D = 1 - 4 \cdot 3^n$ kvadratne funkcije $f(a) := 3^n a^2 - a + 1$ negativna (saj je $n \in \mathbb{N}$), je $f(a) = 3^n a^2 - a + 1 > 0$ za vsak $a \in \mathbb{R}$. Zato je $x = 0$ oziroma $\det X = 0$.

Rešitev 228. naloge

Determinanto D_n razvij, naprimer, najprej po prvi vrstici, dobljeno novo determinanto pa po zadnjem stolpcu, takole:

$$D_n = (-1)^n \cdot 1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n \cdot (-1)^n \cdot 2 \cdot D_{n-2} = 2D_{n-2}.$$

Ker je $D_2 = 2$ in $D_3 = 0$, lahko zapišeš predpis

$$D_n = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}}, & \text{če je } n \text{ sod,} \\ 0, & \text{če je } n \text{ lih,} \end{cases}$$

in ga dokažeš z indukcijo.

Opomba *Poskusi izračunati podobno determinanto, kjer nadomestiš* 1 *z* $a \in \mathbb{R}$ *in* 2 *z* $b \in \mathbb{R}$*!*
⋙ 232.

Rešitev 229. naloge

Najprej napiši in si oglej matriko

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots & (-1)^n & (-1)^{n+1} \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (-1)^n & (-1)^{n+1} \end{bmatrix}.$$

Pri računanju determinante $D_n = \det A_n$ odštej vse sode vrstice matrike A_n od prve vrstice in sklepaj, da je

$$D_n = \begin{cases} 0, & \text{če je } n \text{ sod;} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}, & \text{če je } n \text{ lih.} \end{cases}$$

Rešitev 230. naloge

Pri $n = 1$ je $A = [2]$, $B = [0]$ in zato je $\det A = 2$ in $\det B = 0$. Za $n = 2$ velja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

zato $\det A = -1$ in $\det B = 1$. Če je $n \geq 3$, potem zapiši

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & \cdots & n+2 \\ 4 & 5 & \cdots & n+3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n+1 & n+2 & \cdots & 2n \end{bmatrix}.$$

Če odštevaš drugo vrstico od tretje in prvo od druge, dobiš enaki vrstici. Zato je $\det A = 0$. Podobno sklepaj, da je $\det B = 0$ za $n \geq 3$.

Rešitev 231. naloge

Iskano determinanto označi z D_n in jo razvij po zadnji vrstici. Tako pridelaš rekurzivno zvezo

$$D_n = (-1)^{n+1}b(-1)^n ba^{n-2} + aD_{n-1} = aD_{n-1} - a^{n-2}b^2. \tag{105}$$

Izračunaj $D_2 = a^2 - b^2$, $D_3 = a^3 - 2ab^2$, $D_4 = a^4 - 3a^2b^2$ in postavi domnevo

$$D_n = a^n - (n-1)a^{n-2}b^2 \qquad \text{za vsak } n \geq 2. \tag{106}$$

Dokaži jo z indukcijo:

(a) Za $n = 2$ obrazec (106) očitno drži.

(b) Indukcijski korak: Predpostavi, da obrazec (106) velja za neki $n \geq 2$. Uporabi (105) in računaj

$$D_{n+1} = aD_n - a^{n-1}b^2 = a(a^n - (n-1)a^{n-2}b^2) - a^{n-1}b^2 = a^{n+1} - na^{n-1}b^2.$$

Torej obrazec (106) drži tudi za $n+1$.

Rešitev 232. naloge

Najmanjša primera sta $D_2 = -ab$ in $D_3 = 0$. Če je $n \geq 4$, razvij determinanto D_n po prvem stolpcu, dobljeno $(n-1) \times (n-1)$ determinanto pa po prvi vrstici. Dobiš

$$D_n = (-a)bD_{n-2} = -abD_{n-2}.$$

Zaporedje D_n je torej sestavljeno iz dveh geometrijskih podzaporedij. Zapiši predpis

$$D_n = \begin{cases} (-ab)^{\frac{n}{2}}, & \text{če je } n \text{ sodo;} \\ 0, & \text{če je } n \text{ liho,} \end{cases}$$

in ga dokaži z indukcijo.

⋙ 228.

Rešitev 233. naloge

1. način reševanja. Opazi, da vrednosti $x = 1$, $x = 2, \ldots$, $x = n-1$ ustrezajo enačbi, ker je pri $x = 1$ prvi stolpec enak zadnjemu, pri $x = 2$ drugi stolpec enak zadnjemu,... (Oziroma: pri $x = 1$ sta prva in zadnja vrstica linearno odvisni,...) Ali je lahko ničel še več? Ker je leva stran enačbe polinom $(n-1)$-stopnje, ima enačba natanko $n-1$ ničel. Zato so rešitve enačbe natanko $x = 1$, $x = 2$, $\ldots$, $x = n-1$.

2. način reševanja. Odštej zadnji stolpec od ostalih. Dobiš

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & x-2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & 0 & x-3 & \cdots & 0 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-n+1 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} = 0$$

oziroma enakovredno enačbo

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-(n-1))n = 0.$$

Sklepaj, da so njene rešitve natanko $x = 1$, $x = 2$, $\ldots$, $x = n-1$.

Rešitev 234. naloge

Za vsak i izpostavi x^{i-1} iz i-te vrstice in dobiš

$$p_n(x) = x^{1+2+\cdots+n} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \ldots & x^n \\ 1 & 1 & x & x^2 & \ldots & x^{n-1} \\ 1 & 1 & 1 & x & \ldots & x^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

Zdaj odštej zadnjo vrstico od ostalih:

$$p_n(x) = x^{1+2+\cdots+n} \begin{vmatrix} 0 & x-1 & x^2-1 & x^3-1 & \ldots & x^n-1 \\ 0 & 0 & x-1 & x^2-1 & \ldots & x^{n-1}-1 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 & \ldots & x^{n-2}-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

Determinanto razvij po prvem stolpcu, nato upoštevaj, da je determinanta zgornje trikotne matrike enaka produktu njenih diagonalnih koeficientov:

$$p_n(x) = x^{\frac{n(n+1)}{2}}(-1)^{(n+1)+1}(x-1)^n = x^{\frac{n(n+1)}{2}}(1-x)^n.$$

Polinom p_n ima dve ničli: 0 kratnosti $\frac{n(n+1)}{2}$ in 1 kratnosti n.

Rešitev 235. naloge

1. način reševanja. Očitno je $p_n(a_1) = 0$, saj sta v tem primeru prva in druga vrstica enaki (pa tudi prvi in zadnji stolpec sta kolinearna). Podobno opazi, da je $p_n(a_2) = 0$, ker sta druga in tretja vrstica enaki (oziroma je vsota prvega in drugega stolpca kolinearna z zadnjim). Podobno sklepaj, da je $p_n(a_i) = 0$, za vsak $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Ker je p_n realni polinom n-te stopnje, ki je enak nič v n različnih točkah a_i, so te točke natanko vse rešitve podane enačbe.

2. način reševanja. Od i-tega stolpca ($i = 1, 2, \ldots, n$) odštej z a_i pomnožen zadnji stolpec, pa dobiš zgornje trikotno matriko. Produkt njenih diagonalcev je enak $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$, torej so ničle polinoma p_n števila $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

3. način reševanja. Označi podano determinanto z $D(x, a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Če drugo vrstico odštevaš od prve in dobljeno determinanto razviješ po prvi vrstici, dobiš rekurzivno zvezo

$$D(x, a_1, a_2, \ldots, a_n) = (x - a_1)D(x, a_2, \ldots, a_n),$$

ki te pripelje do rešitve

$$p_n(x) = D(x, a_1, a_2, \ldots, a_n) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n).$$

Opomba *Opazi, da 2. in 3. način reševanja delujeta brez predpostavke, da so števila $a_1, \ldots, a_n$ paroma različna.*

⊳⊳⊳ 234.

Rešitev 236. naloge

Označi iskano determinanto z $D(\lambda, a_0, a_1, \ldots, a_n)$ – pozor, velikost matrike je $(n+1) \times (n+1)$ – in jo razvij po prvi vrstici:

$$\begin{aligned} D(\lambda, a_0, a_1, \ldots, a_n) &= (-1)^{1+1}\lambda D_n(\lambda, a_1, a_2, \ldots, a_n) + (-1)^{1+(n+1)}a_0(-1)^n \\ &= \lambda D(\lambda, a_1, a_2, \ldots, a_n) + a_0. \end{aligned}$$

Gornjo rekurzijsko zvezo opremi še z začetnim členom $D(\lambda, a_0, a_1) = a_0 + a_1\lambda$, postavi domnevo

$$D(\lambda, a_0, a_1, \ldots, a_n) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_n\lambda^n$$

in jo dokaži z indukcijo.

⊳⊳⊳ 289.

Rešitev 237. naloge

Označi iskano determinanto z D.

1. način reševanja. Ker je v vsaki vrstici vsota koeficientov ista, prištej vse stolpce zadnjemu in izpostavi dobljen izraz, pa dobiš

$$D = (x + (n-1)a) \cdot \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & 1 \\ a & x & a & \cdots & 1 \\ a & a & x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

K vsakemu stolpcu (razen zadnjemu) prištej z $(-a)$ pomnoženi zadnji stolpec in dobiš

$$D = (x + (n-1)a) \cdot \begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x + (n-1)a)(x-a)^{n-1}.$$

2. način reševanja. Če ne opaziš gornjega trika, te je mogoče vzpodbudila podobnost sosednjih stolpcev. Zato od zadnjega stolpca odštej predzadnjega, od predzadnjega odštej tistega pred njim, itd. Nedotaknjen ostane edino prvi stolpec:

$$D = \begin{vmatrix} x & a-x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & x-a & a-x & \cdots & 0 & 0 \\ a & 0 & x-a & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & 0 & 0 & \cdots & x-a & a-x \\ a & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-a \end{vmatrix}.$$

Ker so si koeficienti na diagonali in nad njo ravno nasprotni, se odločiš, da spodnjo vrstico prišteješ predzadnji, nato predzadnjo tisti pred njo, itd.

$$D = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ (n-1)a & x-a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ (n-2)a & 0 & x-a & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2a & 0 & 0 & \cdots & x-a & 0 \\ a & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-a \end{vmatrix} = (x + (n-1)a)(x-a)^{n-1}.$$

Zadnji enačaj pa seveda velja, ker je matrika spodnje trikotna.

3. način reševanja. Označi iskano determinanto s $p_n(x)$. Opazi, da je $p_n(x)$ polinom n-te stopnje v nedoločenki x. Odvajaj determinanto po x, pa dobiš rekurzivno zvezo

$$p_n' = np_{n-1}.$$

Če upoštevaš še enakosti $p_n(a) = 0$, $p_1(x) = x$ in $p_2(x) = (x-a)(x+a)$, lahko postaviš domnevo $p_x(x) = (x + (n-1)a)(x-a)^{n-1}$, ki jo dokažeš z indukcijo.

Opomba *Preveri, če rezultat drži za matrike velikosti* 1×1, 2×2 *in* 3×3.
Pomni uporabni zvijači pri računanju determinant:
Če so si vrstice zelo podobne, jih je smiselno odšteti, saj tako pridelaš dosti ničel.
Če pa je vsota po vrsticah enaka, je smiselno sešteti vse stolpce, saj lahko na ta način pridelaš stolpec s samimi enicami ali ničlami. (Podobno velja za stolpce.)

⊳⊳⊳ 238., 242.

Rešitev 238. naloge

Označi iskano determinanto z D. V tem primeru nimaš konstantne vsote po vrsticah kot v nalogi 237, toda sosednji stolpci so si kar močno podobni. Zato drugi stolpec odšteješ od prvega, tretjega od drugega, itd:

$$D = \begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \\ -x-a & x-a & 0 & \cdots & 0 & a \\ 0 & -x-a & x-a & \ddots & 0 & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x-a & x \end{vmatrix}.$$

Zdaj se splača zadnji stolpec pomnožiti z 2, ker je potem vsota koeficientov v večini vrstic enaka 0. Nato vse stolpce prišteješ zadnjemu:

$$D = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 & \cdots & 0 & x+a \\ -x-a & x-a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x-a & x-a & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x-a & x-a \end{vmatrix} = \frac{(x-a)^n + (x+a)^n}{2}.$$

Pri zadnjem enačaju razviješ determinanto po prvi vrstici.

⊳⊳⊳ 237.

Rešitev 239. naloge

($\Rightarrow$). Ker so v matriki A^{-1} vsi koeficienti cela števila, je tudi $\det(A^{-1})$ celo število. Ker je matrika A sestavljena iz celoštevilskih koeficientov, je tudi $\det A$ celo število (spomni se definicije determinante!). Poleg tega velja $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$, torej je $\frac{1}{\det A}$ celo število, zato je $\det A = \pm 1$.
($\Leftarrow$). Naj velja $|\det A| = 1$. Potem je

$$A^{-1} = \frac{A^P}{\det A} = \pm A^P, \tag{107}$$

Kofaktorji, iz katerih je sestavljena prirejenka A^P, so cela števila, saj so koeficienti matrike A cela števila. Zato so tudi koeficienti matrike A^{-1} cela števila.

Rešitev 240. naloge

Ker je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je $\det A \in \mathbb{C}$. Da dokažeš $\det A \in \mathbb{R}$, zadošča preveriti, da je $\overline{\det A} = \det A$, takole:

$$\begin{aligned}\overline{\det A} &= \overline{\textstyle\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}}\\ &= \textstyle\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \overline{a_{1\sigma(1)}}\,\overline{a_{2\sigma(2)}}\cdots\overline{a_{n\sigma(n)}}\\ &= \textstyle\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}\\ &= \det A^{\mathrm{t}}\\ &= \det A.\end{aligned}$$

Rešitev 241. naloge

Izračunaj

$$\det A = \det A^{\mathrm{t}} = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A.$$

Torej je $\det A = -\det A$, zato je $\det A = 0$.

⊳⊳⊳ 251.

Rešitev 242. naloge

Označi levo stran enakosti (23) z Leva(x) in desno z Desna(x). Odvajaj definicijo determinante, pa dobiš

$$\begin{aligned}\text{Desna}(x) &= \tfrac{d}{dx}\left(\textstyle\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}(x)a_{2\sigma(2)}(x)\cdots a_{n\sigma(n)}(x)\right)\\ &= \textstyle\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \tfrac{d}{dx}(a_{1\sigma(1)}(x)a_{2\sigma(2)}(x)\cdots a_{n\sigma(n)}(x))\\ &= \textstyle\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \sum_{k=1}^n a_{1\sigma(1)}(x)a_{2\sigma(2)}(x)\cdots a'_{k\sigma(k)}(x)\cdots a_{n\sigma(n)}(x)\\ &= \textstyle\sum_{k=1}^n \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}(x)a_{2\sigma(2)}(x)\cdots a'_{k\sigma(k)}(x)\cdots a_{n\sigma(n)}(x)\\ &= \text{Leva}(x).\end{aligned}$$

⊳⊳⊳ 237., 243.

Rešitev 243. naloge

Pri $p(0)$ dobiš matriko, ki ima prvo vrstico ničelno, zato je $p(0) = 0$. Pri $p(1)$ dobiš v prvi vrstici dvakratnik zadnje, zato je $p(1) = 0$. Pri računanju odvoda determinante uporabi obrazec iz naloge 242:

$$p'(x) = \begin{vmatrix} 6x^5+1 & 5x^4+1 & 4x^3+1 & 3x^2+1 & 2x+1\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25\\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}.$$

Zato sklepaš: $p'(0) = 0$, saj dobiš v matriki enako prvo in zadnjo vrstico, ter $p'(1) = 0$, saj je v tem primeru prva vrstica enaka četrti.

⊳⊳⊳ 242.

Rešitev 244. naloge

Ker je matrika, ki nastopa v definiciji funkcije f, bločna, lahko hitro izračunaš

$$f(x) = \begin{vmatrix} x^2 & -1\\ a & x^2+b\end{vmatrix}\begin{vmatrix} -3 & 5 & 1\\ 6 & -3 & -1\\ -4 & 5 & 1\end{vmatrix} = 2(x^4+bx^2+a).$$

Zapiši $f(x) = 2(x^4+bx^2+a) = 2((x^2)^2+b(x^2)+a)$ in uvedi funkcijo $g(t) := 2(t^2+bt+a)$. Sklepaj: funkcija f je pozitivna natanko takrat, ko kvadratna funkcija g preslika množico $\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ v pozitivna števila. Zdaj loči dva primera in si pri razmišljanju pomagaj s sliko grafa kvadratne funkcije g:

(a) Če se nahaja teme parabole levo od ordinatne osi, je g pozitivna na $\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ natanko takrat, ko je $g(0) > 0$. Torej: če je $-b/2 < 0$, dobiš pogoj $0 < g(0) = a$.

(b) Če se nahaja teme parabole desno od ordinate, je g pozitivna na $\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ natanko takrat, ko je vrednost funkcije g v temenu pozitivna. Torej: če je $-b/2 \geq 0$, dobiš pogoj $0 < g(-b/2) = 2(b^2/4 - b^2/2 + a)$ ali ekvivalentno $b^2/4 < a$.

Zato je množica rešitev enaka

$$\{(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}|\ (b>0 \text{ in } a>0) \text{ ali } (b\leq 0 \text{ in } b^2<4a)\}.$$

Rešitev 245. naloge

Zapiši

$$x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^{\mathrm{t}}, \quad y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]^{\mathrm{t}}.$$

Potem je

$$xy^{\mathrm{t}} = \begin{bmatrix} x_1y_1 & \cdots & x_1y_n\\ \vdots & & \vdots\\ x_ny_1 & \cdots & x_ny_n\end{bmatrix}, \quad y^{\mathrm{t}}x = [y_1x_1 + \cdots + y_nx_n].$$

Če je $n = 1$, je $xy^{\mathrm{t}} = [x_1y_1]$, in zato $\det(xy^{\mathrm{t}}) = x_1y_1$.

Če je $n > 1$, opazi da so stolpci (ali vrstice) paroma linearno odvisni, zato je v tem primeru $\det(xy^t) = 0$.

Ker je $y^t x = [y_1x_1 + y_2x_2 + \ldots + y_nx_n]$, je $\det(y^t x) = y_1x_1 + y_2x_2 + \ldots + y_nx_n$.

⋙ 157., 246.

Rešitev 246. naloge

Iz predpostavk sledi, da je $\operatorname{rang}(X) \leq m$ in $\operatorname{rang}(Y) \leq m$. Po nalogi 112 je $\operatorname{rang}(XY) \leq \min\{\operatorname{rang}(X), \operatorname{rang}(Y)\} \leq m$. Ker je YX matrika velikosti $n \times n$, ki ima rang manjši ali enak m, in je $m < n$, je $\det(YX) = 0$.

Pri predpostavkah naloge ne velja nujno sklep $\det(XY) = 0$. Primer $X := [1,1] \in \mathbb{R}^{1\times 2}$, $Y := [1,1]^t \in \mathbb{R}^{2\times 1}$, $\det(XY) = \det([2]) = 2 \neq 0$.

⋙ 245.

Rešitev 247. naloge

Označi podano determinanto z $V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Odštej prvi stolpec v matriki od vseh ostalih in dobiš

$$V(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2-\alpha_1 & \alpha_3-\alpha_1 & \cdots & \alpha_n-\alpha_1 \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2-\alpha_1^2 & \alpha_3^2-\alpha_1^2 & \cdots & \alpha_n^2-\alpha_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1}-\alpha_1^{n-1} & \alpha_3^{n-1}-\alpha_1^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1}-\alpha_1^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Uporabi obrazec

$$x^k - y^k = (x-y)(x^{k-1} + x^{k-2}y + \cdots + xy^{k-2} + y^{k-1}) = (x-y)\sum_{i=0}^{k-1} x^{k-1-i}y^i$$

na koeficientih matrike, kjer nastopa razlika oblike $\alpha_i^k - \alpha_1^k$, in nato v stolpcih izpostavi faktor $\alpha_i - \alpha_1$ ter razvij determinanto po prvi vrstici:

$$V(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) = (\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)\cdots(\alpha_n-\alpha_1)\cdot$$

$$\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_2+\alpha_1 & \alpha_3+\alpha_1 & \cdots & \alpha_n+\alpha_1 \\ \alpha_2^2+\alpha_2\alpha_1+\alpha_1^2 & \alpha_3^2+\alpha_3\alpha_1+\alpha_1^2 & \cdots & \alpha_n^2+\alpha_n\alpha_1+\alpha_1^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{n-2}\alpha_2^{n-2-i}\alpha_1^i & \sum_{i=0}^{n-2}\alpha_3^{n-2-i}\alpha_1^i & \cdots & \sum_{i=0}^{n-2}\alpha_n^{n-2-i}\alpha_1^i \end{vmatrix}.$$

Zdaj od druge vrstice odštej prvo, pomnoženo z α_1, nato od tretje prvo, pomnoženo z α_1^2, in drugo pomnoženo z $\alpha_1, \ldots$ (Ali pa takole: od zadnje vrstice odšteješ predzadnjo pomnoženo z α_1, nato od predzadnje tisto pred njo, pomnoženo z α_1, …, od druge prvo pomnoženo z α_1.) Tako pridelaš enakost

$$V(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) = (\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)\cdots(\alpha_n-\alpha_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \cdots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_2^{n-1} & \alpha_3^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)\cdots(\alpha_n-\alpha_1)V(\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n).$$

S pomočjo te rekurzivne zveze postaviš domnevo

$$V(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n) = \prod_{1\leq i<j\leq n}(\alpha_j - \alpha_i),$$

ki jo dokažeš z indukcijo.

Opomba *Premisli, da za zaporedje skalarjev $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ velja $V(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0$ natanko tedaj, ko sta vsaj dva skalarja v tem zaporedju enaka.*

Rešitev 248. naloge

Naj za neke $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ velja

$$c_1f_1 + \cdots + c_nf_n = 0.$$

Potem je

$$(c_1f_1 + \cdots + c_nf_n)(t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{C}$$

oziroma

$$c_1e^{\alpha_1 t} + \cdots + c_ne^{\alpha_n t} = 0, \quad \forall t \in \mathbb{C}. \tag{108}$$

Enačbo (108) smeš $(n-1)$-krat odvajati, da dobiš n enačb

$$\begin{array}{rcll} c_1e^{\alpha_1 t}+ & \cdots & +c_ne^{\alpha_n t} & = 0, \\ c_1\alpha_1e^{\alpha_1 t}+ & \cdots & +c_n\alpha_ne^{\alpha_n t} & = 0, \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_1\alpha_1{}^{n-1}e^{\alpha_1 t}+ & \cdots & +c_n\alpha_n{}^{n-1}e^{\alpha_n t} & = 0, \end{array}$$

ki vse veljajo za vsak $t \in \mathbb{C}$. Posebej, če izbereš $t = 0$, dobiš naslednji homogeni linearni sistem:

$$\begin{array}{rcll} c_1+ & \cdots & +c_n & = 0, \\ c_1\alpha_1+ & \cdots & +c_n\alpha_n & = 0, \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_1\alpha_1{}^{n-1}+ & \cdots & +c_n\alpha_n{}^{n-1} & = 0. \end{array}$$

Determinanta sistema je Vandermondeova determinanta

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

ki je neničelna, saj so skalarji α_i paroma različni. Torej je gornji homogeni linearni sistem le trivialno rešljiv:

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0.$$

Sklepaj, da so funkcije $f_1, \ldots, f_n$ linearno neodvisne.

Opomba *Pozor! Če v (108) vstaviš $t = 0, 1, \ldots, n-1$, dobiš linearen sistem z Vandermondeovo determinanto koeficientov $e^{\alpha_1}, e^{\alpha_2}, \ldots, e^{\alpha_n}$. Toda ti koeficienti niso nujno paroma različni! (Pač pa bi tako lahko sklepali v primeru, ko bi bili vsi koeficienti α_k realni.)*

Rešitev 249. naloge

Označi podano matriko z A. Nato izračunaj determinanti

$$D_1 := \begin{vmatrix} 1 & a & d \\ 1 & b & e \\ 1 & c & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b-a & e-d \\ 1 & c-a & f-d \end{vmatrix} = (b-a)(f-d) - (c-a)(e-d),$$

$$D_2 := \begin{vmatrix} 1 & a & ad \\ 1 & b & be \\ 1 & c & cf \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b-a & b(e-d) \\ 1 & c-a & c(f-d) \end{vmatrix} = c(b-a)(f-d) - b(c-a)(e-d).$$

Iz predpostavk sledi $b-a \neq 0$, $c-a \neq 0$, $f-d \neq 0$ in $e-d \neq 0$. Ali je lahko hkrati $D_1 = 0 = D_2$? Če bi bilo to res, bi bilo $b = 0 = c$, kar nasprotuje predpostavki, da podani trojici števil sestavljajo paroma različna števila. Zato je vsaj ena od determinant D_1 in D_2 neničelna. Torej je rang podane matrike A vsaj 3. Ker ima matrika A tri vrstice, je njen rang kvečjemu 3. Zato je $\operatorname{rang}(A) = 3$.

Rešitev 250. naloge

Determinanta endomorfizma je po definiciji enaka determinanti matrike, ki pripada endomorfizmu $\mathcal{A}$ v poljubni bazi prostora $\mathbb{R}^3$. Naj bo $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ in izberi običajno urejeno bazo Σ prostora $\mathbb{R}^3$. Izračunaj $\mathcal{A}\vec{\imath} = \vec{\imath} + (\vec{\imath}\vec{a})\vec{a} = (1 + a_1^2, a_1a_2, a_1a_3)$ in podobno še $\mathcal{A}\vec{\jmath}$ in $\mathcal{A}\vec{k}$, pa dobiš

$$\det \mathcal{A} = \det \mathrm{M}_\Sigma^\Sigma(\mathcal{A}) = \det \begin{bmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_1a_2 & 1+a_2^2 & a_2a_3 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & 1+a_3^2 \end{bmatrix} =$$

$$= 1 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 + \vec{a}^2.$$

Opomba *Posplošitvi:*

- *Reši podoben problem za preslikavo* $\vec{x} \mapsto \vec{x} + (\vec{x}\vec{a})\vec{b}$.
- *Bodi* $\mathcal{A}$ *endomorfizem prostora* $\mathbb{R}^n$ *s predpisom* $\mathcal{A}$: $x \mapsto x + \langle x, a\rangle a$, *kjer je* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *običajni skalarni produkt na* $\mathbb{R}^n$. *Potem je* $\det \mathcal{A} = 1 + \|a\|^2$.

⋙ 251., 254., 329.

Rešitev 251. naloge

1. način. Velja je $\mathcal{B}\vec{b} = \vec{0}$, torej je jedro $\operatorname{Ker}\mathcal{B}$ neničelno. Zato $\mathcal{B}$ ni obrnljiv, in odtod sledi $\det \mathcal{B} = 0$.
2. način. Naj bo $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Izpiši matriko, ki pripada endomorfizmu $\mathcal{B}$ v običajni urejeni bazi prostora $\mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{M}_\Sigma^\Sigma(\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & -b_3 & b_2 \\ b_3 & 0 & -b_1 \\ -b_2 & b_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Po kratkem računu dobiš $\det \mathcal{B} = \det \mathrm{M}_\Sigma^\Sigma(\mathcal{B}) = 0$ (ali pa uporabiš rezultat naloge 241).

⋙ 241., 250., 452.

Rešitev 252. naloge

Ker vektorji $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ razpenjajo paralelepiped z neničelno prostornino, so nekomplanarni, in zato sestavljajo bazo $\Psi := \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ prostora $\mathbb{R}^3$. Podobno sklepaš, da je $\Omega := \{\vec{d}, \vec{e}, \vec{f}\}$ baza prostora $\mathbb{R}^3$. Če označiš $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ in podobno še ostale vektorje, lahko zapišeš

$$\mathrm{M}_\Sigma^\Sigma(\mathcal{A}) = \mathrm{M}_\Sigma^\Omega(\mathcal{I})\mathrm{M}_\Omega^\Psi(\mathcal{A})\mathrm{M}_\Psi^\Sigma(\mathcal{I}) =$$

$$= \begin{bmatrix} d_1 & e_1 & f_1 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ d_3 & e_3 & f_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}^{-1}.$$

(Pri tem je Σ običajna urejena baza prostora $\mathbb{R}^3$.) Zato je

$$\det \mathcal{A} = \det \mathrm{M}_\Sigma^\Sigma(\mathcal{A}) = \det \mathrm{M}_\Psi^\Omega(\mathcal{I}) \det \mathrm{M}_\Omega^\Psi(\mathcal{A}) \det \mathrm{M}_\Psi^\Sigma(\mathcal{I}) =$$

$$= (\vec{d}, \vec{e}, \vec{f}) \cdot 1 \cdot (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^{-1} = \frac{11}{7}.$$

Rešitev 253. naloge

Premisli, da je matrika, ki pripada preslikavi $\mathcal{B}$ v urejeni bazi

$$\Omega := \{E_{11}, E_{21}, \ldots, E_{n1}, \ldots, E_{1n}, E_{2n} \ldots, E_{nn}\},$$

(pozor, to ni običajna urejena baza prostora $\mathbb{F}^{n\times n}$: obe sestojita iz istih vektorjev, toda v drugačnem vrstnem redu), enaka matriki

$$\mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{B}) = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & A & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & A \end{array}\right]. \tag{109}$$

Ker je matrika (109) bločno diagonalna, je

$$\det \mathcal{B} = \det \mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{B}) = (\det A)^n.$$

Rešitev 254. naloge

(b) Najprej določi matriko

$$\mathrm{M}_\Psi^\Sigma(\mathcal{M}_t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+2t & 6t \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

in si z njo pomagaj pri ostalih točkah.

(a) S pomočjo Gaussovega postopka po vrsticah dobiš: $\operatorname{Ker} \mathrm{M}_{\Psi}^{\Sigma}(\mathcal{M}_t) = \{[0,0,0,0]^t\}$, če je $t \neq -1$, in $\operatorname{Ker} \mathrm{M}_{\Psi}^{\Sigma}(\mathcal{M}_t) = \mathcal{L}\{[-1,0,2,0]^t\}$, če je $t = -1$. Zato je

$$\operatorname{Ker} \mathcal{M}_t = \{0\}, \text{ če je } t \neq -1,$$

in

$$\operatorname{Ker} \mathcal{M}_t = \mathcal{L}\{-1 + 2x^2\}, \text{ če je } t = -1.$$

Če je $t \neq -1$, iz enačbe

$$\dim \operatorname{Ker} \mathcal{M}_t + \dim \operatorname{Im} \mathcal{M}_t = \dim \mathbb{R}_3[x]$$

dobiš $\dim \operatorname{Im} \mathcal{M}_t = 4$. Ker je $\dim \mathbb{R}^{2\times 2} = 4$ in je $\operatorname{Im} \mathcal{M}_t \leq \mathbb{R}^{2\times 2}$, je $\operatorname{Im} \mathcal{M}_t = \mathbb{R}^{2\times 2}$. Če je $t = -1$, dobiš s pomočjo Gaussovega postopka po stolpcih rezultat

$$\operatorname{Im} \mathrm{M}_{\Psi}^{\Sigma}(\mathcal{M}_{-1}) = \mathcal{L}\{[1,0,0,0]^t, [0,1,0,0]^t, [0,0,-1,1]^t\},$$

zato je

$$\operatorname{Im} \mathcal{M}_{-1} = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

(c) Determinanta preslikave $\mathcal{M}_t$ ne obstaja, ker $\mathcal{M}_t$ ni endomorfizem.

Lastne vrednosti in lastni vektorji

Rešitev 255. naloge

Presek $U \cap V$ in vsota $U + V$ sta podprostora v W. Preveriti moraš še njuno invariantnost. Ker sta U in V invariantna podprostora endomorfizma $\mathcal{A}$, velja $\mathcal{A}U \leq U$ in $\mathcal{A}V \leq V$.

Vzemi poljuben $w \in U \cap V$. Ker je $w \in U$, je po predpostavki $\mathcal{A}w \in U$. Podobno iz $w \in V$ sledi $\mathcal{A}w \in V$. Torej je $\mathcal{A}w \in U \cap V$. Sklepaj, da je $\mathcal{A}(U \cap V) \leq U \cap V$, presek $U \cap V$ je invarianten za $\mathcal{A}$.

Vzemi poljuben $w \in U + V$, torej $w = u + v$ za neka $u \in U$ in $v \in V$. Iz aditivnosti preslikave $\mathcal{A}$ dobiš $\mathcal{A}w = \mathcal{A}(u+v) = \mathcal{A}u + \mathcal{A}v$. Po predpostavki je $\mathcal{A}u \in U$ in $\mathcal{A}v \in V$, zato je $\mathcal{A}w \in U + V$. Sklepaj, da je $\mathcal{A}(U + V) \leq U + V$, vsota $U + V$ je invariantna za $\mathcal{A}$.

⊳⊳⊳ 257., 259.

Rešitev 256. naloge

(a) Dokaži, da je $\mathcal{A}U_1 \subseteq U_1$: Vzemi poljubni vektor $v \in U_1$. Iz definicije podprostora U_1 sledi, da je $v = (x, x, z, 0)$ za neka $y, z \in \mathbb{R}$. Izračunaj $\mathcal{A}v = (x - 3z, x - 3z, -2z, 0)$. Ker je $(x - 3z) - (x - 3z) = 0$, je $\mathcal{A}v \in U_1$.

(b) Iz definicije podprostora U_2 sledi, da je vektor $v = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ v U_2 natanko tedaj, ko je $v = (\alpha y, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$. Zato je U_2 invarianten za $\mathcal{A}$ natanko tedaj, ko je

$$\mathcal{A}(\alpha y, y, z, w) = (-\alpha y + 2y - 3z + 4w, y - 3z + 4w, -2z + 4w, 2w) \in U_2$$

za poljubne $y, z, w \in \mathbb{R}$, torej ko je $(-\alpha y + 2y - 3z + 4w) - \alpha(y - 3z + 4w) = 0$ za poljubne $y, z, w \in \mathbb{R}$. To velja natanko v primeru, ko je $\alpha = 1$.

(c) Razmišljaj podobno kot v prejšnji točki. Iz definicije podprostora U_3 sledi, da je vektor $v = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ v U_3 natanko tedaj, ko je $v = (\beta z, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$. Zato je U_3 invarianten za $\mathcal{A}$ natanko tedaj, ko je

$$\mathcal{A}(\beta z, y, z, w) = (-\beta z + 2y - 3z + 4w, y - 3z + 4w, -2z + 4w, 2w) \in U_3$$

za poljubne $y, z, w \in \mathbb{R}$, torej ko je $(-\beta z + 2y - 3z + 4w) - \beta(y - 3z + 4w) = 0$ za poljubne $y, z, w \in \mathbb{R}$. Ker tak $\beta \in \mathbb{R}$ ne obstaja, podprostor U_3 ni invarianten za $\mathcal{A}$ pri nobenem $\beta \in \mathbb{R}$.

(d) Vzemi naprimer vektor $v := (0, 1, -1, 0) \in U_4$. Izračunaj $\mathcal{A}v = (5, 4, 2, 0) \notin U_4$, zato U_4 ni invarianten podprostor za $\mathcal{A}$.

Rešitev 257. naloge

Ker je presek invariantnih podprostorov spet invarianten za isti endomorfizem (glej nalogo 255), smeš iz predpostavk sklepati, da so $\mathcal{L}\{v_1, v_2\}$, $\mathcal{L}\{v_1, v_3\}$ in $\mathcal{L}\{v_1, v_4\}$ invariantni podprostori endomorfizma $\mathcal{A}$, in zato je tak tudi $\mathcal{L}\{v_1\}$. Matriko lahko opišeš takole:

$$\mathrm{M}_{\Omega}^{\Omega}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}, \qquad a_{ij} \in \mathbb{F}.$$

⊳⊳⊳ 255.

Rešitev 258. naloge

Predpostavi, da je V pravi netrivialni invariantni podprostor za $\mathcal{B}$. Torej je $0 < V < \mathbb{R}^2$ in V je enorazsežen.

1. način. Če je $v \in V$ neničeln, potem $\mathcal{B}v$ pripada podprostoru V, saj je V invarianten za $\mathcal{B}$. Zato velja $\mathcal{B}v = \lambda_0 v$ za neki $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, skalar λ_0 je lastna vrednost operatorja $\mathcal{B}$. Ker karakteristični polinom $p_{\mathcal{B}}(\lambda) = \lambda^2 + 1$ ni razcepen nad $\mathbb{R}$, operator $\mathcal{B}$ nima nobene lastne vrednosti, protislovje.

2. način. Premisli, da je $\mathcal{B}$ zasuk ravnine za $-\pi/2$ okoli izhodišča. Enorazsežni prostori v $\mathbb{R}^2$ so premice skozi izhodišče. Kaj sklepaš?

Opomba *Matriko iz naloge nadomesti z matriko*

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}, \qquad \phi \in \mathbb{R}.$$

Kateri so invariantni podprostori operatorja $\mathcal{B}$?

⊳⊳⊳ 266.

Rešitev 259. naloge

V nalogi 255 se prepričaj, da je presek invariantnih podprostorov spet invarianten podprostor za isti operator. Zato sklepaj: če obstaja iskani operator $\mathcal{A}$, potem so tudi $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \mathcal{L}\{\vec{a} := (2,-3,1)\}$, $\Sigma_1 \cap \Sigma_3 = \mathcal{L}\{\vec{b} := (0,1,1)\}$ in $\Sigma_2 \cap \Sigma_3 = \mathcal{L}\{\vec{c} := (1,0,-1)\}$ njegovi invariantni podprostori.

Zdaj definiraj naprimer $\mathcal{A}\vec{a} := \vec{a}$, $\mathcal{A}\vec{b} := \vec{b}$ in $\mathcal{A}\vec{c} := \vec{0}$. Ker so vektorji $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linearno neodvisni, je taka definicija dobra (v smislu enoličnosti obstoja endomorfizma $\mathcal{A}$ – glej nalogo 102). Očitno je rang $(\mathcal{A}) = 2$. Ker velja $\Sigma_1 = \mathcal{L}\{\vec{a}, \vec{b}\}$, $\Sigma_2 = \mathcal{L}\{\vec{a}, \vec{c}\}$ in $\Sigma_3 = \mathcal{L}\{\vec{b}, \vec{c}\}$, so Σ_1, Σ_2, Σ_3 zaradi gornje definicije endomorfizma $\mathcal{A}$ njegovi invariantni podprostori.

⊳⊳⊳ 102., 255.

Rešitev 260. naloge

Iz (c) sledi (b) (vzemi $s := 1$), iz (b) pa (a) (vzemi $\lambda := 0$). Torej zadošča dokazati (c). Vzemi poljuben $x \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^s$. Dokazati želiš, da je $\mathcal{A}x \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^s$. Takole:

$$(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^s(\mathcal{A}x) = ((\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^s\mathcal{A})x = (\mathcal{A}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^s)x = \mathcal{A}((\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^s x) = \mathcal{A}0 = 0.$$

V gornji verigi velja drugi enačaj zato, ker $\mathcal{A}$ komutira s svojimi potencami in s skalarnimi endomorfizmi.

⊳⊳⊳ 261.

Rešitev 261. naloge

Za vsak $v \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$ je potrebno preveriti, ali je tudi $\mathcal{B}v \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}$. To narediš takole:

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}v) = (\mathcal{A}\mathcal{B})v = (\mathcal{B}\mathcal{A})v = \mathcal{B}(\mathcal{A}v) = \mathcal{B}0 = 0.$$

Torej je $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ invarianten za $\mathcal{B}$. Če je $v \in \operatorname{Im}\mathcal{A}$, potem velja $v = \mathcal{A}u$ za neki $u \in V$, zato je

$$\mathcal{B}v = \mathcal{B}(\mathcal{A}u) = (\mathcal{B}\mathcal{A})u = (\mathcal{A}\mathcal{B})u = \mathcal{A}(\mathcal{B}u) \in \operatorname{Im}\mathcal{A}.$$

Sklepaj, da je tudi $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ invarianten za $\mathcal{B}$.

⊳⊳⊳ 260., 280.

Rešitev 262. naloge

Zapiši enačbo (24) v preglednejši obliki $Ax = \lambda x$ ali enakovredno

$$(A - \lambda I)x = 0. \tag{110}$$

Enačba (110) je homogeni sistem treh linearnih enačb s tremi neznankami, ki je vedno rešljiv (vzameš pač $x = 0$). Neničelne rešitve ima natanko takrat, ko je $\det(A - \lambda I) = 0$. Izračunaj

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ -2 & -1-\lambda & -4 \\ 0 & 0 & -5-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-5-\lambda)((2-\lambda)(-1-\lambda) - (-2)) = -(\lambda+5)\lambda(\lambda-1).$$

Torej je sistem (110) netrivialno rešljiv natanko tedaj, ko je $\lambda = -5$ ali $\lambda = 0$ ali $\lambda = 1$. Zdaj preuči sistem (110) za vsak λ posebej:

(a) Če je $\lambda = -5$, se enačba (110) glasi

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = 0.$$

Z Gaussovim postopkom po vrsticah pridelaš rešitev $x = [0, s, s]^t$, kjer je s realni parameter.

(b) Če je $\lambda = 0$, podobno kot v prejšnji točki dobiš rešitev $x = [s, -2s, 0]^t$, kjer je $s \in \mathbb{R}$.

(c) Če je $\lambda = 1$, dobiš $x = [-s, s, 0]^t$, $s \in \mathbb{R}$.

(d) Če je $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-5, 0, 1\}$, je $x = 0$.

⊳⊳⊳ 264., 265.

Rešitev 263. naloge

Podano matriko označi z A in izračunaj njen karakteristični polinom

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= (-1)^3 \det(A-\lambda I) \qquad (111)\\ &= -\begin{vmatrix} i-\lambda & 1+i & \alpha \\ 2i & i-\lambda & 2 \\ -1 & 1 & i-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\left((i-\lambda)^3 - 2(1+i) + 2\alpha i + \alpha(i-\lambda) - 2(i-\lambda) - 2i(1+i)(i-\lambda)\right) \\ &= -\left(-\lambda^3 + 3i\lambda^2 + (3-\alpha+2i)\lambda + (-3i+3\alpha i)\right) \\ &= \lambda^3 - 3i\lambda^2 - (3-\alpha+2i)\lambda - (-3i+3\alpha i). \qquad (112) \end{aligned}$$

Premisli, da ima kompleksni polinom z vodilnim koeficientom 1, ki ima vse ničle realne, vse koeficiente realne: Spomni se Vietovih formul ali pa jih izpelji iz zveze

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n = (z-r_1)\cdots(z-r_n), \quad r_1,\ldots,r_n \in \mathbb{R}.$$

Primerjaj levo in desno stran ter zapiši enakosti

$$\begin{aligned} a_0 &= (-1)^n r_1 \cdots r_n, \\ a_1 &= (-1)^{n-1} \textstyle\sum_{k=1}^n r_1 \cdots \widehat{r_k} \cdots r_n \quad \text{(znak } \widehat{r_k} \text{ pomeni, da ta faktor izpustimo)}, \\ &\ \vdots \\ a_{n-1} &= -(r_1 + \cdots + r_n). \end{aligned}$$

Zato sklepaj, da iz predpostavke $r_1,\ldots,r_n \in \mathbb{R}$ sledi $a_0,\ldots,a_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Oglej si karakteristični polinom p_A v (112) in si pomagaj z gornjimi zaključki. Ker je koeficient pri potenci λ^2 število $-3i$, ki ni realno, obstaja pri vsakem $\alpha \in \mathbb{C}$ lastna vrednost matrike A, ki ni realno število. Odgovor je torej ne.

▷▷▷ 378.

Rešitev 264. naloge

Zapiši enačbo (25) v preglednejši obliki $Ax = Bx + \lambda x$ ali enakovredno

$$((A-B)-\lambda I)x = 0. \qquad (113)$$

Enačba (113) je homogeni sistem treh linearnih enačb s tremi neznankami, ki je neničelno rešljiv natanko tedaj, ko je $\det((A-B)-\lambda I) = 0$. Zato izračunaj

$$\det((A-B)-\lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda^2+1) = (4-\lambda)(\lambda+i)(\lambda-i).$$

Podobno kot v nalogi 262 loči primere in z Gaussovim postopkom reši nastale sisteme enačb. V primeru, ko je $\lambda = 4$, je netrivialna rešitev enačbe (113) vsak vektor $x = [s,0,0]^t = s[1,0,0]^t$, $s \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$; če je $\lambda = -i$, je rešitev $x = [0,-is,s]^t = s[0,-i,1]^t$, $s \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$; če je $\lambda = i$, je $x = [0,is,s]^t = s[0,i,1]^t = \mathcal{L}\{[0,i,1]^t\}$, $s \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Opomba *Kateri so vsi $\lambda \in \mathbb{R}$ in $x \in \mathbb{R}^{3\times1}$, ki rešijo postavljeno enačbo?*

▷▷▷ 262., 265.

Rešitev 265. naloge

Zapiši enačbo (26) v preglednejši obliki $Ax + \lambda y = Ay + \lambda x$ ali enakovredno

$$(A-\lambda I)(x-y) = 0. \qquad (114)$$

Iz enačbe $\det(A-\lambda I) = 0$ dobiš $\lambda = -1$, $\lambda = 3$.

Pri $\lambda = -1$ je množica rešitev enačbe (114) enaka $\{s[1,-2,0]^t \mid s \in \mathbb{R}\}$. Zato je $x = s[1,-2,0]^t + y$, kjer je y poljuben stolpec iz $\mathbb{R}^{3\times1}$.

Pri $\lambda = 3$ je množica rešitev enačbe (114) enaka $\{s[1,0,1]^t + u[0,1,0]^t \mid s,u \in \mathbb{R}\}$. Zato je $x = s[1,0,1]^t + u[0,1,0]^t + y$, kjer je y poljuben stolpec iz $\mathbb{R}^{3\times1}$.

Če je $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{-1,3\}$, enačbo reši poljuben par vektorjev $x,y \in \mathbb{R}^{3\times1}$, za katerega velja $x - y = 0$, torej je $x = y$.

▷▷▷ 262., 264.

Rešitev 266. naloge

(a) Iščeš tak realni(!) skalar λ in tak neničelni(!) vektor $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, da bo veljalo $\mathcal{A}v = \lambda v$, ali zapisano enakovredno

$$(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})(x,y) = 0. \qquad (115)$$

Neničelni vektor $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, ki zadošča enačbi (115), obstaja natanko takrat, ko obstaja tak $\lambda \in \mathbb{R}$, da je $\det(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I}) = 0$. V običajni urejeni bazi Σ prostora $\mathbb{R}^2$ velja

$$0 = \det(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I}) = \det \mathrm{M}_\Sigma^\Sigma(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Za vsak $\lambda \in \mathbb{R}$ je $\lambda^2 + 1 > 0$, zato iskani $\lambda \in \mathbb{R}$ ne obstaja. Torej endomorfizem $\mathcal{A}$ nima lastnih vrednosti, in zato tudi ne lastnih vektorjev.

(b) Iščeš tak kompleksni(!) skalar λ in tak neničelni(!) vektor $v = (x,y) \in \mathbb{C}^2$, da bo veljalo $\mathcal{B}v = \lambda v$, ali zapisano enakovredno

$$(\mathcal{B}-\lambda\mathcal{I})(x,y) = 0. \qquad (116)$$

Neničelni vektor $(x,y) \in \mathbb{C}^2$, ki zadošča enačbi (116), obstaja natanko takrat, ko obstaja tak $\lambda \in \mathbb{C}$, da je $\det(\mathcal{B}-\lambda\mathcal{I}) = 0$. V običajni urejeni bazi Σ prostora $\mathbb{R}^2$ velja

$$0 = \det(\mathcal{B}-\lambda\mathcal{I}) = \det \mathrm{M}_\Sigma^\Sigma(\mathcal{B}-\lambda\mathcal{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i).$$

Zato je enačba (116) netrivialno rešljiva natanko v dveh primerih: ko je $\lambda = i$ ali $\lambda = -i$.

Če je $\lambda = i$, se enačba (116) v običajni urejeni bazi Σ prostora $\mathbb{C}^2$ prepiše v enačbo

$$\begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0,$$

torej iščeš jedro matrike $\mathrm{M}_\Sigma^\Sigma(\mathcal{B})$. Poženi Gaussov postopek:

$$\begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

zato je vsak stolpec $[iz, z]^t$, kjer je z neničelni kompleksni skalar, lastni vektor matrike $\mathrm{M}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(\mathcal{B})$ pri lastni vrednosti $\lambda = i$. Torej je vsak vektor (iz, z), kjer je z neničelni kompleksni skalar, lastni vektor endomorfizma $\mathcal{B}$ pri lastni vrednosti $\lambda = i$. Drugače rečeno, podprostor $\operatorname{Ker}(\mathcal{B} - i\mathcal{I}) = \{(iz, z) \mid z \in \mathbb{C}\} = \mathcal{L}\{(i, 1)\}$ je lastni podprostor endomorfizma $\mathcal{B}$ pri lastni vrednosti $\lambda = i$.

Podobno računaj pri lastni vrednosti $\lambda = -i$. Potem dobiš, da je je vsak vektor $(-iz, z)$, kjer je z neničelni kompleksni skalar, lastni vektor endomorfizma $\mathcal{B}$ pri lastni vrednosti $\lambda = -i$. Drugače povedano, podprostor $\operatorname{Ker}(\mathcal{B} + i\mathcal{I}) = \{(-iz, z) \mid z \in \mathbb{C}\} = \mathcal{L}\{(-i, 1)\}$ je lastni podprostor endomorfizma $\mathcal{B}$ pri lastni vrednosti $\lambda = -i$.

Opomba *Sklepaj, da so lastne vrednosti in lastni vektorji odvisni od vektorskega prostora in ne samo od predpisa, po katerem slika endomorfizem. Ker ima vsak kompleksni polinom vsaj eno kompleksno ničlo, ima vsak endomorfizem končnorazsežnega kompleksnega prostora vsaj eno lastno vrednost. S pomočjo gornjega primera premisli, da to v realnih končnorazsežnih prostorih ne velja.*

⋙ 258., 268.

Rešitev 267. naloge

(a) Velja: matrika $M(a,b)$ ohranja neničelni vektor $x \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ natanko tedaj, ko je $M(a,b)x = x$. Ta enakost pa je enakovredna z enakostjo $(M(a,b) - I)x = 0$. Torej je dovolj poiskati jedro $\operatorname{Ker}(M(a,b) - I)$. Poženi Gaussov postopek:

$$M(a,b) - I = \begin{bmatrix} b-2 & b & a \\ a^2 & -1 & b \\ b & b & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ b-2 & b & a \\ a^2 & -1 & b \end{bmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & a \\ 0 & -1 & b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & a+b^2 \end{bmatrix}.$$

Če je $a + b^2 \neq 0$, je $\operatorname{rang} M(a,b) = 3$, zato matrika $M(a,b)$ ohranja samo vektor 0, torej ne ohranja nobenega neničelnega vektorja.

Če je $a + b^2 = 0$, matrika $M(a,b) = M(-b^2, b)$ ohranja vse neničelne vektorje iz množice $\{s[0,b,1]^t \mid s \in \mathbb{R}\}$.

(b) Matrike $M(a,b)$, ki imajo lastno vrednost $\lambda = 1$, najdeš v prejšnji točki. Torej med matrikami $M(-b^2, b)$ poišči tiste, ki imajo tudi lastno vrednost $\lambda = -1$. Iščeš torej taka realna števila $b \in \mathbb{R}$, da je $\det(M(-b^2, b) + I) = 0$. Spet poženi Gaussov postopek:

$$\det(M(a,b) + I) = \begin{vmatrix} b & b & -b^2 \\ b^4 & 1 & b \\ b & b & -b^2+2 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} b & b & -b^2 \\ b^4 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$
$$\sim \begin{vmatrix} b & b & 0 \\ b^4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} b(1-b^4) & 0 & 0 \\ b^4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Neničelne rešitve dobiš, če je $0 = b(1-b^4)$, torej, če je $b = 0$ ali $b^4 = 1$. Odtod sledi, da je $b = 0$ ali $b = 1$ ali $b = -1$. Torej so iskane matrike: $M(0,0)$, $M(-1,1)$, $M(-1,-1)$.

(c) Jedro kvadratne matrike $M(a,b)$ je neničelno, če in samo če je $\det M(a,b) = 0$. Računaj

$$0 = \det M(a,b) = \begin{vmatrix} b-1 & b & a \\ a^2 & 0 & b \\ b & b & a+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-1 & b & a \\ a^2 & 0 & b \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -b(a^2 - b).$$

Zato je $\operatorname{Ker} M(a,b) \neq \{0\}$ natanko tedaj, ko je $b = 0$ ali $b = a^2$.

Rešitev 268. naloge

Podano matriko označi z A. Poiskati moraš take skalarje $\lambda \in \mathbb{C}$, da bo $\det(A - \lambda I) = 0$. V ta namen izračunaj

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 13-\lambda & 13 & -8 & -23 & 8 \\ 4 & 5-\lambda & -3 & -6 & 1 \\ 2 & 5 & -3-\lambda & -7 & 4 \\ 14 & 13 & -8 & -22-\lambda & 6 \\ 14 & 13 & -8 & -23 & 7-\lambda \end{vmatrix} =$$

Pred razvojem determinante je smiselno pridelati čimveč ničel. Ker v matriki nastopa neznanka λ, ni smiselno pridelovati ničle s pomočjo Gaussovega postopka, saj se pri tem neznanka λ preveč „razmnoži". Bolje je izkoristiti podobnost posameznih stolpcev ali vrstic, kljub temu, da ta postopek ni tako sistematičen kot Gaussov. V tem konkretnem primeru opazi, da so si naslednji pari vrstic zelo podobni: prva in četrta, druga in tretja ter četrta in peta. Zato od prve in pete vrstice odštej četrto, od druge vrstice pa tretjo. Nato opazi, da lahko uničiš koeficient s koordinatama $(5,4)$ tako, da k četrtemu stolpcu prišteješ petega:

$$= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 & -1+\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda & \lambda & 1 & -3 \\ 2 & 5 & -3-\lambda & -7 & 4 \\ 14 & 13 & -8 & -22-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1+\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 & 1+\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda & \lambda & -2 & -3 \\ 2 & 5 & -3-\lambda & -3 & 4 \\ 14 & 13 & -8 & -16-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

Zdaj razvij determinanto po zadnji vrstici. Nato opazi, da lahko v prvi vrstici pridelaš ničle, če prvi stolpec prišteješ k zadnjemu.

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 & 1+\lambda \\ 2 & -\lambda & \lambda & -2 \\ 2 & 5 & -3-\lambda & -3 \\ 14 & 13 & -8 & -16-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -\lambda & \lambda & 0 \\ 2 & 5 & -3-\lambda & -1 \\ 14 & 13 & -8 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

Razvij determinanto po prvi vrstici in opazi, da lahko spet pridelaš ničle v prvi vrstici. Prvi stolpec prištej k drugemu.

$$= -(1-\lambda)(1+\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ 5 & -3-\lambda & -1 \\ 13 & -8 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)(1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 5 & 2-\lambda & -1 \\ 13 & 5 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

Končno razvij dobljeno determinanto po prvi vrstici in nato neposredno izračunaj determinanto matrike velikosti 2×2:

$$= (1+\lambda)(1-\lambda)\lambda \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 5 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)(1-\lambda)\lambda(-4+\lambda^2+5) =$$

$$= -(\lambda+1)(\lambda-1)\lambda(\lambda^2+1).$$

Odtod sklepaš, da so lastne vrednosti natanko $\lambda_1 := -1$, $\lambda_2 := 1$, $\lambda_3 := 0$, $\lambda_4 := -i$ in $\lambda_5 := i$. K vsaki lastni vrednosti poišči pripadajoči lastni podprostor, to je $\operatorname{Ker}(A-\lambda I)$:

- $\lambda_1 = -1$. Napiši matriko $A+I$ in poženi Gaussov postopek

$$A+I = \begin{bmatrix} 14 & 13 & -8 & -23 & 8 \\ 4 & 6 & -3 & -6 & 1 \\ 2 & 5 & -2 & -7 & 4 \\ 14 & 13 & -8 & -21 & 6 \\ 14 & 13 & -8 & -23 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 & -7 & 4 \\ 0 & -11 & 3 & 13 & -10 \\ 0 & -4 & 1 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 & -7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -11 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -36 & 37 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

  Zato je $\operatorname{Ker}(A+I) = \mathcal{L}\{[1,0,-2,2,2]^t\}$.

- $\lambda_2 = 1$. Spet poženi Gaussov postopek na matriki $A-I$ in izračunaj $\operatorname{Ker}(A-I) = \mathcal{L}\{[0,3,2,1,0]^t\}$.

- $\lambda_3 = 0$. Gaussov postopek na matriki $A - 0I = A$ te pripelje do rezultata $\operatorname{Ker} A = \mathcal{L}\{[1,2,3,1,1]^t\}$.

- $\lambda_4 = -i$. S pomočjo Gaussovega postopka izračunaj lastni podprostor $\operatorname{Ker}(A+iI) = \mathcal{L}\{[2+i,1,1,2+i,2+i]^t\}$.

- $\lambda_5 = i$. Spet lahko uporabiš Gaussov postopek ali pa ravnaš bolj zvito. Premisli, da za kompleksno matriko A, ki ima vse koeficiente realne, velja sklep: če je v lastni vektor matrike A pri lastni vrednosti λ, je $\overline{v}$ lastni vektor matrike A pri lastni vrednosti $\overline{\lambda}$ (iz $Av = \lambda v$ sledi $\overline{Av} = \overline{\lambda v}$, zato $A\overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v}$ in odtod $A\overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v}$.) Torej je vektor $[2-i,1,1,2-i,2-i]^t$ lastni vektor dane matrike A pri lastni vrednosti $\lambda = i$. Ker je prostor $\operatorname{Ker}(A-iI)$ enorazsežen, velja $\operatorname{Ker}(A-iI) = \mathcal{L}\{[2-i,1,1,2-i,2-i]^t\}$.

Opomba *Pomni gornjo zvijačo za računanje lastnih vektorjev pri konjugiranih lastnih vrednostih kompleksne matrike z realnimi koeficienti.*

⋙ 266.

Rešitev 269. naloge

Ker je $(A+\mu I)v = Av + \mu v = \lambda v + \mu v = (\lambda+\mu)v$, dobiš za $A+\mu I$ lastni par $(\lambda+\mu, v)$. Podobno dobiš za μA lastni par $(\mu\lambda, v)$. Pri A^2 računaj: $A^2 v = A(Av) = A(\lambda v) = \lambda A v = \lambda^2 v$, zato je njen lastni par (λ^2, v). Podobno uženeš matriko A^n z indukcijo, pa dobiš lastni par (λ^n, v). Če obstaja matrika A^{-1}, je $\lambda \neq 0$. Zato iz enakosti $Av = \lambda v$ dobiš po množenju z matriko A^{-1} enakost $v = \lambda A^{-1} v$, zato tudi $A^{-1} v = \frac{v}{\lambda}$. Torej dobiš za matriko A^{-1} lastni par $(\frac{1}{\lambda}, v)$.

Opomba *Pozor,* 0 *ni lastni vektor.*

⋙ 270.

Rešitev 270. naloge

Matriko A in prirejenko A^P povezuje enakost

$$AA^P = (\det A)\cdot I.$$

Ker je A obrnljiva, smeš pisati

$$A^P = (\det A)\cdot A^{-1}.$$

1. način reševanja. Naj bo $\lambda \in \sigma(A)$, torej $Av = \lambda v$ za neki vektor $v \neq 0$. Ker je A obrnljiva, ima trivialno jedro, zato $\lambda \neq 0$ in lahko pišeš $A^{-1}v = \lambda^{-1}v$. Odtod dobiš

$$A^P v = (\det A) A^{-1} v = \frac{\det A}{\lambda} v,$$

in zato $(\det A)/\lambda \in \sigma(A^P)$. Torej velja

$$\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \frac{\det A}{\lambda} \in \sigma(A^P).$$

Preveri, da velja tudi obrat.

2. način reševanja. Upoštevaj, da za vsak endomorfizem $\mathcal{A}\colon V \to V$ končnorazsežnega vektorskega prostora V nad $\mathbb{C}$ velja

$$\sigma(k\mathcal{A}) = \{k\lambda \mid \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\}, \quad \forall k \in \mathbb{C},$$

če je $\mathcal{A}$ obrnljiv pa tudi

$$\sigma(\mathcal{A}^{-1}) = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\}.$$

V gornjem primeru je torej

$$\sigma(A^P) = \{(\det A)/\lambda \mid \lambda \in \sigma(A)\}.$$

⋙ 269.

Rešitev 271. naloge

Taka baza obstaja natanko takrat, ko

(a) obstaja razcep (nad $\mathbb{R}$) karakterističnega polinoma $p_{\mathcal{C}}(\lambda)$ v linearne faktorje in ko

(b) za vsako lastno vrednost λ_i operatorja $\mathcal{C}$ velja: algebrska in geometrijska kratnost lastne vrednosti λ_i sta enaki ($k_i = d_i$).

Najprej si oglej matriko C, ki pripada preslikavi $\mathcal{C}$ v običajni urejeni bazi Σ prostora $\mathbb{R}^4$:

$$C = \mathrm{M}_{\Sigma}^{\Sigma}(\mathcal{C}) = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj karakteristični polinom

$$p_{\mathcal{C}}(\lambda) = p_C(\lambda) = (-1)^4 \det(C-\lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ 6 & -2-\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda+6)(\lambda-1)(\lambda+4)(\lambda-1) = (\lambda-1)^2(\lambda+4)(\lambda+6).$$

Torej ima $\mathcal{C}$ tri lastne vrednosti $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -4$ in $\lambda_3 = -6$ z algebrskimi kratnostmi $k_1 = 2$, $k_2 = k_3 = 1$. Ugotoviti moraš, ali se geometrijska in algebrska kratnost lastne vrednosti λ_1 ujemata. V ta namen poišči rang matrike

$$C - \lambda_1 I = C - I = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ker je $\operatorname{rang}(C - I) = 3$ in $d_1 = \dim \operatorname{Ker}(C - \lambda_1 I) = 4 - 3 = 1 \neq k_1$, preslikave $\mathcal{C}$ ni možno diagonalizirati.

⊳⊳⊳ 272.

Rešitev 272. naloge

(a) Za vsaka $p, q \in \mathbb{R}_4[x]$ velja

$$\mathcal{B}(p+q) = ((x^2-1)(p+q))'' + (p+q) = ((x^2-1)p + (x^2-1)q)'' + p + q =$$

$$= ((x^2-1)p)'' + p + ((x^2-1)q)'' + q = \mathcal{B}p + \mathcal{B}q,$$

za vsak $\lambda \in \mathbb{R}$ in vsak $p \in \mathbb{R}_4[x]$ pa velja

$$\mathcal{B}(\lambda p) = ((x^2-1)(\lambda p))'' + (\lambda p) = \lambda((x^2-1)p)'' + \lambda p = \lambda \mathcal{B}p.$$

Torej je $\mathcal{B}$ linearna preslikava.

(b) V običajni urejeni bazi $\Sigma := \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ prostora $\mathbb{R}_4[x]$ pripada endomorfizmu $\mathcal{B}$ matrika

$$\mathrm{M}_\Sigma^\Sigma(\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 31 \end{bmatrix}.$$

(c) Ker je $\det \mathcal{B} = \det \mathrm{M}_\Sigma^\Sigma(\mathcal{B}) \neq 0$, je $\mathcal{B}$ obrnljiv endomorfizem, torej bijekcija.

(d) Ker deluje $\mathcal{B}$ na 5-razsežnem prostoru in ima pet paroma različnih lastnih vrednosti (kar se vidi iz matrike $\mathrm{M}_\Sigma^\Sigma(\mathcal{B})$, ki je zgornje trikotna), se da diagonalizirati.

⊳⊳⊳ 271.

Rešitev 273. naloge

Podano matriko označi z A. Iz zapisa matrike A razbereš karakteristični polinom $p_A(\lambda) = (\lambda-1)^5$ in edino lastno vrednost $\lambda_1 = 1$. Če bi se A dala diagonalizirati, bi bila podobna identični matriki I, torej

$$A = P \cdot I \cdot P^{-1} = I,$$

za neko obrnljivo matriko P. To pa je protislovje, saj je očitno $A \neq I$.

Rešitev 274. naloge

Ničle karakterističnega polinoma p_A so natanko n-ti koreni enote, torej

$$\lambda_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Ker ima A n različnih kompleksnih lastnih vrednosti (ki jim pripada n linearno neodvisnih lastnih vektorjev), jo je mogoče diagonalizirati.

Rešitev 275. naloge

Oglej si matriko, ki pripada operatorju $\mathcal{T}$ v običajni urejeni bazi $\Sigma := \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ prostora $\mathbb{R}_n[x]$:

$$T := \mathrm{M}_\Sigma^\Sigma(\mathcal{T}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & n-1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n \end{bmatrix}.$$

Zdaj lahko zapišeš karakteristični polinom $p_T(\lambda) = p_{\mathcal{T}}(\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-n)$, ki ima $n+1$ paroma različnih korenov. Torej se $\mathcal{T}$ da diagonalizirati in $m_{\mathcal{T}}(\lambda) = p_{\mathcal{T}}(\lambda)$.

Opomba *Pozor, za diagonalizacijo matrike velikosti $n \times n$ je obstoj n paroma različnih lastnih vrednosti zgolj zadosten, ne pa tudi potreben pogoj.*

⊳⊳⊳ 133.

Rešitev 276. naloge

Podano matriko označi z A. Recimo, da je A podobna spodnje trikotni matriki S z realnimi koeficienti, torej $A = PSP^{-1}$, kjer je P neka obrnljiva matrika. Podobne matrike imajo isti karakteristični polinom:

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - PSP^{-1}) = \det(P(\lambda I - S)P^{-1}) =$$

$$= \det P \det(\lambda I - S)\det(P^{-1}) = \det P \det(\lambda I - S)(\det P)^{-1} = \det(\lambda I - S) = p_S(\lambda),$$

zato imajo tudi iste lastne vrednosti. Lastne vrednosti spodnje trikotne matrike S (z realnimi koeficienti) so njeni diagonalci, ki so realna števila. Ker sta lastni vrednosti matrike A tudi števili i in $-i$, matrika A ne more biti podobna taki matriki S.

Rešitev 277. naloge

Izračunaj karakteristični polinom $p_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda-2)(\lambda+1)$, napiši lastne vrednosti $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -1$ in preveri, da ima lastna vrednost $\lambda_1 = 0$ geometrijsko kratnost $d_1 = 2 = k_1$. Zato je A podobna diagonalni matriki $D := \mathrm{diag}(0,0,2,-1)$. Poišči bazo Π prostora $\mathbb{R}^{4\times 1}$, sestavljeno iz lastnih vektorjev matrike A: potrebuješ dva linearno neodvisna vektorja iz $\mathrm{Ker}\, A$ in po en neničeln vektor iz $\mathrm{Ker}\,(A - 2I)$ in $\mathrm{Ker}\,(A+I)$, naprimer $v_1 := [1,0,0,-1]^t$, $v_2 := [0,1,-1,-1]^t$, $v_3 := [3,1,1,2]^t$ in $v_4 := [0,-1,2,1]^t$. Potem je matrika prehoda

$$S := \mathrm{M}^{\Pi}_{\Sigma}(\mathcal{I}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

taka, da velja $A = SDS^{-1}$.

Opomba *Preizkusi pravilnost rešitve tako, da izračunaš Av_1, Av_2, Av_3, Av_4. Kaj dobiš?*

⋙ 374., 375.

Rešitev 278. naloge

Izberi urejeno bazo prostora $\mathbb{R}^3$, sestavljeno iz dveh linearno neodvisnih vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$, vzporednih z ravnino Σ, in neničelnega normalnega vektorja $\vec{n}$ ravnine Σ, naprimer $\vec{a} := (2,1,0)$, $\vec{b} := (0,3,2)$, $\vec{n} := (1,-2,3)$. V tej urejeni bazi pripada linearni preslikavi $\mathcal{T}$ diagonalna matrika $D := \mathrm{diag}(1,1,-1)$. Lastna podprostora sta: ravnina Σ pri lastni vrednosti $\lambda_1 = 1$ in njena normala (skozi izhodišče) pri lastni vrednosti $\lambda_2 = -1$.

Opomba *Smiselno definiraj zrcaljenje preko podprostora $U \leq \mathbb{R}^n$. Kakšne lastne vrednosti in lastne podprostore ima tako definirano zrcaljenje?*

⋙ 279., 395.

Rešitev 279. naloge

Označi z $\mathcal{A}$ endomorfizem prostora $\mathbb{R}^3$, ki ga določa matrika A v običajni urejeni bazi Σ prostora $\mathbb{R}^3$, torej $A = \mathrm{M}^{\Sigma}_{\Sigma}(\mathcal{A})$.

1. način reševanja. Preveri, da je $A^2 = A$ in da ima A rang enak 2. Zato je $\mathcal{A}$ projektor na neko ravnino Π vzdolž neke premice p v $\mathbb{R}^3$. Premica p je enaka jedru $\mathrm{Ker}\,\mathcal{A} = \mathcal{L}\{(2,5,1)\}$, ravnina Π pa zalogi vrednosti $\mathrm{Im}\,\mathcal{A} = \mathcal{L}\{(2,5,0),(4,9,2)\}$. Pripadajoči enačbi sta p: $\frac{x}{2} = \frac{y}{5} = z$ in Π: $5x - 2y - z = 0$.

2. način reševanja. Ugotovi, da sta $\lambda_1 = 0$ in $\lambda_2 = 1$ edini lastni vrednosti matrike A, s pripadajočima geometrijskima kratnostma 1 in 2, in da A lahko diagonaliziraš. Sklepaj, da je $p = \mathrm{Ker}\,(\mathcal{A} - \lambda_1\mathcal{I})$ in $\Pi = \mathrm{Ker}\,(\mathcal{A} - \lambda_2\mathcal{I})$.

Opomba *Katere lastne vrednosti sme imeti projektor?*

⋙ 98., 278., 282., 354.

Rešitev 280. naloge

(a) $AB = B^3B = BB^3 = BA$, torej A in B komutirata.

(b) Ker so lastne vrednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ matrike A paroma različne, je algebrska kratnost $k_i = 1$ za vse $1 \leq i \leq n$. Iz $1 \leq d_i \leq k_i$ sklepaj, da so vsi lastni podprostori matrike A enorazsežni.

(c) Ker je $A = B^3$, je vsak lastni vektor matrike B tudi lastni vektor za A: iz $Bv = \mu v$, $v \neq 0$, sledi $Av = B^3v = \mu^3 v$. Obratno, bodisi upoštevaj, da so lastni podprostori matrike A invariantni za B (ker A in B komutirata – glej nalogo 261), bodisi napiši celoten premislek, takole. Naj bo $v \in \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I)$ neničeln. Potem je $A(Bv) = B(Av) = B(\lambda v) = \lambda Bv$ in zato Bv pripada lastnemu podprostoru $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda I)$, ki je enorazsežen. Torej velja $Bv = \mu v$ za neki $\mu \in \mathbb{C}$ in v je lastni vektor matrike B.

(d) Ker je $P^{-1}AP$ diagonalna, so stolpci matrike P lastni vektorji matrike A. Ker so lastni vektorji matrik A in B enaki, so stolpci matrike P tudi lastni vektorji matrike B, zato je matrika $P^{-1}BP$ diagonalna.

Opomba *Razmisli, kako je v primeru $A = B^n$, $n \in \mathbb{N}$!*

⋙ 261., 281., 376.

Rešitev 281. naloge

1. način reševanja. Ker ima $\mathcal{A}$ n paroma različnih lastnih vrednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, ima n linearno neodvisnih lastnih vektorjev $v_1, \ldots, v_n$, in se zato da diagonalizirati. Zato endomorfizmu $\mathcal{A}$ pripada v urejeni bazi $\Psi := \{v_1, \ldots, v_n\}$ matrika

$$\mathrm{M}^{\Psi}_{\Psi}(\mathcal{A}) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) =: D.$$

Ker po predpostavki $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ komutirata, je

$$\mathrm{M}^{\Psi}_{\Psi}(\mathcal{A})\mathrm{M}^{\Psi}_{\Psi}(\mathcal{B}) = \mathrm{M}^{\Psi}_{\Psi}(\mathcal{AB}) = \mathrm{M}^{\Psi}_{\Psi}(\mathcal{BA}) = \mathrm{M}^{\Psi}_{\Psi}(\mathcal{B})\mathrm{M}^{\Psi}_{\Psi}(\mathcal{A}),$$

torej

$$\mathrm{M}^{\Psi}_{\Psi}(\mathcal{B})D = D\mathrm{M}^{\Psi}_{\Psi}(\mathcal{B}). \tag{117}$$

Naj ima matrika $\mathrm{M}^{\Psi}_{\Psi}(\mathcal{B})$ koeficiente b_{ij}. Če je $i \neq j$, iz enakosti (117) sledi $\lambda_j b_{ij} = \lambda_i b_{ij}$, zato $(\lambda_j - \lambda_i)b_{ij} = 0$. Ker sta λ_i in λ_j različni lastni vrednosti, je $b_{ij} = 0$ za $i \neq j$. Zato je $\mathrm{M}^{\Psi}_{\Psi}(\mathcal{B})$ diagonalna matrika, drugače rečeno, $\mathcal{B}$ se da v bazi Ψ diagonalizirati.

2. način reševanja. Ker $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ komutirata, je podprostor $\mathrm{Ker}\,(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})$ invarianten za matriko $\mathcal{B}$ za vsak $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$ (glej nalogo 261). Ker so lastni podprostori operatorja $\mathcal{A}$ enorazsežni, imata $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ iste lastne vektorje. Torej je $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ mogoče diagonalizirati v isti bazi.

⋙ 261., 280.

Rešitev 282. naloge

1. način reševanja. Ker je A idempotentna matrika, je $A^2 - A = 0$, zato minimalni polinom $m_A(\lambda)$ deli polinom $\lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$. Ker je vsaka lastna vrednost tudi ničla minimalnega polinoma, sta lahko lastni vrednosti matrike samo števili 0 ali 1.

2. način reševanja. Naj bo (λ, v) lastni par matrike A. Potem je $Av = \lambda x$. Če pomnožiš to enakost z leve z matriko A, dobiš po eni strani $A^2v = A(\lambda v) = \lambda Av = \lambda^2 v$, po drugi strani pa iz idempotentnosti sledi $A^2v = Av = \lambda v$. Torej je $\lambda^2 v = \lambda v$, in zato $\lambda(\lambda - 1)v = 0$. Ker je v različen od 0, je λ lahko le 0 ali 1.

⋙ 279., 283., 354.

Rešitev 283. naloge

Predpostavi, da je matrika $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ničla polinoma $p(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m \in \mathbb{F}[x]$, torej

$$0 = p(A) = b_0I + b_1A + \cdots + b_mA^m, \tag{118}$$

in da je $v \in \mathbb{F}^{n\times 1}$ lastni vektor matrike A pri lastni vrednosti $\lambda \in \mathbb{F}$, torej

$$Av = \lambda v, \text{ kjer je } v \neq 0. \tag{119}$$

Z indukcijo dokaži, da iz (119) sledi

$$A^kv = \lambda^kv. \tag{120}$$

Z desne pomnoži enakost (118) z vektorjem v, pa dobiš enakost $0 = b_0v + b_1Av + \cdots + b_mA^mv$ in odtod z upoštevanjem (120) enakost

$$0 = b_0v + b_1\lambda v + \cdots + b_m\lambda^mv = (b_0 + b_1\lambda + \cdots + b_m\lambda^m)v.$$

Ker je $v \neq 0$, sledi da je $p(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + \cdots + b_m\lambda^m = 0$.

⋙ 282.

Rešitev 284. naloge

Označi z $r(\lambda) := \lambda^5 - 2\lambda^4 - \lambda^3 + 2\lambda^2$ polinom, katerega ničla je matrika A. Razstavi polinoma

$$p_A(\lambda) = (\lambda-1)^2\lambda^3(\lambda+1)^2, \qquad r(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-1)\lambda^2(\lambda+1).$$

Iz karakterističnega polinoma $p_A(\lambda)$ prebereš, da je $m_A(\lambda) = (\lambda-1)^k\lambda^l(\lambda+1)^m$, kjer so $1 \le k \le 2$, $1 \le l \le 3$ in $1 \le m \le 2$. Ker je $r(A) = 0$, minimalni polinom $m_A(\lambda)$ deli $r(\lambda)$, zato dobiš dva kandidata:

$$m_A(\lambda) = (\lambda-1)\lambda^2(\lambda+1) \quad \text{ali} \quad m_A(\lambda) = (\lambda-1)\lambda(\lambda+1).$$

Ker se matrika A ne da diagonalizirati, mora biti vsaj ena njena lastna vrednost večkratna ničla minimalnega polinoma m_A, zato je $m_A(\lambda) = (\lambda-1)\lambda^2(\lambda+1)$.

Opomba *Pomni, da imata minimalni in karakteristični polinom endomorfizma iste ničle.*

⋙ 133.

Rešitev 285. naloge

Če ima $\mathcal{A}$ samo eno lastno vrednost, recimo $\lambda \in \mathbb{F}$, velja

$$\mathcal{A}u = \lambda u$$

za vsak $u \in U$. Potem je seveda $\mathcal{A} = \lambda\mathcal{I}$.

Predpostavi, da ima preslikava $\mathcal{A}$ različni lastni vrednosti λ in $\mu \in \mathbb{F}$. Potem je

$$\mathcal{A}u' = \lambda u' \qquad \text{in} \qquad \mathcal{A}u'' = \mu u''$$

za neka neničelna vektorja u' in u'' iz U. Po predpostavki je tudi vektor $u' + u''$ lastni vektor endomorfizma $\mathcal{A}$, zato je

$$\mathcal{A}(u' + u'') = \nu(u' + u'') \tag{121}$$

za neki skalar $\nu \in \mathbb{F}$. Po drugi strani pa velja

$$\mathcal{A}(u' + u'') = \mathcal{A}u' + \mathcal{A}u'' = \lambda u' + \mu u''. \tag{122}$$

Iz enakosti (121) in (122) sledi

$$(\lambda - \nu)u' + (\mu - \nu)u'' = 0.$$

Ker lastna vektorja u' in u'' pripadata različnim lastnim vrednostim, sta linearno neodvisna. Zato sklepaj $\lambda - \nu = 0$ in $\mu - \nu = 0$, odtod $\lambda = \nu = \mu$. Protislovje. Zato ima endomorfizem $\mathcal{A}$ eno samo lastno vrednost.

Rešitev 286. naloge

(a) Ker velja

$$\operatorname{sled}(AB) = \sum_{k=1}^n (AB)_{kk} = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ki}b_{ik}\right)$$

in

$$\operatorname{sled}(BA) = \sum_{i=1}^n (BA)_{ii} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n b_{ik}a_{ki}\right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ki}b_{ik}\right),$$

je $\operatorname{sled}(AB) = \operatorname{sled}(BA)$ za poljubni matriki $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$.

(b) Uporabi točko (a) in sklepaj

$$\begin{aligned}\operatorname{sled}(PAP^{-1}) &= \operatorname{sled}(P(AP^{-1})) = \operatorname{sled}((AP^{-1})P)\\ &= \operatorname{sled}(A(P^{-1}P)) = \operatorname{sled}(AI) = \operatorname{sled}(A).\end{aligned}$$

(c) Vzemi poljubno urejeno bazo Ψ prostora V. Izpiši prehodne matrike in uporabi točko (b), pa dobiš

$$\begin{aligned}\operatorname{sled} \mathrm{M}_\Psi^\Psi(\mathcal{A}) &= \operatorname{sled}(\mathrm{M}_\Psi^\Omega(\mathcal{I})\mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{A})\mathrm{M}_\Omega^\Psi(\mathcal{I}))\\ &= \operatorname{sled}(\mathrm{M}_\Psi^\Omega(\mathcal{I})\mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{A})(\mathrm{M}_\Psi^\Omega(\mathcal{I}))^{-1})\\ &= \operatorname{sled} \mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{A}).\end{aligned}$$

(d) *1. način reševanja.* Ker je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, velja veriga enakosti

$$\begin{aligned}(-1)^n\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda\end{vmatrix} &= (-1)^n\det(A-\lambda I)\\ &= \det(\lambda I - A)\\ &= p_A(\lambda)\\ &= \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0\\ &= (\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n).\end{aligned} \tag{123}$$

Odtod izrazi koeficient b_{n-1} potence λ^{n-1} karakterističnega polinoma $p_A(\lambda)$ na dva načina:

$$b_{n-1} = -(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})$$

in

$$b_{n-1} = -(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n).$$

Zato sklepaj

$$\operatorname{sled} A = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = -b_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_n.$$

2. način reševanja. Pomagaj si z nalogo 298: Matrika A je podobna neki zgornje trikotni matriki B, ki ima na diagonali ravno lastne vrednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ matrike A, torej je $A = PBP^{-1}$ za neko obrnljivo matiko P. Zato po točki (b) velja

$$\operatorname{sled} A = \operatorname{sled}(PBP^{-1}) = \operatorname{sled} B = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.$$

3. način reševanja. Obstaja taka jordanska matrika J in taka obrnljiva matrika P, da je $A = PJP^{-1}$. Sled matrike J je vsota njenih diagonalcev, torej vsota lastnih vrednosti matrike A. Potem po točki (b) velja

$$\operatorname{sled} A = \operatorname{sled} J = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.$$

⋙ 158., 168., 171., 287., 298.

Rešitev 287. naloge

Pomagaj si z nalogo 286(d). Označi neznani lastni vrednosti z λ_5 in λ_6 in zapiši

$$1 = \operatorname{sled} A = \sum_{k=1}^{6} \lambda_k = (-3) + 0 + 2 + 2 + \lambda_5 + \lambda_6 = 1 + \lambda_5 + \lambda_6$$

$$19 = \operatorname{sled} A^2 = \sum_{k=1}^{6} \lambda_k^2 = (-3)^2 + 0^2 + 2^2 + 2^2 + \lambda_5^2 + \lambda_6^2 = 17 + \lambda_5^2 + \lambda_6^2.$$

Odtod dobiš sistem enačb $0 = \lambda_5 + \lambda_6$ in $2 = \lambda_5^2 + \lambda_6^2$ z rešitvama $\lambda_5 = -1$ in $\lambda_6 = 1$.

⋙ 286.

Rešitev 288. naloge

Če obstajata taki matriki X in Y, da velja $A = XY$ in $B = YX$, lahko zapišeš

$$AX = (XY)X = XYX = X(YX) = XB.$$

Ker je A obrnljiva in ker iz $A = XY$ sledi $\det A = \det X \det Y$, je obrnljiva tudi matrika X. Zato velja

$$A = XBX^{-1},$$

torej sta si A in B podobni.

Obratno, če sta si matriki A in B podobni, obstaja tak obrnljiva matrika P, da velja

$$A = PBP^{-1}.$$

Iz enakosti $A = (PB)P^{-1}$ in $B = P^{-1}(PB)$ vidiš, da lahko vzameš $X := PB$ in $Y := P^{-1}$.

Rešitev 289. naloge

Oglej si nalogo 236. Definiraj $a_n := 1$ in v matriki (22) prištej zadnji stolpec k predzadnjemu. Njeno determinanto razvij po zadnji vrstici, pa dobiš enakost

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda + a_{n-1} \end{vmatrix} = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n = \det(\lambda I - A).$$

Odtod izrazi matriko A velikosti $n \times n$:

$$A = \lambda I - (\lambda I - A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Opomba *Izračunaj minimalni polinom dobljene matrike A tako, da si ogledaš vektorje*

$$v, Av, A^2v, \ldots, A^{n-1}v, A^nv,$$

kjer je $v := [1, 0, \ldots, 0]^t$.

⋙ 236., 290.

Rešitev 290. naloge

Označi iskano matriko z A. Ker je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ za neki $n \in \mathbb{N}$, ima karakteristični polinom $p_A(\lambda)$ realne koeficiente. Ker sta kompleksni števili $1+i$ in $-i$ ničli polinoma $p_A(\lambda) \in \mathbb{R}[x]$, sta njegovi ničli tudi števili $1-i$ in i. Polinom $p_A(\lambda)$ z realnimi koeficienti, ki ima ničle $1+i, 1-i, -i, i, \sqrt{2}$ in ima najmanjšo možno stopnjo, je zato

$$p_A(\lambda) = (\lambda - (1+i))(\lambda - (1-i))(\lambda - i)(\lambda + i)(\lambda - \sqrt{2}) = (\lambda^2 - 2\lambda + 2)(\lambda^2 + 1)(\lambda - \sqrt{2}). \quad (124)$$

Torej moraš poiskati realno matriko A, katere karakteristični polinom je $p_A(\lambda)$.

1. način reševanja. Najlažje je sestaviti tako bločno diagonalno matriko A, da bo veljalo

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & & & \\ -1 & \lambda - 2 & & & \\ & & \lambda & -1 & \\ & & 1 & \lambda & \\ & & & & \lambda - \sqrt{2} \end{vmatrix}.$$

(Na praznih mestih stojijo števila nič.) Odtod izrazi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & & & \\ 1 & 2 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & -1 & 0 & \\ & & & & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

2. način reševanja. Polinom v (124) razvij po naraščajočih potencah

$$p_A(\lambda) = -2\sqrt{2} + (2\sqrt{2}+2)\lambda + (-3\sqrt{2}-2)\lambda^2 + (2\sqrt{2}+3)\lambda^3 + (-2-\sqrt{2})\lambda^4 + \lambda^5.$$

Zdaj si oglej nalogo 289 in sklepaj, da matrika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & & 2\sqrt{2} \\ 1 & 0 & & & -2\sqrt{2}-2 \\ & 1 & 0 & & 3\sqrt{2}+2 \\ & & 1 & 0 & -2\sqrt{2}-3 \\ & & & 1 & 2+\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

ustreza postavljenim pogojem. (Na praznih mestih stojijo števila nič.)

Opomba *Premisli, da ima naloga neskončno rešitev. Poišči še kakšno.*

⊳⊳⊳ 236.

Rešitev 291. naloge

Označi podano matriko z A, podane prve tri stolpce zapovrstjo z v_1, v_2 in v_3 in pripadajoče realne lastne vrednosti z λ_1, λ_2 in λ_3. Ko nastaviš enačbe

$$A \cdot v_1 = \lambda_1 v_1, \qquad A \cdot v_2 = \lambda_2 v_2, \qquad A \cdot v_3 = \lambda_3 v_3, \tag{125}$$

dobiš pri drugi protisloven pogoj $[-7,*,*]^t = \lambda_2 \cdot [0,-1,2]^t$. Zato naloga ni rešljiva.

Reši še nalogo za drugo podano trojico stolpcev. Označi manjkajoče koeficiente matrike

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}.$$

Iz sistema (125) dobiš enačbe

$$\begin{bmatrix} 1 \\ a+2b+c \\ d+2e+f \end{bmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -8 \\ -a+2c \\ -d+2f \end{bmatrix} = \lambda_2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 13 \\ 2a-3c \\ 2d-3f \end{bmatrix} = \lambda_3 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Odtod dobiš rešitve $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 8$ in $\lambda_3 = 13/2$ ter $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 9$, $e = -41/4$, $f = 25/2$. Zato je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & -41/4 & 25/2 \end{bmatrix}.$$

⊳⊳⊳ 292.

Rešitev 292. naloge

Označi podane prve tri vektorje zapovrstjo z v_1, v_2 in v_3. Pripadajoče lastne vrednosti naj bodo λ_1, λ_2 in λ_3.

1. način reševanja. Izrazi vektorje običajne urejene baze prostora $\mathbb{R}^{3\times 1}$ z vektorji v_1, v_2, v_3: $e_1 := [1,0,0]^t = 2v_1 - v_2$, $e_2 := [0,1,0]^t = v_1 - v_2$ in $e_3 := [0,0,1]^t = v_3$. Prav tako izrazi prvi stolpec matrike A: $A^{(1)} = 6v_1 - v_2$. Potem velja

$$6v_1 - v_2 = A^{(1)} = Ae_1 = A(2v_1 - v_2) = 2Av_1 - Av_2 = 2\lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2. \tag{126}$$

Iz začetka in konca verige enakosti (126) sledi $(2\lambda_1 - 6)v_1 + (1-\lambda_2)v_2 = 0$. Ker sta vektorja v_1 in v_2 linearno neodvisna, velja $\lambda_1 = 3$ in $\lambda_2 = 1$. Zato dobiš $A^{(2)} = Ae_2 = A(v_1 - v_2) = Av_1 - Av_2 = 3v_1 - v_2 = [2,-1,0]^t$ in $A^{(3)} = Ae_3 = Av_3 = \lambda_3 v_3 = [0,0,\lambda_3]^t$. Na koncu še preveri, da vsaka matrika

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix},$$

kjer je λ_3 poljubno kompleksno število, ustreza postavljenim pogojem.

Ko se po podobni poti kot zgoraj lotiš še matrike B, dobiš protislovno enačbo $(2\lambda_1 - 1)v_1 + (-\lambda_2 - 1)v_2 - 3v_3 = 0$. Torej takšna matrika B ne obstaja.

2. način reševanja. Ker so vektorji v_1, v_2, v_3 linearno neodvisni lastni vektorji, je matrika A podobna matriki $D := \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, torej $A = [v_1, v_2, v_3]D[v_1, v_2, v_3]^{-1}$ oziroma v izpisani obliki

$$\begin{bmatrix} 5 & * & * \\ -4 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pomnoži matrike in potem reši sistem linearnih enačb, pa dobiš isto rešitev kot pri 1. načinu reševanja. Pri drugem delu naloge lahko iz enakega postopka razbereš, da naloga nima rešitve.

⊳⊳⊳ 291.

Rešitev 293. naloge

1. način reševanja. Bodi Σ običajna urejena baza prostora $\mathbb{R}^3$. Zapiši matriko

$$A := \mathrm{M}_\Sigma^\Sigma(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

in poišči njene lastne vrednosti $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$ ter pripadajoče lastne vektorje $[1,1,1]^t, [-1,2,1]^t, [0,1,1]^t$. Ker matrika A pripada endomorfizmu $\mathcal{A}$ v običajni urejeni bazi prostora $\mathbb{R}^3$, so pripadajoči lastni vektorji endomorfizma $\mathcal{A}$ tile: $v_1 := (1,1,1), v_2 := (-1,2,1), v_3 := (0,1,1)$.

Prav tako diagonaliziraj matriko $\mathrm{M}_\Psi^\Psi(\mathcal{A})$: njene lastne vrednosti so enake lastnim vrednostim $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ matrike $\mathrm{M}_\Sigma^\Sigma(\mathcal{A})$, pripadajoči lastni vektorji pa so stolpci, ki pripadajo v bazi Ψ nekim lastnim vektorjem u_1, u_2, u_3 preslikave $\mathcal{A}$: $\mathrm{X}_\Psi(u_1) = [1,0,-2]^t, \mathrm{X}_\Psi(u_2) = [0,0,1]^t, \mathrm{X}_\Psi(u_3) = [-1,-1,1]^t$. Ker so lastni podprostori endomorfizma $\mathcal{A}$ enorazsežni, velja $u_1 = \alpha v_1, u_2 = \beta v_2, u_3 = \gamma v_3$ za neke neničelne skalarje $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Torej je prehodna matrika med med urejenima bazama $\Omega := \{v_1, v_2, v_3\}$ in Ψ enaka

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_\Psi^\Omega(\mathcal{I}) &= [\mathrm{X}_\Psi(u_1/\alpha), \mathrm{X}_\Psi(u_2/\beta), \mathrm{X}_\Psi(u_3/\gamma)] \\ &= [\tfrac{1}{\alpha}\mathrm{X}_\Psi(u_1), \tfrac{1}{\beta}\mathrm{X}_\Psi(u_2), \tfrac{1}{\gamma}\mathrm{X}_\Psi(u_3)] \\ &= \begin{bmatrix} 1/\alpha & 0 & -1/\gamma \\ 0 & 0 & -1/\gamma \\ -2/\alpha & 1/\beta & 1/\gamma \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ker iščeš bazo Ψ zapisano v običajni urejeni bazi Σ, torej $M_\Sigma^\Psi(\mathcal{I})$, izračunaj

$$\begin{aligned} M_\Sigma^\Psi(\mathcal{I}) &= M_\Sigma^\Omega(\mathcal{I})M_\Omega^\Psi(\mathcal{I}) \\ &= M_\Sigma^\Omega(\mathcal{I})(M_\Psi^\Omega(\mathcal{I}))^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha & 0 \\ 2\beta & -\beta & \beta \\ 0 & -\gamma & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha-2\beta & -\alpha+\beta & -\beta \\ \alpha+4\beta & -\alpha-2\beta-\gamma & 2\beta \\ \alpha+2\beta & -\alpha-\beta-\gamma & \beta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Zato skleni: naloga ima neskončno rešitev; iskane urejene baze Ψ prostora $\mathbb{R}^3$ so oblike

$$\Psi = \{(\alpha-2\beta, \alpha+4\beta, \alpha+2\beta), (-\alpha+\beta, -\alpha-2\beta-\gamma, -\alpha-\beta-\gamma), (-\beta, 2\beta, \beta)\},$$

kjer so $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ neničelni skalarji.

2. način reševanja. Ta rešitev se nekoliko bolj opira na prehodne matrike kot 1. način reševanja, sicer pa ji je zelo podobna. Kot zgoraj zapiši matriko A in jo diagonaliziraj. Potem velja

$$A = PDP^{-1},$$

kjer je $D := \operatorname{diag}(-1,0,1)$, torej matrika, sestavljena iz lastnih vrednosti matrike A, in $P := [\alpha[1,1,1]^t, \beta[-1,2,1]^t, \gamma[0,1,1]^t]$, torej matrika, katere stolpci so (k lastnim vrednostim) pripadajoči lastni vektorji matrike A. Podobno diagonaliziraj matriko $B := M_\Psi^\Psi(\mathcal{A})$:

$$B = RDR^{-1},$$

kjer je $D := \operatorname{diag}(-1,0,1)$, matrika $R := [\delta[1,0,-2]^t, \varepsilon[0,0,1]^t, \zeta[-1,-1,1]^t]$ je po stolpcih sestavljena iz pripadajočih lastnih vektorjev matrike B, skalarji $\delta, \varepsilon, \zeta$ iz $\mathbb{R}$ pa so neničelni. Izrazi

$$P^{-1}AP = D = R^{-1}BR$$

in odtod

$$A = PR^{-1}BRP^{-1} = (PR^{-1})B(PR^{-1})^{-1}.$$

Primerjaj to enakost z enakostjo

$$M_\Sigma^\Sigma(\mathcal{A}) = M_\Sigma^\Psi(\mathcal{I})M_\Psi^\Psi(\mathcal{A})M_\Psi^\Sigma(\mathcal{I})$$

in sklepaj, da je $M_\Sigma^\Psi(\mathcal{I}) = PR^{-1}$, torej da so v stolpcih matrike PR^{-1} zapisani vektorji baze Ψ razviti po bazi Σ. Še rezultat:

$$PR^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha/\delta - 2\beta/\varepsilon & -\alpha/\delta + \beta/\varepsilon & -\beta/\varepsilon \\ \alpha/\delta + 4\beta/\varepsilon & -\alpha/\delta - 2\beta/\varepsilon - \gamma/\zeta & 2\beta/\varepsilon \\ \alpha/\delta + 2\beta/\varepsilon & -\alpha/\delta - \beta/\varepsilon - \gamma/\zeta & \beta/\varepsilon \end{bmatrix} \text{ za neničelne } \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \in \mathbb{R}.$$

Če uvedeš nove parametre $s := \alpha/\delta$, $t := \beta/\varepsilon$ in $u := \gamma/\zeta$, dobiš isto rešitev kot v 1. načinu reševanja.

3. način reševanja. Označi $A := M_\Sigma^\Sigma(\mathcal{A})$, $B := M_\Psi^\Psi(\mathcal{A})$, $S := M_\Sigma^\Psi(\mathcal{I})$. Ker velja enakost

$$A = SBS^{-1},$$

ki je enakovredna enakosti

$$AS - SB = 0, \tag{127}$$

in ker sta matriki A in B znani, je dovolj poiskati vse obrnljive (!) matrike $S \in \mathbb{R}^{3\times3}$, ki zadoščajo enačbi (127). Nastavi

$$S = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$$

in matriko S vstavi v enačbo (127), pa dobiš sistem devetih linearnih enačb z devetimi neznankami. Ko ga uženeš z Gaussovim postopkom, dobiš

$$S = \begin{bmatrix} g-4i & -g+3i & -i \\ g+2i & h-i & 2i \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Ker mora biti matrika S obrnljiva, dobiš še pogoj $\det S = i(2i-g)(g+h-i) \neq 0$, ki mu morajo zadoščati realna števila g, h, i. Na koncu v stolpcih matrike S prebereš vektorje iskane baze Ψ razvite po običajni urejeni bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

Rešitev 294. naloge

Vzemi poljubno matriko $A \in \mathbb{C}^{2\times2}$. Matrika A ima vsaj en lastni par (λ, v) (λ je kompleksni skalar, v pa je neničelni kompleksni stolpec višine 2). Vzemi še nek stolpec u višine 2, ki ni kolinearen z v. Potem tvorita vektorja v, u bazo prostora $\mathbb{C}^{2\times1}$ in velja $Av = \lambda v, Au = \mu v + \nu u$ za neka skalarja $\mu, \nu \in \mathbb{C}$. Zato za matriko A velja

$$A = [v,u] \cdot \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \nu \end{bmatrix} \cdot [v,u]^{-1},$$

kjer je $[v,u]$ prehodna matrika s stolpcema v in u.

⋙ 298.

Rešitev 295. naloge

Minimalni polinom $m_A(\lambda)$ ima večkratno ničlo λ_i natanko takrat, ko je geometrijska kratnost lastne vrednosti λ_i strogo manjša od njene algebrske kratnosti: $d_i < k_i$. Izračunaj karakteristični polinom

$$p_A(\lambda) = (\lambda + a + 2)(\lambda + 2)^2(\lambda - 2).$$

Če je $a+2$ različen od 2 in -2, potem ima A tri lastne vrednosti $\lambda_1 = -a-2$, $\lambda_2 = -2$ in $\lambda_3 = 2$ s kratnostmi $k_1 = d_1 = 1$, $k_2 = d_2 = 2$, $k_3 = d_3 = 1$, torej $m_A(\lambda) = (\lambda+a+2)(\lambda+2)(\lambda-2)$. Če je $a+2 = -2$, premore A dve lastni vrednosti $\lambda_1 = 2$ in $\lambda_2 = -2$ s kratnostmi $k_1 = d_1 = 2$, $k_2 = d_2 = 2$, zato $m_A(\lambda) = (\lambda+2)(\lambda-2)$. Če je $a+2 = 2$, potem ima A lastni vrednosti $\lambda_1 = -2$ in $\lambda_2 = 2$ s kratnostmi $k_1 = 3$, $d_1 = 2$, $k_2 = d_2 = 1$, odtod $m_A(\lambda) = (\lambda+2)^2(\lambda-2)$. Sklepaj, da ima $m_A(\lambda)$ večkratno ničlo samo za $a = 0$.

⋙ 133., 424.

Rešitev 296. naloge

Velja $m_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = (\mathcal{A}-\mathcal{I})^k = 0$. Ker je

$$m_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^2) = (\mathcal{A}^2-\mathcal{I})^k = (\mathcal{A}-\mathcal{I})^k(\mathcal{A}+\mathcal{I})^k = 0$$

in ker $m_{\mathcal{A}^2}$ deli vsak polinom, ki ima $\mathcal{A}^2$ za ničlo, velja $m_{\mathcal{A}^2} \mid m_{\mathcal{A}}$. Torej je $m_{\mathcal{A}^2}(\lambda) = (\lambda-1)^l$ za neki $1 \le l \le k$ in velja

$$0 = m_{\mathcal{A}^2}(\mathcal{A}^2) = (\mathcal{A}^2-\mathcal{I})^l = (\mathcal{A}-\mathcal{I})^l(\mathcal{A}+\mathcal{I})^l.$$

Ker -1 ni lastna vrednost operatorja $\mathcal{A}$, je $\mathcal{A}+\mathcal{I}$ obrnljiv, prav tako $(\mathcal{A}+\mathcal{I})^l$. Zato je $(\mathcal{A}-\mathcal{I})^l = 0$. Ker je $m_{\mathcal{A}}$ neničelni polinom najnižje stopnje (s čelnim koeficientom enakim 1), ki ima $\mathcal{A}$ za ničlo, je $l = k$ in odtod $m_{\mathcal{A}} = m_{\mathcal{A}^2}$.

Opomba *Ali velja ista trditev za $m_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda-2)^k$, $k \in \mathbb{N}$? Poglej si matriko*

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rešitev 297. naloge

Vzemi poljuben neničeln vektor $v \in V$. Če je $\dim V = n$, potem so vektorji $v, \mathcal{A}v, \ldots, \mathcal{A}^n v$ linearno odvisni, saj jih je $n+1$. Torej obstajajo taki skalarji $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ iz $\mathbb{C}$, ki niso vsi nič, da je

$$\alpha_0 v + \alpha_1 \mathcal{A}v + \cdots + \alpha_n \mathcal{A}^n v = 0$$

oziroma

$$(\alpha_0 + \alpha_1\mathcal{A} + \cdots + \alpha_n\mathcal{A}^n)v = 0.$$

Definiraj polinom $p \in \mathbb{C}[x]$, $p(x) := \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_n x^n$. Bodi s njegova stopnja. Potem je $1 \le s \le n$ in velja

$$p(x) = \alpha_n(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_s)$$

za neke $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{C}$. Posebej

$$\alpha_n(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{I})\cdots(\mathcal{A}-\lambda_s\mathcal{I})v = 0.$$

Sklepaj, da vsaj eden od operatorjev $\mathcal{A}-\lambda_i\mathcal{I}$ ni injektiven. Ustrezni λ_i je potem lastna vrednost endomorfizma $\mathcal{A}$.

Opomba *Popravi definicijo polinoma p tako, da bodo vse njegove ničle lastne vrednosti operatorja $\mathcal{A}$.*

▷▷▷ 298.

Rešitev 298. naloge

Najprej dokaži, da je vsaka kompleksna $n \times n$ matrika podobna zgornje trikotni matriki, takole.

Za $n = 1$ je trditev očitna, saj je matrika velikosti 1×1 tudi zgornje trikotna. Predpostavi, da velja trditev za vse matrike velikosti $n \times n$, $n \ge 1$, in vzemi poljubno matriko $A \in \mathbb{C}^{(n+1)\times(n+1)}$. Endomorfizem $\mathcal{A}$ prostora $\mathbb{C}^{n+1}$, ki ga določa A, ima vsaj en lastni par (λ, v), torej $\mathcal{A}v = \lambda v$.

V urejeni bazi prostora $\mathbb{C}^{n+1}$, katere prvi vektor je v, pripada preslikavi $\mathcal{A}$ matrika B velikosti $(n+1)\times(n+1)$ z bločnim zapisom

$$B = \left[\begin{array}{c|c} \lambda & a_1 \\ \hline 0 & A_1 \end{array}\right],$$

kjer je $A_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}$, a_1 je vrstica iz $\mathbb{C}^{1\times n}$ in 0 označuje ničelni stolpec iz $\mathbb{C}^{n\times 1}$. Torej je $A = PBP^{-1}$ za neko obrnljivo matriko $P \in \mathbb{C}^{(n+1)\times(n+1)}$. Ker je matrika A_1 velikosti $n\times n$, je po indukcijski predpostavki podobna neki zgornje trikotni matriki T_1, torej obstaja taka obrnljiva matrika $P_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}$, da velja $A_1 = P_1T_1P_1^{-1}$. Preveri, da je

$$B = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P_1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} \lambda & a_1P_1 \\ \hline 0 & T_1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P_1 \end{array}\right]^{-1}$$

in sklepaj, da je A podobna zgornje trikotni matriki

$$T := \left[\begin{array}{c|c} \lambda & a_1P_1 \\ \hline 0 & T_1 \end{array}\right].$$

S tem je indukcijski korak končan.

Druga trditev je posledica dejstva, da imajo podobne matrike iste lastne vrednosti in da so lastne vrednosti trikotne matrike ravno njeni diagonalni koeficienti.

▷▷▷ 199., 211., 286., 294., 297.

Rešitev 299. naloge

1. način. Ker je $\mathcal{A}$ nilpotent, je njegova edina lastna vrednost enaka 0. Zato je njegov karakteristični polinom enak $p_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda^n$, kjer je $n = \dim V$. Sklepaj

$$\det(\mathcal{I}+\mathcal{A}) = (-1)^n\det(-\mathcal{I}-\mathcal{A}) = (-1)^n\det((-1)\mathcal{I}-\mathcal{A}) = (-1)^n p_{\mathcal{A}}(-1) = 1.$$

2. način. Determinanta operatorja $\mathcal{I}+\mathcal{A}$ je enaka determinanti matrike $\mathrm{M}_{\Pi}^{\Pi}(\mathcal{I}+\mathcal{A})$, ki pripada operatorju $\mathcal{I}+\mathcal{A}$ v poljubno izbrani bazi Π prostora V. Operator $\mathcal{A}$ je nilpotent, zato je njegova edina lastna vrednost enaka 0 in obstaja taka baza Π prostora V, v kateri pripada operatorju $\mathcal{A}$ zgornje trikotna matrika $T = \mathrm{M}_{\Pi}^{\Pi}(\mathcal{A})$ z ničlami na glavni diagonali (glej nalogo 298 ali nalogo 406). Torej je

$$\det(\mathcal{I}+\mathcal{A}) = \det(\mathrm{M}_{\Pi}^{\Pi}(\mathcal{I}+\mathcal{A})) = \det(\mathrm{M}_{\Pi}^{\Pi}(\mathcal{I}) + \mathrm{M}_{\Pi}^{\Pi}(\mathcal{A})) = \det(I+T) = 1.$$

Pri tem upoštevaj, da je $I+T$ zgornje trikotna matrika z enicami na glavni diagonali.

▷▷▷ 406.

Rešitev 300. naloge

Postavi $r(\lambda) := \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3)$. Ker polinom $r(\lambda)$ po predpostavki uniči matriko X, velja $m_X(\lambda)|r(\lambda)$. To je res natanko takrat, ko $m_X(\lambda) = \lambda - 2$ ali $m_X(\lambda) = \lambda - 3$ ali $m_X(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-3)$. V prvem primeru je matrika X podobna matriki $2I$, torej $X = 2I$. V drugem primeru je X podobna $3I$, torej $X = 3I$. V tretjem primeru pa je X podobna eni od matrik $\mathrm{diag}(2,2,3)$ ali $\mathrm{diag}(2,3,3)$, zato $X = P\cdot\mathrm{diag}(2,2,3)\cdot P^{-1}$ ali $X = P\cdot\mathrm{diag}(2,3,3)\cdot P^{-1}$, kjer je P poljubna obrnljiva matrika iz $\mathbb{C}^{3\times 3}$.

Rešitev 301. naloge

Naj bo matrika A velikosti $n \times n$. Ker je $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$, lahko izračunaš

$$p_{A^2-3I}(\lambda) = \det(\lambda I - (A^2 - 3I)) = \det((\lambda+3)I - A^2) = \det((\sqrt{\lambda+3}I - A)(\sqrt{\lambda+3}I + A)) =$$
$$= \det(\sqrt{\lambda+3}I - A)\det(\sqrt{\lambda+3}I + A) = \det(\sqrt{\lambda+3}I - A)(-1)^n \det(-\sqrt{\lambda+3}I - A) =$$
$$= (-1)^n p_A(\sqrt{\lambda+3}) p_A(-\sqrt{\lambda+3}).$$

Opomba *Pozor, v kompleksnem ima koren dve veji. V gornjem zapisu označuje* $\sqrt{\lambda+3}$ *povsod isto kompleksno število.*

Rešitev 302. naloge

Označi z $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{F}$ lastne vrednosti endomorfizma $\mathcal{A}$, ki jim zaporedoma pripadajo lastni vektorji $v_1, \dots, v_k$, in piši $u := v_1 + \dots + v_k$. Ker je U invarianten za $\mathcal{A}$ in $u \in U$, pripadajo tudi vektorji $\mathcal{A}u, \dots, \mathcal{A}^{k-1}u$ podprostoru U. Zapiši

$$\begin{array}{rcl} u &=& v_1 + \cdots + v_k, \\ \mathcal{A}u &=& \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k, \\ \mathcal{A}^2 u &=& \lambda_1^2 v_1 + \cdots + \lambda_k^2 v_k, \\ &\vdots& \\ \mathcal{A}^{k-1}u &=& \lambda_1^{k-1} v_1 + \cdots + \lambda_k^{k-1} v_k. \end{array}$$

Gornje enakosti obravnavaj kot linearen sistem (vektorskih) enačb: označi

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_k^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \lambda_3^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1} \end{bmatrix}, \quad X := \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix}, \quad Y := \begin{bmatrix} u \\ \mathcal{A}u \\ \mathcal{A}^2u \\ \vdots \\ \mathcal{A}^{k-1}u \end{bmatrix}$$

in prepiši gornje enakosti v matrično enačbo

$$MX = Y.$$

Ker so lastne vrednosti $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ paroma različne, je determinanta matrike M različna od 0 (glej nalogo 247). Zato je M obrnljiva in smeš pisati

$$X = M^{-1}Y.$$

Sklepaj, da so vektorji v_i linearne kombinacije vektorjev $u, \mathcal{A}u, \mathcal{A}^2u, \dots, \mathcal{A}^{k-1}u$, ki pripadajo podprostoru U. Torej velja $v_1, \dots, v_k \in U$, kar je bilo treba dokazati.

⊳⊳⊳ 303.

Rešitev 303. naloge

Ker se $\mathcal{A}$ da diagonalizirati, je V prema vsota lastnih podprostorov endomorfizma $\mathcal{A}$, torej

$$V = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_1\mathcal{I}) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_r\mathcal{I}),$$

kjer so $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ vse paroma različne lastne vrednosti endomorfizma $\mathcal{A}$.

Naj bo $U \neq 0$ invarianten podprostor operatorja $\mathcal{A}$. Vzemi poljubno njegovo bazo $\{u_1, \dots, u_s\}$. Oglej si vektor u_1. Ker je V prema vsota lastnih podprostorov endomorfizma $\mathcal{A}$, je u_1 vsota nekih lastnih vektorjev $v_{i_1}, \dots, v_{i_t}$, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_t}$:

$$u_1 = v_{i_1} + \cdots + v_{i_t}.$$

Prepričaj se, da so izpolnjene predpostavke naloge 302, in da zato pripadajo vektorji $v_{i_1}, \dots, v_{i_t}$ podprostoru U. Torej velja

$$U = \mathcal{L}\{u_1, u_2, \dots, u_s\} = \mathcal{L}\{u_1, v_{i_1}, \dots, v_{i_t}, u_2, \dots, u_s\} = \mathcal{L}\{v_{i_1}, \dots, v_{i_t}, u_2, \dots, u_s\}.$$

Podobno napravi za vektorje $u_2, \dots, u_s$ in sklepaj, da podprostor U razpenjajo sami lastni vektorji preslikave $\mathcal{A}$. Skrči dobljeno ogrodje, da dobiš bazo podprostora U, ki je sestavljena iz lastnih vektorjev endomorfizma $\mathcal{A}$. Trditev je dokazana.

⊳⊳⊳ 302., 304.

Rešitev 304. naloge

Napiši matriko A, ki pripada operatorju $\mathcal{A}$ v običajni urejeni bazi $\Sigma := \{1, x, x^2\}$ prostora $\mathbb{R}_2[x]$:

$$A = \mathrm{M}_\Sigma^\Sigma(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Lastne vrednosti operatorja $\mathcal{A}$ so $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$, pripadajoči lastni vektorji pa so naprimer $q_1(x) := 1$, $q_2(x) := 1 - x$, $q_3(x) := 1 + x + x^2$. Ker ima $\mathcal{A}$ tri paroma različne lastne vrednosti, je po nalogi 303 vsak njegov dvorazsežen invarianten podprostor prema vsota dveh lastnih podprostorov, in je zato enak enemu izmed podprostorov

$$\mathcal{L}\{q_1, q_2\}, \quad \mathcal{L}\{q_1, q_3\}, \quad \mathcal{L}\{q_2, q_3\}.$$

⊳⊳⊳ 303.

Rešitev 305. naloge

1. način reševanja. Oglej si nalogo 298 in sklepaj, da obstaja urejena baza $\Psi = \{v_1, \dots, v_n\}$ prostora V, v kateri pripada endomorfizmu $\mathcal{A}$ zgornje trikotna matrika. Premisli, da je potem vsak $U_i := \mathcal{L}\{v_1, \dots, v_i\}$ i-razsežen invarianten podprostor endomorfizma $\mathcal{A}$ za $i = 1, \dots, n$. Pri $i = 0$ vzemi $U_0 := \{0\}$.

2. način reševanja. Naj bo $B := \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ jordanska urejena baza prostora V, torej taka baza, v kateri endomorfizmu $\mathcal{A}$ pripada jordanska matrika. Definiraj podprostore $U_i := \mathcal{L}\{v_1, \dots, v_i\}$ za $i = 1, \dots, n$ in $U_0 := \{0\}$. S pomočjo jordanske matrike sklepaj, da je $\mathcal{A}v_i = \lambda_i v_i + \mu_i v_{i-1}$ za $i = 2, \dots, n$ in $\mathcal{A}v_1 = \lambda_1 v_1$, kjer je λ_i i-ti diagonalni koeficient, skalar μ_i pa je 1 ali 0. Zato so podprostori U_i invariantni podprostori preslikave $\mathcal{A}$ in $\dim U_i = i$.

Evklidski in unitarni prostori

Rešitev 306. naloge

($\Rightarrow$). Če je $v = 0$, potem je $v = 0v$, in zato za vsak $w \in W$ velja

$$\langle v, w\rangle = \langle 0v, w\rangle = 0\langle v, w\rangle = 0.$$

($\Leftarrow$). Naj za vse $w \in W$ velja $\langle v, w\rangle = 0$. Posebej, za $w := v$ dobiš $\langle v, v\rangle = 0$. Iz pozitivne definitnosti skalarnega produkta sledi $v = 0$.

Opomba *Gornja trditev drži tudi v evklidskih prostorih.*

⊳⊳⊳ 308.

Rešitev 307. naloge

Želiš dokazati $e_1 = e_2$ oziroma $e_1 - e_2 = 0$. V evklidskem prostoru imaš za preverjanje ničelnosti vektorja $v \in V$ na razpolago pozitivno definitnost skalarnega produkta:

$$v = 0 \iff \langle v, v\rangle = 0.$$

Torej je smiselno izračunati

$$\langle e_1 - e_2, e_1 - e_2\rangle = \langle e_1, e_1\rangle - \langle e_1, e_2\rangle - \langle e_2, e_1\rangle + \langle e_2, e_2\rangle = 1 - 1 + 1 - 1 = 0,$$

odkoder sklepaš $e_1 - e_2 = 0$ in zato $e_1 = e_2$.

Rešitev 308. naloge

Za $x := a$ dobiš $\langle a, a\rangle \geq 0$, za $x := -a$ pa $0 \leq \langle a, -a\rangle = -\langle a, a\rangle$. Odtod sledi $\langle a, a\rangle = 0$, torej $a = 0$.

⊳⊳⊳ 306.

Rešitev 309. naloge

Vsi predpisi sicer definirajo preslikave iz $\mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x]$ v $\mathbb{R}$, toda noben ni skalarni produkt. Pri vsakem zadošča navesti konkretni primer polinomov, pri katerih ne velja kakšen od aksiomov skalarnega produkta.

Pri $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ vzemi naprimer polinom $p(x) := 1$. Potem je $\langle p, p\rangle_1 = p^{(n)}(0)p^{(n)}(0) = 0 \cdot 0 = 0$, saj je $n \in \mathbb{N}$, zato preslikava $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ ni pozitivno definitna. (Če želiš, lahko preveriš, da preslikava $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ zadošča ostalim aksiomom skalarnega produkta.)

Pri $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ vzemi polinom $p(x) := 1 - x$, saj je $n \in \mathbb{N}$. Potem je $\langle p, p\rangle_2 = p(1)p(1) = 0 \cdot 0 = 0$, zato preslikava $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ ni pozitivno definitna. (Če želiš, lahko preveriš, da preslikava $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ zadošča ostalim aksiomom skalarnega produkta.)

Pri $\langle\cdot,\cdot\rangle_3$ vzemi polinom $p(x) := -1$. Potem je $\langle p, p\rangle_3 = p(0) + p(0) = (-1) + (-1) = -2 < 0$, zato preslikava $\langle\cdot,\cdot\rangle_3$ ni pozitivno definitna. (Lahko tudi pokažeš, da preslikava $\langle\cdot,\cdot\rangle_3$ ni ne aditivna ne homogena v prvem faktorju, je pa simetrična.)

Pri $\langle\cdot,\cdot\rangle_4$ vzemi polinoma $p(x) := 1 =: q(x)$ in skalar $\lambda := -1$. Potem je $\langle \lambda p, q\rangle_4 = |\lambda p(1)q(1)| = |-1| = 1$, toda $\lambda\langle p, q\rangle_4 = \lambda|p(1)q(1)| = (-1)|1| = -1$, zato preslikava $\langle\cdot,\cdot\rangle_4$ ni homogena v prvem faktorju. (Lahko tudi pokažeš, da preslikava $\langle\cdot,\cdot\rangle_4$ ni aditivna v prvem faktorju, je pa pozitivno definitna in simetrična.)

Pri $\langle\cdot,\cdot\rangle_5$ takoj opaziš, da ni simetrična. Naprimer, vzemi polinoma $p(x) := 1$ in $q(x) := 2$. Potem je $\langle p, q\rangle_5 = |p(1)| = 1$, toda $\langle q, p\rangle_5 = |q(1)| = 2$, zato preslikava $\langle\cdot,\cdot\rangle_4$ ni simetrična. (Lahko, če želiš, pokažeš tudi, da preslikava $\langle\cdot,\cdot\rangle_4$ ni ne aditivna ne homogena v prvem faktorju, je pa pozitivno definitna.)

Opomba *Zaloga vrednosti skalarnega produkta vsebuje (zaradi homogenosti v posameznih faktorjih) vsa realna števila, torej tudi negativna. Oglej si še enkrat predpisa $\langle\cdot,\cdot\rangle_4$ in $\langle\cdot,\cdot\rangle_5$!*

⊳⊳⊳ 310., 314.

Rešitev 310. naloge

Preveri aksiome skalarnega produkta:

(a) Pozitivna definitnost. Izračunaj

$$\langle p, p\rangle = \sum_{k=0}^{n} (p^{(k)}(0))^2 \geq 0.$$

Torej je preslikava $\langle\cdot,\cdot\rangle$ pozitivna. Če je $p = 0$, je $\langle p, p\rangle = 0$. Obratno, označi $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$. Iz $0 = \langle p, p\rangle = \sum_{k=0}^{n}(p^{(k)}(0))^2$ dobiš pogoje $p^{(k)}(0) = 0$ za vsak $k = 0, 1, \ldots, n$ in odtod sistem enačb

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad 2a_2 = 0, \quad \ldots, \quad n!a_n = 0.$$

Zato je $a_k = 0$ za vsak $k = 0, \ldots, n$ in $p = 0$. Torej je preslikava $\langle\cdot,\cdot\rangle$ tudi definitna.

(b) Aditivnost v prvem faktorju. Za poljubne $p, q, r \in \mathbb{R}_n[x]$ velja

$$\begin{aligned}
\langle p + q, r\rangle &= \textstyle\sum_{k=0}^{n}(p + q)^{(k)}(0)r^{(k)}(0) \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{n}(p^{(k)} + q^{(k)})(0)r^{(k)}(0) \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{n}(p^{(k)}(0)r^{(k)}(0) + q^{(k)}(0)r^{(k)}(0)) \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{n} p^{(k)}(0)r^{(k)}(0) + \sum_{k=0}^{n} q^{(k)}(0)r^{(k)}(0) \\
&= \langle p, r\rangle + \langle q, r\rangle
\end{aligned}$$

V gornjem računu upoštevaš aditivnost odvajanja, distributivnost v realnih številih ter komutativnost seštevanja realnih števil.

(c) Homogenost v prvem faktorju. Za poljubna $p, q \in \mathbb{R}_n[x]$ in poljubni $\lambda \in \mathbb{R}$ velja

$$\begin{aligned}
\langle \lambda p, q\rangle &= \textstyle\sum_{k=0}^{n}(\lambda p)^{(k)}(0)q^{(k)}(0) \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{n} \lambda p^{(k)}(0)q^{(k)}(0) \\
&= \lambda \textstyle\sum_{k=0}^{n} p^{(k)}(0)q^{(k)}(0) \\
&= \lambda\langle p, q\rangle
\end{aligned}$$

V gornjem računu upoštevaš homogenost odvajanja, asociativnost množenja in distributivnost v realnih številih.

(d) Simetričnost. Za poljubna $p, q \in \mathbb{R}_n[x]$ velja

$$\begin{aligned} \langle p, q\rangle &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} p^{(k)}(0)q^{(k)}(0) \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} q^{(k)}(0)p^{(k)}(0) \\ &= \langle q, p\rangle \end{aligned}$$

Pri računanju upoštevaš komutativnost množenja realnih števil.

Opomba *Premisli, da je pri pribitem $a \in \mathbb{R}$ tudi $\langle p, q\rangle := \sum_{k=0}^{n} p^{(k)}(a)q^{(k)}(a)$ skalarni produkt na $\mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x]$.*

▷▷▷ 309.

Rešitev 311. naloge

1. način reševanja. Preslikava $\langle\cdot,\cdot\rangle$ mora zadoščati aksiomom skalarnega produkta:

(a) Pozitivna definitnost:

$$\langle (a,b),(a,b)\rangle = \lambda a^2 + (\mu-1)ab + 2b^2 > 0, \tag{128}$$

če je $(a,b) \neq 0$, to je, če $a \neq 0$ ali $b \neq 0$. Če je $b = 0$ in $a \neq 0$, dobiš pogoj $\lambda a^2 > 0$, zato $\lambda > 0$. Če je $b \neq 0$, neenakost (128) deliš z b^2 in dobiš kvadratno neenačbo

$$\lambda(\frac{a}{b})^2 + (\mu-1)(\frac{a}{b}) + 2 > 0$$

za vsak a/b, kjer $b \neq 0$. Zato mora biti $\lambda > 0$ in $0 > D = (\mu-1)^2 - 8\lambda$.

(Lahko pa razmišljaš tudi takole. Preoblikuj

$$\langle (a,b),(a,b)\rangle = \lambda a^2 + (\mu-1)ab + 2b^2 =$$

$$= (\sqrt{\lambda}a + \frac{(\mu-1)}{2\sqrt{\lambda}}b)^2 - \frac{(\mu-1)^2}{4\lambda}b^2 + 2b^2 = (\sqrt{\lambda}a + \frac{(\mu-1)}{2\sqrt{\lambda}}b)^2 + b^2\left(2 - \frac{(\mu-1)^2}{4\lambda}\right).$$

Premisli, da je $\langle (a,b),(a,b)\rangle > 0$ za vsak neničelni vektor $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ natanko tedaj, ko je $\lambda > 0$ in $2 - \frac{(\mu-1)^2}{4\lambda} > 0$, torej ko je $\lambda > 0$ in $8\lambda > (\mu-1)^2$.)

(b) Aditivnost v prvem faktorju. Za poljubne vektorje $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{R}^2$ velja

$$\begin{aligned} \langle (a,b)+(c,d),(e,f)\rangle &= \langle (a+c,b+d),(e,f)\rangle \\ &= \lambda(a+c)e - (a+c)f + \mu(b+d)e + 2(b+d)f \\ &= \lambda ae + \lambda ce - af - cf + \mu be + \mu de + 2bf + 2df \\ &= (\lambda ae - af + \mu be + 2bf) + (\lambda ce - cf + \mu de + 2df) \\ &= \langle (a,b),(e,f)\rangle + \langle (c,d),(e,f)\rangle, \end{aligned}$$

zato je preslikava $\langle\cdot,\cdot\rangle$ aditivna v prvem faktorju za poljubna $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. (Odtod torej ne dobiš nobenega pogoja za λ in μ.)

(c) Homogenost v prvem faktorju. Za poljuben $\alpha \in \mathbb{R}$ in poljubna vektorja $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$ velja

$$\begin{aligned} \langle \alpha(a,b),(c,d)\rangle &= \langle (\alpha a,\alpha b),(c,d)\rangle \\ &= \lambda(\alpha a)c - (\alpha a)d + \mu(\alpha b)c + 2(\alpha b)d \\ &= \lambda\alpha ac - \alpha ad + \mu\alpha bc + 2\alpha bd \\ &= \alpha(\lambda ac - ad + \mu bc + 2bd) \\ &= \alpha\langle (a,b),(c,d)\rangle, \end{aligned}$$

zato je preslikava $\langle\cdot,\cdot\rangle$ homogena v prvem faktorju za poljubna $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. (Odtod torej ne dobiš nobenega pogoja na λ in μ.)

(d) Simetričnost. Iz pogoja $\langle (a,b),(c,d)\rangle = \langle (c,d),(a,b)\rangle$ dobiš $\mu = -1$.

Ko združiš tako dobljene pogoje, dobiš $\mu = -1$ in $\lambda > 1/2$.

2. način reševanja. Ker lahko zapišeš

$$\langle (a,b),(c,d)\rangle = \lambda ac - ad + \mu bc + 2bd = a(\lambda c - d) + b(\mu c + 2d) = [a,b]\cdot[\lambda c - d, \mu c + 2d]^{\mathrm{t}} =$$

$$= [a,b]\cdot\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ \mu & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix},$$

je $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bilinearna forma na prostoru $\mathbb{R}^2$. Preveriti moraš še pozitivno definitnost in simetričnost forme $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Zadosti je preveriti, da je matrika

$$S := \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ \mu & 2 \end{bmatrix}$$

pozitivno definitna in simetrična. Za pozitivno definitnost matrike S dobiš pogoja $\lambda > 0$ in $0 < \det S = 2\lambda + \mu$, za simetričnost matrike S pa $\mu = -1$. Odtod rešitev: $\mu = -1$ in $\lambda > \frac{1}{2}$.

Opomba *Pri 1. načinu reševanja lahko preverjaš aksiome v drugačnem vrstnem redu. Poskusi!*

▷▷▷ 312., 439.

Rešitev 312. naloge

1. način reševanja. Preveri, da je za vsak $\lambda \in \mathbb{R}$ predpis $\langle\cdot,\cdot\rangle$: $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ simetričen in linearen v prvem faktorju. Kako je z njegovo pozitivno definitnostjo? Piši $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ in preoblikuj

$$\begin{aligned} \langle x, x\rangle &= 3x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 + \lambda x_3^2 \\ &= (\sqrt{3}x_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}x_3)^2 - \frac{1}{3}x_2^2 - \frac{1}{3}x_3^2 - \frac{2}{3}x_2x_3 + 2x_2^2 + \lambda x_3^2 \\ &= (\sqrt{3}x_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}x_3)^2 + \frac{5}{3}x_2^2 - \frac{2}{3}x_2x_3 + (\lambda - \frac{1}{3})x_3^2 \\ &= (\sqrt{3}x_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}x_3)^2 + (\sqrt{\frac{5}{3}}x_2 - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{5}}x_3)^2 - \frac{1}{15}x_3^2 + (\lambda - \frac{1}{3})x_3^2 \\ &= (\sqrt{3}x_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}x_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}x_3)^2 + (\sqrt{\frac{5}{3}}x_2 - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{5}}x_3)^2 + (\lambda - \frac{2}{5})x_3^2. \end{aligned}$$

Premisli, da velja:

$$\langle x, x\rangle > 0 \text{ za vse } x \neq 0 \iff \lambda - \frac{2}{5} > 0.$$

Torej je $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalarni produkt natanko takrat, ko je $\lambda > 2/5$.

2. način reševanja. Matrika, ki pripada podani formi $\langle \cdot, \cdot \rangle$ v običajni urejeni bazi prostora $\mathbb{R}^3$, je

$$S(\lambda) := \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Matrika $S(\lambda)$ je simetrična. Zahtevaš še samo, da je $S(\lambda)$ pozitivno definitna, kar velja natanko takrat, ko so njeni glavni minorji strogo pozitivni:

$$3 > 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 > 0 \quad \text{in} \quad \det S(\lambda) = 5\lambda - 2 > 0.$$

Odtod dobiš $\lambda > 2/5$.

⊳⊳⊳ 311., 439.

Rešitev 313. naloge

(a) V naslednjih premislekih uporabi poleg definicije preslikave ϕ in lastnosti računanja z matrikami tudi linearnost preslikave sled (naloga 158) in nalogo 286(a).
Za vse $A, B, C \in V$ velja

$$\phi(A+B, C) = \operatorname{sled}((A+B)C) = \operatorname{sled}(AC+BC) = \operatorname{sled}(AC) + \operatorname{sled}(BC) =$$
$$= \phi(A, C) + \phi(B, C),$$

torej je ϕ aditivna v svojem prvem argumentu. Ker za vsak $\lambda \in \mathbb{R}$ in za vsaka $A, B \in V$ velja

$$\phi(\lambda A, B) = \operatorname{sled}(\lambda AB) = \lambda \operatorname{sled}(AB) = \lambda\, \phi(A, B),$$

je ϕ homogena v svojem prvem argumentu. Zaradi

$$\phi(A, B) = \operatorname{sled}(AB) = \operatorname{sled}(BA) = \phi(B, A),$$

je ϕ simetrična. Torej je ϕ simetrična bilinearna preslikava na V.

(b) Predpostavi zdaj, da je $A = [a_{ij}] \in V$ takšna matrika, da velja

$$\phi(A, B) = 0, \quad \forall B \in V.$$

1. način reševanja. Če namesto B pišeš elementarno matriko E_{ij}, dobiš

$$0 = \phi(A, E_{ij}) = \operatorname{sled}(AE_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} (AE_{ij})_{kk} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}(E_{ij})_{lk} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}\delta_{il}\delta_{jk} = a_{ji}.$$

Ker velja $a_{ji} = 0$ za vse i, j, je $A = 0$, kar je bilo treba dokazati.

2. način reševanja. Vstavi $B := A^t$:

$$0 = \phi(A, A^t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2.$$

Sklepaj, da je $a_{ij} = 0$ za vse i, j.

(c) Označi z $U \leq V$ podprostor simetričnih matrik. Ker je ϕ simetrična bilinearna preslikava na V, je taka tudi na U. Zato si moraš ogledati samo še njeno pozitivno definitnost. Če je $A = [a_{ij}] \in U$ simetrična matrika, potem je

$$\phi(A, A) = \operatorname{sled}(A^2) = \sum_{i=1}^{n}(A^2)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{ji} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij})^2 \geq 0.$$

Odtod sklepaš, da je

$$\phi(A, A) = 0 \iff a_{ij} = 0 \text{ za vsaka } i, j \iff A = 0.$$

Zato je ϕ na podprostoru simetričnih matrik pozitivno definitna simetrična bilinearna preslikava, torej skalarni produkt.

Opomba *Točka (b) je definicija neizrojenosti simetrične bilinearne preslikave (forme). Preveri, da predpis $\psi(A, B) := \operatorname{sled}(AB^t)$ določa skalarni produkt na prostoru $\mathbb{R}^{n\times n}$.*

⊳⊳⊳ 158.

Rešitev 314. naloge

Za poljubna $z, w \in \mathbb{C}^n$, kjer je $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $w = (w_1, \ldots, w_n)$, definiraj preslikavo

$$\langle z, w \rangle = \overline{z_1}w_1 + z_2\overline{w_2} + \cdots + z_n\overline{w_n}.$$

Preveri, da veljajo vsi aksiomi skalarnega produkta razen homogenosti v prvem faktorju:

(a) Pozitivna definitnost. Za poljuben $z \in \mathbb{C}^n$ velja

$$\langle z, z \rangle = \overline{z_1}z_1 + z_2\overline{z_2} + \cdots + z_n\overline{z_n} = |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 \geq 0.$$

Če je $\langle z, z \rangle = 0$, je $|z_1|^2 = 0, \ldots, |z_n|^2 = 0$, zato $0 = z_1 = \cdots = z_n$, torej je $z = 0$. Obratno, če je $z = 0$, je očitno $\langle z, z \rangle = 0$.

(b) Konjugirana simetričnost. Za poljubna $w, z \in \mathbb{C}^n$ velja

$$\begin{aligned} \overline{\langle w, z \rangle} &= \overline{\overline{w_1}z_1 + w_2\overline{z_2} + \cdots + w_n\overline{z_n}} \\ &= w_1\overline{z_1} + \overline{w_2}z_2 + \cdots + \overline{w_n}z_n \\ &= \overline{z_1}w_1 + z_2\overline{w_2} + \cdots + z_n\overline{w_n} \\ &= \langle z, w \rangle. \end{aligned}$$

(c) Aditivnost v prvem faktorju. Za poljubne $v, w, z \in \mathbb{C}^n$ velja

$$\begin{aligned} \langle v + w, z \rangle &= \overline{(v_1 + w_1)}z_1 + (v_2 + w_2)\overline{z_2} + \cdots + (v_n + w_n)\overline{z_n} \\ &= \overline{v_1}z_1 + \overline{w_1}z_1 + v_2\overline{z_2} + w_2\overline{z_2} + \cdots + v_n\overline{z_n} + w_n\overline{z_n} \\ &= \langle v, z \rangle + \langle w, z \rangle. \end{aligned}$$

(d) Homogenost v prvem faktorju ne velja. Vzemi naprimer vektor $w := (1, 0, \ldots, 0)$ in skalar $\lambda := i$. Potem po eni strani velja $\langle \lambda w, w\rangle = \bar{i} = -i$, po drugi pa $\lambda\langle w, w\rangle = i$.

⋙ 309.

Rešitev 315. naloge

Preveri po vrsti, ali preslikava $\langle\cdot,\cdot\rangle$ zadošča vsem aksiomom za skalarni produkt.

(a) Za vsaka $x, y \in U$ velja

$$\langle x, y\rangle = \langle\!\langle \mathcal{T}x, \mathcal{T}y\rangle\!\rangle = \langle\!\langle \mathcal{T}y, \mathcal{T}x\rangle\!\rangle = \langle y, x\rangle,$$

torej je $\langle\cdot,\cdot\rangle$ simetrična preslikava na $U \times U$.

(b) Za vse $x, y, z \in U$ in vsak $\lambda \in \mathbb{R}$ velja

$$\langle x+y, z\rangle = \langle\!\langle \mathcal{T}(x+y), \mathcal{T}z\rangle\!\rangle = \langle\!\langle \mathcal{T}x + \mathcal{T}y, \mathcal{T}z\rangle\!\rangle =$$
$$= \langle\!\langle \mathcal{T}x, \mathcal{T}z\rangle\!\rangle + \langle\!\langle \mathcal{T}y, \mathcal{T}z\rangle\!\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$$

in

$$\langle \lambda x, y\rangle = \langle\!\langle \mathcal{T}(\lambda x), \mathcal{T}y\rangle\!\rangle = \langle\!\langle \lambda\mathcal{T}x, \mathcal{T}y\rangle\!\rangle = \lambda\langle\!\langle \mathcal{T}x, \mathcal{T}y\rangle\!\rangle = \lambda\langle x, y\rangle,$$

torej je $\langle\cdot,\cdot\rangle$ linearna v svoji prvi komponenti.

(c) Za vse $x \in U$ je

$$\langle x, x\rangle = \langle\!\langle \mathcal{T}x, \mathcal{T}x\rangle\!\rangle \geq 0$$

in

$$\langle x, x\rangle = 0 \iff \langle\!\langle \mathcal{T}x, \mathcal{T}x\rangle\!\rangle = 0 \iff \mathcal{T}x = 0 \iff x = 0.$$

(Zadnja enakovrednost velja zaradi injektivnosti linearne preslikave $\mathcal{T}$.) Torej je $\langle\cdot,\cdot\rangle$ pozitivno definitna preslikava na $U \times U$.

Opomba *Ali je za veljavnost sklepa nujno, da je $\mathcal{T}$ izomorfizem?*

⋙ 318.

Rešitev 316. naloge

Označi običajni skalarni produkt na $\mathbb{R}^4$ z $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

(a) Za vektor $v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^4$ velja veriga sklepov

$$v \in (1,2,3,4)^\perp \iff v \perp (1,2,3,4) \iff \langle v, (1,2,3,4)\rangle = 0 \iff$$
$$\iff v_1 + 2v_2 + 3v_3 + 4v_4 = 0.$$

Zato je

$$\begin{aligned}(1,2,3,4)^\perp &= \{(v_1,v_2,v_3,v_4) \in \mathbb{R}^4 \mid v_1 + 2v_2 + 3v_3 + 4v_4 = 0\}\\ &= \{(-(2v_2 + 3v_3 + 4v_4), v_2, v_3, v_4) \mid v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}\}\\ &= \{v_2(-2,1,0,0) + v_3(-3,0,1,0) + v_4(-4,0,0,1) \mid v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Premisli, da lahko za iskano bazo vzameš množico $\{(-2,1,0,0), (-3,0,1,0), (-4,0,0,1)\}$.

(b) Za poljubno množico vektorjev M velja $M^{\perp\perp} = \mathcal{L}(M)$. Zato je $(1,2,3,4)^{\perp\perp} = \mathcal{L}\{(1,2,3,4)\}$, njegova baza pa je $\{(1,2,3,4)\}$.

(c) Za poljubno množico vektorjev M velja $M^{\perp\perp\perp} = (M^{\perp\perp})^\perp = (\mathcal{L}(M))^\perp = M^\perp$. Uporabi rezultat iz točke (a).

(d) Glej prejšnjo točko.

Opomba *Pomni: če je V vektorski prostor opremljen s skalarnim produktom in M njegova poljubna podmnožica, veljajo naslednje enakosti: $M^{\perp\perp} = \mathcal{L}(M)$, $(\mathcal{L}(M))^\perp = M^\perp$, $M^{\perp\perp\perp} = M^\perp$.*

Rešitev 317. naloge

Najprej se prepričaj, da so podani vektorji e_1, e_2 in e_3 linearno neodvisni (sicer moraš množico $\{e_1, e_2, e_3\}$ najprej skrčiti do linearno neodvisne množice). Ortonormirano bazo prostora $U = \mathcal{L}\{e_1, e_2, e_3\}$ dobiš z Gram-Schmidtovim postopkom takole: definiraj vektorje

$$f_1 := e_1 = (3,0,0,0),$$

$$f_2 := e_2 - \frac{\langle e_2, f_1\rangle}{\langle f_1, f_1\rangle} f_1 = (2,1,1,0) - \frac{6}{9}(3,0,0,0) = (0,1,1,0),$$

$$\begin{aligned} f_3 &:= e_3 - \frac{\langle e_3, f_1\rangle}{\langle f_1, f_1\rangle} f_1 - \frac{\langle e_3, f_2\rangle}{\langle f_2, f_2\rangle} f_2\\ &= (0,-2,1,2) - \frac{0}{9}(3,0,0,0) - \frac{-1}{2}(0,1,1,0)\\ &= (0,-3/2,3/2,2).\end{aligned}$$

Baza $\{f_1, f_2, f_3\}$ je ortogonalna, njene vektorje moraš še normirati:

$$g_1 := \frac{f_1}{\|f_1\|} = (1,0,0,0),$$

$$g_2 := \frac{f_2}{\|f_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0),$$

$$g_3 := \frac{f_3}{\|f_3\|} = \frac{1}{\sqrt{34}}(0,-3,3,4)$$

in $\{g_1, g_2, g_3\}$ je ortonormirana baza podprostora U.

Opomba *Lahko se izogneš preverjanju linearne neodvisnosti začetne množice: v tem primeru moraš sproti izločati vse ničelne vektorje, ki jih porodi Gram-Schmidtov postopek.*

⋙ 318., 321.

Rešitev 318. naloge

(a) Dokaza se loti s preverjanjem aksiomov za skalarni produkt, na osnovi opombe k nalogi 313, ali pa takole. Opazi, da smeš podani skalarni produkt tolmačiti kot običajni skalarni produkt na prostoru $\mathbb{R}^4$, če le matrike zapišeš (na naraven način) kot četverice:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto (a, b, c, d). \tag{129}$$

Kako natančneje izraziti gornjo misel? Definiraj preslikavo $\mathcal{T}\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^4$ s predpisom (129). Ugotovi, da je $\mathcal{T}$ izomorfizem vektorskih prostorov. Označi s $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$ običajni skalarni produkt v $\mathbb{R}^4$ in preveri, da velja

$$\langle A, B \rangle = \langle\!\langle \mathcal{T}A, \mathcal{T}B \rangle\!\rangle$$

za vse $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Iz naloge 315 zdaj sledi, da je $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalarni produkt na $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(b) Iz razcepa $\begin{bmatrix} a & a+2b \\ 0 & -b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ sklepaj, da matriki $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ tvorita bazo za U. Iz nje dobiš z Gram-Schmidtovim postopkom ortonormirano bazo $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$.

⊳⊳⊳ 315., 317., 321.

Rešitev 319. naloge

Označi vektorje iz množice $\{1 - x, 1 + 2x, x^2\}$ zapovrstjo s p, q in r.

(a) Izrazi

$$1 = \frac{(1+2x) + 2(1-x)}{3} = \frac{q+2p}{3}, \quad x = \frac{(1+2x) - (1-x)}{3} = \frac{q-p}{3}.$$

Izračunaj

$$\cos \sphericalangle(1, x) = \frac{\langle 1, x \rangle}{\|1\| \|x\|} = $$
$$= \frac{\langle \frac{q+2p}{3}, \frac{q-p}{3} \rangle}{\sqrt{\langle \frac{q+2p}{3}, \frac{q+2p}{3} \rangle} \sqrt{\langle \frac{q-p}{3}, \frac{q-p}{3} \rangle}} = \frac{-1}{\sqrt{10}},$$

pri čemer upoštevaj $\langle p, q \rangle = 0$, $\langle p, p \rangle = 1$ in $\langle q, q \rangle = 1$. Torej je $\sphericalangle(1, x) = \arccos(-1/\sqrt{10})$.

(b) Po definiciji je

$$\mathrm{proj}_x(x^2 + x) = \frac{\langle x^2 + x, x \rangle}{\|x\|^2} \cdot x = \frac{\langle r + \frac{q-p}{3}, \frac{q-p}{3} \rangle}{\langle \frac{q-p}{3}, \frac{q-p}{3} \rangle} \cdot x = x.$$

(c) Ker je $1 + 2x = q$ in so vektorji p, q, r ortonormirana baza prostora $\mathbb{R}_2[x]$, velja

$$\{1 + 2x\}^\perp = \mathcal{L}\{p, r\} = \mathcal{L}\{1 - x, x^2\}.$$

⊳⊳⊳ 7.

Rešitev 320. naloge

Zaloga vrednosti operatorja odvajanja $\mathcal{D}$ na $\mathbb{R}_3[x]$ je $\mathrm{Im}\,\mathcal{D} = \mathcal{L}\{1, x, x^2\}$. Zato je $\dim(\mathrm{Im}\,\mathcal{D})^\perp = 1$. Zadošča torej poiskati en vektor iz $\mathbb{R}_3[x]$, ki je pravokoten na 1, x in x^2 in ima normo 1. Če je $q(x) := a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}^3[x]$ pravokoten na 1, x, x^2, potem velja:

$$\begin{array}{lllllll} 0 & = & \langle 1, q \rangle & = & \int_{-1}^{1} q(t)dt & = & 2a + \frac{2}{3}c, \\ 0 & = & \langle x, q \rangle & = & \int_{-1}^{1} tq(t)dt & = & \frac{2}{3}b + \frac{2}{5}d, \\ 0 & = & \langle x^2, q \rangle & = & \int_{-1}^{1} t^2 q(t)dt & = & \frac{2}{3}a + \frac{2}{5}c. \end{array}$$

Iz homogenega linearnega sistema dobiš $a = c = 0$ in $b = -3d/5$. Izberi naprimer $q(x) := 3x - 5x^3$ in z namenom normirati q izračunaj

$$\langle q, q \rangle = \int_{-1}^{1} (9t^2 - 30t^4 + 25t^6)dt = \frac{8}{7}.$$

Torej je iskana baza $\{\sqrt{7/8}(3x - 5x^3)\}$.

⊳⊳⊳ 321.

Rešitev 321. naloge

Bazo za $\{1 + x\}^\perp$ lahko poiščeš tako, da z nastavkom $p(x) := a + bx + cx^2$ rešiš sistem linearnih enačb, ki ga dobiš iz $\langle p, 1 + x \rangle = 0$. Na dobljeni bazi uporabiš Gram-Schmidtov postopek in prideš do rešitve.

Lahko pa rešuješ tudi takole. Dopolniš $\{1 + x\}$ do baze vsega prostora $\mathbb{R}_2[x]$, naprimer $\{1 + x, 1, x^2\}$, in na tej bazi opraviš Gram-Schmidtovo ortogonalizacijo. Polinomi

$$p_1(x) := \sqrt{\frac{3}{8}}(1 + x), \quad p_2(x) := \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 - 3x), \quad p_3(x) := \sqrt{\frac{5}{8}}(1 - 3x^2)$$

so ortonormirani in $\{p_2, p_3\}$ je ortonormirana baza prostora $\{1 + x\}^\perp$.

⊳⊳⊳ 317., 318., 320., 323.

Rešitev 322. naloge

Podano (urejeno) množico označi z Ω in podane vektorje z u, v in w. Opazi, da je Ω baza prostora $\mathbb{R}^3$. Vzemi poljubna vektorja $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ in zapiši stolpca $\mathrm{X}_\Omega(x) = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^t$ in $\mathrm{X}_\Omega(y) = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]^t$. Potem velja

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w, \beta_1 u + \beta_2 v + \beta_3 w \rangle \\ &= \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 \\ &= [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3][\beta_1, \beta_2, \beta_3]^t \\ &= (\mathrm{X}_\Omega(x))^t \mathrm{X}_\Omega(y) \\ &= (\mathrm{M}_\Omega^\Sigma(\mathcal{I})\mathrm{X}_\Sigma(x))^t (\mathrm{M}_\Omega^\Sigma(\mathcal{I})\mathrm{X}_\Sigma(y)) \\ &= \mathrm{X}_\Sigma(x)^t (\mathrm{M}_\Omega^\Sigma(\mathcal{I}))^t \mathrm{M}_\Omega^\Sigma(\mathcal{I})\mathrm{X}_\Sigma(y) \\ &= \mathrm{X}_\Sigma(x)^t ((\mathrm{M}_\Omega^\Sigma(\mathcal{I}))^t \mathrm{M}_\Omega^\Sigma(\mathcal{I}))\mathrm{X}_\Sigma(y) \\ &= [x_1, x_2, x_3]\ S\ [y_1, y_2, y_3]^t, \end{aligned}$$

če označiš $S := (\mathrm{M}_\Omega^\Sigma(\mathcal{I}))^t \mathrm{M}_\Omega^\Sigma(\mathcal{I})$. Ker je

$$\mathrm{M}_\Omega^\Sigma(\mathcal{I}) = (\mathrm{M}_\Sigma^\Omega(\mathcal{I}))^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -4 & 6 & 1 \end{bmatrix},$$

torej velja

$$
\begin{aligned}
\langle x,y\rangle &= [x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix} 21 & -32 & -6 \\ -32 & 49 & 9 \\ -6 & 9 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\
&= 21x_1y_1 - 32x_1y_2 - 6x_1y_3 - 32x_2y_1 + 49x_2y_2 + 9x_2y_3 - 6x_3y_1 + 9x_3y_2 + 2x_3y_3.
\end{aligned}
$$

Opomba *Premisli, da je matrika S pozitivna simetrična.*

⊳⊳⊳ 323., 324., 384.

Rešitev 323. naloge

Zaradi $U = \{a,b\}^\perp$ velja $U^\perp = \{a,b\}^{\perp\perp} = \mathcal{L}\{a,b\}$. Torej zadošča poiskati ortonormirano bazo prostora $\mathcal{L}\{a,b\}$. Označi podane ortonormirane vektorje z $e_1,\ldots,e_5$. Potem je $a = e_1 + e_2$ in $b = e_2 + e_3$. Odtod dobiš $\langle a,a\rangle = 2$ in $\langle a,b\rangle = 1$. Uporabi Gram-Schmidtov postopek na vektorjih a,b: piši $f_1 := a$ in

$$f_2 := b - \frac{\langle b,f_1\rangle}{\langle f_1,f_1\rangle}f_1 = b - \frac{1}{2}a = (-\frac{1}{2},1,0,\frac{1}{2},1).$$

Upoštevaj $f_2 = \frac{1}{2}(-e_1 + e_2 + 2e_3)$ in izračunaj $\|f_2\| = \sqrt{6}/2$. Iskana ortonormirana baza je

$$\left\{\frac{f_1}{\|f_1\|},\frac{f_2}{\|f_2\|}\right\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,2,1,0),\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,0,1,2)\right\}.$$

⊳⊳⊳ 321., 322., 324.

Rešitev 324. naloge

1. način reševanja. Označi podano ortonormirano množico in polinome v njej z $\Omega := \{p_1,p_2,p_3\}$. Ker so polinomi p_1, p_2 in p_3 linearno neodvisni, je množica Ω ortonormirana baza prostora $\mathbb{R}_2[x]$. Izrazi polinom $q := 1$ v bazi Ω:

$$q = p_1 - p_3 \text{ oziroma } X_\Omega(q) = [1,0,-1]^t.$$

Ker je skalarni produkt med poljubnima polinomoma e in f iz $\mathbb{R}_2[x]$ enak

$$\langle e,f\rangle = (X_\Omega(e))^t X_\Omega(f),$$

je dovolj poiskati taka stolpca $u,v \in \mathbb{R}^{3\times 1}$, da velja

$$(X_\Omega(q))^t u = 0, \quad (X_\Omega(q))^t v = 0 \quad \text{in} \quad u^t v = 0. \tag{130}$$

V (130) vstavi konkretne podatke in sklepaj, da iščeš taka realna stolpca $u = [u_1,u_2,u_3]^t$ in $v = [v_1,v_2,v_3]^t$, da velja

$$
\begin{aligned}
0 = [1,0,-1][u_1,u_2,u_3]^t = u_1 - u_3, \quad 0 = [1,0,-1][v_1,v_2,v_3]^t = v_1 - v_3 \\
\text{in} \quad 0 = [u_1,u_2,u_3][v_1,v_2,v_3]^t = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.
\end{aligned}
$$

Zlahka najdeš eno od možnih rešitev: $u = [0,1,0]^t$ in $v = [1,0,1]^t$. Zato je iskana ortogonalna baza enaka množici $\{p_1 - p_3, p_2, p_1 + p_3\} = \{1, 2 - x, 1 + 2x + 2x^2\}$.

Če rešitve ne odkriješ brez računanja, lahko postopaš takole: izberi si poljuben stolpec u, ki je v običajnem skalarnem produktu pravokoten na stolpec $X_\Omega(q)$, torej da zadošča pogoju $u_1 - u_3 = 0$. Stolpec v potem najdeš kot vektorski produkt stolpcev $X_\Omega(q)$ in u.

2. način reševanja. Dopolni vektor $q := 1$ do baze prostora $\mathbb{R}_2[x]$, naprimer z vektorjema p_2 in p_3, in jo označi s $\Psi := \{q,p_2,p_3\}$. (To lahko storiš seveda na nešteto načinov. Toda ker sta vektorja p_2 in p_3 pravokotna in normirana, je smiselno vzeti vektorja iz množice Ω.) Bazo Ψ ortogonaliziraj z Gram-Scmidtovim postopkom in tako dobljeno bazo označi z $\Gamma := \{r_1,r_2,r_3\}$:

$$
\begin{aligned}
r_1 &= q = p_1 - p_3 = 1 \\
r_2 &= p_2 - \mathrm{proj}_{r_1}p_2 = p_2 - \tfrac{\langle p_2,r_1\rangle}{\langle r_1,r_1\rangle}r_1 = p_2 - \tfrac{\langle p_2,p_1-p_3\rangle}{\langle r_1,r_1\rangle}r_1 = p_2 = 2 - x, \\
r_3 &= p_3 - \mathrm{proj}_{r_1}p_3 - \mathrm{proj}_{r_2}p_3 = p_3 - \tfrac{\langle p_3,r_1\rangle}{\langle r_1,r_1\rangle}r_1 - \tfrac{\langle p_3,r_2\rangle}{\langle r_2,r_2\rangle}r_2 \\
&= p_3 - \tfrac{\langle p_3,p_1-p_3\rangle}{\langle p_1-p_3,p_1-p_3\rangle}(p_1 - p_3) - \tfrac{\langle p_3,p_2\rangle}{\langle p_2,p_2\rangle}p_2 = p_3 + \tfrac{1}{2}(p_1 - p_3) = \tfrac{1}{2}p_1 + \tfrac{1}{2}p_3 \\
&= \tfrac{1}{2} + x + x^2.
\end{aligned}
$$

Baze Γ seveda ni potrebno normirati, zato je $\Gamma = \{1, 2 - x, \frac{1}{2} + x + x^2\}$.

⊳⊳⊳ 322., 323.

Rešitev 325. naloge

Najprej premisli, da je najboljša aproksimacija vektorja r z vektorji iz U natanko pravokotna projekcija vektorja u na podprostor U: Razcepi prostor $\mathbb{R}_3[x]$ na

$$\mathbb{R}_3[x] = U \oplus U^\perp$$

in zapiši $r = r_1 + r_2$, kjer sta $r_1 \in U$ in $r_2 \in U^\perp$. (Ker je razcep premi, sta vektorja r_1 in r_2 enolično določena. Vektor r_1 imenujemo pravokotna projekcija vektorja r na podprostor U.) Naj bo u poljuben polinom iz U. Ker je $(r_1 - u)\perp r_2$, lahko s pomočjo Pitagorovega izreka izračunaš kvadrat razdalje med vektorjema r in u v normi $\|\cdot\| := \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$:

$$\|r - u\|^2 = \|r_1 + r_2 - u\|^2 = \|(r_1 - u) + r_2\|^2 = \|r_1 - u\|^2 + \|r_2\|^2. \tag{131}$$

Ker je razdalja $\|r - u\|$ število v $\mathbb{R}^+$, doseže najmanjšo vrednost pri istem u kot njen kvadrat, to je $\|r - u\|^2$. Ker je r_2 fiksen, iz (131) vidiš, da je minimum izraza $\|r - u\|^2$, ko u preteče ves U, dosežen pri $\|r_1 - u\| = 0$, torej $u = r_1$. To pomeni, da je najboljša aproksimacija vektorja r z vektorji iz U natanko pravokotna projekcija vektorja u na podprostor U.

1. način reševanja. V konkretnem primeru moraš torej poiskati pravokotno projekcijo polinoma $r(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ na podprostor $U = \{p \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(0) = 0\}$. Preveri, da je $U = \mathcal{L}\{x, x^2, x^3\}$. Označi $r_1(x) = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3$. Koeficiente $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ določiš iz pogoja

$$(r - r_1)\perp U,$$

ali enakovredno

$$(r - r_1)\perp x^i \quad \text{za} \quad i = 1,2,3, \tag{132}$$

ki ga prepišeš v račun

$$0 = \int_{-1}^{1}((1-\gamma)x^{i+3} + (1-\beta)x^{i+2} + (1-\alpha)x^{i+1} + x^i)dx \quad \text{za} \quad i = 1,2,3.$$

Po integraciji dobiš sistem treh linearnih enačb s tremi neznankami z rešitvijo $\alpha = 1$, $\beta = \frac{8}{3}$ in $\gamma = 1$. Zato je končno

$$r_1(x) = x + \frac{8}{3}x^2 + x^3.$$

2. način reševanja. Iskanje pravokotne projekcije r_1 vektorja r na podprostor U postane bolj sistematično s pomočjo Gramove matrike. Iz pogojev (132) dobiš pogoje

$$\begin{aligned}
\langle r, x\rangle &= \alpha\langle x, x\rangle + \beta\langle x^2, x\rangle + \gamma\langle x^3, x\rangle,\\
\langle r, x^2\rangle &= \alpha\langle x, x^2\rangle + \beta\langle x^2, x^2\rangle + \gamma\langle x^3, x^2\rangle,\\
\langle r, x^3\rangle &= \alpha\langle x, x^3\rangle + \beta\langle x^2, x^3\rangle + \gamma\langle x^3, x^3\rangle,
\end{aligned}$$

ki jih prepišeš v enačbo

$$G^{t}A = B, \quad \text{kjer je} \quad G = [\langle x^j, x^i\rangle]_{i,j=1}^{3}, \quad A = \begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix}\langle r, x\rangle\\ \langle r, x^2\rangle\\ \langle r, x^3\rangle\end{bmatrix}.$$

Odtod dobiš $A = [1, \frac{3}{8}, 1]^{t}$, torej je $r_1(x) = x + \frac{8}{3}x^2 + x^3$.

⋙ 326.

Rešitev 326. naloge

V prostor $C[-\pi/2, \pi/2]$ vpelji skalarni produkt $\langle e, f\rangle := \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e(x)f(x)dx$ in označi funkcijo $h(x) := x$. Potem je integral (27) enak

$$\|g - h\|^2 = \langle g - h, g - h\rangle = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (g(x) - h(x))^2 dx.$$

V nalogi 325 najdeš dokaz, da je najboljši približek g iz podprostora V za dani vektor h pri danem skalarnem produktu $\langle\cdot,\cdot\rangle$ enak pravokotni projekciji vektorja h na podprostor V. Zato je $g = \alpha \cdot 1 + \beta \sin$ za taka $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, da velja

$$\langle g - h, 1\rangle = 0 \quad \text{in} \quad \langle g - h, \sin\rangle = 0,$$

torej

$$0 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\alpha + \beta \sin x - x)dx = \alpha\pi,$$

zato $\alpha = 0$, in

$$0 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\alpha + \beta \sin x - x)\sin x dx = \frac{\pi\beta}{2} - 2,$$

zato $\beta = 4/\pi$. Zato je funkcija $g(x) = \frac{4}{\pi}\sin x$ najboljši približek iz prostora V za funkcijo $h(x) = x$.

Opomba *Skiciraj grafa funkcij g in h in osenči območje med krivuljama.*

⋙ 325.

Rešitev 327. naloge

Upoštevaje nalogo 306 sestavi verigo enakovrednih trditev

$$\mathcal{A} = 0 \iff \mathcal{A}v = 0 \text{ za vse } v \in V \iff \langle \mathcal{A}v, w\rangle = 0 \text{ za vse } v, w \in V.$$

Zadošča torej dokazati zadnjo enakost v gornji verigi. Vzemi poljubna $v, w \in V$ in izračunaj

$$0 = \langle \mathcal{A}(v + w), v + w\rangle = \langle \mathcal{A}v, v\rangle + \langle \mathcal{A}v, w\rangle + \langle \mathcal{A}w, v\rangle + \langle \mathcal{A}w, w\rangle = \langle \mathcal{A}v, w\rangle + \langle \mathcal{A}w, v\rangle.$$

Torej velja

$$\langle \mathcal{A}v, w\rangle + \langle \mathcal{A}w, v\rangle = 0 \tag{133}$$

za vse $v, w \in V$. Posebej, velja tudi $\langle \mathcal{A}(iv), w\rangle + \langle \mathcal{A}w, iv\rangle = 0$, odkoder dobiš $i\langle \mathcal{A}v, w\rangle - i\langle \mathcal{A}w, v\rangle = 0$ oziroma

$$\langle \mathcal{A}v, w\rangle - \langle \mathcal{A}w, v\rangle = 0. \tag{134}$$

Iz (133) in (134) sklepaj

$$\langle \mathcal{A}v, w\rangle = 0 \text{ za vse } v, w \in V,$$

kar je bilo treba dokazati.

Opomba *Trikrat pomni: gornja trditev ne velja za evklidske prostore!*

⋙ 357., 371.

Rešitev 328. naloge

Predpostavi, da opisani endomorfizem $\mathcal{A}$ obstaja. Prepričaj se, da ima endomorfizem $\mathcal{A}$ vsaj eno lastno vrednost in da je ta neničelna: Ker ima karakteristični polinom $p_{\mathcal{A}}(\lambda)$ stopnjo 3, ima vsaj eno realno ničlo λ_1. Skalar λ_1 je lastna vrednost endomorfizma $\mathcal{A}$. Iz obrnljivosti preslikave $\mathcal{A}$ sledi, da je $\lambda_1 \neq 0$, saj bi sicer bilo jedro $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ netrivialno.

K lastni vrednosti λ_1 obstaja (neničelni) lastni vektor $v_1 \in \mathbb{R}^3$, torej

$$\mathcal{A}v_1 = \lambda_1 v_1.$$

V (28) vstavi vektor v_1 in upoštevaj $\lambda_1 \neq 0$ in $v_1 \neq 0$:

$$0 = \langle \mathcal{A}v_1, v_1\rangle = \langle \lambda_1 v_1, v_1\rangle = \lambda_1\langle v_1, v_1\rangle \neq 0,$$

Protislovje.

Opomba *Oglej si opombo k nalogi 266 in ji dodaj sklep iz rešitve gornje naloge: če ima realni prostor liho razsežnost, ima poljuben endomorfizem tega prostora vsaj eno lastno vrednost. Razmisli, zakaj smo lahko posplošili sklep z razsežnosti tri na poljubno liho razsežnost.*

Rešitev 329. naloge

(a) Za vsaka $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in za vsaka $x, y \in V$ velja

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\alpha x + \beta y) &= \langle \alpha x + \beta y, v\rangle v = (\langle \alpha x, v\rangle + \langle \beta y, v\rangle)v = (\alpha\langle x, v\rangle + \beta\langle y, v\rangle)v =\\
&= \alpha\mathcal{A}x + \beta\mathcal{A}y,
\end{aligned}$$

torej je $\mathcal{A}$ linearna preslikava.

(b) Velja $\operatorname{rang}\mathcal{A} = \dim \operatorname{Im}\mathcal{A} = \dim \mathcal{L}\{v\} = 1$, saj $v \neq 0$.

(c) Naj bosta neničelni vektor $x \in V$ in skalar $\lambda \in \mathbb{C}$ taka, da velja $\mathcal{A}x = \lambda x$. Torej je

$$\langle x, v\rangle v = \lambda x.$$

Če je $\langle x, v\rangle = 0$, potem je $\lambda = 0$. Ta primer nastopi natanko takrat, ko je $\dim V > 1$, saj je natanko tedaj podprostor $\{v\}^\perp$ netrivialen. Če pa je $\langle x, v\rangle \neq 0$, potem je $x = \alpha v$ za neki $\alpha \neq 0 \in \mathbb{C}$ in velja

$$\mathcal{A}x = \mathcal{A}(\alpha v) = \langle \alpha v, v\rangle v = \langle v, v\rangle \alpha v = \langle v, v\rangle x,$$

torej je $\langle v, v\rangle$ lastna vrednost preslikave $\mathcal{A}$.

Sklep: če je $\dim V = 1$, je $\lambda_1 = \langle v, v\rangle$ edina lastna vrednost endomorfizma $\mathcal{A}$ in V je pripadajoči lastni podprostor; če je $\dim V > 1$, ima $\mathcal{A}$ dve lastni vrednosti $\lambda_1 = 0$ in $\lambda_2 = \langle v, v\rangle$, pripadajoča lastna podprostora sta $\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_1\mathcal{I}) = \{v\}^\perp$ in $\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_2\mathcal{I}) = \mathcal{L}\{v\}$.

(d) Za $\dim V = 1$ je $p_{\mathcal{A}}(\lambda) = m_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda - \langle v, v\rangle$. Za $\dim V > 1$ pa je V prema vsota dveh lastnih podprostorov operatorja $\mathcal{A}$, zato se $\mathcal{A}$ da diagonalizirati in njegov minimalni polinom ima same enostavne ničle. Iz razsežnosti lastnih podprostorov dobiš stopnje ničel karakterističnega polinoma $p_{\mathcal{A}}$. Sklepaj, da je

$$p_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda^{n-1}(\lambda - \langle v, v\rangle), \quad m_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda(\lambda - \langle v, v\rangle).$$

⋙ 250.

Linearni funkcionali

Rešitev 330. naloge

Označi z v_1, v_2, v_3, v_4 podane vektorje iz $\mathbb{R}^4$ in preveri, da tvorijo bazo prostora $\mathbb{R}^4$. Iz naloge 102 sledi, da vrednosti

$$f(v_1) = f(v_2) = f(v_3) = 0, \quad f(v_4) = 1$$

natanko določajo linearni funkcional f, namreč takole: če je $v \in V$, zadošča razviti vektor v po gornji bazi,

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{F}, \tag{135}$$

nato dobiš zaradi linearnosti funkcionala

$$f(v) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) + \alpha_3 f(v_3) + \alpha_4 f(v_4) = \alpha_4.$$

Loti se torej kar splošnega predpisa: če je $v = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, potem enakost (135) prevedeš v linearni sistem z razširjeno matriko

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & x_3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & x_4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 - x_2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & x_3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & x_4 \end{array}\right].$$

Torej je $\alpha_4 = x_1 - x_2$ in predpis

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 - x_2.$$

Posebej, $f(a) = -1$.

⋙ 102., 103., 104.

Rešitev 331. naloge

Ker je funkcional $f\colon V \to \mathbb{F}$ neničeln, obstaja tak $v \in V$, da je $f(v) \neq 0$. Preveri, da je potem $V = \mathcal{L}\{v\} \oplus \operatorname{Ker} f$, takole.

(a) Vzemi poljuben $u \in \mathcal{L}\{v\} \cap \operatorname{Ker} f$. Ker je $u \in \mathcal{L}\{v\}$, velja $u = \lambda v$ za neki $\lambda \in \mathbb{F}$. Iz $u \in \operatorname{Ker} f$ zdaj sledi

$$0 = f(u) = f(\lambda v) = \lambda f(v).$$

Ker je $f(v) \neq 0$, je $\lambda = 0$, odtod pa $u = \lambda v = 0$. Torej je $\mathcal{L}\{v\} \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$.

(b) Enakost $\mathcal{L}\{v\} + \operatorname{Ker} f = V$ lahko dokažeš na dva načina.

1. način. Vzemi poljuben $u \in V$. Potem je

$$u = \frac{f(u)}{f(v)} v + \left(u - \frac{f(u)}{f(v)} v\right).$$

Očitno je $\frac{f(u)}{f(v)} v \in \mathcal{L}\{v\}$. Preveri še, da je $(u - \frac{f(u)}{f(v)} v) \in \operatorname{Ker} f$ (primerjaj tudi z nalogo 50), torej je $u \in \mathcal{L}\{v\} + \operatorname{Ker} f$. Sklepaj, da je $V \leq \mathcal{L}\{v\} + \operatorname{Ker} f$. Ker je obratna inkluzija očitna, velja $\mathcal{L}\{v\} + \operatorname{Ker} f = V$.

2. način. Oglej si verigo enakosti

$$\begin{aligned}\dim(\mathcal{L}\{v\} + \operatorname{Ker} f) &= \dim \mathcal{L}\{v\} + \dim \operatorname{Ker} f - \dim(\mathcal{L}\{v\} \cap \operatorname{Ker} f)\\ &= 1 + \dim \operatorname{Ker} f - 0\\ &= \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f\\ &= \dim V.\end{aligned}$$

Jih znaš utemeljiti? Sklepaj, da je $\mathcal{L}\{v\} + \operatorname{Ker} f = V$.

Iz (a) in (b) sledi $V = \mathcal{L}\{v\} \oplus \operatorname{Ker} f$.

Opomba *Trditev velja tudi v neskončnorazsežnem vektorskem prostoru.*

⋙ 332., 340.

Rešitev 332. naloge

Naj imata f in g enaki jedri. Definiraj $U := \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$ in loči dve možnosti.

(a) $U = V$. Potem sta funkcionala f in g ničelna in enakost $f = \lambda g$ velja za vsak λ.

(b) $U < V$. Potem je $\dim U = \dim V - 1$ in po nalogi 331 velja

$$V = U \oplus \mathcal{L}\{v\} \tag{136}$$

za vsak $v \in V \setminus U$. Izberi tak v. Torej je $f(v) \neq 0 \neq g(v)$. Iščeš tak $\lambda \in \mathbb{F}$, da bo $f = \lambda g$. Posebej, veljati mora $f(v) = \lambda g(v)$, odkoder dobiš $\lambda = f(v)/g(v)$. Obratno, definiraj

$$\lambda := \frac{f(v)}{g(v)}$$

in preveri, da za vsak $x \in V$ velja $f(x) = \lambda g(x)$, takole. Iz razcepa (136) sledi, da za vsak $x \in V$ obstajata taka $u \in U$ in $\alpha \in \mathbb{F}$, da je

$$x = u + \alpha v.$$

Upoštevaje linearnost funkcionala f in pripadnost vektorja u jedroma funkcionalov f in g izračunaj

$$f(x) = f(u + \alpha v) = f(u) + \alpha f(v) = \alpha f(v)$$

in

$$(\lambda g)(x) = \lambda g(x) = \lambda g(u + \alpha v) = \frac{f(v)}{g(v)} \alpha g(v) = \alpha f(v).$$

Sklepaj, da je $f = \lambda g$.

Opomba *Ali velja tudi obrat trditve iz naloge?*

⋙ 331.

Rešitev 333. naloge

($\Leftarrow$). Naj bo $U \leq \operatorname{Ker} f$. Ker je po predpostavki $e_i \in U$ za vsak $1 \leq i \leq n$, velja $f(e_i) = 0$ in zato $\sum_{i=1}^n f(e_i) e_i = 0$.
($\Rightarrow$). Naj velja $\sum_{i=1}^n f(e_i) e_i = 0$. Potem je

$$0 = f(0) = f\Big(\sum_{i=1}^n f(e_i) e_i\Big) = \sum_{i=1}^n f(f(e_i) e_i) = \sum_{i=1}^n f(e_i)^2.$$

Ne pozabi, da so skalarji $f(e_i) \in \mathbb{R}$, in sklepaj, da je $f(e_i) = 0$ za vse $1 \leq i \leq n$. Torej je $\{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq \operatorname{Ker} f$ in zato $U = \mathcal{L}\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \leq \operatorname{Ker} f$.

Opomba *Ali velja trditev tudi za funkcional na kompleksnem prostoru?*

⋙ 345.

Rešitev 334. naloge

Naj velja $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} f_{ij} = 0$ za neke skalarje $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$. Torej je

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} f_{ij}(A) = 0 \text{ za vsak } A \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Posebej, za vsaka $s, t \in \{1, \ldots, n\}$ velja

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} f_{ij}(E_{st})\\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}\Big(\Big(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (E_{st})_{kl}\Big) - (E_{st})_{ij}\Big)\\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(1 - \delta_{si}\delta_{tj})\\ &= \Big(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}\Big) - \alpha_{st}. \end{aligned}$$

Označi $S := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}$. Potem je $\alpha_{st} = S$ za vsaka $s, t \in \{1, \ldots, n\}$. Torej je

$$S = \sum_{i,j} \alpha_{ij} = \sum_{i,j} S = Sn^2$$

oziroma $S(n^2 - 1) = 0$. Ker je $n > 1$, je $S = 0$, zato $\alpha_{st} = S = 0$ za vse $s, t \in \{1, \ldots, n\}$. Torej so funkcionali f_{ij} linearno neodvisni.

Opomba *Funkcionale je, kot v gornji rešitvi, včasih smiselno preučevati na bazi prostora.*

⋙ 335., 336.

Rešitev 335. naloge

(a) Za vsaka $p, q \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ je

$$f_i(p+q) = (p+q)(i) = p(i) + q(i) = f_i(p) + f_i(q),$$

za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$ in vsak $p \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ pa je

$$f_i(\alpha p) = (\alpha p)(i) = \alpha(p(i)) = \alpha f_i(p).$$

Torej je f_i linearen funkcional za vsak $i \in \{1, \ldots, n\}$.

(b) Naj za neke skalarje $\alpha_i \in \mathbb{R}$ velja $\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i = 0$. Potem je

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(p) = 0 \tag{137}$$

za vsak $p \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$.

1. način. Ko vstaviš namesto p v enakost (137) po vrsti polinome $1, x, \ldots, x^{n-1}$, dobiš n enakosti, ki jih lahko strneš v matrični zapis

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1^{n-1} & 2^{n-1} & 3^{n-1} & \cdots & n^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = 0.$$

Gornja matrika je Vandermondeova matrika zaporedja $1, \ldots, n$ in je – glej nalogo 247 – obrnljiva, saj so $1, \ldots, n$ paroma različna števila. Sklepaj, da so vsi $\alpha_i = 0$, in da so zato dani funkcionali linearno neodvisni.

2. način. Če v enakost (137) vstaviš zapovrstjo polinome

$$1,\ x-1,\ (x-1)(x-2), \ldots,\ (x-1)(x-2)\cdots(x-(n-1)),$$

je matrika dobljenega sistema trikotna. Prepričaj se, da je obrnljiva, in sklepaj kot zgoraj.

⋙ 247., 334., 336.

Rešitev 336. naloge

(a) Dokaza linearnosti se lahko lotiš takoj ali pa najprej poenostaviš funkcijski predpis

$$f_{ij}(A) = \operatorname{sled}(E_{ij}A) = \sum_{k=1}^n (E_{ij}A)_{kk} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (E_{ij})_{kl} a_{lk} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \delta_{ik}\delta_{jl} a_{lk} = a_{ji}$$

in si olajšaš delo.

(b) Ker je razsežnost prostora V^* enaka $\dim V^* = \dim V = n^2$ in ker je prav toliko funkcionalov f_{ij}, zadošča dokazati, da so funkcionali f_{ij} linearno neodvisni. Naj za neke $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ velja $\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} f_{ij} = 0$. Potem je $(\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} f_{ij})(A) = 0$ za vsak $A \in V$ oziroma

$$\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} f_{ij}(A) = 0.$$

Če pišeš $A := E_{kl}$, dobiš

$$0 = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} f_{ij}(E_{kl}) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} (E_{kl})_{ji} = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} \delta_{kj}\delta_{li} = \alpha_{lk}.$$

Ker slednja enakost velja za vse $k, l \in \{1, \ldots, n\}$, so funkcionali f_{ij} linearno neodvisni.

Opomba *Kateri urejeni bazi prostora V je baza $\{(f_{ij})_{i,j=1}^n\}$ dualna?*

⋙ 334., 335.

Rešitev 337. naloge

Označi vektorje v urejeni bazi Ω zapovrstjo z v_1, v_2, v_3, v_4. Iščeš tako urejeno bazo $\Pi := \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ dualnega prostora V^*, da velja

$$f_i(v_j) = \delta_{ij} \text{ za vse } i, j.$$

Kaj pomeni poiskati funkcional, naprimer f_1? Ugotoviti moraš predpis, po katerem slika funkcional f_1, torej iščeš skalarje $f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{14} \in \mathbb{R}$, za katere je

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + f_{13}x_3 + f_{14}x_4, \tag{138}$$

ali z oznakami, iščeš matriko (vrstico)

$$\mathrm{M}_{\Sigma}^{\Sigma_4}(f_1) = [f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{14}] \in \mathbb{R}^{1\times 4}$$

funkcionala f glede na običajni urejeni bazi prostorov $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}$. Ker poznaš matriko $\mathrm{M}_{\Sigma}^{\Omega}(f_1) = [1, 0, 0, 0]$ in prehodno matriko $P := \mathrm{M}_{\Sigma_4}^{\Omega}(\mathcal{I})$, je smiselno zapisati

$$\mathrm{M}_{\Sigma}^{\Sigma_4}(f_1) = \mathrm{M}_{\Sigma}^{\Omega}(f_1)\mathrm{M}_{\Omega}^{\Sigma_4}(\mathcal{I}) = \mathrm{M}_{\Sigma}^{\Omega}(f_1)P^{-1}.$$

Zdaj lahko izračunaš vrstico funkcionala f_1, toda smiselno je hkrati opraviti z vsemi funkcionali. Če zložiš vrstice funkcionalov f_1, f_2, f_3, f_4 eno vrh druge in označiš

$$F := \begin{bmatrix} f_{11} & \cdots & f_{14} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{41} & \cdots & f_{44} \end{bmatrix},$$

potem prevedeš iskanje dualne baze v reševanje matrične enakosti

$$FP = I.$$

(Še en pogled na postavljeno nalogo. V enakosti (138) nastopa običajni skalarni produkt na $\mathbb{R}^4$. Torej smeš levo stran enakosti $f_i(v_j) = \delta_{ij}$ tolmačiti kot produkte vrstic iz matrike F s stolpci v matriki P in nato sklepati $FP = I$.) Izračunaj

$$F = P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

in zapiši

$$\begin{aligned} f_1(x_1,x_2,x_3,x_4) &= (x_1+x_4)/2, \\ f_2(x_1,x_2,x_3,x_4) &= (x_3-x_4)/2, \\ f_3(x_1,x_2,x_3,x_4) &= (x_2-x_3)/2, \\ f_4(x_1,x_2,x_3,x_4) &= (x_1-x_2)/2. \end{aligned}$$

Opomba *Napravi preizkus, da je dobljena baza res dualna k podani.*

⋙ 338., 339.

Rešitev 338. naloge

(a) Ker je $\dim(\mathbb{R}_2[x])^* = \dim \mathbb{R}_2[x] = 3$, zadošča dokazati linearno neodvisnost funkcionalov f_1, f_2, f_3. Takole. Naj bo

$$\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = 0$$

za neke $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. To pomeni, da je $(\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3)(p) = 0$ za vsak $p \in \mathbb{R}_2[x]$. Posebej, če p nadomestiš s polinomi 1, x in x^2, dobiš sistem enačb

$$\alpha + 6\beta = 0, \quad \alpha + 3\beta = 0, \quad 2\beta + 2\gamma = 0.$$

Prepričaj se, da je sistem le trivialno rešljiv: $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Torej so dani funkcionali linearno neodvisni.

(b) Iz devetih enačb $f_i(p_j) = \delta_{ij}$, $1 \le i,j \le 3$, moraš določiti devet neznanih koeficientov polinomov p_1, p_2 in p_3. Preglednost ne bo odveč. Oglej si naprimer prvo enačbo

$$f_1(p_1) = 1. \tag{139}$$

Če pišeš $p_1(x) = a + bx + cx^2$ za neke $a, b, c \in \mathbb{R}$, je (139) ekvivalentna enačbi $af_1(1) + bf_1(x) + cf_1(x^2) = 1$ oziroma enačbi

$$\begin{bmatrix} f_1(1) & f_1(x) & f_1(x^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = [1].$$

Sklepaj, da je smiselno vpeljati matriko

$$F := \begin{bmatrix} f_1(1) & f_1(x) & f_1(x^2) \\ f_2(1) & f_2(x) & f_2(x^2) \\ f_3(1) & f_3(x) & f_3(x^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Če P_1, P_2, P_3 označujejo stolpce, ki pripadajo polinomom p_1, p_2, p_3 v običajni urejeni bazi $1, x, x^2$ prostora $\mathbb{R}_2[x]$, potem definiraj $P := [P_1, P_2, P_3]$. Preveri, da začetnih devet enačb lahko matrično zapišeš takole:

$$FP = I.$$

Pri tem je I identiteta v $\mathbb{R}^{3\times 3}$. Torej je

$$P = F^{-1}.$$

Računanja obrata F^{-1} se loti z vrstičnimi Gaussovimi eliminacijami na razširjeni matriki $[F|I]$:

$$[F|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -6 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right] = [I|P].$$

Torej so iskani polinomi

$$p_1(x) = -1 + 2x, \quad p_2(x) = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3}x, \quad p_3(x) = -\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{2}x^2.$$

Opomba *Napravi preizkus.*

⋙ 337., 339.

Rešitev 339. naloge

(a) Pri dokazovanju linearnosti funkcij f_i upoštevaj, da je determinanta linearna preslikava v posamezni vrstici (stolpcu) matrike.

(b) Oglej si, kam funkcionali f_i preslikajo elemente običajne baze prostora $\mathbb{R}_{n-1}[x]$. Dobiš

$$f_i(x^{j-1}) = \delta_{ij} V,$$

kjer je V Vandermondeova determinanta zaporedja števil $a_1, \ldots, a_n$:

$$V := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Ker so števila a_i paroma različna, je $V \neq 0$ (glej nalogo 247) in lahko definiraš polinome $e_j(x) := \frac{1}{V}x^{j-1}$. Potem velja $f_i(e_j) = \delta_{ij}$, torej je $f_1, \ldots, f_n$ dualna baza k bazi $e_1, \ldots, e_n$ prostora $\mathbb{R}_{n-1}[x]$. Od tod sledi, da so podani funkcionali linearno neodvisni.

⋙ 337., 338.

Rešitev 340. naloge

Dokazati moraš obstoj in enoličnost vektorja r.

Najprej enoličnost. Naj za vektorja $r, s \in V$ velja $f(v) = \langle v, r\rangle$ in $f(v) = \langle v, s\rangle$ za vse $v \in V$. Torej je $\langle v, r - s\rangle = 0$ za vse $v \in V$. Posebej, za $v := r - s$ dobiš $\langle r - s, r - s\rangle = 0$. Sklepaj, da je $r - s = 0$, torej $r = s$.

Zdaj pa obstoj vektorja r. Če je $f = 0$, potem smeš izbrati $r := 0$. Predpostavi torej, da f ni ničeln funkcional. Kje iskati vektor r? Če je $r \in V$ tak, da velja $f(v) = \langle v, r\rangle$ za vse $v \in V$, potem je

$$v \in \operatorname{Ker} f \iff f(v) = 0 \iff \langle v, r\rangle = 0.$$

Torej je $r \in (\operatorname{Ker} f)^\perp$. Iz $\dim \operatorname{Ker} f = n - 1$ sledi $\dim(\operatorname{Ker} f)^\perp = 1$. Bodi u poljuben neničeln vektor iz $(\operatorname{Ker} f)^\perp$. Gornji premislek pove, da je $r \in \mathcal{L}\{u\}$, zato je $r = \alpha u$ za neki $\alpha \in \mathbb{R}$. Iz enakosti $f(r) = \langle r, r\rangle$ dobiš še $\alpha = f(u)/\langle u, u\rangle$. Definiraj zdaj

$$r := \frac{f(u)}{\langle u, u\rangle} u$$

in preveri, da tak r zadošča enakosti (29), takole. Vzemi poljuben $v \in V$. Ker velja

$$V = \operatorname{Ker} f \oplus \mathcal{L}\{u\},$$

obstajata taka $v' \in \operatorname{Ker} f$ in $\lambda \in \mathbb{R}$, da je $v = v' + \lambda u$. Izračunaj

$$f(v) = f(v' + \lambda u) = f(v') + \lambda f(u) = \lambda f(u)$$

in

$$\langle v, r\rangle = \langle v' + \lambda u, \frac{f(u)}{\langle u, u\rangle} u\rangle = \frac{f(u)}{\langle u, u\rangle}\langle v', u\rangle + \lambda \frac{f(u)}{\langle u, u\rangle}\langle u, u\rangle = \lambda f(u).$$

Sklepaj, da je r iskani vektor.

Opomba *Rieszov izrek velja tudi v unitarnem prostoru! Vnesi potrebne popravke v gornji dokaz! Kaj pa v neskončnorazsežnih prostorih?*

⊳⊳⊳ 331., 332., 341., 342., 344., 345.

Rešitev 341. naloge

Iščeš tak $r \in \mathbb{R}_2[x]$, da velja $f(p) = \langle p, r\rangle$ za vsak $p \in \mathbb{R}_2[x]$. Zaradi linearnosti funkcionala in skalarnega produkta (v prvem faktorju) zadošča, da enakost velja za poljubno bazo prostora $\mathbb{R}_2[x]$. Piši $r = a + bx + cx^2$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Za $p \in \{1, x, x^2\}$ dobiš enačbe

$$\begin{array}{rclclcccl} 1 & = & f(1) & = & \langle 1, r\rangle & = & 1\cdot(a-b+c) + 1\cdot a + 1\cdot(a+b+c) & = & 3a + 2c, \\ 1/2 & = & f(x) & = & \langle x, r\rangle & = & (-1)\cdot(a-b+c) + 0\cdot a + 1\cdot(a+b+c) & = & 2b, \\ 1/3 & = & f(x^2) & = & \langle x^2, r\rangle & = & 1\cdot(a-b+c) + 0\cdot a + 1\cdot(a+b+c) & = & 2a + 2c. \end{array}$$

Sklepaj, da je $a = 2/3$, $b = 1/4$ in $c = -1/2$, torej $r = \frac{2}{3} + \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}x^2$.

⊳⊳⊳ 340., 342., 343., 344., 345.

Rešitev 342. naloge

Iščeš tak polinom $r = a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x]$, da bo

$$f(p) = \langle p, r\rangle$$

za vsak $p \in \mathbb{R}_2[x]$. Zadošča, da ta enakost drži za vse polinome p iz neke baze prostora $\mathbb{R}_2[x]$, naprimer za 1, x, x^2:

$$\begin{array}{rclclclcl} 1 & = & f(1) & = & \langle 1, r\rangle & = & \int_{-1}^{1} r(t)dt & = & 2a + \frac{2}{3}c, \\ 1 & = & f(x) & = & \langle x, r\rangle & = & \int_{-1}^{1} tr(t)dt & = & \frac{2}{3}b, \\ 1 & = & f(x^2) & = & \langle x^2, r\rangle & = & \int_{-1}^{1} t^2 r(t)dt & = & \frac{2}{3}a + \frac{2}{5}c. \end{array}$$

Reši linearni sistem: $a = -3/4$, $b = 3/2$, $c = 15/4$. Iskani polinom je $r = -\frac{3}{4} + \frac{3}{2}x + \frac{15}{4}x^2$.

⊳⊳⊳ 340., 341., 343., 344., 345.

Rešitev 343. naloge

Iščeš tak $r \in V$, da velja

$$F(f) = \langle f, r\rangle$$

za vsak $f \in V$. Nastavi $r = a1 + b\sin + c\cos$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, in izpiši enakosti

$$\begin{array}{rclclclcl} 1 & = & F(1) & = & \langle 1, r\rangle & = & a\langle 1, 1\rangle + b\langle 1, \sin\rangle + c\langle 1, \cos\rangle & = & 2\pi a, \\ 0 & = & F(\sin) & = & \langle \sin, r\rangle & = & a\langle \sin, 1\rangle + b\langle \sin, \sin\rangle + c\langle \sin, \cos\rangle & = & \pi b, \\ 1 & = & F(\cos) & = & \langle \cos, r\rangle & = & a\langle \cos, 1\rangle + b\langle \cos, \sin\rangle + c\langle \cos, \cos\rangle & = & \pi c. \end{array}$$

Sklepaj, da je $r = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\cos$.

⊳⊳⊳ 340., 341., 342., 344., 345.

Rešitev 344. naloge

Naj bo $B = [b_{ij}]$. Potem je

$$B = \sum_{i,j} b_{ij} E_{ij}$$

in velja

$$\langle A, B\rangle = \sum_{i,j} b_{ij}\langle A, E_{ij}\rangle$$

za vsak $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Enakosti (30) je enakovredna enakost

$$\sum_{i,j} a_{ij} = \sum_{i,j} b_{ij}\langle A, E_{ij}\rangle \text{ za vsak } A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Zadošča pogledati matrike $A := E_{kl}$, odkoder dobiš (upoštevaj, da tvorijo matrike E_{ij} ortonormirano bazo v danem skalarnem produktu)

$$1 = \sum_{i,j} b_{ij}\langle E_{kl}, E_{ij}\rangle = \sum_{i,j} b_{ij}\delta_{ki}\delta_{lj} = b_{kl}.$$

Zato je $b_{kl} = 1$ za vse k, l oziroma

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Opomba *Opazi, da je v dokazu Rieszovega izreka (glej nalogo 340) opisan postopek, po katerem dobiš Rieszov vektor. Uporabi ga na gornji nalogi in ga primerjaj z gornjo rešitvijo! Kateri postopek je računsko zahtevnejši? Oglej si tudi nalogo 345!*

⋙ 340., 341., 342., 343., 345.

Rešitev 345. naloge

Dokazati moraš, da za vsak $x \in V$ velja $f(x) = \langle x, r \rangle$. Zadošča preveriti, da slednja enakost velja za vektorje iz dane ortonormirane baze: za vsak $1 \le i \le n$ je

$$f(e_i) = f(e_i)\langle e_i, e_i \rangle = \langle e_i, f(e_i)e_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle e_i, f(e_j)e_j \rangle = \langle e_i, \sum_{j=1}^{n} f(e_j)e_j \rangle = \langle e_i, r \rangle.$$

Opomba *Napiši in dokaži podobno trditev za unitarni prostor. Poišči tudi zvezo med gornjo nalogo in nalogo 333.*

⋙ 333., 340., 341., 342., 343., 344.

Rešitev 346. naloge

Če je $\mathcal{A} = 0$, potem je $\mathcal{A}^* = 0$ in zato $\operatorname{rang} \mathcal{A} = 0 = \operatorname{rang} \mathcal{A}^*$.

Bodi odslej $\mathcal{A} \neq 0$. Potem je $\operatorname{Im} \mathcal{A} \neq 0$ in $r := \operatorname{rang} \mathcal{A} > 0$. Izberi neko bazo $\Omega := \{v_1, \dots, v_m\}$ prostora V. Smeš privzeti, da je baza Ω urejena tako, da so vektorji $\mathcal{A}v_1, \dots, \mathcal{A}v_r$ linearno neodvisni. Dopolni jih do urejene baze

$$\Pi := \{\mathcal{A}v_1, \dots, \mathcal{A}v_r, w_{r+1}, \dots, w_n\}$$

prostora W. Označi s

$$\Pi' := \{f_1, \dots, f_r, g_{r+1}, \dots, g_n\}$$

njej dualno urejeno bazo v dualnem prostoru W^*. Preveri, da so funkcionali

$$\mathcal{A}^* f_1, \dots, \mathcal{A}^* f_r$$

linearno neodvisni, takole: če za neke $\alpha_i \in \mathbb{F}$ velja $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathcal{A}^* f_i = 0$, potem za vsak $j = 1, \dots, r$ velja

$$0 = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \mathcal{A}^* f_i(v_j) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i f_i(\mathcal{A}v_j) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j.$$

Podobno preveri, da je

$$\mathcal{A}^* g_k = 0$$

za vse $k = r+1, \dots, n$. Zadošča preveriti, da funkcional $\mathcal{A}^* g_k$ preslika vsak vektor baze Ω v nič: v ta namen si oglej

$$(\mathcal{A}^* g_k)(v_i) = g_k(\mathcal{A}v_i).$$

Za $i = 1, \dots, r$ je $g_k(\mathcal{A}v_i) = 0$ po definiciji dualne baze. Za $i = r+1, \dots, n$ pa velja $\mathcal{A}v_i = \sum_{j=1}^{r} \beta_{ij} \mathcal{A}v_j$, saj je $\{\mathcal{A}v_1, \dots, \mathcal{A}v_r\}$ baza zaloge vrednosti $\operatorname{Im} \mathcal{A}$. Torej je

$$g_k(\mathcal{A}v_i) = g_k(\sum_{j=1}^{r} \beta_{ij} \mathcal{A}v_j) = \sum_{j=1}^{r} \beta_{ij} g_k(\mathcal{A}v_j) = \sum_{j=1}^{r} \beta_{ij} \cdot 0 = 0.$$

Sklepaj, da je $\operatorname{Im} \mathcal{A}^* = \mathcal{L}\{\mathcal{A}^* f_1, \dots, \mathcal{A}^* f_r\}$ in da je $\operatorname{rang} \mathcal{A}^* = r = \operatorname{rang} \mathcal{A}$.

⋙ 347.

Rešitev 347. naloge

Označi z $\Omega := \{u_1, \dots, u_m\}$ urejeno bazo prostora U, s $\Pi := \{v_1, \dots, v_n\}$ urejeno bazo prostora V, bazi $\Omega' := \{f_1, \dots, f_m\}$ in $\Pi' := \{g_1, \dots, g_n\}$ dualov U^* oziroma V^* pa naj bosta dualni k bazama Ω oziroma Π. Definiraj še $A := \mathrm{M}_{\Pi}^{\Omega}(\mathcal{A})$ in $B := \mathrm{M}_{\Omega'}^{\Pi'}(\mathcal{A}^*)$. Želiš dokazati, da velja

$$B = A^{\mathrm{t}}. \tag{140}$$

Zato si oglej koeficiente matrik v (140). Če označiš z a_{ij} in b_{ij} koeficiente matrik A in B, potem velja

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{kj}\delta_{ki} = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} f_k(u_i) = \left(\sum_{k=1}^{n} b_{kj} f_k\right) u_i = (\mathcal{A}^* g_j) u_i =$$
$$= g_j(\mathcal{A}u_i) = g_j\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki} v_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} g_j(v_k) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\delta_{jk} = a_{ji},$$

kar je bilo potrebno dokazati.

Opomba *Združi nalogi 346 in 347 in sklepaj, da za vsako matriko A velja*

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^{\mathrm{t}}.$$

⋙ 346.

Posebni endomorfizmi

Rešitev 348. naloge

Pri danem endomorfizmu $\mathcal{A}$ je adjungirani endomorfizem $\mathcal{A}^*$ tak, da velja

$$\langle \mathcal{A}x, y\rangle = \langle x, \mathcal{A}^* y\rangle \quad \text{za vsaka } x, y \in \mathbb{C}^4.$$

Preveri, da je po eni strani

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}(i, 1+i, 3, -1), (1-i, 2i, i, 1)\rangle &= \langle (2+i, 0, 2-i, 1), (1-i, 2i, i, 1)\rangle \\ &= (2+i)\cdot\overline{(1-i)} + 0\cdot\overline{2i} + (2-i)\cdot\overline{i} + 1\cdot\overline{1} \\ &= 1+i,\end{aligned}$$

po drugi pa

$$\begin{aligned}\langle (i, 1+i, 3, -1), \mathcal{A}^*(1-i, 2i, i, 1)\rangle &= \langle (i, 1+i, 3, -1), (-i, 1, 1, 1)\rangle \\ &= i\cdot\overline{(-i)} + (1+i)\cdot\overline{1} + 3\cdot\overline{1} + (-1)\cdot\overline{1} \\ &= 2+i,\end{aligned}$$

torej tak endomorfizem $\mathcal{A}$ ne obstaja.

▷▷▷ 358., 359.

Rešitev 349. naloge

1. način reševanja.

(a) $\mathcal{A}^*$ je po definiciji taka preslikava na $\mathbb{R}^3$, da velja $\langle \mathcal{A}\vec{p}, \vec{q}\rangle = \langle \vec{p}, \mathcal{A}^*\vec{q}\rangle$ za vsaka vektorja $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{R}^3$. V ta namen postavi $\vec{p} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ in $\vec{q} = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ in izračunaj

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}\vec{p}, \vec{q}\rangle &= \langle (z, y-z, 2z), (u, v, w)\rangle \\ &= zu + (y-z)v + (2z)w \\ &= x\cdot 0 + yv + z(u - v + 2w) \\ &= \langle (x, y, z), (0, v, u - v + 2w)\rangle.\end{aligned}$$

Sklepaj, da je $\mathcal{A}^*(u, v, w) = (0, v, u - v + 2w)$.

(b) Ravnaj podobno kot v prejšnji točki. Izberi poljubna vektorja $\vec{p} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ in $\vec{q} = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ ter postavi pogoj

$$\langle\!\langle \mathcal{A}\vec{p}, \vec{q}\rangle\!\rangle = \langle\!\langle \vec{p}, \mathcal{A}^*\vec{q}\rangle\!\rangle.$$

V ta namen izračunaj

$$\begin{aligned}\langle\!\langle \mathcal{A}\vec{p}, \vec{q}\rangle\!\rangle &= \langle\!\langle (z, y-z, 2z), (u, v, w)\rangle\!\rangle \\ &= 2zu + zv + (y-z)u + (y-z)v + (2z)w \\ &= x\cdot 0 + y(u+v) + z(u+2w)\end{aligned} \tag{141}$$

Ker iščeš predpis za $\mathcal{A}^*$, postavi

$$\mathcal{A}^*(u, v, w) = (\alpha(u, v, w), \beta(u, v, w), \gamma(u, v, w)),$$

kjer so α, β, γ neznane funkcije realnih spremenljivk u, v, w in zapiši

$$\begin{aligned}\langle\!\langle \vec{p}, \mathcal{A}^*\vec{q}\rangle\!\rangle &= \langle\!\langle (x, y, z), (\alpha(u, v, w), \beta(u, v, w), \gamma(u, v, w))\rangle\!\rangle \\ &= 2x\alpha(u, v, w) + x\beta(u, v, w) + y\alpha(u, v, w) + y\beta(u, v, w) + z\gamma(u, v, w) \\ &= x(2\alpha(u, v, w) + \beta(u, v, w)) + \\ &\quad + y(\alpha(u, v, w) + \beta(u, v, w)) + z\gamma(u, v, w)\end{aligned} \tag{142}$$

Primerjaj izraza (141) in (142) ter sklepaj

$$0 = 2\alpha(u, v, w) + \beta(u, v, w), \quad u + v = \alpha(u, v, w) + \beta(u, v, w), \quad u + 2w = \gamma(u, v, w).$$

Rešitev tega sistema enačb so funkcije

$$\alpha(u, v, w) = -u - v, \quad \beta(u, v, w) = 2u + 2v, \quad \gamma(u, v, w) = u + 2w.$$

Zato adjungirana preslikava $\mathcal{A}^*$ slika po predpisu

$$\mathcal{A}^*(u, v, w) = (-u - v, 2u + 2v, u + 2w).$$

2. način reševanja.

(a) V običajnem skalarnem produktu $\langle\cdot,\cdot\rangle$ je običajna urejena baza Σ prostora $\mathbb{R}^3$ ortonormirana. V tej bazi pripada preslikavi $\mathcal{A}$ matrika

$$\mathrm{M}_\Sigma^\Sigma(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ker je Σ ortonormirana, je $\mathrm{M}_\Sigma^\Sigma(\mathcal{A}^*) = (\mathrm{M}_\Sigma^\Sigma(\mathcal{A}))^t$, zato je

$$\mathcal{A}^*(x, y, z) = (0, y, x - y + 2z).$$

(b) Poišči kakšno ortonormirano bazo prostora $\mathbb{R}^3$ opremljenega s skalarnim produktom $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle$, na primer z Gram-Schmidtovim postopkom na običajni urejeni bazi Σ prostora $\mathbb{R}^3$. Tako dobiš ortonormirano bazo $\{(1/\sqrt{2}, 0, 0), (-1/\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0), (0, 0, 1)\}$. Zapiši matriko, ki pripada preslikavi $\mathcal{A}$ v tej bazi, transponiraj jo in preberi predpis za preslikavo $\mathcal{A}^*$.

Opomba *Ne pozabi, da je adjungirana preslikava $\mathcal{A}^*$ odvisna od skalarnega produkta na vektorskem prostoru in ne samo od linearne preslikave $\mathcal{A}$.*

▷▷▷ 353.

Rešitev 350. naloge

Zapiši $\mathcal{A} = \mathcal{B} - \mathcal{I}$, kjer $\mathcal{B}$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ podaš s predpisom $\mathcal{B}$: $\vec{x} \mapsto \vec{a} \times \vec{x}$. Ker je $\mathcal{A}^* = (\mathcal{B} - \mathcal{I})^* = \mathcal{B}^* - \mathcal{I}^* = \mathcal{B}^* - \mathcal{I}$, zadošča ugotoviti, kako deluje $\mathcal{B}^*$. V ta namen poglej

$$\langle \mathcal{B}\vec{x}, \vec{y}\rangle = \langle \vec{a} \times \vec{x}, \vec{y}\rangle = (\vec{a}, \vec{x}, \vec{y}) = -(\vec{a}, \vec{y}, \vec{x}) = -\langle \vec{a} \times \vec{y}, \vec{x}\rangle = \langle \vec{x}, -\vec{a} \times \vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, -\mathcal{B}\vec{y}\rangle.$$

Torej je $\mathcal{B}^* = -\mathcal{B}$ in zato

$$\mathcal{A}^* = -\mathcal{B} - \mathcal{I}\colon\ \vec{x} \mapsto \vec{x} \times \vec{a} - \vec{x}.$$

▷▷▷ 351.

Rešitev 351. naloge

$\mathcal{A}^*$ je po definiciji taka preslikava, da velja

$$\mathcal{A}\vec{x}\cdot\vec{y}=\vec{x}\cdot\mathcal{A}^*\vec{y}$$

za poljubna $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^3$. Iz podatkov naloge sledi

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\vec{x}\cdot\vec{y} &= (\vec{a}\times(\vec{x}\times\vec{b}))\cdot\vec{y}\\ &= ((\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{x}-(\vec{a}\cdot\vec{x})\cdot\vec{b})\cdot\vec{y}\\ &= ((\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot(\vec{x}\cdot\vec{y})-(\vec{a}\cdot\vec{x})\cdot(\vec{b}\cdot\vec{y}))\\ &= (\vec{x}\cdot\vec{y})\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})-(\vec{b}\cdot\vec{y})\cdot(\vec{a}\cdot\vec{x})\\ &= \vec{x}\cdot((\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{y}-(\vec{b}\cdot\vec{y})\cdot\vec{a})\\ &= \vec{x}\cdot(\vec{b}\times(\vec{y}\times\vec{a})).\end{aligned}$$

V zadnji vrstici prebereš zapis preslikave $\mathcal{A}^*$:

$$\vec{y}\mapsto\vec{b}\times(\vec{y}\times\vec{a}).$$

⋙ 350.

Rešitev 352. naloge

(a) Ker je $0\in U$, je U neprazna množica. Če sta $f,g\in U$, je $f+g\in U$, saj velja:

- $f+g\in C^\infty[0,1]$, ker je odvajanje aditivno,
- $(f+g)(0)=f(0)+g(0)=0+0=0$,
- $(f+g)(1)=f(1)+g(1)=0+0=0$.

Če sta $f\in U$ in $\lambda\in\mathbb{R}$, je $\lambda f\in U$, saj velja:

- $\lambda f\in C^\infty[0,1]$, ker je odvajanje homogeno,
- $(\lambda f)(0)=\lambda f(0)=\lambda\cdot 0=0$,
- $(\lambda f)(1)=\lambda f(1)=\lambda\cdot 0=0$.

(b) Adjungirana preslikava $\mathcal{A}^*$ je po definiciji taka preslikava, ki zadošča enakosti

$$\langle\mathcal{A}f,g\rangle=\langle f,\mathcal{A}^*g\rangle\quad\text{za vsaka } f,g\in U.$$

Zato izračunaj

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{A}f,g\rangle &= \int_0^1\mathcal{A}f(x)g(x)dx\\ &= \int_0^1(x^2-x)f'(x)g(x)dx\\ &= \int_0^1 f'(x)(x^2-x)g(x)dx\\ &= f(x)(x^2-x)g(x)|_0^1-\int_0^1 f(x)((x^2-x)g(x))'dx \qquad (143)\\ &= -\int_0^1 f(x)((x^2-x)g(x))'dx \qquad (144)\end{aligned}$$

(Vrstica (143) je izračunana s pomočjo integracije po delih – integratio per partes.) V (144) preberi predpis za preslikavo $\mathcal{A}^*$:

$$\mathcal{A}^*\colon\ g(x)\mapsto-((x^2-x)g(x))'.$$

Opomba *Prostor $C^\infty[0,1]$ ni končnorazsežen!*

Rešitev 353. naloge

1. način reševanja. Po definiciji je $\mathcal{B}^*$ taka preslikava iz $\mathbb{R}^3$ v $\mathbb{R}^2$, da velja

$$\langle\mathcal{B}\vec{p},\vec{q}\rangle_3=\langle\vec{p},\mathcal{B}^*\vec{q}\rangle_2$$

za poljubna vektorja $\vec{p}\in\mathbb{R}^2$ in $\vec{q}\in\mathbb{R}^3$. Zato postavi $\vec{p}=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\vec{q}=(u,v,w)\in\mathbb{R}^3$ in izračunaj

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{B}\vec{p},\vec{q}\rangle_3 &= \langle(2y-x,x+y,x-y),(u,v,w)\rangle_3\\ &= (2y-x)u+(x+y)v+(x-y)w\\ &= x(-u+v+w)+y(2u+v-w)\\ &= \langle(x,y),(-u+v+w,2u+v-w)\rangle_2.\end{aligned}$$

Sklepaj, da je $\mathcal{B}^*(u,v,w)=(-u+v+w,2u+v-w)$.

2. način reševanja. Naj bosta Σ_2 in Σ_3 običajni urejeni bazi prostorov $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$. Zapiši

$$\mathrm{M}_{\Sigma_3}^{\Sigma_2}(\mathcal{B})=\begin{bmatrix}-1&2\\1&1\\1&-1\end{bmatrix}.$$

Ker sta Σ_2 in Σ_3 ortonormirani bazi, je

$$(\mathrm{M}_{\Sigma_2}^{\Sigma_3}(\mathcal{B}^*)=(\mathrm{M}_{\Sigma_3}^{\Sigma_2}(\mathcal{B}))^t=\begin{bmatrix}-1&1&1\\2&1&-1\end{bmatrix},$$

torej je $\mathcal{B}^*(u,v,w)=(-u+v+w,2u+v-w)$.

⋙ 349.

Rešitev 354. naloge

1. način reševanja. Endomorfizem $\mathcal{P}$ je projekcija natanko takrat, ko je

$$\mathcal{P}^2=\mathcal{P}.$$

Ko to enakost adjungiraš, dobiš

$$(\mathcal{P}^*)^2=(\mathcal{P}^2)^*=\mathcal{P}^*.$$

To pomeni, da je tudi $\mathcal{P}^*$ projekcija v prostoru $\mathbb{R}^3$ in projicira na

$$\operatorname{Im}\mathcal{P}^*=(\operatorname{Ker}\mathcal{P})^\perp=p^\perp$$

vzdolž

$$\operatorname{Ker}\mathcal{P}^*=(\operatorname{Im}\mathcal{P})^\perp=\Pi^\perp.$$

Iz podatkov izračunaj

$$p^{\perp}\colon\ x+y+z=0 \qquad \Pi^{\perp}\colon\ x=0,\ y=0.$$

Prvi podprostor je ravnina skozi izhodišče, pravokotna na premico p, drugi pa je premica skozi izhodišče, pravokotna na ravnino Π.

2. način reševanja. Ker velja

$$\mathcal{P}\vec{\imath}=\vec{\imath},\quad \mathcal{P}\vec{\jmath}=\vec{\jmath},\quad \mathcal{P}\vec{k}=\mathcal{P}(-\vec{\imath}-\vec{\jmath}+(\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}))=-\vec{\imath}-\vec{\jmath},$$

saj sta $-\vec{\imath}-\vec{\jmath}\in\Pi$ in $\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}\in p$, pripada operatorju $\mathcal{P}$ v običajni urejeni bazi $\Sigma := \{\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\}$ matrika

$$\mathrm{M}_{\Sigma}^{\Sigma}(\mathcal{P})=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

Ker je baza Σ ortonormirana, velja

$$\mathrm{M}_{\Sigma}^{\Sigma}(\mathcal{P}^*)=(\mathrm{M}_{\Sigma}^{\Sigma}(\mathcal{P}))^{t}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&-1&0\end{bmatrix}.$$

Kako raziščeš delovanje tako dobljene transformacije $\mathcal{P}^*$? Njene lastne vrednosti $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=0$ in pripadajoči lastni vektorji $\vec{v}_1=(1,-1,0)=\vec{\imath}-\vec{\jmath}$, $\vec{v}_2=(1,0,-1)=\vec{\imath}-\vec{k}$, $\vec{v}_3=(0,0,1)=\vec{k}$ izdajo, da gre za projekcijo na ravnino, razpeto z vektorjema $\vec{v}_1$ in $\vec{v}_2$, vzdolž premice, razpeto na vektor $\vec{v}_3$.

⋙ 98., 279., 282.

Rešitev 355. naloge

1. način reševanja. Premisli, da veljata ekvivalenci

$$\mathcal{B}^*\mathcal{A}=0 \iff \operatorname{Im}\mathcal{A}\subseteq\operatorname{Ker}\mathcal{B}^*=(\operatorname{Im}\mathcal{B})^{\perp} \iff \operatorname{Im}\mathcal{A}\perp\operatorname{Im}\mathcal{B}.$$

2. način reševanja. Zapiši verigo ekvivalenc

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^*\mathcal{A}=0 &\iff (\mathcal{B}^*\mathcal{A})v=0 \text{ za vsak } v\in V\\ &\iff \langle\mathcal{B}^*\mathcal{A}v,w\rangle=0 \text{ za vsaka } v,w\in V\\ &\iff \langle\mathcal{A}v,\mathcal{B}w\rangle=0 \text{ za vsaka } v,w\in V\\ &\iff \operatorname{Im}\mathcal{A}\perp\operatorname{Im}\mathcal{B}.\end{aligned}$$

Rešitev 356. naloge

1. način reševanja. Vzemi poljubna vektorja $v,v'\in V$. Ker sta množici Φ in Φ' bazi prostora V, obstajajo taki skalarji $\lambda_1,\ldots,\lambda_n,\lambda_1',\ldots,\lambda_n'\in\mathbb{R}$, da velja

$$v=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i \quad\text{in}\quad v'=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j' f_j'.$$

Potem po eni strani velja

$$\langle\mathcal{A}v,v'\rangle=\langle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mathcal{A}f_i,\sum_{j=1}^{n}\lambda_j'f_j'\rangle=\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j'\langle\mathcal{A}f_i,f_j'\rangle, \tag{145}$$

po drugi pa

$$\langle v,\mathcal{B}v'\rangle=\langle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i,\sum_{j=1}^{n}\lambda_j'\mathcal{B}f_j'\rangle=\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j'\langle f_i,\mathcal{B}f_j'\rangle. \tag{146}$$

Uporabi predpostavko (31) na enakostih (145) in (146), ter sklepaj, da velja

$$\langle\mathcal{A}v,v'\rangle=\langle v,\mathcal{B}v'\rangle \quad\text{za vsak } v,v'\in V. \tag{147}$$

Ker iz teorije sledi, da pri danem $\mathcal{A}$ obstaja natanko ena taka preslikava $\mathcal{B}\colon V\to V$, da velja enakost (147) (in taka preslikava ima oznako $\mathcal{A}^*$), velja $\mathcal{B}=\mathcal{A}^*$.

2. način reševanja. Iz enakosti (31) sledi $\langle f_i,(\mathcal{A}^*-\mathcal{B})f_j'\rangle=0$ za vsaka $i,j=1,\ldots,n$, odtod pa $(\mathcal{A}^*-\mathcal{B})f_j=0$ za vsak $j=1,\ldots,n$. Ker predpisa za linearni preslikavi $\mathcal{A}^*$ in $\mathcal{B}$ sovpadata na bazi Φ', sta $\mathcal{A}^*$ in $\mathcal{B}$ po nalogi 102 enaki.

Opomba *Dokaži podobno trditev za unitarne prostore.*

⋙ 102.

Rešitev 357. naloge

Naj za vsak $v\in V$ velja $\langle\mathcal{A}v,v\rangle=\langle\mathcal{B}v,v\rangle$. Potem je $\langle\mathcal{A}v,v\rangle-\langle\mathcal{B}v,v\rangle=0$ za vsak $v\in V$ oziroma

$$\langle(\mathcal{A}-\mathcal{B})v,v\rangle=0 \text{ za vse } v\in V.$$

Ker je tudi $\mathcal{C}:=\mathcal{A}-\mathcal{B}$ simetričen, zadošča dokazati naslednjo trditev: če je $\mathcal{C}$ simetričen endomorfizem prostora V in če za vsak $v\in V$ velja $\langle\mathcal{C}v,v\rangle=0$, potem je $\mathcal{C}=0$. Takole: za vsaka $v,w\in V$ velja

$$0=\langle\mathcal{C}(v+w),v+w\rangle=\langle\mathcal{C}v,v\rangle+\langle\mathcal{C}v,w\rangle+\langle\mathcal{C}w,v\rangle+\langle\mathcal{C}w,w\rangle.$$

Ker je $\langle\mathcal{C}v,v\rangle=\langle\mathcal{C}w,w\rangle=0$, sledi

$$0=\langle\mathcal{C}v,w\rangle+\langle\mathcal{C}w,v\rangle=\langle\mathcal{C}v,w\rangle+\langle w,\mathcal{C}v\rangle=2\langle\mathcal{C}v,w\rangle$$

za vsaka $v,w\in V$. Izberi $w:=\mathcal{C}v$ in sklepaj, da za vsak $v\in V$ drži $\langle\mathcal{C}v,\mathcal{C}v\rangle=0$. Iz pozitivne definitnosti skalarnega produkta sledi, da je $\mathcal{C}v=0$ za vsak $v\in V$, torej je $\mathcal{C}=0$.

Opomba *Ali smeš izpustiti predpostavko o simetričnosti?*

⋙ 327.

Rešitev 358. naloge

Predpostavi, da tak $\mathcal{A}$ obstaja, in dokaži, da je kvečjemu en: Iz $\operatorname{rang}\mathcal{A}=1$ sledi $\operatorname{Ker}\mathcal{A}^*=(\operatorname{Im}\mathcal{A})^{\perp}=(\mathcal{L}\{v'\})^{\perp}$, saj je $v'\neq 0$. Ker je $\mathcal{A}^*w=w'\neq 0$, velja $w\notin(\mathcal{L}\{v'\})^{\perp}$, zato obstaja premi razcep prostora

$$V=\mathcal{L}\{w\}\oplus(\mathcal{L}\{v'\})^{\perp}. \tag{148}$$

Iz teorije veš, da je $\operatorname{rang}\mathcal{A}^* = \operatorname{rang}\mathcal{A} = 1$, zato velja tudi $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = (\operatorname{Im}\mathcal{A}^*)^\perp = (\mathcal{L}\{w'\})^\perp$, saj je $w' \neq 0$. Ker je $\mathcal{A}v = v' \neq 0$, velja $v \notin (\mathcal{L}\{w'\})^\perp$. Odtod sledi premi razcep prostora

$$V = \mathcal{L}\{v\} \oplus (\mathcal{L}\{w'\})^\perp, \tag{149}$$

na katerem endomorfizem $\mathcal{A}$ slika takole: $\mathcal{A}v = v'$ in $\mathcal{A}((\mathcal{L}\{w'\})^\perp) = \{0\}$. Torej je endomorfizem $\mathcal{A}$ kvečjemu en.

Pri definiciji endomorfizma $\mathcal{A}$ upoštevaj potrebne pogoje iz gornjega odstavka. Ker je $\langle v, w'\rangle \neq 0$, obstaja razcep (149) prostora V. Poljuben $x \in V$ enolično razcepi upoštevajoč (149) na $x = \lambda v + x'$, kjer je $\lambda \in \mathbb{R}$ in $x' \perp w'$, in definiraj $\mathcal{A}$: $V \to V$ s predpisom

$$\mathcal{A}x := \lambda v'. \tag{150}$$

Potem je $\mathcal{A}$ endomorfizem ranga 1 in zanj velja $\mathcal{A}v = v'$.

Preveriti moraš še, ali velja $\mathcal{A}^*w = w'$. V ta namen vzemi poljuben $x \in V$, razcepi ga kot zgoraj v $x = \lambda v + x'$ in izračunaj:

$$\begin{aligned}
\langle x, \mathcal{A}^*w\rangle &= \langle \mathcal{A}x, w\rangle \\
&= \langle \lambda v', w\rangle \\
&= \lambda\langle v', w\rangle \\
&= \lambda\langle v, w'\rangle \\
&= \langle \lambda v, w'\rangle + \langle x', w'\rangle \\
&= \langle \lambda v + x', w'\rangle \\
&= \langle x, w'\rangle.
\end{aligned}$$

Sklepaj, da je $\mathcal{A}^*w = w'$.

2. način reševanja. Naj ima endomorfizem $\mathcal{A}$: $V \to V$ zahtevane lastnosti. Linearna preslikava $\mathcal{A}$ je natanko določena z matriko, ki ji pripada glede na dve izbrani urejeni bazi. Ti bazi je smiselno izbrati tako, da bo matrika preslikave $\mathcal{A}$ čim bolj preprosta. V ta namen definiraj vektorja $v_1 := v/\|v\|$ in $v_1' := v'/\|v'\|$ in ju, ločeno, dopolni do ortonormiranih baz $\Omega := \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ in $\Omega' := \{v_1', v_2', \ldots, v_n'\}$ prostora V.

Zdaj zapiši matriko $\mathrm{M}_{\Omega'}^{\Omega}(\mathcal{A})$. Ker je $\operatorname{rang}\mathcal{A} = 1$ in je v_1' neničeln vektor iz $\operatorname{Im}\mathcal{A}$, velja $\operatorname{Im}\mathcal{A} = \mathcal{L}\{v_1'\}$. Torej je

$$\mathrm{M}_{\Omega'}^{\Omega}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

za neke $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, ki jih moraš še določiti. Iz pogoja $\mathcal{A}v = v'$ dobiš

$$\mathcal{A}v_1 = \mathcal{A}\left(\frac{v}{\|v\|}\right) = \frac{1}{\|v\|}\mathcal{A}v = \frac{1}{\|v\|}v' = \frac{\|v'\|}{\|v\|}v_1',$$

zato je $\lambda_1 = \|v'\|/\|v\|$. Ostale skalarje λ_i določiš iz pogoja $\mathcal{A}^*w = w'$ takole. Ker sta bazi Ω in Ω' ortonormirani, velja

$$\mathrm{M}_{\Omega}^{\Omega'}(\mathcal{A}^*) = (\mathrm{M}_{\Omega'}^{\Omega}(\mathcal{A}))^{\mathrm{t}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

od koder sklepaš

$$\mathcal{A}^*v_1' = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j, \quad \mathcal{A}^*v_2' = \cdots = \mathcal{A}^*v_n' = 0.$$

Razvij vektor w po bazi Ω', vektor w' pa po bazi Ω:

$$w = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i', \quad w' = \sum_{i=1}^{n} \mu_i' v_i. \tag{151}$$

Oglej si verigo enakosti

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i' v_i = w' = \mathcal{A}^*w = \mathcal{A}^*\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i'\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \mathcal{A}^* v_i' = \mu_1 \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j = \sum_{i=1}^{n} (\mu_1\lambda_i) v_i.$$

Torej mora veljati

$$\mu_i' = \mu_1\lambda_i \text{ za vse } 1 \leq i \leq n.$$

Prva od teh enakosti je izpolnjena, saj velja

$$\mu_1' = \langle w', v_1\rangle = \frac{1}{\|v\|}\langle w', v\rangle = \frac{1}{\|v\|}\langle w, v'\rangle = \frac{\|v'\|}{\|v\|}\langle w, v_1'\rangle = \lambda_1\mu_1.$$

Iz preostalih enakosti dobiš predpise

$$\lambda_i = \frac{\mu_i'}{\mu_1}, \quad 2 \leq i \leq n.$$

Ulomek je dobro definiran, saj je $\mu_1 = \langle w, v_1'\rangle = \frac{1}{\|v'\|}\langle w, v'\rangle \neq 0$.

Sklep: če definiraš skalarje μ_i, μ_i' kot v (151) in nato še skalarje

$$\lambda_1 := \frac{\|v'\|}{\|v\|}, \quad \lambda_i := \frac{\mu_i'}{\mu_1}, \quad 2 \leq i \leq n,$$

potem predpis $\mathcal{A}v_i := \lambda_i v_1'$, $1 \leq i \leq n$, določa tisti edini endomorfizem prostora V, ki ima zahtevane lastnosti.

⊳⊳⊳ 348., 359.

Rešitev 359. naloge

Podane štiri vektorje označi z v, v', w, w' tako, da bo veljalo $\mathcal{A}v = v'$ in $\mathcal{A}^*w = w'$. Preveri, da velja $\langle \mathcal{A}v, w\rangle = \langle v, \mathcal{A}^*w\rangle$.

1. način reševanja. Pomagaj si s 1. načinom reševanja naloge 358. Ta ti zagotavlja, da obstaja endomorfizem $\mathcal{A}$ ranga 1, ki zadošča postavljenim pogojem. Razcepi prostor

$$\mathbb{R}^3 = \mathcal{L}\{v\} \oplus \{w'\}^\perp = \mathcal{L}\{(1,2,1)\} \oplus \mathcal{L}\{(1,2,0),(1,0,2)\}.$$

V urejeni bazi $\Omega := \{(1,2,1),(1,2,0),(1,0,2)\}$ in običajni urejeni bazi Σ pripada endomorfizmu $\mathcal{A}$ (glej predpis (150)) matrika

$$\mathrm{M}_{\Sigma}^{\Omega}(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zato je

$$\mathrm{M}^{\Sigma}_{\Sigma}(\mathcal{A}) = \mathrm{M}^{\Omega}_{\Sigma}(\mathcal{A})\mathrm{M}^{\Sigma}_{\Omega}(\mathcal{I}) = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Operator $\mathcal{A}$ deluje torej s predpisom $\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (-4x_1 + 2x_2 + 2x_3, -2x_1 + x_2 + x_3, 0)$.
2. način reševanja. Postavi $A := \mathrm{M}^{\Sigma}_{\Sigma}(\mathcal{A})$, $x := \mathrm{X}_{\Sigma}(v)$, $x' := \mathrm{X}_{\Sigma}(v')$, $y := \mathrm{X}_{\Sigma}(w)$, $y' := \mathrm{X}_{\Sigma}(w')$. Ker je baza Σ ortonormirana v običajnem skalarnem produktu, velja $A^{\mathrm{t}} = (\mathrm{M}^{\Sigma}_{\Sigma}(\mathcal{A}))^{\mathrm{t}} = \mathrm{M}^{\Sigma}_{\Sigma}(\mathcal{A}^*)$. Zato zadošča najti tako matriko $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, da velja

$$Ax = x' \quad \text{in} \quad A^{\mathrm{t}}y = y'.$$

Če transponiraš drugo enakost, dobiš enakovredni enakosti

$$Ax = x' \quad \text{in} \quad y^{\mathrm{t}}A = (y')^{\mathrm{t}}. \tag{152}$$

Označi koeficiente matrike A z a_{ij}, $i,j = 1,2,3$. Potem ti da vsaka enakost v (152) sistem treh linearnih enačb z devetimi neznankami, skupaj torej dobiš šest enačb z devetimi neznankami. Zato bo imela splošna rešitev vsaj tri parametre. Ena od rešitev je naprimer

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

▷▷▷ 348., 358.

Rešitev 360. naloge

Naj bo $\mathcal{A}$ endomorfizem prostora $\mathbb{C}^n$, ki ga določa matrika A glede na običajno urejeno bazo Σ. Ker je slednja ortonormirana v običajnem skalarnem produktu na $\mathbb{C}^n$, velja $A^{\mathrm{h}} = \mathrm{M}^{\Sigma}_{\Sigma}(\mathcal{A}^*)$. Utemelji naslednjo verigo enakosti:

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \mathcal{A} = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = \dim(\mathcal{A}\mathbb{C}^n) = \dim(\mathcal{A}(\operatorname{Ker} \mathcal{A})^{\perp}) = \dim(\mathcal{A}(\operatorname{Im} \mathcal{A}^*)) =$$

$$= \dim(\mathcal{A}(\mathcal{A}^*\mathbb{C}^n)) = \dim((\mathcal{A}\mathcal{A}^*)\mathbb{C}^n) = \dim \operatorname{Im}(\mathcal{A}\mathcal{A}^*) = \operatorname{rang}(\mathcal{A}\mathcal{A}^*) = \operatorname{rang}(AA^{\mathrm{h}}).$$

Pri tem upoštevaj $\mathcal{A}\mathbb{C}^n = \mathcal{A}(\operatorname{Ker}\mathcal{A})^{\perp}$ in $(\operatorname{Ker}\mathcal{A})^{\perp} = \operatorname{Im}\mathcal{A}^*$.

▷▷▷ 112., 113.

Rešitev 361. naloge

Označi podane matrike po vrsti z A, B, C, D, E.

Ker je $A = [-2] = A^{\mathrm{t}}$, je matrika A simetrična. Zato je normalna. Ker je $\det A = -2 < 0$, A ni pozitivna simetrična. Iz $AA^{\mathrm{t}} = [4] \neq I$ sledi, da A ni ortogonalna.

Ker je $B^{\mathrm{t}} = -B$, je B poševno simetrična matrika. Zato je B normalna matrika. B ni simetrična, ker je $B^{\mathrm{t}} \neq B$. Zato B ni pozitivna simetrična. Ker je B kvadratna matrika in $BB^{\mathrm{t}} = I$, je B ortogonalna. (Da je B ortogonalna, lahko preveriš neposredno po definiciji ortogonalnosti $BB^{\mathrm{t}} = I = B^{\mathrm{t}}B$, kar je zamudnejše kot prejšnja utemeljitev.)

Velja $C = C^{\mathrm{t}}$, torej je C simetrična. Zato je C normalna. Ker je $\det C = -1 < 0$, C ni pozitivna simetrična. Opazi, da je C kvadratna in preveri, da velja $CC^{\mathrm{t}} = I$ (ali $C^{\mathrm{t}}C = I$). Zato je C ortogonalna.

Preveri, da je $DD^{\mathrm{t}} = D^{\mathrm{t}}D$. Zato je D normalna matrika. Očitno D ni simetrična. Zato ni pozitivna simetrična. Ker D na diagonali nima samih ničel, ni poševno simetrična. Ker naprimer prvi stolpec nima norme 1 (temveč $\sqrt{6}$), D ni ortogonalna.

Ker je E simetrična in so vsi njeni glavni minorji pozitivni: $\det[2] = 2 > 0$, $\det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 4 > 0$, $\det E = 2 > 0$, je E pozitivna simetrična matrika. Zato je tudi normalna. Iz $E^{\mathrm{t}}E \neq I$ sledi, da E ni ortogonalna.

Dobljene rezultate si oglej v preglednici

LASTNOST	ZAPIS	A	B	C	D	E
normalnost	$X^{\mathrm{t}}X = XX^{\mathrm{t}}$	√	√	√	√	√
simetričnost	$X^{\mathrm{t}} = X$	√		√		√
poševna simetričnost	$X^{\mathrm{t}} = -X$		√			
ortogonalnost	$X^{\mathrm{t}}X = I = XX^{\mathrm{t}}$		√	√		
pozitivna simetričnost	$x^{\mathrm{t}}Xx > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^{n\times 1} \setminus \{0\}$ in $X^{\mathrm{t}} = X$					√

Opomba *Premisli, da veljajo tile sklepi: simetričnost ⇒ normalnost; poševna simetričnost ⇒ normalnost; ortogonalnost ⇒ normalnost.*

Razmisli in pomni:

- *enakost norm k-te vrstice in k-tega stolpca je potrebni pogoj za normalnost matrike;*
- *če je matrika poševno simetrična, so njeni diagonalci enaki 0;*
- *če je matrika M kvadratna in velja $MM^{\mathrm{t}} = I$ (ali $M^{\mathrm{t}}M = I$), je M ortogonalna;*
- *če je matrika ortogonalna, ima vsak njen stolpec in vsaka njena vrstica normo 1, poljubna različna stolpca ali poljubni različni vrstici pa sta pravokotni;*
- *edina realna matrika, ki je hkrati simetrična in poševno simetrična, je ničelna matrika.*

▷▷▷ 362.

Rešitev 362. naloge

Označi podane matrike po vrsti z A, B, C, D, E, F.

Ker je $A = [-2] = A^{\mathrm{t}}$, je matrika A simetrična. Iz $A = [-2] = A^{\mathrm{h}}$ sledi, da je A hermitska. Očitno ni poševno hermitska. Zato je normalna. Ker je $\det A = -2 < 0$, A ni pozitivna. Iz $AA^{\mathrm{h}} = [4] \neq I$ sledi, da A ni unitarna.

Ker je $B = [i] = B^{\mathrm{t}}$, je B simetrična. Iz $B = [i] \neq [-i] = B^{\mathrm{h}}$ sledi, da B ni hermitska, zato ni pozitivna. Ker je $B^{\mathrm{h}} = [-i] = -B$, je B poševno hermitska. Iz $BB^{\mathrm{h}} = [1] = I = [1] = B^{\mathrm{h}}B$, da je unitarna, zato je tudi normalna.

Velja $C = C^{\mathrm{t}}$, zato je C simetrična. Ker je $C = C^{\mathrm{h}}$, je C hermitska. Ker C nima vseh diagonalcev v množici imaginarnih števil, ni poševno hermitska. Zato je C normalna. Ker je $\det C = -1 < 0$, C ni pozitivna. Preveri, da velja $CC^{\mathrm{h}} = I = C^{\mathrm{h}}C$. Zato je C unitarna.

Matrika D je hermitska, ker je $D = D^{\mathrm{h}}$. Očitno ni poševno hermitska. Zato je normalna, toda ni pozitivna, ker je $\det D = -1 < 0$. Iz $D \neq D^{\mathrm{t}}$ sledi, da D ni simetrična. Je pa unitarna, ker je $DD^{\mathrm{h}} = I$.

Ker so vsi glavni minorji matrike E pozitivni: $\det[2] = 2 > 0$, $\det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 4 > 0$, $\det E = 2 > 0$ in je E hermitska, je E pozitivna hermitska matrika. Ker E nima vseh diagonalcev imaginarnih, E ni poševno simetrična. Zato je tudi normalna. Iz $E^{\mathrm{t}}E \neq I$ sledi, da E ni unitarna. Očitno je E simetrična.

Ker $FF^{\mathrm{h}} \neq F^{\mathrm{h}}F$, F ni normalna, zato ni ne unitarna, ne hermitska, ne pozitivna, ne poševno hermitska. Iz $FF^{\mathrm{t}} \neq F^{\mathrm{t}}F$, sledi, da F ni simetrična.

Dobljene rezultate si oglej v preglednici

LASTNOST	ZAPIS	A	B	C	D	E	F
normalnost	$X^{\mathrm{h}}X = XX^{\mathrm{h}}$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	
simetričnost	$X^{\mathrm{t}} = X$	$\surd$	$\surd$	$\surd$		$\surd$	
hermitskost	$X^{\mathrm{h}} = X$	$\surd$		$\surd$	$\surd$	$\surd$	
poševna hermitskost	$X^{\mathrm{h}} = -X$		$\surd$				
unitarnost	$X^{\mathrm{h}}X = I = XX^{\mathrm{h}}$		$\surd$	$\surd$	$\surd$		
pozitivna hermitskost	$x^{\mathrm{h}}Xx > 0\ \forall x \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ in $X^{\mathrm{h}} = X$					$\surd$	

Opomba *Premisli, da veljajo tile sklepi: hermitskost $\Rightarrow$ normalnost; poševna hermitskost $\Rightarrow$ normalnost; unitarnost $\Rightarrow$ normalnost. Toda: simetričnost $\not\Rightarrow$ normalnost (v $\mathbb{C}^{n\times n}$). Razmisli in pomni:*

- *enakost norm k-te vrstice in k-tega stolpca je potrebni pogoj za normalnost matrike;*
- *če je matrika poševno hermitska, so njeni diagonalci imaginarna števila;*
- *če je matrika M kvadratna in velja $MM^{\mathrm{h}} = I$ (ali $M^{\mathrm{h}}M = I$), je M unitarna;*
- *če je matrika unitarna, ima vsak njen stolpec in vsaka njena vrstica normo 1, poljubna različna stolpca ali poljubni različni vrstici pa sta pravokotni;*
- *edina realna matrika, ki je hkrati hermitska in poševno hermitska, je ničelna matrika.*

Primerjaj rezultate z rezultati naloge 361. Opazi, da je definicija normalnosti odvisna od tega, ali je matrika v $\mathbb{R}^{n\times n}$ ali v $\mathbb{C}^{n\times n}$. Če ima matrika realne koeficiente in je v $\mathbb{R}^{n\times n}$ ali v $\mathbb{C}^{n\times n}$, potem simetričnost in hermitskost sovpadata. V tem primeru sovpadata tudi ortogonalnost in unitarnost ter seveda poševna simetričnost in poševna hermitskost. Pozor: če kompleksna matrika nima vseh koeficientov realnih, so njene naravne lastnosti, ki jih preučujemo, normalnost, hermitskost, poševna hermitskost in unitarnost.

⋙ 361.

Rešitev 363. naloge

Postavi $N := \begin{bmatrix} i & a \\ 2 & b \end{bmatrix}$, kjer sta $a, b \in \mathbb{C}$. Iz pogoja $NN^{\mathrm{h}} = N^{\mathrm{h}}N$ dobiš pogoj

$$\begin{bmatrix} 1+|a|^2 & 2i+a\bar{b} \\ -2i+\bar{a}b & 4+|b|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -ia+2b \\ i\bar{a}+2\bar{b} & |a|^2+|b|^2 \end{bmatrix},$$

in odtod štiri nelinearne enačbe

$$\begin{aligned} 1+|a|^2 &= 5, \\ 2i+a\bar{b} &= -ia+2b, \\ -2i+\bar{a}b &= i\bar{a}+2\bar{b}, \\ 4+|b|^2 &= |a|^2+|b|^2. \end{aligned}$$

Prva in četrta enačba sta enakovredni, prav tako druga in tretja (konjugiraj drugo, pa dobiš tretjo). Zato obravnavaj samo prvo in drugo. Zapiši $a = re^{i\varphi}$, kjer je $r \geq 0$ in $\varphi \in [0, 2\pi)$. (Namesto $e^{i\varphi}$ lahko pišeš $\cos\varphi + i\sin\varphi$ ali cis φ.) Potem iz prve enačbe sledi $r = 2$, zato $a = 2e^{i\varphi}$. To vstavi v drugo enačbo, pa dobiš

$$2i + 2e^{i\varphi}\bar{b} = -2ie^{i\varphi} + 2b. \tag{153}$$

Za $b \neq i$ krajšaj in preuredi v

$$e^{i\varphi} = \frac{b-i}{\bar{b}+i}.$$

Ker število $\frac{b-i}{\bar{b}+i}$ leži na enotski krožnici za vsak $b \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ (preveri!), je $b \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ poljuben in $a = 2\frac{b-i}{\bar{b}+i}$. Torej je $N = \begin{bmatrix} i & 2\frac{b-i}{\bar{b}+i} \\ 2 & b \end{bmatrix}$ za poljuben $b \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ normalna matrika.

Če je $b = i$, potem je $N = \begin{bmatrix} i & a \\ 2 & i \end{bmatrix}$ normalna matrika za vsak $a \in \mathbb{C}$, za katerega je $|a| = 2$.

⋙ 401.

Rešitev 364. naloge

Realna matrika A je ortogonalna natanko tedaj, ko velja $A^{\mathrm{t}}A = I$, to je natanko takrat, ko so stolpci matrike A ortonormirani v običajnem skalarnem produktu na $\mathbb{R}^{3\times 1}$. Ker je norma stolpca u enaka 1, je naloga rešljiva.

1. način reševanja. Iskano matriko A zapiši takole:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & a & x \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & b & y \\ \frac{1}{2} & c & z \end{bmatrix}, \quad a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Ker so stolpci matrike A ortonormirani, velja

$$\frac{a}{2} - \frac{b}{\sqrt{2}} + \frac{c}{2} = 0, \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Vzemi naprimer $b := 0$, $a := 1/\sqrt{2}$, $c := -1/\sqrt{2}$ in dobiš

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & x \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & y \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & z \end{bmatrix}, \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Zaradi ortonormiranosti stolpcev matrike A veljajo spet enakosti

$$\frac{x}{2}-\frac{y}{\sqrt{2}}+\frac{z}{2}=0,\quad \frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{z}{\sqrt{2}}=0,\quad x^2+y^2+z^2=1.$$

Izberi naprimer $x:=1/2$, $y:=1/\sqrt{2}$, $z:=1/2$. Potem je matrika

$$A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

ortogonalna in ima pozitivno determinanto $\det A=1$.

2. način reševanja. Dopolni podani stolpec u do baze prostora $\mathbb{R}^{3\times 1}$, nato uporabi Gram-Schmidtov postopek na tej bazi. Matrika, sestavljena iz stolpcev dobljene ortonormirane baze, je ortogonalna in ima determinanto D enako bodisi $D=1$ bodisi $D=-1$ (zakaj?). Če je $D=-1$, pomnoži tretji stolpec z -1 in dobiš ortogonalno matriko z determinanto 1.

3. način reševanja. Poišči poljuben stolpec $v\in\mathbb{R}^{3\times 1}$, ki je pravokoten na u in ima dolžino 1, nato definiraj $w\in\mathbb{R}^{3\times 1}$ z vektorskim produktom $w:=u\times v$. Matrika $A:=[u,v,w]$ je ortogonalna in njena determinanta je enaka 1, saj je u,v,w pozitivno orientirana baza.

⊳⊳⊳ 380., 381., 382., 390.

Rešitev 365. naloge

Označi z $D_{(r)}$ r-to vrstico matrike D, z $\langle\cdot,\cdot\rangle$ pa običajni skalarni produkt na $\mathbb{C}^{1\times n}$. Potem je

$$\langle D_{(r)},D_{(r)}\rangle=\sum_{k=1}^{n}d_{rk}\overline{d_{rk}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\omega^{rk}}{\sqrt{n}}\overline{\left(\frac{\omega^{rk}}{\sqrt{n}}\right)}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\omega^{rk}\omega^{-rk}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}1=\frac{n}{n}=1$$

in za $r\neq s$ velja

$$\langle D_{(r)},D_{(s)}\rangle=\sum_{k=1}^{n}d_{rk}\overline{d_{sk}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\omega^{rk}}{\sqrt{n}}\overline{\left(\frac{\omega^{sk}}{\sqrt{n}}\right)}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\omega^{rk-sk}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\omega^{r-s})^k.$$

Če pišeš $\nu:=\omega^{r-s}$ in upoštevaš $\nu\neq 1$ in $\nu^n=(\omega^{r-s})^n=(\omega^n)^{r-s}=1$, dobiš

$$\langle D_{(r)},D_{(s)}\rangle=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\nu^k=\frac{1}{n}(\nu+\nu^2+\cdots+\nu^n)=\frac{1}{n}(1+\nu+\cdots+\nu^{n-1})=\frac{1}{n}\frac{(1-\nu^n)}{(1-\nu)}=0.$$

Torej so vrstice matrike D ortonormirane v produktu $\langle\cdot,\cdot\rangle$, zato je D unitarna matrika.

⊳⊳⊳ 383.

Rešitev 366. naloge

Označi opisano matriko z A in njene koeficiente z a_{ij}. Predpostavi, da je A ortogonalna, torej da velja

$$AA^{t}=I=A^{t}A.\tag{154}$$

Ker je $I\in\mathbb{R}^{n\times n}$ in $n>1$, je koeficient matrike I na križišču prve vrstice in drugega stolpca enak 0. Odtod in iz (154) sklepaj, da velja

$$0=(I)_{12}=A_{(1)}(A^{t})^{(2)}=a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+\cdots+a_{1n}a_{2n}>0.$$

Protislovje.

⊳⊳⊳ 367., 369.

Rešitev 367. naloge

Označi opisano matriko z A. Ker ima matrika A kakšen koeficient, ki ni realno število, velja $A^{t}\neq A^{h}$. Če bi bila matrika A hkrati ortogonalna in unitarna, bi veljalo

$$AA^{t}=I=A^{t}A\quad\text{in}\quad AA^{h}=I=A^{h}A,$$

in odtod

$$A^{t}=A^{-1}=A^{h}.$$

Protislovje.

⊳⊳⊳ 366., 369., 373.

Rešitev 368. naloge

($\Rightarrow$). Predpostavi, da je A pozitivna simetrična matrika. Zaradi pozitivnosti matrike A velja

$$x^{t}Ax>0\quad\text{za vsak neničelni } x\in\mathbb{R}^{n\times 1},\tag{155}$$

zato je $\operatorname{Ker}A=\{0\}$. Odtod sledi, da je matrika A obrnljiva, torej obstaja obrat A^{-1}. Po nalogi 132 sklepaj, da je $(A^{-1})^{t}=(A^{t})^{-1}=A^{-1}$, zato je matrika A^{-1} simetrična. Vzemi poljuben $y\in\mathbb{R}^{n\times 1}$ in v (155) vstavi $x:=A^{-1}y$, pa dobiš

$$0<x^{t}Ax=(A^{-1}y)^{t}A(A^{-1}y)=y^{t}A^{-1}y.$$

Zato je A^{-1} tudi pozitivna matrika.

($\Leftarrow$). Pomagaj si s prejšnjo točko in sklepaj: če je A^{-1} pozitivna simetrična matrika, je tudi matrika $(A^{-1})^{-1}=A$ pozitivna simetrična.

Rešitev 369. naloge

Naj bo $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ normalna kompleksna matrika z realnimi koeficienti, ki ima vse lastne vrednosti realne. Dokazati želiš $A^{t}=A$. Uporabi izrek o normalnih kompleksnih matrikah (normalnih endomorfizmih na unitarnih prostorih) in sklepaj, da se da A diagonalizirati z unitarno prehodno matriko, torej da obstajata taka unitarna matrika $U\in\mathbb{C}^{n\times n}$ in taka diagonalna matrika $D\in\mathbb{C}^{n\times n}$, da velja

$$A=UDU^{h}.$$

Upoštevaj, da ima A realne koeficiente in realne lastne vrednosti, in sklepaj

$$A^{t}=A^{h}=(UDU^{h})^{h}=U\overline{D}U^{h}=UDU^{h}=A,$$

zato je A simetrična matrika.

⊳⊳⊳ 366., 367.

Rešitev 370. naloge

Ker velja $(AA^t)^t = (A^t)^t A^t = AA^t$, je AA^t simetrična matrika.

Iz teorije veš, da je $\operatorname{rang}(A^t) = \operatorname{rang}(A) = m$. Zato za poljuben neničeln vektor $x \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ velja $A^t x \neq 0$. Označi neničelni vektor $y := A^t x$ in sklepaj

$$x^t AA^t x = (A^t x)^t A^t x = y^t y > 0.$$

Zato je AA^t pozitivna matrika.

⊳⊳⊳ 372.

Rešitev 371. naloge

Velja

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{A} \iff \mathcal{A}^* - \mathcal{A} = 0,$$

zato po nalogi 327 zadošča dokazati

$$\langle(\mathcal{A}^* - \mathcal{A})v, v\rangle = 0 \text{ za vse } v \in V.$$

To ni težko, saj za vsak $v \in V$ velja

$$\langle(\mathcal{A}^* - \mathcal{A})v, v\rangle = \langle\mathcal{A}^* v, v\rangle - \langle\mathcal{A}v, v\rangle = \overline{\langle v, \mathcal{A}^* v\rangle} - \langle\mathcal{A}v, v\rangle = \overline{\langle\mathcal{A}v, v\rangle} - \langle\mathcal{A}v, v\rangle =$$

$$= \langle\mathcal{A}v, v\rangle - \langle\mathcal{A}v, v\rangle = 0.$$

Opomba *Sebi adjungiranemu operatorju na unitarnem prostoru rečemo tudi hermitski, na evklidskem pa simetričen operator.*

⊳⊳⊳ 327., 372.

Rešitev 372. naloge

Ker je $(\mathcal{P}^*\mathcal{A}\mathcal{P})^* = \mathcal{P}^*\mathcal{A}\mathcal{P}^{**} = \mathcal{P}^*\mathcal{A}\mathcal{P}$, je $\mathcal{P}^*\mathcal{A}\mathcal{P}$ sebi adjungiran.

Preveriti moraš še njegovo pozitivnost. Vzemi poljuben $v \in V$, $v \neq 0$. Potem je

$$\langle(\mathcal{P}^*\mathcal{A}\mathcal{P})v, v\rangle = \langle\mathcal{P}^*(\mathcal{A}\mathcal{P})v, v\rangle = \langle\mathcal{A}\mathcal{P}v, \mathcal{P}v\rangle = \langle\mathcal{A}(\mathcal{P}v), \mathcal{P}v\rangle > 0;$$

pri tem upoštevaj, da je $\langle\mathcal{A}x, x\rangle > 0$ za vsak neničeln x iz V in da je $\mathcal{P}v \neq 0$, saj je $\mathcal{P}$ obrnljiv!

Opomba *Iz naloge 371 sledi, da je pozitiven endomorfizem unitarnega prostora vselej tudi sebi adjungiran. Zato lahko v unitarnem primeru namesto „pozitiven sebi adjungiran" rečemo kratko „pozitiven". Posebej, v gornjem dokazu smemo izpustiti preverjanje sebi adjungiranosti.*

Opazi, da je v gornji nalogi opisan način, kako iz danega pozitivnega operatorja pridobivaš nove pozitivne operatorje.

⊳⊳⊳ 370., 371.

Rešitev 373. naloge

Naj bo V unitaren prostor in $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$. Če je $\mathcal{A}$ sebi adjungiran, potem so njegove lastne vrednosti realne in obstaja baza prostora V, v kateri pripada endomorfizmu $\mathcal{A}$ diagonalna matrika. Če je $\mathcal{A}$ unitaren, potem njegove lastne vrednosti pripadajo kompleksni enotski krožnici. Nazadnje, če je $\mathcal{A}$ pozitiven, so vse njegove lastne vrednosti pozitivne. Sklepaj: če je $\mathcal{A}$ sebi adjungiran, unitaren in pozitivno definiten, potem mu v neki bazi pripada diagonalna matrika s samimi enicami na glavni diagonali, to je identiteta I. Torej je $\mathcal{A} = \mathcal{I}$.

⊳⊳⊳ 367.

Rešitev 374. naloge

Ker je A realna simetrična matrika, premore ortonormirano bazo lastnih vektorjev (glede na običajni skalarni produkt v $\mathbb{R}^{3\times 1}$), zato je naloga rešljiva. Izračunaj karakteristični polinom $p_A(\lambda) = \lambda(\lambda+2)(\lambda-2)$. Označi lastne vrednosti matrike A z $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$. Ker sta lastna vektorja pri različnih lastnih vrednostih ortogonalna, zadošča poiskati en neničeln vektor v vsakem od lastnih podprostorov $\operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)$ in ga normirati. Te vektorje nato v pravilnem vrstnem redu zapiši v stolpce matrike Q, naprimer takole:

$$D := \operatorname{diag}(0, 2, -2), \qquad Q := \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

⊳⊳⊳ 277., 375., 376., 377.

Rešitev 375. naloge

Matrika A je realna in simetrična, zato se da diagonalizirati z ortogonalno prehodno matriko. Lahko se lotiš običajnega postopka ali pa poskusi takole: zapiši $A = 4B$, kjer je

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadošča poiskati lastne vrednosti μ_i matrike B in nato iz njih lastne vrednosti $\lambda_i = 4\mu_i$ matrike A. Lastni vektorji so isti za obe matriki.

Torej, $p_B(\lambda) = (1-\lambda)^2(1+\lambda)^2$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = -1$, obe lastni vrednosti imata algebrsko kratnost enako $k_1 = k_2 = 2$, lastna podprostora $\operatorname{Ker}(B-I)$ in $\operatorname{Ker}(B+I)$ sta dvorazsežna, ortonormirana baza prvega je (naprimer) $e_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}[1,0,1,0]^t$, $e_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}[0,1,0,1]^t$, drugega pa $e_3 := \frac{1}{\sqrt{2}}[1,0,-1,0]^t$, $e_4 := \frac{1}{\sqrt{2}}[0,1,0,-1]^t$. Iskani matriki sta potemtakem $D := \operatorname{diag}(4,4,-4,-4)$ in

$$P := [e_1, e_2, e_3, e_4] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Opomba *Ne pozabi: ker je baza $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ortonormirana, je $P^{-1} = P^t$.*
Naloga ima več rešitev: dobiš jih s s permutacijo diagonalnih koeficientov matrike D in z drugačno izbiro ortonormiranih baz lastnih podprostorov.

⋙ 277., 374., 376., 377.

Rešitev 376. naloge

Ker je A realna simetrična matrika, jo lahko diagonaliziraš z ortogonalno prehodno matriko. Izračunaj karakteristični polinom $p_A(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 1)(\lambda - 4)(\lambda + 2)$. Če označiš $D := \operatorname{diag}(-2, 1, 4)$ in

$$Q := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

velja $A = QDQ^{-1} = QDQ^t$. Definiraj $E := \sqrt[3]{D} = \operatorname{diag}(-\sqrt[3]{2}, 1, \sqrt[3]{4})$. Potem velja

$$(QEQ^t)^3 = QE^3Q^t = QDQ^t = A.$$

Torej, če pišeš krajše $-\sqrt[3]{2} = a$, zadošča matrika

$$B := QEQ^t = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a + a^2 & 0 & a - a^2 \\ 0 & 2 & 0 \\ a - a^2 & 0 & a + a^2 \end{bmatrix}$$

enakosti $B^3 = A$.

⋙ 280., 375., 374., 377.

Rešitev 377. naloge

Če je $A = UB$, kjer je $U^t = U^{-1}$ in $B^t = B$, potem velja

$$A^tA = (UB)^tUB = (B^tU^t)UB = B^t(U^tU)B = BIB = B^2. \tag{156}$$

Matrika A^tA je realna simetrična in zaradi obrnljivosti matrike A pozitivno definitna, zato enakost (156) enolično določa simetrično pozitivno definitno matriko B, takole. Najprej izračunaj matriko

$$S := A^tA = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom simetrične matrike S je $p_S(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 18)$, lastna (ortonormirana) vektorja pri $\lambda_1 = 2$ in pri $\lambda_2 = 18$ sta $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[1, -1]^t$ in $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[1, 1]^t$. Zato smeš pisati $S = A^tA = QDQ^t$, pri čemer sta

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 18 \end{bmatrix}, \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Iskana matrika B je potem

$$\begin{aligned} B = Q\sqrt{D}Q^t &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{2} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ker poznaš A in B, lahko zdaj iz $A = UB$ izračunaš

$$\begin{aligned} U &= AB^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{6\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Opravi še preizkus!

Opomba *Primerjaj gornji razcep matrike s polarnim razcepom kompleksnega števila!*

⋙ 374., 375., 376., 396.

Rešitev 378. naloge

Podano matriko označi z A. Če matrika A pripada nekemu sebi adjungiranemu endomorfizmu $\mathcal{A}$ unitarnega prostora $\mathbb{C}^3$, potem ima A iste lastne vrednosti kot endomorfizem $\mathcal{A}$. Ker je $\mathcal{A}$ sebi adjungiran endomorfizem, ima vse lastne vrednosti realne. Premisli (ali pa si pomagaj z nalogo 263), da matrika A za noben $\alpha \in \mathbb{C}$ nima vseh lastnih vrednosti v $\mathbb{R}$. Zato iskani $\alpha \in \mathbb{C}$ ne obstaja.

⋙ 263.

Rešitev 379. naloge

(a) Trditev ne velja. Vzemi naprimer identični endomorfizem $\mathcal{I}$. Endomorfizem $\mathcal{I}$ je sebi adjungiran, saj je $\mathcal{I}^* = \mathcal{I}$, in mu v poljubni bazi Ψ prostora V pripada matrika I: $\mathrm{M}_\Psi^\Psi(\mathcal{I}) = I$. Ker je matrika I simetrična, medtem ko baza Ψ ni nujno ortonormirana, trditev ne velja.

(b) Trditev ne velja. Vzemi poljuben sebi adjungiran endomorfizem $\mathcal{A}$ na V in poljubno ortonormirano bazo Ω prostora V. Ker je Ω ortonormirana baza, velja $\mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{A})^t = \mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{A}^*) = \mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{A})$, torej je matrika $\mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{A})$ simetrična. Naj bo Ω' baza dobljena iz baze Ω tako, da vsak vektor baze Ω pomnožiš z istim skalarjem $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Potem po nalogi 185 velja $\mathrm{M}_{\Omega'}^{\Omega'}(\mathcal{A}) = \mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{A})$. Torej je matrika $\mathrm{M}_{\Omega'}^{\Omega'}(\mathcal{A})$ simetrična, toda baza Ω' ni ortonormirana, saj ni normirana.

(c) Če je V 1-razsežen, je vsaka njegova baza ortogonalna, saj sestoji iz enega samega vektorja, in vsaka matrika simetrična, saj ima matrika en sam koeficient. Torej v tem primeru trditev drži.

Če je V n-razsežen, kjer je $n > 1$, trditev ne velja. Vzemi poljuben sebi adjungiran endomorfizem $\mathcal{A}$ na V. Potem se da $\mathcal{A}$ diagonalizirati, to pomeni, da mu v neki ortonormirani bazi $\Omega = \{v_1, \ldots, v_n\}$ prostora V (ki je sestavljena iz lastnih vektorjev endomorfizma $\mathcal{A}$) pripada diagonalna matrika $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ (ki ima na diagonali nanizane k izbranim lastnim vektorjem pripadajoče lastne vrednosti). Definiraj bazo $\Omega' := \{2v_1 - v_2, 2v_1 +$

$v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ in zapiši

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}_{\Omega'}^{\Omega'}(\mathcal{A}) &= \mathrm{M}_{\Omega'}^{\Omega}(\mathcal{I})\mathrm{M}_{\Omega}^{\Omega}(\mathcal{A})\mathrm{M}_{\Omega}^{\Omega'}(\mathcal{I}) \\
&= \begin{bmatrix} 1/4 & -1/2 & 0 & \ldots & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (\lambda_1+\lambda_2)/2 & (\lambda_1-\lambda_2)/2 & 0 & \ldots & 0 \\ (\lambda_1-\lambda_2)/2 & (\lambda_1+\lambda_2)/2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Očitno je matrika $\mathrm{M}_{\Omega'}^{\Omega'}(\mathcal{A})$ simetrična, medtem ko baza Ω' ni ortogonalna.

Opomba *Če najprej dokažeš, da trditev (c) ne velja v več kot 1-razsežnem prostoru V, dokažeš tudi, da trditvi (a) in (b) za take prostore ne veljata.*

⋙ 185.

Rešitev 380. naloge

Podano matriko označi z A. Uporabi dejstvo, da ima vsaka realna simetrična matrika vse lastne vrednosti v množici $\mathbb{R}$. Zato napiši

$$A = \begin{bmatrix} a & 3 & b & 1996 \\ 3 & c & -2 & d \\ b & -2 & e & 1 \\ 1996 & d & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Iz zahteve, da je število 2 lastna vrednost matrike A, dobiš

$$0 = \det(A - 2I) = \begin{vmatrix} a-2 & 3 & b & 1996 \\ 3 & c-2 & -2 & d \\ b & -2 & e-2 & 1 \\ 1996 & d & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Tej enačbi ni težko zadostiti, naprimer vzemi $a := 5$, $c := 5$, $b := -2$ in $d := 1996$. (V tem primeru sta prva in druga vrstica matrike $A - 2I$ enaki.) Neznanka e je lahko poljubno realno število. Ena od možnih rešitev je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 & 1996 \\ 3 & 5 & -2 & 1996 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ 1996 & 1996 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

⋙ 364., 382.

Rešitev 381. naloge

Podano matriko označi z A. Zaznamuj še kompleksno enotsko krožnico s simbolom S^1 in krožnico s polmerom 2 s simbolom $2S^1$. Potem veljata ekvivalenci

$$\sigma(A) \subseteq 2 + 2S^1 \iff \sigma(A - 2I) \subseteq 2S^1 \iff \sigma(\frac{A-2I}{2}) \subseteq S^1.$$

Uporabi znano dejstvo, da leži spekter unitarne matrike na enotski krožnici. Torej zadošča, da je matrika

$$\frac{A-2I}{2} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & * & * & -1 \\ 1 & * & * & 1 \\ 1 & * & * & 1 \\ 1 & * & * & -1 \end{bmatrix}$$

unitarna, z drugimi besedami, da so stolpci normirani in paroma ortogonalni v običajnem skalarnem produktu v $\mathbb{C}^{4\times 1}$. Ena od možnih takih matrik je

$$\frac{A-2I}{2} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

zato je končno

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

⋙ 364., 382.

Rešitev 382. naloge

Podano matriko označi z A. Naj $i\mathbb{R}$ pomeni množico imaginarnih števil. Potem velja ekvivalenca

$$\sigma(A) \subseteq i\mathbb{R} \iff \sigma(\frac{1}{i}A) \subseteq \mathbb{R}.$$

Zadostni pogoj za $\sigma(\frac{1}{i}A) \subseteq \mathbb{R}$ je hermitskost matrike $\frac{A}{i} = -iA$, torej $-iA = (-iA)^{\mathrm{h}}$. Zato v matriki $-iA$ napiši koeficiente tako, da dobiš hermitsko matriko

$$-iA = \begin{bmatrix} 0 & -i & 1+i & a \\ i & 0 & 1-i & -2i \\ 1-i & 1+i & b & 4-2i \\ \overline{a} & 2i & 4+2i & c \end{bmatrix},$$

kjer je $a \in \mathbb{C}$ in sta $b, c \in \mathbb{R}$. Ker velja

$$i \in \sigma(A) \iff 1 \in \sigma(\frac{1}{i}A) \iff 1 \in \sigma(-iA),$$

zapiši pogoj

$$0 = \det(-iA - I) = \begin{vmatrix} -1 & -i & 1+i & a \\ i & -1 & 1-i & -2i \\ 1-i & 1+i & b-1 & 4-2i \\ \overline{a} & 2i & 4+2i & c-1 \end{vmatrix}.$$

Opazi, da lahko dosežeš kolinearnost prve in druge vrstice, ter kolinearnost tretje in četrte vrstice s tem, da postaviš $a := 2$, $b := 4 - i$ in $c := 7 + 2i$. Zato ima matrika $-iA - I$ vsaj dvorazsežno jedro. Zapiši matriko

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1+i & 2i \\ -1 & 0 & 1+i & 2 \\ 1+i & -1+i & 1+4i & 2+4i \\ 2i & -2 & -2+4i & -2+7i \end{bmatrix}$$

in sklepaj, da je število i njena vsaj dvakratna lastna vrednost. Matrika A ima zaradi gornjih razmislekov tudi vse ostale lastne vrednosti v množici imaginarnih števil.

▷▷▷ 364., 380., 381.

Rešitev 383. naloge

Zaznamuj s $P = [a_{ij}]$ prehodno matriko med izbranima (urejenima) ortonormiranima bazama $\Omega := \{u_1, \ldots, u_n\}$ in $\Pi := \{v_1, \ldots, v_n\}$ prostora V, torej $P = \mathrm{M}_{\Pi}^{\Omega}(\mathcal{I})$. Dokazati moraš, da velja $P^{\mathrm{h}}P = I$. Enakovredno je dokazati, da so stolpci matrike P ortonormirani v običajnem skalarnem produktu v $\mathbb{C}^{n\times 1}$, ki ga označi $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$. Skalarni produkt v prostoru V označi $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Piši $P^{(i)}$ za i-ti stolpec matrike P in upoštevaj

$$u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i, \quad \langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$$

pri računanju

$$\langle\!\langle P^{(i)}, P^{(j)} \rangle\!\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \overline{a_{kj}} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \sum_{l=1}^{n} \overline{a_{lj}} \langle v_k, v_l \rangle =$$
$$= \langle \sum_{k=1}^{n} a_{ki} v_k, \sum_{l=1}^{n} a_{lj} v_l \rangle = \langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Torej je P unitarna matrika.

Opomba *Oblikuj podobno trditev za evklidski prostor.*

▷▷▷ 365., 384., 388.

Rešitev 384. naloge

(a) Zadošča dokazati, da so vrstice matrike G linearno neodvisne. Predpostavi torej, da za neke $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ velja

$$\alpha_1 G_{(1)} + \cdots + \alpha_n G_{(n)} = 0.$$

Torej za vsak $1 \leq k \leq n$ velja

$$\alpha_1 \langle v_1, v_k \rangle + \cdots + \alpha_n \langle v_n, v_k \rangle = 0$$

oziroma

$$\langle \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n, v_k \rangle = 0.$$

Sklepati smeš

$$\langle \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n, \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \rangle = 0,$$

odtod pa

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0.$$

Iz linearne neodvisnosti baznih vektorjev sledi $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Ker so vrstice matrike G linearno neodvisne, je G obrnljiva.

(b) Označi $\Sigma = \{e_1, \ldots, e_n\}$ in si oglej verigo enakosti

$$(P^{\mathrm{h}}P)_{ij} = (\mathrm{M}_{\Sigma}^{\Omega}(\mathcal{I})^{\mathrm{h}} \mathrm{M}_{\Sigma}^{\Omega}(\mathcal{I}))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{M}_{\Sigma}^{\Omega}(\mathcal{I})^{\mathrm{h}})_{ik} (\mathrm{M}_{\Sigma}^{\Omega}(\mathcal{I}))_{kj} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (\overline{\mathrm{M}_{\Sigma}^{\Omega}(\mathcal{I})})_{ki} (\mathrm{M}_{\Sigma}^{\Omega}(\mathcal{I}))_{kj} = \overline{\mathrm{X}_{\Sigma}(v_i)}^{\mathrm{t}} \cdot \mathrm{X}_{\Sigma}(v_j) = \sum_{k=1}^{n} \overline{\langle v_i, e_k \rangle} \langle v_j, e_k \rangle =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \langle v_j, e_k \rangle \langle e_k, v_i \rangle = \langle v_j, v_i \rangle = \overline{\langle v_i, v_j \rangle} = (\overline{G})_{ij}.$$

V zadnji vrstici je uporabljena Parsevalova enakost. (Opazi, da iz (b) sledi (a) neposredno.)

Opomba *Dokaži, da je* $\det G \in \mathbb{R}$.

▷▷▷ 322., 385., 388.

Rešitev 385. naloge

1. način reševanja. Ker je G obrnljiva – glej nalogo 384(a) – zadošča dokazati, da je

$$\overline{G}\, \mathrm{M}_{\Omega}^{\Omega}(\mathcal{A}^*) = \mathrm{M}_{\Omega}^{\Omega}(\mathcal{A})^{\mathrm{h}}\, \overline{G}. \tag{157}$$

V ta namen si oglej ij-ti koeficient leve strani v (157):

$$(\overline{G}\, \mathrm{M}_{\Omega}^{\Omega}(\mathcal{A}^*))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (\overline{G})_{ik} (\mathrm{M}_{\Omega}^{\Omega}(\mathcal{A}^*))_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \langle v_k, v_i \rangle (\mathrm{M}_{\Omega}^{\Omega}(\mathcal{A}^*))_{kj} =$$
$$= \langle \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{M}_{\Omega}^{\Omega}(\mathcal{A}^*))_{kj} v_k, v_i \rangle = \langle \mathcal{A}^* v_j, v_i \rangle = \langle v_j, \mathcal{A} v_i \rangle = \langle v_j, \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{M}_{\Omega}^{\Omega}(\mathcal{A}))_{ki} v_k \rangle =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \overline{\mathrm{M}_{\Omega}^{\Omega}(\mathcal{A}))_{ki}} \langle v_j, v_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{M}_{\Omega}^{\Omega}(\mathcal{A})^{\mathrm{h}})_{ik} (\overline{G})_{kj} = (\mathrm{M}_{\Omega}^{\Omega}(\mathcal{A})^{\mathrm{h}} \overline{G})_{ij}.$$

Sklepaj, da enakost (157) drži.

2. način reševanja. Če veš, da za vsako (urejeno) ortonormirano bazo Σ prostora V velja

$$\mathrm{M}_{\Sigma}^{\Sigma}(\mathcal{A}^*) = \mathrm{M}_{\Sigma}^{\Sigma}(\mathcal{A})^{\mathrm{h}},$$

potem lahko z uporabo naloge 384(b) sklepaš

$$\mathrm{M}_{\Omega}^{\Omega}(\mathcal{A}^*) = \mathrm{M}_{\Omega}^{\Sigma}(\mathcal{I}) \mathrm{M}_{\Sigma}^{\Sigma}(\mathcal{A}^*) \mathrm{M}_{\Sigma}^{\Omega}(\mathcal{I}) = \mathrm{M}_{\Omega}^{\Sigma}(\mathcal{I}) \mathrm{M}_{\Sigma}^{\Sigma}(\mathcal{A})^{\mathrm{h}} \mathrm{M}_{\Sigma}^{\Omega}(\mathcal{I}) =$$
$$= \mathrm{M}_{\Omega}^{\Sigma}(\mathcal{I}) (\mathrm{M}_{\Sigma}^{\Omega}(\mathcal{I}) \mathrm{M}_{\Omega}^{\Omega}(\mathcal{A}) \mathrm{M}_{\Omega}^{\Sigma}(\mathcal{I}))^{\mathrm{h}} \mathrm{M}_{\Sigma}^{\Omega}(\mathcal{I}) = \mathrm{M}_{\Omega}^{\Sigma}(\mathcal{I}) \mathrm{M}_{\Omega}^{\Sigma}(\mathcal{I})^{\mathrm{h}} \mathrm{M}_{\Omega}^{\Omega}(\mathcal{A})^{\mathrm{h}} \mathrm{M}_{\Sigma}^{\Omega}(\mathcal{I})^{\mathrm{h}} \mathrm{M}_{\Sigma}^{\Omega}(\mathcal{I}) =$$
$$= (\mathrm{M}_{\Sigma}^{\Omega}(\mathcal{I})^{\mathrm{h}} \mathrm{M}_{\Sigma}^{\Omega}(\mathcal{I}))^{-1} \mathrm{M}_{\Omega}^{\Omega}(\mathcal{A})^{\mathrm{h}} (\mathrm{M}_{\Sigma}^{\Omega}(\mathcal{I})^{\mathrm{h}} \mathrm{M}_{\Sigma}^{\Omega}(\mathcal{I})) = \overline{G}^{-1}\, \mathrm{M}_{\Omega}^{\Omega}(\mathcal{A})^{\mathrm{h}}\, \overline{G}.$$

Opomba *Če želiš uporabiti enakost (32) na konkretni nalogi, si oglej nalogo 386. Kako se poenostavi enakost (32), če je urejena baza Ω ortonormirana?*

⋙ 384., 386.

Rešitev 386. naloge

Po nalogi 385 velja

$$\mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{A}^*) = \overline{G}^{-1}(\mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{A}))^{\mathrm{h}}\overline{G},$$

kjer je G Gramova matrika baze Ω v običajnem produktu $\langle\cdot,\cdot\rangle$:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \overline{G}, \qquad G^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \overline{G}^{-1}.$$

V bazi Ω pripada preslikavi $\mathcal{A}$ matrika

$$\mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2i \\ i & -1 & 0 \\ 0 & i & 1+i \end{bmatrix}.$$

Torej je

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{A}^*) &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ 2 & -1 & -i \\ 2i & 0 & 1-i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3-3i & -4-5i & -5i \\ 2-2i & -3-2i & -3i \\ -2+3i & 4+3i & 1+4i \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

⋙ 385.

Rešitev 387. naloge

Zadošča preveriti, da za vsak $v \in V$ velja

$$\langle \mathcal{A}v, \mathcal{A}v \rangle = \langle v, v \rangle.$$

V ta namen vzemi poljuben $v \in V$. Zapiši $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ za neke $\alpha_i \in \mathbb{C}$ in izračunaj

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}v, \mathcal{A}v \rangle &= \langle \mathcal{A}(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i), \mathcal{A}(\sum_{j=1}^n \alpha_j e_j) \rangle = \langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{A} e_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathcal{A} e_j \rangle = \\ &= \langle \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \overline{\alpha_j} \langle f_i, f_j \rangle = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \end{aligned}$$

in

$$\langle v, v \rangle = \langle \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \overline{\alpha_j} \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2.$$

Sklepaj, da je $\mathcal{A}$ unitarna preslikava.

⋙ 184., 388., 394.

Rešitev 388. naloge

1. način reševanja. Naj bo P prehodna matrika z ortonormirane baze Ω na ortonormirano bazo Σ prostora V, torej $P := \mathrm{M}_\Sigma^\Omega(\mathcal{I})$. Po nalogi 384 je

$$P^{\mathrm{h}}P = \overline{G},$$

kjer je G Gramova matrika baze Ω. Ker je baza Ω ortonormirana, je $G = I$ in zatorej $P^{\mathrm{h}}P = I$, kar je bilo treba dokazati.

2. način reševanja. Naj bodo V, Ω, Π in $\mathcal{A}$ kot v nalogi 387. Označi s $P := \mathrm{M}_\Omega^\Pi(\mathcal{I})$ prehodno matriko z baze Π na bazo Ω. Ker je $\mathcal{A}$ unitarna preslikava, velja $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{I}$ in odtod

$$I = \mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{I}) = \mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{A}^*\mathcal{A}) = \mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{A}^*)\mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{A}) = (\mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{A}))^{\mathrm{h}}\mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{A}). \tag{158}$$

Zadnja enakost v (158) drži, saj je baza Ω ortonormirana. Prepričaj se, da je $\mathrm{M}_\Pi^\Omega(\mathcal{A}) = I$ in da zato velja

$$\mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{A}) = \mathrm{M}_\Omega^\Pi(\mathcal{I})\mathrm{M}_\Pi^\Omega(\mathcal{A}) = PI = P. \tag{159}$$

(Oglej si tudi nalogo 184.) Združi (158) in (159) tako, da dobiš

$$I = P^{\mathrm{h}}P.$$

Sklepaj, da je matrika P unitarna.

⋙ 184., 383., 384., 387.

Rešitev 389. naloge

1. način reševanja. Ker je $\mathcal{Q}$ ortogonalen endomorfizem, velja $\mathcal{Q}^* = \mathcal{Q}^{-1}$. Izpiši verigo ekvivalenc

$$\begin{gathered} \vec{r} \in \mathcal{Q}\Pi \iff \vec{n}_\Pi(\mathcal{Q}^{-1}\vec{r} - \vec{r}_P) = 0 \iff \vec{n}_\Pi(\mathcal{Q}^*\vec{r} - \vec{r}_P) = 0 \iff \\ \iff \vec{n}_\Pi \mathcal{Q}^*(\vec{r} - \mathcal{Q}\vec{r}_P) = 0 \iff \mathcal{Q}\vec{n}_\Pi(\vec{r} - \mathcal{Q}\vec{r}_P) = 0 \end{gathered}$$

in sklepaj, da je $\mathcal{Q}\Pi$ ravnina z enačbo $\mathcal{Q}\vec{n}_\Pi(\vec{r} - \mathcal{Q}\vec{r}_P) = 0$. Zato je vsak normalni vektor ravnine $\mathcal{Q}\Pi$ vzporeden z vektorjem $\mathcal{Q}\vec{n}_\Pi$. Upoštevaj lastnosti ortogonalnih endomorfizmov: $\|\mathcal{Q}\vec{r}\| = \|\vec{r}\|$ za poljuben $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ in $\mathcal{Q}^*\mathcal{Q} = \mathcal{I}$ ter zapiši oddaljenost ravnine $\mathcal{Q}\Pi$ od izhodišča

$$\begin{aligned} d(0, \mathcal{Q}\Pi) &= \tfrac{|\mathcal{Q}\vec{n}_\Pi(\vec{0} - \mathcal{Q}\vec{r}_P)|}{\|\mathcal{Q}\vec{n}_\Pi\|} = \tfrac{|\mathcal{Q}\vec{n}_\Pi \mathcal{Q}\vec{r}_P|}{\|\mathcal{Q}\vec{n}_\Pi\|} = \\ &= \tfrac{|\mathcal{Q}^*\mathcal{Q}\vec{n}_\Pi \vec{r}_P|}{\|\vec{n}_\Pi\|} = \tfrac{|\vec{n}_\Pi \vec{r}_P|}{\|\vec{n}_\Pi\|} = d(0, \Pi). \end{aligned}$$

2. način reševanja. Naj bo $\vec{r}_T$ krajevni vektor tiste točke na ravnini Π, ki je najbližja izhodišču. Premisli, da v primeru, ko je $\vec{r}_T \neq \vec{0}$, vektor $\vec{r}_T$ natanko določa ravnino Π: vektor $\vec{r}_T$ je hkrati normalni vektor ravnine Π in krajevni vektor točke T na ravnini Π, zato je Π: $\vec{r}_T(\vec{r} - \vec{r}_T) = 0$ enačba ravnine Π. Ker $\mathcal{Q}$ ohranja kote, sledi $\mathcal{Q}\vec{r}_T(\mathcal{Q}\vec{r} - \mathcal{Q}\vec{r}_T) = 0$, zato je $\mathcal{Q}\Pi$: $\mathcal{Q}\vec{r}_T(\vec{r} - \mathcal{Q}\vec{r}_T) = 0$. Na koncu še sklepaj, da je $d(\mathcal{Q}\Pi, 0) = \|\mathcal{Q}\vec{r}_T\| = \|\vec{r}_T\| = d(\Pi, 0)$.

Če je $\vec{r}_T = \vec{0}$, je $T = 0$, torej je ravnina Π natanko določena s svojim normalnim vektorjem $\vec{n}_\Pi$ ali z enačbo Π: $\vec{n}_\Pi\vec{r} = 0$. Podobno kot prej sklepaj, da odtod sledi $\mathcal{Q}\vec{n}_\Pi\mathcal{Q}\vec{r} = 0$. Zato je $\mathcal{Q}\Pi$: $\mathcal{Q}\vec{n}_\Pi\vec{r} = 0$ enačba slike ravnine Π. Ker gresta ravnini Π in $\mathcal{Q}\Pi$ skozi izhodišče, se tudi v tem primeru oddaljenost od izhodišča ohranja.

Opomba *Rezultat ti pove, da je enaka oddaljenost dveh ravnin v $\mathbb{R}^3$ od izhodišča potrebni pogoj za obstoj ortogonalnega endomorfizma, ki preslika prvo ravnino na drugo. Premisli, da je to tudi zadostni pogoj. Oglej si tudi nalogo 390.*

⋙ 92., 390., 391., 394.

Rešitev 390. naloge

Zadošča poiskati matriko, ki pripada endomorfizmu $\mathcal{Q}$ v običajni urejeni bazi Σ prostora $\mathbb{R}^3$. Oglej si 2. način reševanja naloge 389. Ker je $d(\Pi,0) = 1 = d(\Omega,0)$, je potrebni pogoj za obstoj ortogonalnega endomorfizma $\mathcal{Q}$ izpolnjen. Na vsaki od ravnin poišči točko, ki je najbljižja izhodišču: na ravnini Π je to $T_\Pi(1,0,0)$, na ravnini Ω pa točka $T_\Omega(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$. Ker je ravnina Π natanko določena s točko T_Π in podobno ravnina Ω s točko T_Ω, je dovolj poiskati ortogonalni endomorfizem, ki slika T_Π v T_Ω, se pravi, ki slika vektor $\vec{r}_{T_\Pi} = (1,0,0) = \vec{\imath}$ v vektor $\vec{n}_{T_\Omega} = (\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$. Da bi bil $\mathcal{Q}$ natanko določen, je dovolj določiti še sliki vektorjev $\vec{\jmath}$ in $\vec{k}$. Postavi $\mathcal{Q}\vec{\jmath} = \mathcal{Q}(0,1,0) = (a,b,c)$, kjer je $a^2+b^2+c^2 = 1$. Ker je $\mathcal{Q}$ ortogonalni endomorfizem, je $0 = \vec{\imath}\cdot\vec{\jmath} = \mathcal{Q}\vec{\imath}\cdot\mathcal{Q}\vec{\jmath} = (\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})(a,b,c) = (a+2b+2c)/3$. Ker je $0 = \vec{\imath}\cdot\vec{k} = \mathcal{Q}\vec{\imath}\cdot\mathcal{Q}\vec{k}$ in $0 = \vec{\jmath}\cdot\vec{k} = \mathcal{Q}\vec{\jmath}\cdot\mathcal{Q}\vec{k}$, lahko zapišeš

$$\mathcal{Q}\vec{k} = \pm\mathcal{Q}\vec{\imath}\times\mathcal{Q}\vec{\jmath} = \pm\frac{1}{3}(2c-2b, 2a-c, b-2a).$$

Zato končno zapiši

$$\mathrm{M}^{\Sigma}_{\Sigma}(\mathcal{Q}) = \begin{bmatrix} 1/3 & a & \pm(2c-2b)/3 \\ 2/3 & b & \pm(2a-c)/3 \\ 2/3 & c & \pm(b-2a)/3 \end{bmatrix}, \text{kjer velja } a+2b+2c = 0 \text{ in } a^2+b^2+c^2 = 1.$$

Če želiš izpisati konkretni $\mathcal{Q}$, vzemi naprimer $a := 0$, $b := \sqrt{2}/2$ in $c := -\sqrt{2}/2$. V tem primeru je $\mathrm{M}^{\Sigma}_{\Sigma}(\mathcal{Q}) = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -2\sqrt{2}/3 \\ 2/3 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/6 \\ 2/3 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/6 \end{bmatrix}$.

⊳⊳⊳ 364., 389., 391., 394.

Rešitev 391. naloge

Presek ravnin Ω in Π je premica p z enačbo $x = 0, y = 0$, torej je p enaka z-osi. Zato lahko zapišeš, kateri matriki pripadata zasukoma $\mathcal{R}_\pm$ za kot $\phi = \pm\pi/6$ okoli p v običajni urejeni bazi Σ prostora $\mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{M}^{\Sigma}_{\Sigma}(\mathcal{R}_\pm) = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & \mp 1/2 & 0 \\ \pm 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zdaj zadošča preslikati normalni vektor $\vec{n}_\Lambda = (1,-2,0)$ ravnine Λ z zasukoma $\mathcal{R}_\pm$. Dobiš ravnini

$$\Lambda_+\colon\ (\sqrt{3}/2+1)x + (1/2-\sqrt{3})y = 5, \quad \Lambda_-\colon\ (\sqrt{3}/2-1)x - (1/2+\sqrt{3})y = 5.$$

⊳⊳⊳ 389., 390., 392.

Rešitev 392. naloge

Premica p je določena s točko $P(1,0,0)$ in smernim vektorjem $\vec{p} = (0,1,1)$. Označi z $\mathcal{R}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zasuk za kot $\phi := \pi/2$ okoli vektorja $(1,1,1)$. Potem ima zasukana premica $p_1 := \mathcal{R}p$ enačbo

$$p_1\colon\ \vec{r} = \vec{r}_{P_1} + t\vec{p}_1, \quad t \in \mathbb{R},$$

kjer sta $\vec{r}_{P_1} = \mathcal{R}\vec{r}_P$ in $\vec{p}_1 = \mathcal{R}\vec{p}$.

V primerno izbrani ortonormirani in pozitivno orientirani urejeni bazi Ω zlahka zapišeš matriko zasuka $\mathcal{R}$: prvi vektor baze Ω bodi normirani vektor, okoli katerega sučeš, to je $\vec{a} := \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, za drugega izbereš poljuben enotski vektor, ki je pravokoten na $\vec{a}$, naprimer $\vec{b} := \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$, tretji je nato določen s prvima dvema s predpisom $\vec{c} := \vec{a}\times\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$. Urejena baza $\Omega := \{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ je potem pozitivno orientirana in velja (nariši tudi skico!)

$$\mathcal{R}\vec{a} = \vec{a},\ \mathcal{R}\vec{b} = \vec{c},\ \mathcal{R}\vec{c} = -\vec{b}.$$

Torej pripada zasuku $\mathcal{R}$ v urejeni bazi Ω matrika

$$R := \mathrm{M}^{\Omega}_{\Omega}(\mathcal{R}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(Pozitivna orientiranost baze Ω je potrebna v primeru, da želiš zapisati matriko

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

brez geometrijske predstave.)

V običajni urejeni bazi Σ pripada istemu zasuku matrika $\mathrm{M}^{\Sigma}_{\Sigma}(\mathcal{R}) = QRQ^t$, kjer je

$$Q := \mathrm{M}^{\Omega}_{\Sigma}(\mathcal{I}) = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

(Ne pozabi, da so stolpci matrike Q ortonormirani, zato je $Q^{-1} = Q^t$ – glej tudi nalogi 383 in 388.) Stolpca, ki v bazi Σ pripadata iskanima vektorjema $\vec{r}_{P_1}$ in $\vec{p}_1$, sta

$$\mathrm{X}_\Sigma(\vec{r}_{P_1}) = \mathrm{X}_\Sigma(\mathcal{R}\vec{r}_P) = \mathrm{M}^{\Sigma}_{\Sigma}(\mathcal{R})\mathrm{X}_\Sigma(\vec{r}_P) = QRQ^t[1,0,0]^t = QR(\frac{1}{\sqrt{6}}[\sqrt{2},\sqrt{3},1]^t) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{6}}Q[\sqrt{2},-1,\sqrt{3}]^t = \frac{1}{3}[1,1+\sqrt{3},1-\sqrt{3}]^t$$

in

$$\mathrm{X}_\Sigma(\vec{p}_1) = \mathrm{X}_\Sigma(\mathcal{R}\vec{p}) = \mathrm{M}^{\Sigma}_{\Sigma}(\mathcal{R})\mathrm{X}_\Sigma(\vec{p}) = QRQ^t[0,1,1]^t = \frac{1}{\sqrt{6}}QR([2\sqrt{2},-\sqrt{3},-1]^t) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{6}}Q[2\sqrt{2},1,-\sqrt{3}]^t = \frac{1}{3}[2,2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}]^t.$$

Torej je $\vec{r}_{P_1} = \frac{1}{3}(1,1+\sqrt{3},1-\sqrt{3})$ in $\vec{p}_1 = \frac{1}{3}(2,2-\sqrt{3},2+\sqrt{3})$.

⊳⊳⊳ 391.

Rešitev 393. naloge

Označi z $\mathcal{Z}$ podano zrcaljenje, s Σ običajno urejeno bazo prostora $\mathbb{R}^3$ in s $\vec{p} = (6,3,2)$ smerni vektor premice p.

1. način reševanja. Nariši sliko in sklepaj, da zrcaljenje $\mathcal{Z}$ deluje s predpisom

$$\mathcal{Z}\colon\ \vec{r} \mapsto -\vec{r} + 2\frac{\vec{p}\vec{r}}{|\vec{p}|^2}\vec{p}.$$

Oglej si, kam $\mathcal{Z}$ preslika vektorje iz baze Σ:

$$\begin{array}{rcl} (1,0,0) & \mapsto & \frac{1}{49}(23,36,24), \\ (0,1,0) & \mapsto & \frac{1}{49}(36,-31,12), \\ (0,0,1) & \mapsto & \frac{1}{49}(24,12,-41). \end{array}$$

Odtod dobiš

$$\mathrm{M}_\Sigma^\Sigma(\mathcal{Z}) = \frac{1}{49}\begin{bmatrix} 23 & 36 & 24 \\ 36 & -31 & 12 \\ 24 & 12 & -41 \end{bmatrix}.$$

2. način reševanja. Dopolni vektor $\vec{u} := \vec{p}/|\vec{p}|$ do urejene ortonormirane baze $\Omega := \{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ prostora $\mathbb{R}^3$, naprimer z vektorjema

$$\vec{v} := \tfrac{1}{\sqrt{5}}(1,-2,0), \quad \vec{w} := \vec{u}\times\vec{v} = \tfrac{1}{7\sqrt{5}}(4,2,-15).$$

V bazi Ω pripada zrcaljenju $\mathcal{Z}$ matrika

$$\mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{Z}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Napiši prehodno matriko $\mathrm{M}_\Sigma^\Omega(\mathcal{I})$ in pri računanju matrike

$$\mathrm{M}_\Sigma^\Sigma(\mathcal{Z}) = \mathrm{M}_\Sigma^\Omega(\mathcal{I})\mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{Z})\mathrm{M}_\Omega^\Sigma(\mathcal{I}) = \mathrm{M}_\Sigma^\Omega(\mathcal{I})\mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{Z})(\mathrm{M}_\Sigma^\Omega(\mathcal{I}))^{\mathrm{t}}$$

upoštevaj, da je prehodna matrika ortogonalna!

............▷▷▷ 395.

Rešitev 394. naloge

Možnih je več rešitev. V vsaki od nalog naj $\mathcal{Q}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ označuje iskani ortogonalni endomorfizem.

(a) Normiraj krajevna vektorja $\vec{r}_P$ in $\vec{r}_R$ ter označi

$$\vec{p}_1 := \frac{\vec{r}_P}{\|\vec{r}_P\|} = \frac{1}{\sqrt{17}}(2,2,3) \quad \text{in} \quad \vec{r}_1 := \frac{\vec{r}_R}{\|\vec{r}_R\|} = \frac{1}{\sqrt{17}}(4,1,0).$$

Vektor $\vec{p}_1$ dopolni do urejene ortonormirane baze Ψ prostora $\mathbb{R}^3$, naprimer z vektorjema

$$\vec{p}_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) \quad \text{in} \quad \vec{p}_3 := \vec{p}_1\times\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{34}}(3,3,-4).$$

Prav tako dopolni vektor $\vec{r}_1$ do urejene ortonormirane baze Ω prostora $\mathbb{R}^3$, naprimer z vektorjema

$$\vec{r}_2 := \frac{1}{\sqrt{17}}(-1,4,0) \quad \text{in} \quad \vec{r}_3 := \vec{r}_1\times\vec{r}_2 = (0,0,1).$$

Linearna preslikava $\mathcal{Q}$, ki slika po predpisih

$$\mathcal{Q}\colon\ \vec{p}_1 \mapsto \vec{r}_1, \quad \mathcal{Q}\colon\ \vec{p}_2 \mapsto \vec{r}_2, \quad \mathcal{Q}\colon\ \vec{p}_3 \mapsto \vec{r}_3,$$

je ortogonalna, saj preslika ortonormirano bazo Ψ v ortonormirano bazo Φ – glej nalogo 387. Povrhu velja

$$\mathcal{Q}\vec{r}_P = \mathcal{Q}(\|\vec{r}_P\|\vec{p}_1) = \|\vec{r}_P\|\mathcal{Q}\vec{p}_1 = \|\vec{r}_P\|\vec{r}_1 = \|\vec{r}_R\|\vec{r}_1 = \vec{r}_R.$$

Zato ortogonalni endomorfizem $\mathcal{Q}$ slika točko P v R. Poišči še matriko, ki pripada endomorfizmu $\mathcal{Q}$ v običajni urejeni bazi Σ prostora $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{M}_\Sigma^\Sigma(\mathcal{Q}) & = & \mathrm{M}_\Sigma^\Omega(\mathcal{I})\,\mathrm{M}_\Omega^\Psi(\mathcal{Q})\,\mathrm{M}_\Psi^\Sigma(\mathcal{I}) \\ & = & \mathrm{M}_\Sigma^\Omega(\mathcal{I})\,\mathrm{M}_\Omega^\Psi(\mathcal{Q})\,(\mathrm{M}_\Sigma^\Psi(\mathcal{I}))^{-1} \\ & = & \mathrm{M}_\Sigma^\Omega(\mathcal{I})\,I\,(\mathrm{M}_\Sigma^\Psi(\mathcal{I}))^{\mathrm{t}} \\ & = & \begin{bmatrix} 4/\sqrt{17} & -1/\sqrt{17} & 0 \\ 1/\sqrt{17} & 4/\sqrt{17} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{17} & 2/\sqrt{17} & 3/\sqrt{17} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 3/\sqrt{34} & 3/\sqrt{34} & -4/\sqrt{34} \end{bmatrix} \\ & = & \begin{bmatrix} (16-\sqrt{34})/34 & (16+\sqrt{34})/34 & 12/17 \\ (4+4\sqrt{34})/34 & (4-4\sqrt{34})/34 & 3/17 \\ 3/\sqrt{34} & 3/\sqrt{34} & -4/\sqrt{34} \end{bmatrix}. \end{array}$$

(b) Premica v $\mathbb{R}^3$ je natanko določena s smernim vektorjem in točko, ki leži na njej. Ker je endomorfizem, ki slika ortonormirano bazo v ortonormirano bazo, ortogonalen – glej nalogo 387 – je smiselno poiskati taki ortonormirani bazi Ψ in Ω v $\mathbb{R}^3$, da velja $\mathcal{Q}\Psi = \Omega$. Zato poišči enotski smerni vektor $\vec{p}$ premice p in postavi

$$\vec{p}_1 := \vec{p} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1).$$

Poišči še točko $P(1,1,1)$ na premici p, ki je najbližja izhodišču, ter definiraj

$$\vec{p}_2 := \frac{\vec{r}_P}{\|\vec{r}_P\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1).$$

(Točka P ima lastnost, da je daljica OP pravokotna na premico p, zato sta vektorja $\vec{p}_1$ in $\vec{p}_2$ pravokotna.) Potem je $\Psi := \{\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3\}$, kjer je $\vec{p}_3 := \vec{p}_1\times\vec{p}_2$, ortonormirana baza prostora $\mathbb{R}^3$. Podobno ravnaj pri premici r. Najprej poišči njen enotski smerni vektor $\vec{r}$ in postavi

$$\vec{r}_1 := \vec{r} = (0,0,1).$$

Nato izračunaj točko $R(\sqrt{3},0,0)$ na premici r, ki je najbližja izhodišču, ter definiraj

$$\vec{r}_2 := \frac{\vec{r}_R}{\|\vec{r}_R\|} = (1,0,0) \quad \text{in} \quad \vec{r}_3 := \vec{r}_1\times\vec{r}_2.$$

Potem je $\Omega := \{\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3\}$ ortonormirana baza prostora $\mathbb{R}^3$. Linearna preslikava $\mathcal{Q}$, ki slika po predpisih

$$\mathcal{Q}\colon\ \vec{p}_1 \mapsto \vec{r}_1, \quad \mathcal{Q}\colon\ \vec{p}_2 \mapsto \vec{r}_2, \quad \mathcal{Q}\colon\ \vec{p}_3 \mapsto \vec{r}_3$$

je ortogonalna, saj preslika ortonormirano bazo Ψ v ortonormirano bazo Ω. Povrhu, ker velja

$$\mathcal{Q}\vec{p} = \mathcal{Q}\vec{p}_1 = \vec{r}_1 = \vec{r}$$

in

$$\mathcal{Q}\vec{r}_P = \mathcal{Q}(\|\vec{r}_P\|\vec{p}_2) = \|\vec{r}_P\|\mathcal{Q}\vec{p}_2 = \|\vec{r}_P\|\vec{r}_2 = \|\vec{r}_R\|\vec{r}_2 = \vec{r}_R,$$

ortogonalni endomorfizem $\mathcal{Q}$ preslika premico p v premico r. Zapiši še matriko, ki pripada endomorfizmu $\mathcal{Q}$ v običajni urejeni bazi Σ prostora $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_\Sigma^\Sigma(\mathcal{Q}) &= \mathrm{M}_\Sigma^\Omega(\mathcal{I})\,\mathrm{M}_\Omega^\Psi(\mathcal{Q})\,\mathrm{M}_\Psi^\Sigma(\mathcal{I}) \\ &= \mathrm{M}_\Sigma^\Omega(\mathcal{I})\,\mathrm{M}_\Omega^\Psi(\mathcal{Q})\,(\mathrm{M}_\Sigma^\Psi(\mathcal{I}))^{-1} \\ &= \mathrm{M}_\Sigma^\Omega(\mathcal{I})\,I\,(\mathrm{M}_\Sigma^\Psi(\mathcal{I}))^{\mathrm{t}} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(c) Ravnino v $\mathbb{R}^3$ natanko določata točka in normalni vektor. Naj bo T_Π točka na ravnini Π, ki je najbližja izhodišču. Potem je ravnina Π natanko določena s točko T_Π, saj je daljica OT_Π pravokotna na ravnino. Podobno velja za ustrezno točko T_Φ. Ker so poleg tega ortogonalni endomorfizmi natanko izometrije prostora, mora $\mathcal{Q}$ preslikati T_Π v T_Φ. Ker ortogonalni endomorfizmi ohranjajo kote, velja: če je $\mathcal{Q}$ ortogonalni operator, ki slika točko T_Π v T_Φ, potem $\mathcal{Q}$ slika ravnino Π na ravnino Φ (glej nalogi 389 in 390).

Izračunaj $\overrightarrow{OT_\Pi} = (1/3, -2/3, 2/3)$ in $\overrightarrow{OT_\Phi} = (3/5, -4/5, 0)$. K vektorju $\vec{p}_1 := \overrightarrow{OT_\Pi}$ poišči enotski vektor, ki je nanj pravokoten, naprimer vektor $\vec{p}_2 := (0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$. Poišči še enotski vektor $\vec{p}_3$, ki je pravokoten na vektorja $\vec{p}_1$ in $\vec{p}_2$, to je

$$\vec{p}_3 := \vec{p}_1 \times \vec{p}_2 = \frac{\sqrt{2}}{6}(-4, -1, 1).$$

Tako pridelaš ortonormirano bazo $\Psi := \{\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3\}$ prostora $\mathbb{R}^3$. Podobno dobiš še ortonormirano bazo $\Omega := \{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3\}$ prostora $\mathbb{R}^3$, kjer so $\vec{r}_1 := \overrightarrow{OT_\Phi}$, $\vec{r}_2 := (4/5, 3/5, 0)$, $\vec{r}_3 := (0, 0, 1)$. Preslikava $\mathcal{Q}$, ki preslika

$$\mathcal{Q}\colon \vec{p}_1 \mapsto \vec{r}_1, \quad \mathcal{Q}\colon \vec{p}_2 \mapsto \vec{r}_2, \quad \mathcal{Q}\colon \vec{p}_3 \mapsto \vec{r}_3$$

je ortogonalna, saj preslika ortonormirano bazo Ψ v ortonormirano bazo Ω. Zapiši še matriko, ki pripada endomorfizmu $\mathcal{Q}$ v običajni urejeni bazi Σ prostora $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_\Sigma^\Sigma(\mathcal{Q}) &= \mathrm{M}_\Sigma^\Omega(\mathcal{I})\,\mathrm{M}_\Omega^\Psi(\mathcal{Q})\,\mathrm{M}_\Psi^\Sigma(\mathcal{I}) \\ &= \mathrm{M}_\Sigma^\Omega(\mathcal{I})\,\mathrm{M}_\Omega^\Psi(\mathcal{Q})\,(\mathrm{M}_\Sigma^\Psi(\mathcal{I}))^{-1} \\ &= \mathrm{M}_\Sigma^\Omega(\mathcal{I})\,I\,(\mathrm{M}_\Sigma^\Psi(\mathcal{I}))^{\mathrm{t}} \\ &= \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 & 0 \\ -4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -2\sqrt{2}/3 & -\sqrt{2}/6 & \sqrt{2}/6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/5 & (-2+2\sqrt{2})/5 & (2+2\sqrt{2})/5 \\ -4/15 & (16+9\sqrt{2})/30 & (-16+9\sqrt{2})/30 \\ -2\sqrt{2}/3 & -\sqrt{2}/6 & \sqrt{2}/6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Opomba *Razmisli, da ima vsak problem pri gornjih podatkih v točkah (a), (b) in (c) več rešitev. Ali znaš prešteti vse rešitve problema v točki (b)? Pri kakšnih podatkih so take naloge rešljive?*

⋙ 387., 389., 390.

Rešitev 395. naloge

Označi z $\mathcal{Z} := \mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{Z})$ iskano matriko. Za vsak $v \in V$ velja (33), torej

$$\mathrm{X}_\Omega(\mathcal{Z}v) = \mathrm{X}_\Omega(v - 2\langle v, a\rangle a)$$

oziroma

$$\mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{Z})\mathrm{X}_\Omega(v) = \mathrm{X}_\Omega(v) - 2\langle v, a\rangle \mathrm{X}_\Omega(a). \tag{160}$$

Označi $x := \mathrm{X}_\Omega(v)$. Ker je Ω ortonormirana baza prostora V, velja

$$\langle v, a\rangle = \mathrm{X}_\Omega(v)^{\mathrm{t}}\mathrm{X}_\Omega(a) = x^{\mathrm{t}}s.$$

Iz (160) torej sledi

$$Zx = x - 2(x^{\mathrm{t}}s)s.$$

Ne pozabi, da je $x^{\mathrm{t}}s = s^{\mathrm{t}}x$, in nadaljuj

$$Zx = x - 2(s^{\mathrm{t}}x)s = x - 2s(s^{\mathrm{t}}x) = x - 2(ss^{\mathrm{t}})x = (I - 2ss^{\mathrm{t}})x. \tag{161}$$

Sklepaj, da je

$$Z = I - 2ss^{\mathrm{t}}.$$

Opomba *Podaj geometrijsko tolmačenje preslikave $-\mathcal{Z}$ in ga uporabi v nalogi 393.*

⋙ 278., 393.

Rešitev 396. naloge

Matrike v enačbah označi tako, da bo $X^{\mathrm{t}}X = A$ in $Y^{\mathrm{t}}Y = B$.

Najprej predpostavi, da iskana matrika X obstaja. Napravi polarni razcep matrike X, torej poišči tako nenegativno simetrično matriko S in tako ortogonalno matriko U, da bo veljalo $X = US$. Potem je

$$A = X^{\mathrm{t}}X = (US)^{\mathrm{t}}(US) = (SU^{\mathrm{t}})(US) = S(U^{\mathrm{t}}U)S = S^2.$$

Torej dobiš enačbo $A = S^2$. Z namenom izračunati (pozitivni) koren matrike A, poišči najprej njene lastne vrednosti $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 21$ in pripadajoče lastne vektorje $v_1 := [2, 4, 1]^{\mathrm{t}}$, $v_2 := [2, -1, 0]^{\mathrm{t}}$, $v_3 := [1, 2, -10]^{\mathrm{t}}$. Potem za $P := [v_1, v_2, v_3]$ velja

$$S = \sqrt{A} = P\sqrt{\mathrm{diag}(0, 1, 21)}P^{-1} = P\mathrm{diag}(0, 1, \sqrt{21})P^{-1},$$

ker je S nenegativna simetrična matrika.

Zdaj preveri, da reši prvo enačbo vsak X oblike

$$X = UP\mathrm{diag}(0, 1, \sqrt{21})P^{-1},$$

kjer je U poljubna ortogonalna realna matrika velikosti 3×3.
Druga enačba ni rešljiva, ker matrika B ni simetrična.

⊳⊳⊳ 377.

Rešitev 397. naloge

Poglej diagonalne koeficiente v produktu AA^h. Očitno je i-ti diagonalni koeficient enak

$$(AA^h)_{(ii)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\overline{a}_{ik} = \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2 = 0.$$

Zato je vrstica $A_{(i)}$ ničelna za vsak $i = 1, \ldots, n$, torej je $A = 0$.
Da pokažeš še drugo trditev, vzemi

$$A := \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix} \neq 0,$$

pa dobiš $AA^t = 0$.
Če je A realna matrika, iz $AA^t = 0$ sledi $A = 0$ po prvem razmisleku, saj je $A^h = A^t$.

Rešitev 398. naloge

Označi podano matriko z A in omenjeni normalni operator z $\mathcal{A}$, torej $A = M_\Sigma^\Sigma(\mathcal{A})$. Iz teorije veš, da so lastni vektorji normalnega operatorja, ki pripadajo različnim lastnim vrednostim, paroma ortogonalni. Lastne vrednosti in pripadajoči lastni vektorji matrike A so

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = i, \qquad \lambda_3 = 2i$$

in

$$v_1 = [0, 1, -1]^t, \qquad v_2 = [1, -1, 1]^t, \qquad v_3 = [1, 1, 0]^t.$$

Ker so lastne vrednosti matrike A paroma različne, lahko upoštevaš navedeni izrek, pa je ena od možnih ortogonalnih baz prostora $\mathbb{C}^3$ množica

$$\{(0, 1, -1), (1, -1, 1), (1, 1, 0)\}.$$

⊳⊳⊳ 402.

Rešitev 399. naloge

1. način. Po predpostavki obstaja taka ortonormirana baza $\Omega = \{v_1, \ldots, v_n\}$ unitarnega prostora V in taki kompleksni skalarji $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, da za vsak vektor $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ (koeficiente $\alpha_k \in \mathbb{C}$ razvoja vektorja v po ortonormirani bazi Ω lahko izraziš tudi kot $\alpha_k = \langle v, v_k \rangle$) velja

$$\mathcal{T}v = \lambda_1 \alpha_1 v_1 + \cdots + \lambda_n \alpha_n v_n.$$

Ker je $\mathcal{T}$ normalen, imata $\mathcal{T}$ in $\mathcal{T}^*$ iste lastne vektorje pri konjugiranih lastnih vrednostih. Izračunaj po eni strani

$$\begin{aligned}
(\mathcal{T}^*\mathcal{T})v &= \mathcal{T}^*(\mathcal{T}v) \\
&= \mathcal{T}^*(\lambda_1\alpha_1 v_1 + \cdots + \lambda_n\alpha_n v_n) \\
&= \lambda_1\alpha_1 \mathcal{T}^* v_1 + \cdots + \lambda_n\alpha_n \mathcal{T}^* v_n \\
&= \lambda_1\alpha_1\overline{\lambda_1} v_1 + \cdots + \lambda_n\alpha_n\overline{\lambda_n} v_n \\
&= |\lambda_1|^2\alpha_1 v_1 + \cdots + |\lambda_n|^2\alpha_n v_n,
\end{aligned}$$

in po drugi

$$\begin{aligned}
(\mathcal{T}\mathcal{T}^*)v &= \mathcal{T}(\mathcal{T}^*v) \\
&= \mathcal{T}(\overline{\lambda_1}\alpha_1 v_1 + \cdots + \overline{\lambda_n}\alpha_n v_n) \\
&= \overline{\lambda_1}\alpha_1 \mathcal{T} v_1 + \cdots + \overline{\lambda_n}\alpha_n \mathcal{T} v_n \\
&= \overline{\lambda_1}\alpha_1\lambda_1 v_1 + \cdots + \overline{\lambda_n}\alpha_n\lambda_n v_n \\
&= |\lambda_1|^2\alpha_1 v_1 + \cdots + |\lambda_n|^2\alpha_n v_n.
\end{aligned}$$

Sklepaj $\mathcal{T}^*\mathcal{T} = \mathcal{T}\mathcal{T}^*$, torej je $\mathcal{T}$ normalni endomorfizem.
2. način. Trditev lahko dokažeš tudi s pomočjo matrik. Kot zgoraj obstaja ortonormirana baza Ω, ki diagonalizira operator $\mathcal{T}$, torej mu v tej bazi pripada matrika

$$M_\Omega^\Omega(\mathcal{T}) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

za neke $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. (Kompleksni skalarji $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ so ravno lastne vrednosti operatorja $\mathcal{T}$.) Ker je Ω ortonormirana, velja

$$M_\Omega^\Omega(\mathcal{T}^*) = (M_\Omega^\Omega(\mathcal{T}))^h = \operatorname{diag}(\overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_n}).$$

Ker poljubni diagonalni matriki komutirata, velja $\mathcal{T}\mathcal{T}^* = \mathcal{T}^*\mathcal{T}$, zato je $\mathcal{T}$ normalen endomorfizem.

Opomba *Spomni se izreka iz teorije, ki govori v obratno, pomembnejšo smer: če je $\mathcal{T}$ normalen endomorfizem unitarnega prostora, se $\mathcal{T}$ da diagonalizirati.*

Rešitev 400. naloge

1. način reševanja. Predpostavi, da je $\mathcal{A}$ iskani normalni endomorfizem prostora $\mathbb{C}^2$. Iz podatkov naloge preberi $\mathcal{A}(1, i) = (-i, 1) = (-i)(1, i)$ in $\mathcal{A}(1+i, 1) = (2i, 1+i) = (1+i)(1+i, 1)$. Zato je $u := (1, i)$ lastni vektor pri lastni vrednosti $\lambda := -i$ in $v := (1+i, 1)$ lastni vektor pri lastni vrednosti $\mu := 1+i$. Ker pripadata lastna vektorja u in v različnima lastnima vrednostma in je $\mathcal{A}$ normalen, sta u in v pravokotna. Toda

$$\langle u, v \rangle = \langle (1, i), (1+i, 1) \rangle = 1\overline{(1+i)} + 2i\overline{1} = 1 + i.$$

Protislovje.
2. način reševanja. Označi $u := (1, i)$, $v := (1+i, 1)$. Ker je $\Omega := \{u, v\}$ baza prostora $\mathbb{C}^2$, je endomorfizem $\mathcal{A}$ prostora $\mathbb{C}^2$ natanko določen s podanim predpisom. Izpiši matriko

$$M_\Sigma^\Omega(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} -i & 2i \\ 1 & 1+i \end{bmatrix},$$

kjer je Σ običajna urejena baza prostora $\mathbb{C}^2$. Preveri, da je $\Sigma' := \{(1, 0), (0, 1/\sqrt{2}\}$ ortonormirana (urejena) baza za $\mathbb{C}^2$. Definiraj matriko

$$A := M_{\Sigma'}^{\Sigma'}(\mathcal{A}) = M_{\Sigma'}^{\Sigma}(\mathcal{I}) M_\Sigma^\Omega(\mathcal{A}) M_\Omega^\Sigma(\mathcal{I}) M_\Sigma^{\Sigma'}(\mathcal{I}) = \begin{bmatrix} 1 & (-1+i)/\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

in se prepričaj, da je $AA^h \neq A^h A$. Torej $\mathcal{A}$ ni normalen operator.

Rešitev 401. naloge

Označi vektorje $v, v', u, u' \in \mathbb{C}^3$ tako, da bo v (34) veljalo $\mathcal{A}v = v'$ in $\mathcal{A}u = u'$. Opazi, da velja $(-1, i, i) = i(i, 1, 1)$. Zato je $v = (i, 1, 1)$ lastni vektor endomorfizma $\mathcal{A}$ pri lastni vrednosti $\lambda := i$. Ker je $\mathcal{A}$ normalen endomorfizem, so lastni podprostori, ki pripadajo paroma različnim lastnim vrednostim, ortogonalni. Posebej, podprostor $(\mathcal{L}\{v\})^\perp$ je invarianten za $\mathcal{A}$. Če izbereš tako ortonormirano bazo $\Omega := \{v_1, v_2, v_3\}$, da je $v_1 := v/\|v\|$, potem zlahka zapišeš matriko

$$\mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}.$$

Povrhu, če je $v_2 \in \mathcal{L}\{v, u\}$, izračunaš drugi stolpec iz predpisov (34). Torej, poišči najprej vektor

$$w := u - \mathrm{proj}_v u = u - \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v = u - v = (0, 1, -1)$$

in definiraj $v_2 := w/\|w\|$. Množico $\{v_1, v_2\}$ dopolni z vektorjem $v_3 := (-2i, 1, 1)/\sqrt{6}$ do ortonormirane baze Ω prostora $\mathbb{C}^3$. Izračunaj

$$\mathcal{A}w = \mathcal{A}(u - v) = \mathcal{A}u - \mathcal{A}v = u' - v' = (2i, 0, -2).$$

Poišči stolpec, ki pripada vektorju $\mathcal{A}w$ v bazi Ω: $\mathrm{X}_\Omega(\mathcal{A}w) = [0, \sqrt{2}, -\sqrt{6}]^t$, zato je $\mathrm{X}_\Omega(\mathcal{A})(v_2) = [0, 1, -\sqrt{3}]^t$. V bazi Ω pripada endomorfizmu $\mathcal{A}$ matrika

$$\mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & -\sqrt{3} & b \end{bmatrix} \quad \text{za neka } a, b \in \mathbb{C}. \tag{162}$$

Ker je baza Ω ortonormirana, je $\mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{A}^*) = (\mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{A}))^{\mathrm{h}}$, zato je za normalnost endomorfizma $\mathcal{A}$ dovolj preveriti normalnost matrike $\mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{A})$. Konstanti $a, b \in \mathbb{C}$ torej določi tako, da bo matrika $\mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{A})$ normalna. Naprimer, $a := -\sqrt{3}$ in $b := 0$. (Da je v tem primeru matrika $\mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{A})$ normalna, vidiš brez računa, saj je bločno diagonalna s poševno hermitskim in hermitskim blokom.) Potem je endomorfizem $\mathcal{A}$ normalen in mu v običajni urejeni bazi prostora $\mathbb{C}^3$ pripada matrika

$$\mathrm{M}_\Sigma^\Sigma(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} i/3 & (-1+3i)/3 & (-1-3i)/3 \\ (1-3i)/3 & (-3+2i)/6 & (-3+2i)/6 \\ (1+3i)/3 & (-3+2i)/6 & (9+2i)/6 \end{bmatrix}.$$

Opomba *Gornja rešitev ti pove še več: pari $a, b \in \mathbb{C}$, pri katerih je matrika v (162) normalna, določajo natanko vse iskane normalne endomorfizme $\mathcal{A}$.*

⊳⊳⊳ 363.

Rešitev 402. naloge

Najprej napiši matriko, ki pripada preslikavi $\mathcal{A}$ v običajni urejeni bazi Σ prostora $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$\mathrm{M}_\Sigma^\Sigma(\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dobiš lastni vrednosti $\lambda_1 := 2$ in $\lambda_2 := 0$ z algebrskima kratnostma $k_1 = 3$ in $k_2 = 1$ in lastnima podprostoroma

$$\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - 2\mathcal{I}) = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\},$$

$$\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right\}.$$

Vsak enorazsežen invariantni podprostor operatorja $\mathcal{A}$ je torej bodisi poljuben enorazsežen podprostor v $\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - 2\mathcal{I})$ bodisi je enak $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$.

Ker se $\mathcal{A}$ da diagonalizirati, lahko vpeljeŝ tak skalarni produkt v $\mathbb{R}^{2\times 2}$, da bo $\mathcal{A}$ normalen operator. (Velja splošnejši izrek: če vektorski prostor V nad $\mathbb{R}$ premore bazo, sestavljeno iz lastnih vektorjev operatorja $\mathcal{A}\colon V \to V$, potem obstaja tak skalarni produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ na V, da je $\mathcal{A}$ normalen operator. To vidiš takole. Izberi poljubno urejeno bazo $\Omega = \{f_1, \dots, f_n\}$ prostora V, sestavljeno iz lastnih vektorjev operatorja $\mathcal{A}$. Skalarni produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon V \times V \to \mathbb{R}$ definiraj takole:

$$\langle \sum_{i=1}^n a_i f_i, \sum_{j=1}^n b_j f_j \rangle := \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

Potem je Ω ortonormirana baza in zato velja $\mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{A}^*) = \mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{A})^t$. Ker je matrika $\mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{A})$ diagonalna, velja

$$\mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{A}\mathcal{A}^*) = \mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{A})\mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{A})^t = \mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{A})^t\mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{A}) = \mathrm{M}_\Omega^\Omega(\mathcal{A}^*\mathcal{A}),$$

torej $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}$ je normalen operator.)

Opomba *Pomni razmislek iz drugega dela naloge, saj ima splošen pomen.*

Jordanova teorija

Rešitev 403. naloge

(a) Naj za neke skalarje $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1} \in \mathbb{F}$ velja

$$\alpha_0 v + \alpha_1 \mathcal{A} v + \cdots + \alpha_{r-1} \mathcal{A}^{r-1} v = 0.$$

Pomnoži gornjo enačbo z $\mathcal{A}^{r-1}$, upoštevaj linearnost preslikave $\mathcal{A}^{r-1}$ in enakost $\mathcal{A}^r v = 0$, pa dobiš $\alpha_0 \mathcal{A}^{r-1} v = 0$. Iz $\mathcal{A}^{r-1} v \neq 0$ zdaj sledi $\alpha_0 = 0$. Nadaljuj na podoben način z nižjimi potencami in sklepaj $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{r-1} = 0$. Torej so vektorji $v, \mathcal{A}v, \ldots, \mathcal{A}^{r-1}v$ linearno neodvisni.

(b) Ker so po gornjem vektorji $v, \mathcal{A}v, \ldots, \mathcal{A}^{r-1}v$ linearno neodvisni v n-razsežnem prostoru, je $r \leq n$.

▷▷▷ 166., 208., 404., 408.

Rešitev 404. naloge

Ker je $\mathcal{A}$ nilpotent reda n, velja $\mathcal{A}^n = 0$ in obstaja tak $v \in V$, da je $\mathcal{A}^{n-1} v \neq 0$. Po nalogi 403 so vektorji $v, \mathcal{A}v, \ldots, \mathcal{A}^{n-1}v$ linearno neodvisni. Ker jih je n, tvorijo bazo n-razsežnega prostora V.

(a) Definiraj urejeno bazo $\Omega := \{\mathcal{A}^{n-1}v, \ldots, \mathcal{A}v, v\}$. Potem je $\mathrm{M}^{\Omega}_{\Omega}(\mathcal{A}) = J$.

(b) V urejeni bazi $\Pi := \{v, \mathcal{A}v, \ldots, \mathcal{A}^{n-1}v\}$ velja $\mathrm{M}^{\Pi}_{\Pi}(\mathcal{A}) = J^t$.

(c) Iz gornjega sledi, da matriki J in J^t pripadata istemu endomorfizmu v različnih urejenih bazah. Torej sta si matriki J in J^t podobni.

Opomba *Matrika J ima v Jordanovi teoriji posebno vlogo. Imenujemo jo jordanska celica (ali kletka) in je osnovni gradnik jordanskih matrik.*

▷▷▷ 166., 208., 403., 405.

Rešitev 405. naloge

Preveri, da je

$$d_{1j} = \begin{cases} j, & 1 \leq j < n, \\ n, & j \geq n. \end{cases}$$

Opomba *Opazi vzorec spreminjanja koeficientov v potencah J^j, $j = 1, \ldots, n$.*

▷▷▷ 404., 415.

Rešitev 406. naloge

Ker je $\mathcal{A}$ nilpotent reda $r > 1$, velja

$$0 < \operatorname{Ker} \mathcal{A} < \operatorname{Ker} \mathcal{A}^2 < \cdots < \operatorname{Ker} \mathcal{A}^r = V.$$

Definiraj $d_{1i} := \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}^i$ (opazi, da je $d_{1r} = n$) in zapiši urejeno bazo

$$\Omega = \{v_1, \ldots, v_{d_{11}}, v_{d_{11}+1}, \ldots, v_{d_{12}}, \ldots, v_{d_{1,r-1}+1}, \ldots, v_{d_{1r}}\}$$

po gornjem navodilu. Za vsak $i \geq 1$ velja: če je $v \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}^i$, potem je $\mathcal{A}v \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}^{i-1}$. Zato ima matrika $\mathrm{M}^{\Omega}_{\Omega}(\mathcal{A})$ bločno strogo zgornje trikotno obliko, pri čemer imajo diagonalni ničelni bloki velikosti

$$d_{11} \times d_{11}, (d_{12} - d_{11}) \times (d_{12} - d_{11}), \ldots, (d_{1r} - d_{1,r-1}) \times (d_{1r} - d_{1,r-1}) :$$

$$\mathrm{M}^{\Omega}_{\Omega}(\mathcal{A}) = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & * & * & \cdots & * \\ \hline 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & * \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right].$$

Opomba *Gornja naloga opisuje preprost način določanja urejene baze, v kateri pripada danemu nilpotentu strogo zgornje trikotna matrika. Pridobivanje jordanske baze nilpotenta (to je take urejene baze, v kateri pripada nilpotentu jordanska matrika) je nekoliko težje – glej nalogo 432.*

▷▷▷ 199., 299.

Rešitev 407. naloge

Preveri, da so jedra potenc operatorja $\mathcal{A}$ gnezdena takole:

$$0 \leq \operatorname{Ker} \mathcal{A} \leq \operatorname{Ker} \mathcal{A}^2 \leq \cdots.$$

Torej sta obe strani neenakosti (35) nenegativni. Če je njena desna stran enaka 0, potem neenakost (35) drži. Zato smeš privzeti, da je število

$$t := \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}^{k+1} - \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}^k$$

pozitivno. To pomeni, da je

$$\operatorname{Ker} \mathcal{A}^{k+1} = \operatorname{Ker} \mathcal{A}^k \oplus \mathcal{L}\{v_1, \ldots, v_t\} \tag{163}$$

za neke linearno neodvisne vektorje $v_1, \ldots, v_t \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}^{k+1}$. Prepričaj se, da so vektorji $\mathcal{A}v_1, \ldots, \mathcal{A}v_t$ linearno neodvisni: Če za neke skalarje $\alpha_1, \ldots \alpha_t$ velja

$$\alpha_1 \mathcal{A} v_1 + \cdots + \alpha_t \mathcal{A} v_t = 0,$$

potem je tudi

$$\mathcal{A}(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_t v_t) = 0.$$

Torej je vektor $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_t v_t$ v preseku $\operatorname{Ker} \mathcal{A} \cap \mathcal{L}\{v_1, \ldots, v_t\}$. Iz enakosti (163) sklepaj, da je $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_t v_t = 0$, odtod pa $\alpha_1 = \cdots = \alpha_t = 0$. Torej so vektorji $\mathcal{A}v_1, \ldots, \mathcal{A}v_t$ linearno neodvisni. Podobno preveri tudi, da je $\mathcal{L}\{\mathcal{A}v_1, \ldots, \mathcal{A}v_t\}$ podprostor v $\operatorname{Ker} \mathcal{A}^k$, ki ima trivialen presek s podprostorom $\operatorname{Ker} \mathcal{A}^{k-1}$. Torej je

$$\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}^k - \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}^{k-1} \geq t,$$

kar je bilo potrebno dokazati.

Opomba *Posledica: če je* $\operatorname{Ker} \mathcal{A}^k = \operatorname{Ker} \mathcal{A}^{k+1}$, *potem je*

$$\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}^k = \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}^{k+1} = \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}^{k+2} = \cdots.$$

⊳⊳⊳ 117., 409.

Rešitev 408. naloge

Vektor $v \in V$ je korenski vektor endomorfizma $\mathcal{A} \in \operatorname{End} V$ pri lastni vrednosti λ, če obstaja tak $k \in \mathbb{N}$, da je

$$(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^k v = 0.$$

Smeš privzeti, da $v \neq 0$. Torej obstaja tak $r \in \mathbb{N}$, da je $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^r v = 0$ in $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{r-1} v \neq 0$. Preveri (ali sklepaj iz naloge 403), da so vektorji

$$v, (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})v, \ldots, (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{r-1} v$$

linearno neodvisni, zato je $r \leq \dim V = n$. Zdaj izračunaj

$$(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^n v = (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{n-r}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^r v = 0.$$

Opomba *Torej za korenski podprostor V_λ pri lastni vrednosti λ velja:* $V_\lambda = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^n$.

⊳⊳⊳ 403.

Rešitev 409. naloge

Ker je V končnorazsežen, obstajata taka $r, s \in \mathbb{N}$, da je

$$\operatorname{Ker} \mathcal{A} < \operatorname{Ker} \mathcal{A}^2 < \cdots < \operatorname{Ker} \mathcal{A}^r = \operatorname{Ker} \mathcal{A}^{r+1} = \cdots,$$

$$\operatorname{Im} \mathcal{A} > \operatorname{Im} \mathcal{A}^2 > \cdots > \operatorname{Im} \mathcal{A}^s = \operatorname{Im} \mathcal{A}^{s+1} = \cdots.$$

Torej dokazuješ enakost $V = \operatorname{Ker} \mathcal{A}^r \oplus \operatorname{Im} \mathcal{A}^s$. Ker za vsak $j \geq 1$ velja $\dim V = \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}^j + \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}^j$, smeš domnevati, da je $r = s$. Svojo domnevo dokaži naprimer takole. Iz definicij števil r in s sledita neenakosti

$$\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}^r = \dim V - \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}^r \leq \dim V - \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}^s = \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}^s,$$

$$\dim \operatorname{Im} \mathcal{A}^r = \dim V - \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}^r \leq \dim V - \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}^s = \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}^s.$$

Iz prve sklepaš $r \leq s$, iz druge pa $r \geq s$. Torej je $r = s$. Dokazati torej želiš, da velja

$$V = \operatorname{Ker} \mathcal{A}^r \oplus \operatorname{Im} \mathcal{A}^r.$$

Ker je $\dim V = \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}^r + \dim \operatorname{Im} \mathcal{A}^r$, zadošča dokazati, da je $\operatorname{Ker} \mathcal{A}^r \cap \operatorname{Im} \mathcal{A}^r = 0$. V ta namen vzemi poljuben $v \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}^r \cap \operatorname{Im} \mathcal{A}^r$. Potem je $v = \mathcal{A}^r u$ za neki $u \in V$ in $0 = \mathcal{A}^r v = \mathcal{A}^{2r} u$. Torej je $u \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}^{2r} = \operatorname{Ker} \mathcal{A}^r$, odtod pa $v = \mathcal{A}^r u = 0$.

⊳⊳⊳ 407.

Rešitev 410. naloge

(a) Ker sta si polinoma p in q tuja, obstajata taka polinoma $a, b \in \mathbb{F}[x]$, da je

$$ap + bq = 1.$$

Posebej, velja

$$a(\mathcal{A})p(\mathcal{A}) + b(\mathcal{A})q(\mathcal{A}) = \mathcal{I}.$$

Vzemi poljuben $v \in V$. Potem je

$$v = \mathcal{I}v = (a(\mathcal{A})p(\mathcal{A}) + b(\mathcal{A})q(\mathcal{A}))\, v = a(\mathcal{A})p(\mathcal{A})v + b(\mathcal{A})q(\mathcal{A})v. \tag{164}$$

Po predpostavki velja $p(\mathcal{A})q(\mathcal{A}) = 0$, zato je $a(\mathcal{A})p(\mathcal{A})v \in \operatorname{Ker} q(\mathcal{A})$ in $b(\mathcal{A})q(\mathcal{A})v \in \operatorname{Ker} p(\mathcal{A})$, odtod pa $v \in \operatorname{Ker} p(\mathcal{A}) + \operatorname{Ker} q(\mathcal{A})$. Torej je $V = \operatorname{Ker} p(\mathcal{A}) + \operatorname{Ker} q(\mathcal{A})$.

Če je $v \in \operatorname{Ker} p(\mathcal{A}) \cap \operatorname{Ker} q(\mathcal{A})$, potem iz enakosti (164) dobiš $v = 0$. Torej je $\operatorname{Ker} p(\mathcal{A}) \cap \operatorname{Ker} q(\mathcal{A}) = 0$.

(b) Definiraj polinome $q_i \in \mathbb{F}[x]$, $1 \leq i \leq s$, s predpisom

$$q_i := \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{s} p_j.$$

Polinomi $q_1, \ldots, q_s$ so si tuji, zato obstajajo taki polinomi $a_1, \ldots, a_s \in \mathbb{F}[x]$, da je

$$a_1 q_1 + \cdots + a_s q_s = 1.$$

Vzemi poljuben $v \in V$. Potem je

$$\begin{aligned} v &= \mathcal{I}v \\ &= (a_1(\mathcal{A})q_1(\mathcal{A}) + \cdots + a_s(\mathcal{A})q_s(\mathcal{A}))v \\ &= a_1(\mathcal{A})q_1(\mathcal{A})v + \cdots + a_s(\mathcal{A})q_s(\mathcal{A})v. \end{aligned} \tag{165}$$

Ugotovi, da je $a_i(\mathcal{A})q_i(\mathcal{A})v \in \operatorname{Ker} p_i(\mathcal{A})$ za vse $1 \leq i \leq s$. Torej je

$$V = \operatorname{Ker} p_1(\mathcal{A}) + \cdots + \operatorname{Ker} p_s(\mathcal{A}).$$

Dokazati moraš še, da je presek kateregakoli izmed prostorov $\operatorname{Ker} p_i(\mathcal{A})$ z vsoto preostalih trivialen. Zadošča preveriti primer $i = 1$. Vzemi poljuben

$$v \in \operatorname{Ker} p_1(\mathcal{A}) \cap (\operatorname{Ker} p_2(\mathcal{A}) + \cdots + \operatorname{Ker} p_s(\mathcal{A})).$$

Iz enakosti (165) sklepaj, da je $v = 0$. (Trditev (b) lahko dokažeš tudi na osnovi trditve (a).)

Opomba *Dokaži posledico: neničelni korenski vektorji pri različnih lastnih vrednostih so linearno neodvisni.*

⊳⊳⊳ 72., 437.

Rešitev 411. naloge

Bodi $n := \dim V > 1$. Ker so lastni vektorji pri različnih lastnih vrednostih linearno neodvisni, je različnih lastnih vrednosti endomorfizma $\mathcal{A}$ končno mnogo, recimo $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{C}$, in $1 \le s \le n$.

Po nalogi 408 je korenski podprostor endomorfizma $\mathcal{A}$ pri lastni vrednosti λ_i enak $V_{\lambda_i} = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I})^n$. Če definiraš polinome $p_i(\lambda) := (\lambda - \lambda_i)^n$, potem velja $V_{\lambda_i} = \operatorname{Ker} p_i(\mathcal{A})$ za vse $1 \le i \le s$. Polinomi $p_1, \dots, p_s$ so si tuji, zato za polinom $p := p_1 \cdots p_s$ po nalogi 410 velja

$$\operatorname{Ker} p(\mathcal{A}) = \operatorname{Ker} p_1(\mathcal{A}) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker} p_s(\mathcal{A}) = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}$$

(pomagaj si z zožitvijo preslikave $p(\mathcal{A})$ na $\operatorname{Ker} p(\mathcal{A})$). Dokazati moraš še, da je $V = \operatorname{Ker} p(\mathcal{A})$. V ta namen preveri, da je $V = \operatorname{Ker} p(\mathcal{A}) \oplus \operatorname{Im} p(\mathcal{A})$ in da je $\operatorname{Im} p(\mathcal{A}) = 0$, takole.

Če je $v \in \operatorname{Ker} p(\mathcal{A}) \cap \operatorname{Im} p(\mathcal{A})$, je $v = p(\mathcal{A})u$ za neki $u \in V$ in $0 = p(\mathcal{A})v = p(\mathcal{A})^2 u$. Premisli, da je

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} p(\mathcal{A})^2 &= \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{I})^{2n} \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_s \mathcal{I})^{2n} \\ &= \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{I})^{n} \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_s \mathcal{I})^{n} \\ &= \operatorname{Ker} p(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

Sklepaj, da je $v = 0$. Torej je $V = \operatorname{Ker} p(\mathcal{A}) \oplus \operatorname{Im} p(\mathcal{A})$.

Podprostor $\operatorname{Im} p(\mathcal{A})$ je invarianten za endomorfizem $\mathcal{A}$. Če $\operatorname{Im} p(\mathcal{A}) \ne 0$, ima zožitev endomorfizma $\mathcal{A}$ na podprostor $\operatorname{Im} p(\mathcal{A})$ vsaj en lastni par (λ_0, v_0). Lastna vrednost λ_0 mora biti enaka eni izmed $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, ki so vse lastne vrednosti endomorfizma $\mathcal{A}$, zato lastni vektor v_0 pripada preseku $\operatorname{Ker} p(\mathcal{A}) \cap \operatorname{Im} p(\mathcal{A})$, protislovje. Torej je $\operatorname{Im} p(\mathcal{A}) = 0$, trditev je dokazana.

Opomba *Gornji dokaz ne omenja karakterističnega polinoma endomorfizma in tudi ne izreka Hamiltona in Cayleyja. Uporabi ju in na osnovi naloge 410 napiši krajši dokaz. Zaradi katerega sklepa je potrebno vzeti (končnorazsežen) prostor nad $\mathbb{C}$, ne pa nad splošnim poljem $\mathbb{F}$?*

⊳⊳⊳ 434.

Rešitev 412. naloge

Označi $V := \mathbb{C}^{5\times 1}$, $\lambda_1 := -1$ in $\lambda_2 := 2$.

(a) Preveri, da velja $(A - \lambda_1 I)^2 a = 0$, torej je stolpec a korenski vektor matrike A pri lastni vrednosti -1. Ugotovi tudi, da $(A - \lambda_1 I)^5 b \ne 0$. Sklepaj (glej nalogo 408), da b ni korenski vektor pri lastni vrednosti -1.

(b) Preveri, da je $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_1 I) = 1$ in $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_1 I)^2 = 2 = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_1 I)^3$. Odtod

$$\operatorname{Ker}(A - \lambda_1 I) < \operatorname{Ker}(A - \lambda_1 I)^2 = \operatorname{Ker}(A - \lambda_1 I)^3,$$

zato je red lastne vrednosti λ_1 enak $r_1 = 2$. Korenski podprostor matrike A pri λ_1 je $V_{\lambda_1} = \operatorname{Ker}(A - \lambda_1 I)^{r_1} = \operatorname{Ker}(A - \lambda_1 I)^2$. Njegova razsežnost je $k_1 = 2$.

Podobno dobiš $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_2 I) = 1$, $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_2 I)^2 = 2$, $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_2 I)^3 = 3 = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_1 I)^4$, torej je red lastne vrednosti λ_2 enak $r_2 = 3$ in $V_{\lambda_2} = \operatorname{Ker}(A - \lambda_2 I)^{r_2} = \operatorname{Ker}(A - \lambda_2 I)^3$ je korenski podprostor matrike A pri λ_2. Njegova razsežnost je $k_2 = 3$.

(c) Karakteristični polinom p_A ima stopnjo 5, je razcepen v linearne faktorje in ima natanko dve ničli: $\lambda_1 = -1$ in $\lambda_2 = 2$. Stopnja lastne vrednosti λ_i v karakterističnem polinomu p_A je enaka razsežnosti k_i korenskega podprostora V_{λ_i}. Torej je

$$p_A(\lambda) = (\lambda + 1)^{k_1} (\lambda - 2)^{k_2} = (\lambda + 1)^2 (\lambda - 2)^3.$$

Opomba *Ali znaš poiskati minimalni polinom m_A? Gornja matrika A ima realne koeficiente, zato jo lahko vmestimo tudi v prostor $\mathbb{R}^{5\times 5}$. Veljajo isti sklepi, saj so lastne vrednosti matrike A realne.*

⊳⊳⊳ 413.

Rešitev 413. naloge

Izračunaj karakteristični polinom $p_A(\lambda) = \lambda^5(\lambda - 2)$. Torej ima A dve lastni vrednosti, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$. Če označiš $V := \mathbb{C}^{6\times 1}$ potem je

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2},$$

kjer sta V_{λ_1} in V_{λ_2} korenska podprostora matrike A pri lastni vrednosti λ_1 oziroma λ_2. Razsežnost korenskega podprostora V_{λ_i} je enaka algebrski kratnosti k_i pripadajoče lastne vrednosti, torej

$$\dim V_{\lambda_1} = k_1 = 5, \qquad \dim V_{\lambda_2} = k_2 = 1.$$

1. način reševanja. Smiselno je začeti s korenskim podprostorom V_{λ_2}, saj je enorazsežen, in je zato enak lastnemu podprostoru: $V_{\lambda_2} = \operatorname{Ker}(A - \lambda_2 I)$. Poiskati moraš en sam neničelni vektor iz tega podprostora. Vzemi naprimer stolpec

$$[0, 0, 0, 0, 0, 1]^t.$$

Oglej si še korenski podprostor V_{λ_1} pri lastni vrednosti λ_1. Izračunaj

$$(A - \lambda_1 I)^2 = A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix},$$

$$(A - \lambda_1 I)^3 = A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 & -8 & 8 \end{bmatrix}$$

in še $(A - \lambda_1 I)^4$. Iz rangov teh matrik ugotovi, da je

$$\operatorname{Ker}(A - \lambda_1 I) < \operatorname{Ker}(A - \lambda_1 I)^2 < \operatorname{Ker}(A - \lambda_1 I)^3 = \operatorname{Ker}(A - \lambda_1 I)^4.$$

Torej je red lastne vrednosti λ_1 enak $r_1 = 3$, pripadajoči korenski podprostor matrike A pa je $V_{\lambda_1} = \operatorname{Ker}(A - \lambda_1 I)^3$. Zdaj izberi pet linearno neodvisnih (korenskih) vektorjev iz V_{λ_1}, naprimer stolpce

$$[1,0,0,0,0,0]^t, [0,1,0,0,-1,0]^t, [0,0,1,0,0,0]^t, [0,0,0,1,0,0]^t, [0,0,0,0,1,1]^t.$$

Naštetih šest stolpcev tvori iskano bazo.

2. način reševanja. Iz naloge 408 sledi, da je $V_{\lambda_i} = \operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)^6$. Zato zadošča izračunati šeste potence $(A - \lambda_i I)^6$, $i = 1, 2$, in poiskati poljubni bazi jeder dobljenih matrik.

Opomba *Primerjaj gornja načina reševanja: drugi način si je lažje zapomniti, kompaktnejši je a robat, saj zahteva mnogo (morebiti nepotrebnih) potenciranj. Prvi temelji na računanju ranga posameznih potenc in razkriva globljo informacijo o korenskih podprostorih.*

⋙ 412.

Rešitev 414. naloge

Definiraj

$$c_{1k} := \text{število jordanskih celic velikosti } k \times k \text{ v matriki } J$$

in $d_{1j} := \dim \operatorname{Ker} J^j$, $j \geq 0$. (Seveda je prvi od obeh indeksov, indeks 1, zgolj informativnega značaja: opozarja, da gre za količine, ki so v zvezi z lastno vrednostjo $\lambda_1 := 0$ operatorja oziroma matrike.)

Matrika J ima bločno diagonalni zapis: sestavljena je iz c_{11} jordanskih celic velikosti 1×1, c_{12} jordanskih celic velikosti 2×2,... Iz bločno diagonalnega zapisa je razvidno sledeče:

- ker je $J^r = 0$ in $J^{r-1} \neq 0$, je velikost največje jordanske celice v matriki J enaka $r \times r$;
- razsežnost jedra matrike J je enaka vsoti razsežnosti jeder posameznih jordanskih celic v matriki J. Podobno velja tudi za razsežnosti jeder potenc.

Odtod, upoštevaje nalogo 405, izpelji naslednje enakosti:

$$\begin{aligned}
d_{11} &= c_{11} + c_{12} + c_{13} + \cdots + c_{1r}, \\
d_{12} &= c_{11} + 2(c_{12} + c_{13} + \cdots + c_{1r}), \\
d_{13} &= c_{11} + 2c_{12} + 3(c_{13} + \cdots + c_{1r}), \\
&\cdots\cdots\cdots \\
d_{1r} &= c_{11} + 2c_{12} + 3c_{13} + \cdots + rc_{1r}.
\end{aligned}$$

Ob dogovoru $d_{*,0} := 0$ sklepaj, da za vsak $1 \leq k \leq r$ velja:

$$d_{1,k} - d_{1,k-1} = \text{število jordanskih celic velikosti vsaj } k \times k.$$

Končno dobiš obrazec

$$c_{1k} = (d_{1k} - d_{1,k-1}) - (d_{1,k+1} - d_{1,k}) = 2d_{1k} - d_{1,k+1} - d_{1,k-1}$$

za vse $1 \leq k \leq r$.

⋙ 415., 416., 432.

Rešitev 415. naloge

Ker je $\mathcal{A}$ nilpotent, je njegova edina lastna vrednost enaka $\lambda_1 := 0$. Jordanska matrika J operatorja $\mathcal{A}$ je torej sestavljena iz jordanskih celic pri tej lastni vrednosti.

1. način reševanja. S pomočjo naloge 414 ugotovi velikosti posameznih celic in njihovo število.

Iz podatkov je razvidno, da je $\mathcal{A}$ nilpotent reda 5. Torej je največja celica v matriki J velikosti 5×5. Definiraj števila c_{1k} in d_{1k} kot v nalogi 414 (c_{1k} je število jordanskih celic velikosti $k \times k$ v matriki J, $d_{1j} := \dim \operatorname{Ker} J^j = \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}^j$) in prepiši tam izpeljano zvezo

$$c_{1k} = 2d_{1k} - d_{1,k+1} - d_{1,k-1}. \tag{166}$$

Iz podatkov preberi

$$d_{11} = 10, \quad d_{12} = 17, \quad d_{13} = 20, \quad d_{14} = 22, \quad d_{15} = 24,$$

dodaj $d_{10} = 0$ in $d_{16} = 24$, nato iz enakosti (166) izračunaj

$$c_{11} = 3, \quad c_{12} = 4, \quad c_{13} = 1, \quad c_{14} = 0, \quad c_{15} = 2.$$

Bločno diagonalni zapis jordanske matrike J je tak: 3 celice velikosti 1×1, 4 celice velikosti 2×2, 1 celica velikosti 3×3 in 2 celici velikosti 5×5. Razporeditev teh celic po glavni diagonali ni enolično določena.

2. način reševanja. Naslednji nazorni pristop si je lahko zapomniti. Iz $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} = 10$ sklepaj, da je matrika J sestavljena iz 10 jordanskih celic, kar ponazoriš takole:

```
o o o o o o o o o o
```

Ker je $\dim \operatorname{Ker} \mathcal{A}^2 = 17$, ima matrika J sedem ($= 17 - 10$) celic velikosti vsaj 2×2:

```
o o o o o o o o o o
o o o o o o o
```

Nadaljuj, dokler ne zapišeš vseh 24 ($= \dim \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_1)^{r_1} = \dim V$) krogcev:

```
o o o o o o o o o o
o o o o o o o
o o o
o o
o o
```

Višine dobljenih stolpcev v gornji ponazoritvi ustrezajo velikostim jordanskih celic (pri lastni vrednosti 0) v jordanski matriki J - glej 1. način reševanja.

Opomba *Napravi preizkus, da je* $\dim V = \sum_{k=1}^{5} kc_{1k}$.

⋙ 405., 414.

Rešitev 416. naloge

Iz $\operatorname{Im} \mathcal{A} \subseteq \operatorname{Ker} \mathcal{A}$ sledi $\mathcal{A}^2 = 0$. Torej je $\mathcal{A}$ nilpotent reda ≤ 2, njegova edina lastna vrednost je $\lambda_1 = 0$, njegov minimalni polinom $m_{\mathcal{A}}(\lambda)$ deli polinom $q(\lambda) = \lambda^2$.

Če je $m_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda$, potem je $\mathcal{A} = m_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = 0$, torej je $\mathcal{A}$ ničelni endomorfizem in njegova jordanska matrika je ničelna matrika $0 \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Sicer je $m_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda^2$, zato je jordanska matrika preslikave $\mathcal{A}$ sestavljena iz vsaj ene jordanske celice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ velikosti 2×2 in iz, morebiti, kakšnih celic $[0]$ velikosti 1×1.

Opomba *Primerjaj z nalogo 414.*

⋙ 101., 414.

Rešitev 417. naloge

Operator $\mathcal{T}$ deluje na 10-razsežnem prostoru in ima eno samo lastno vrednost $\lambda_1 = -3$ algebrske kratnosti $k_1 = 10$. Naj bo J jordanska matrika operatorja $\mathcal{T}$.

1. način reševanja. Ker je geometrijska kratnost lastne vrednosti λ_1 enaka $d_1 = \dim \operatorname{Ker}(\mathcal{T} + 3\mathcal{I}) = 4$, ima J štiri jordanske celice. Iz

$$\dim \operatorname{Ker}(\mathcal{T} + 3\mathcal{I})^2 - \dim \operatorname{Ker}(\mathcal{T} + 3\mathcal{I}) = 7 - 4 = 3$$

sklepaš, da ima J tri celice velikosti vsaj 2×2, torej ima natanko eno celico velikosti 1×1. Ker je

$$\dim \operatorname{Ker}(\mathcal{T} + 3\mathcal{I})^3 - \dim \operatorname{Ker}(\mathcal{T} + 3\mathcal{I})^2 = 9 - 7 = 2,$$

ima J dve celici velikosti vsaj 3×3. Zato je ena velikosti 2×2, ena velikosti 3×3 in ena velikosti 4×4. Velikost največje celice ustreza stopnji lastne vrednosti v minimalnem polinomu (oziroma redu r_1 te lastne vrednosti), torej je $m_{\mathcal{T}}(\lambda) = (\lambda + 3)^4$, jordanska matrika pa je

$$J := \begin{bmatrix} -3 & 1 & & & & & & & & \\ & -3 & 1 & & & & & & & \\ & & -3 & 1 & & & & & & \\ & & & -3 & & & & & & \\ & & & & -3 & 1 & & & & \\ & & & & & -3 & 1 & & & \\ & & & & & & -3 & & & \\ & & & & & & & -3 & 1 & \\ & & & & & & & & -3 & \\ & & & & & & & & & -3 \end{bmatrix}.$$

2. način reševanja. Podobno kot v nalogi 414 označi z $d_{1j} := \dim \operatorname{Ker}(\mathcal{T} - \lambda_1 \mathcal{I})^j$, s c_{1j} pa število jordanskih celic velikosti $j \times j$ pri lastni vrednosti λ_1 v matriki J. Torej je

$$d_{11} = 4, \quad d_{12} = 7, \quad d_{13} = 9.$$

Premisli, zakaj je $d_{14} = 10 = d_{15}$, in primakni $d_{10} = 0$. Nato s pomočjo obrazca

$$c_{1k} = 2d_{1k} - d_{1,k+1} - d_{1,k-1}$$

izračunaj

$$c_{11} = 1, \quad c_{12} = 1, \quad c_{13} = 1, \quad c_{14} = 1.$$

Minimalni polinom dobiš kot zgoraj.

Opomba *Ne pozabi, da je jordanska matrika endomorfizma določena do permutacije jordanskih celic natančno.*

⋙ 418., 419., 420., 421., 422.

Rešitev 418. naloge

Iz podatkov sklepaj, da je stopnja karakterističnega polinoma $p_{\mathcal{A}}$ endomorfizma $\mathcal{A}$ enaka 6, da sta $\lambda_1 = -1$ in $\lambda_2 = 1$ lastni vrednosti endomorfizma $\mathcal{A}$ in da za njuni algebrski kratnosti velja $k_1 \geq 3$ in $k_2 \geq 3$. Iz teh opažanj sledi, da je $k_1 = k_2 = 3$ in

$$p_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda + 1)^3 (\lambda - 1)^3.$$

Število jordanskih celic pri lastni vrednosti λ_1 je enako geometrijski kratnosti

$$d_1 = \dim \operatorname{Ker}(\mathcal{A} + \mathcal{I}) = 2.$$

Zato je jordanska matrika endomorfizma $\mathcal{A}$ podobna eni izmed matrik

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & & & & \\ & -1 & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & & \\ & -1 & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & 1 & 1 & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & & & & \\ & -1 & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & 1 & 1 & \\ & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Preveri, da vsaka od teh matrik zadošča postavljenim pogojem.

Opomba *Kompleksnemu endomorfizmu pripada natanko ena jordanska matrika (do permutacije celic natanko). Ker je v gornji nalogi premalo podatkov o endomorfizmu $\mathcal{A}$, lahko določiš le kandidate za jordansko matriko endomorfizma $\mathcal{A}$.*

⋙ 417., 419., 420., 421., 422.

Rešitev 419. naloge

Lastne vrednosti operatorja $\mathcal{A}$ so $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 6$ in $\lambda_3 = 1$ z algebrskimi kratnostmi $k_1 = 4$, $k_2 = 5$, $k_3 = 1$ in redi $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 1$. Ker red r_i lastne vrednosti λ_i ustreza velikosti

$r_i \times r_i$ največje jordanske celice pri tej lastni vrednosti, dobiš naslednje možne jordanske matrike:

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & & & & & & & & \\ & 5 & & & & & & & & \\ & & 5 & & & & & & & \\ & & & 5 & & & & & & \\ & & & & 6 & 1 & & & & \\ & & & & & 6 & 1 & & & \\ & & & & & & 6 & & & \\ & & & & & & & 6 & & \\ & & & & & & & & 6 & \\ & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 & & & & & & & & \\ & 5 & & & & & & & & \\ & & 5 & 1 & & & & & & \\ & & & 5 & & & & & & \\ & & & & 6 & 1 & & & & \\ & & & & & 6 & 1 & & & \\ & & & & & & 6 & & & \\ & & & & & & & 6 & & \\ & & & & & & & & 6 & \\ & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & & & & & & & & \\ & 5 & & & & & & & & \\ & & 5 & & & & & & & \\ & & & 5 & & & & & & \\ & & & & 6 & 1 & & & & \\ & & & & & 6 & 1 & & & \\ & & & & & & 6 & & & \\ & & & & & & & 6 & 1 & \\ & & & & & & & & 6 & \\ & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 & & & & & & & & \\ & 5 & & & & & & & & \\ & & 5 & 1 & & & & & & \\ & & & 5 & & & & & & \\ & & & & 6 & 1 & & & & \\ & & & & & 6 & 1 & & & \\ & & & & & & 6 & & & \\ & & & & & & & 6 & 1 & \\ & & & & & & & & 6 & \\ & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

⊳⊳⊳ 417., 418., 420., 421., 422.

Rešitev 420. naloge

Iz predpostavk sledi, da je karakteristični polinom endomorfizma $\mathcal{A}$ enak

$$p_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda - 1996)^s(\lambda - 9)^t,$$

kjer sta $s, t \in \mathbb{N}$, $s \geq 1$, $t \geq 6$, $s + t = 9$. Povrhu, iz stopenj lastnih vrednosti v minimalnem polinomu $m_{\mathcal{A}}$ sklepaš, da so v jordanski matriki J preslikave $\mathcal{A}$ vse celice pri lastni vrednosti $\lambda_1 = 1996$ velikosti 1×1 in da J premore vsaj eno celico K velikosti 6×6 pri lastni vrednosti $\lambda_2 = 9$. Če je $s = 3$ in $t = 6$, potem je J podobna (bločni) matriki

$$\begin{bmatrix} 1996 & & & \\ & 1996 & & \\ & & 1996 & \\ & & & K \end{bmatrix},$$

kjer je K zgoraj omenjena jordanska celica velikosti 6×6 pri lastni vrednosti $\lambda_2 = 9$. Če je $s = 2$ in $t = 7$, je J podobna (bločni) matriki

$$\begin{bmatrix} 1996 & & & \\ & 1996 & & \\ & & 9 & \\ & & & K \end{bmatrix}.$$

Nazadnje, če je $s = 1$ in $t = 8$, potem sta možni dve obliki:

$$\begin{bmatrix} 1996 & & & \\ & 9 & & \\ & & 9 & \\ & & & K \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1996 & & & \\ & 9 & 1 & \\ & & 9 & \\ & & & K \end{bmatrix}.$$

⊳⊳⊳ 417., 418., 419., 421., 422.

Rešitev 421. naloge

Iz karakterističnega polinoma p_A prebereš lastni vrednosti $\lambda_1 = -2$ in $\lambda_2 = -1$ z algebrskima kratnostma $k_1 = 3$, $k_2 = 7$. Minimalni polinom m_A ima iste ničle kot karakteristični polinom p_A in ga deli, zato je

$$m_A(\lambda) = (\lambda + 2)^{r_1}(\lambda + 1)^{r_2}$$

za neki naravni števili $1 \leq r_1 \leq 3$, $1 \leq r_2 \leq 7$. Ker je po predpostavki stopnja minimalnega polinoma m_A enaka 3, velja $r_1 + r_2 = 3$.
Če je $r_1 = 2$ in $r_2 = 1$, potem ima največja jordanska celica pri lastni vrednosti $\lambda_1 = -2$ velikost 2×2, pri lastni vrednosti $\lambda_2 = -1$ pa imajo vse celice velikost 1×1. Torej sta geometrijski kratnosti enaki $d_1 = 2$ in $d_2 = 7$, matrika A pa je podobna jordanski matriki (v bločno diagonalnem zapisu)

$$\operatorname{blokdiag}(-2, \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ & -2 \end{bmatrix}, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1).$$

Če je $r_1 = 1$ in $r_2 = 2$, potem imajo vse jordanske celice pri $\lambda_1 = -2$ velikost 1×1, največja jordanska celica pri $\lambda_2 = -1$ pa ima velikost 2×2. Iz $k_2 = 7$ sklepaj, da ima lahko jordanska matrika J matrike A eno, dve ali tri takšne celice, ostale pa imajo velikost 1×1. Matrika A je torej v tem primeru podobna eni izmed jordanskih matrik (pripisane so še geometrijske kratnosti)

$$\operatorname{blokdiag}(-2, -2, -2, -1, -1, -1, -1, -1, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ & -1 \end{bmatrix}), \quad d_1 = 3, \; d_2 = 6,$$

$$\operatorname{blokdiag}(-2, -2, -2, -1, -1, -1, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ & -1 \end{bmatrix}), \quad d_1 = 3, \; d_2 = 5,$$

$$\operatorname{blokdiag}(-2, -2, -2, -1, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ & -1 \end{bmatrix}), \quad d_1 = 3, \; d_2 = 4.$$

Ne pozabi napisati še pripadajoče minimalne polinome!

⊳⊳⊳ 417., 418., 419., 420., 422.

Rešitev 422. naloge

Označi lastne vrednosti matrike A z $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = a$ in loči tri primere:

(a) $a \notin \{1, -2\}$. Potem so redi lastnih vrednosti enaki $r_1 = 2$, $r_2 = 2$, $r_3 = 1$. Premisli, da je

A podobna jordanski matriki

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -2 & 1 & & \\ & & & & -2 & & \\ & & & & & a & \\ & & & & & & a \end{bmatrix}.$$

(b) $a = 1$. V tem primeru je $p_A(\lambda) = (\lambda-1)^5(\lambda+2)^2$ in $m_A(\lambda) = (\lambda-1)^3(\lambda+2)^2$. Torej sta reda lastnih vrednosti enaka $r_1 = 3$, $r_2 = 2$. Za geometrijski kratnosti velja $d_2 = 1$ in bodisi $d_1 = 2$ bodisi $d_1 = 3$. Pripadajoča jordanska matrika je zato bodisi

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & \\ & 1 & 1 & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & 1 & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & -2 & 1 \\ & & & & & & -2 \end{bmatrix} \quad \text{bodisi} \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & \\ & 1 & 1 & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & -2 & 1 \\ & & & & & & -2 \end{bmatrix}.$$

(c) $a = -2$. Potem je $p_A(\lambda) = (\lambda-1)^3(\lambda+2)^4$ in $m_A(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda+2)^3$. Preberi reda lastnih vrednosti: $r_1 = 2$, $r_2 = 3$. Odtod dobiš geometrijski kratnosti $d_1 = 2$, $d_2 = 2$ in A je podobna jordanski matriki

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -2 & 1 & & \\ & & & & -2 & 1 & \\ & & & & & -2 & \\ & & & & & & -2 \end{bmatrix}.$$

▷▷▷ 417., 418., 419., 420., 421.

Rešitev 423. naloge

Podano matriko označi z A.

1. način reševanja. Matrika A spominja na jordansko matriko s štirimi celicami. Poskusi s polinomom $p(\lambda) := (\lambda-1)^4(\lambda-1996)(\lambda-6)^3$. Opazi, da je prvi blok ničla polinoma $(\lambda-1)^4$, drugi polinoma $(\lambda-1996)$, tretji polinoma $(\lambda-6)^3$ in četrti polinoma $(\lambda-6)$. Z upoštevanjem ničelnih blokov lahko hitro preveriš, da je zato $p(A) = 0$. Če zmanjšaš katerega od eksponentov v zapisu polinoma $p(\lambda)$, potem zaradi diagonalno bločnega množenja tak polinom ne uniči matrike A. Zato je $m_A(\lambda) = p(\lambda)$.

2. način reševanja. Zapiši

$$p_A(\lambda) = (\lambda-1)^4(\lambda-1996)(\lambda-6)^3$$

in

$$m_A(\lambda) = (\lambda-1)^{r_1}(\lambda-1996)(\lambda-6)^{r_3}.$$

Ker velja

$$\operatorname{Ker}(A-I) < \operatorname{Ker}(A-I)^2 < \operatorname{Ker}(A-I)^3 < \operatorname{Ker}(A-I)^4 = \operatorname{Ker}(A-I)^5,$$

je $r_1 = 4$. Podobno dobiš $r_3 = 3$.

Rešitev 424. naloge

Iz (a) sledi, da so realni tudi koeficienti karakterističnega polinoma $p_A(\lambda)$, zato nastopajo njegove kompleksne nerealne ničle v konjugiranih parih. Primakni (b) in sklepaj, da sta i in $1-i$ lastni vrednosti matrike A. Imaš torej že pet ničel polinoma. Iz (c) sledi

$$\dim \operatorname{Ker} A^2 > \dim \operatorname{Ker} A,$$

zato je stopnja elementa 0 v minimalnem polinomu $m_A(\lambda)$ vsaj dva. Ker $m_A \mid p_A$ in ker ima p_A stopnjo šest, je 0 dvojna ničla polinoma $m_A(\lambda)$. Torej

$$p_A(\lambda) = m_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2+1)(\lambda^2+2\lambda+2).$$

▷▷▷ 133., 295.

Rešitev 425. naloge

Karakteristični polinom matrike B je $p_B(\lambda) = \lambda^3(\lambda+1)^2$, lastni vrednosti sta $\lambda_1 = 0$ in $\lambda_2 = -1$, pripadajoči algebrski kratnosti sta $k_1 = 3$, $k_2 = 2$. Preveri, da je geometrijska kratnost prve lastne vrednosti enaka $d_1 = \dim \operatorname{Ker}(B - \lambda_1 I) = \dim \operatorname{Ker} B = 1$. Zato ima J eno samo jordansko celico pri λ_1. Podobno je geometrijska kratnost druge lastne vrednosti $d_2 = \dim \operatorname{Ker}(B - \lambda_2 I) = \dim \operatorname{Ker}(B+I) = 1$, zato je

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & & \\ & & & -1 & 1 \\ & & & & -1 \end{bmatrix}.$$

▷▷▷ 426., 427., 428., 429.

Rešitev 426. naloge

Seveda lahko karakteristični polinom p_A izračunaš neposredno. Lahko pa uporabiš podatka, takole. Ker sta $\lambda_1 := -2$ in $\lambda_2 := -1$ edini lastni vrednosti matrike A, je $p_A(\lambda) = (\lambda+2)^{k_1}(\lambda+1)^{k_2}$ za neki naravni števili $k_1, k_2 \in \{1,2,3\}$, $k_1 + k_2 = 4$. Natančneje: k_i je razsežnost korenskega podprostora matrike A pri lastni vrednosti λ_i.

Oglej si, naprimer, razsežnosti jeder potenc matrike $A - \lambda_1 I$:

$$A - \lambda_1 I = A + 2I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & 8 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Torej je rang $(A - \lambda_1 I) = 2$. Geometrijska kratnost lastne vrednosti λ_1 je potemtakem

$$d_1 = d_{11} = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_1 I) = 4 - \operatorname{rang}(A + 2I) = 2,$$

zato ima J dve jordanski celici pri lastni vrednosti λ_1. Izračunaj

$$(A - \lambda_1 I)^2 = (A + 2I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

in rang $(A - \lambda_1 I)^2 = 1$. Ker je

$$d_{12} - d_{11} = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_1 I)^2 - \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_1 I) = 3 - 2 = 1,$$

ima J natanko eno jordansko celico velikosti vsaj 2×2 pri lastni vrednosti λ_1. Sklepaj, da smeš izbrati

$$J := \begin{bmatrix} -2 & 1 & & \\ & -2 & & \\ & & -2 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}.$$

Odtod dobiš tudi karakteristični polinom $p_A(\lambda) = (\lambda+2)^3(\lambda+1)$ in minimalni polinom $m_A(\lambda) = (\lambda+2)^2(\lambda+1)$.

▷▷▷ 425., 427., 428., 429.

Rešitev 427. naloge

Iz karakterističnega polinoma $p_A(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 2)(\lambda - 4)^2$ prebereš lastne vrednosti $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 4$ in njihove algebrske kratnosti $k_1 = k_2 = 1$, $k_3 = 2$. Preveri, da so vse geometrijske kratnosti enake $d_1 = d_2 = d_3 = 1$. Torej ima matrika A minimalni polinom $m_A(\lambda) = p_A(\lambda)$ (glej tudi nalogo 433) in podobna je jordanski matriki

$$J := \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

▷▷▷ 425., 426., 428., 429., 433.

Rešitev 428. naloge

Najprej karakteristični polinom:

$$p_A(\lambda) = (-1)^5 \det(A - \lambda I) = -\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\lambda & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= -(-1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda & 1 \\ -1 & 3 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+1)(2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \ldots \\ &= (\lambda+1)^4(\lambda-2). \end{aligned}$$

Torej ima A dve lastni vrednosti $\lambda_1 = -1$ in $\lambda_2 = 2$ z algebrskima kratnostma $k_1 = 4$, $k_2 = 1 = d_2$. Preveri, da ima λ_1 geometrijsko kratnost

$$d_1 = \dim \operatorname{Ker}(A + I) = 2.$$

Zato ima jordanska matrika J matrike A dve celici pri lastni vrednosti $\lambda_1 = 1$. Izračunaj še $\dim \operatorname{Ker}(A + I)^2 = 3$. Ker je

$$\dim \operatorname{Ker}(A + I)^2 - \dim \operatorname{Ker}(A + I) = 1,$$

ima J natanko eno celico velikosti vsaj 2×2. Torej smeš izbrati

$$J := \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & & \\ & & -1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & 2 \end{bmatrix}$$

in sklepati, da je $m_A(\lambda) = (\lambda + 1)^3(\lambda - 2)$.

▷▷▷ 425., 426., 427., 429.

Rešitev 429. naloge

(a) Iz karakterističnega polinoma $p_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+a)$ prebereš lastne vrednosti

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = -2,\ \lambda_4 = -a.$$

(b) Algebrske kratnosti gornjih lastnih vrednosti so enake 1 natanko tedaj, ko $\lambda_4 \notin \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, torej ko je

$$a \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1, 2\}.$$

(c) Na dlani je diagonalna matrika $D := \operatorname{diag}(1, -1, -2, -a)$. Da najdeš bazo, sestavljeno iz lastnih vektorjev matrike A, moraš za vsak $i = 1, 2, 3, 4$ poiskati stolpec e_i, ki napenja $\operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)$. Obrnljivo matriko P nato definiraš kot $P := [e_1, e_2, e_3, e_4]$, naprimer

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{(a-4)(a-2)}{a^2-1} \\ 0 & -2 & -2 & \frac{a-4}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3-a \end{bmatrix}.$$

Koeficienti matrike P so dobro definirani, saj $a \notin \{1, -1\}$.

(d) Če je $a \in \mathbb{C} \setminus \{-1,1,2\}$, potem je A podobna diagonalni matriki iz točke (c). Pri $a=-1$ je algebrska kratnost lastne vrednosti $\lambda_1 = 1$ enaka $k_1 = 2$, geometrijska kratnost pa $d_1 = \dim \operatorname{Ker}(A-I) = 1$. Torej je A podobna jordanski matriki

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -2 \end{bmatrix}.$$

Pri $a = 1$ je $k_2 = 2$, $d_2 = 1$, zato je A podobna jordanski matriki

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & 1 & \\ & & -1 & \\ & & & -2 \end{bmatrix}.$$

Če je $a = 2$, velja $k_3 = 2$ in $d_3 = 1$, matrika A je podobna jordanski matriki

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -2 & 1 \\ & & & -2 \end{bmatrix}.$$

⊳⊳⊳ 425., 426., 427., 428.

Rešitev 430. naloge

(a) Na več načinov lahko ugotoviš, da ima A lastno vrednost 0 natanko za $a = 1$, naprimer:

1. način. Izračunaj karakteristični polinom $p_A(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda(2-a) - (a^2-2a+1)$ in nastavi $p_A(0) = 0$.

2. način. Endomorfizem ima lastno vrednost 0 natanko takrat, ko ni obrnljiv, torej ko ima ničelno determinanto: iz $\det A = a^2 - 2a + 1 = 0$ dobiš $a = 1$.

3. način. Z Gaussovo eliminacijo ugotoviš, da je $\operatorname{rang} A < 3$ natanko takrat, ko je $a = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ a-1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -a^2+a-1 \\ 0 & 1 & -a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & -a^2+a-1 \\ 0 & 0 & a^2-2a+1 \end{bmatrix}.$$

(b) Pri $a = 1$ je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

in $p_A(\lambda) = \lambda(\lambda-1)^2$. Lastna vrednost $\lambda_1 = 0$ ima algebrsko (in zato tudi geometrijsko) kratnost enako $k_1 = 1 = d_1$, velja $\operatorname{Ker} A = \mathcal{L}\{v_1 := [-1,1,1]^t\}$. Algebrska kratnost lastne vrednosti $\lambda_2 = 1$ je enaka $k_2 = 2$. Prostor $\operatorname{Ker}(A-I)$ je enorazsežen, torej ima λ_2 geometrijsko kratnost $d_2 = 1$. Zato je $m_A(\lambda) = p_A(\lambda)$ (glej tudi nalogo 433). Če izbereš

$v_3 := [0,1,1]^t \in \operatorname{Ker}(A-I)^2 \setminus \operatorname{Ker}(A-I)$ in $v_2 := (A-I)v_3 = [1,-1,0]^t$, potem pripada matriki A (natančneje: endomorfizmu, ki ga na $\mathbb{C}^{3\times 1}$ določa matrika A) v urejeni bazi $\{v_1, v_2, v_3\}$ jordanska matrika

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Z drugimi besedami, velja $A = PJP^{-1}$, kjer je

$$P := \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Opomba *V gornjem primeru je bilo potrebno poiskati bazo dopolnila podprostora* $\operatorname{Ker}(A-I)$ *do podprostora* $\operatorname{Ker}(A-I)^2$. *Ker je to dopolnilo enorazsežno, zadošča izbrati poljuben vektor iz razlike* $\operatorname{Ker}(A-I)^2 \setminus \operatorname{Ker}(A-I)$ *(pozor, ta razlika je množica in ne vektorski podprostor). Splošnejši primer si oglej v nalogi 432.*

⊳⊳⊳ 431., 432., 433.

Rešitev 431. naloge

Izračunaj karakteristični polinom matrike A:

$$p_A(\lambda) = (-1)^5 \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda(1-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda) = \lambda^3(\lambda-1)^2.$$

Matrika A ima dve lastni vrednosti $\lambda_1 = 0$ in $\lambda_2 = 1$ z algebrskima kratnostma $k_1 = 3$ in $k_2 = 2$. Preveri, da je geometrijska kratnost prve lastne vrednosti enaka $d_1 = \dim \operatorname{Ker} A = 1$ in sklepaj, da ima J natanko eno celico pri λ_1. Ta celica je velikosti $k_1 \times k_1 = 3 \times 3$. Geometrijska kratnost druge lastne vrednosti je $d_2 = 2$, zato ima J dve celici velikosti 1×1 pri λ_2. Združi gornje ugotovitve in napiši

$$J := \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Poiskati prehodno matriko P pomeni najti tako bazo v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 prostora $\mathbb{C}^{5\times 1}$, da bo v tej bazi pripadala matriki A (natančneje, endomorfizmu $\mathcal{A}$ prostora $\mathbb{C}^{5\times 1}$, ki ga A določa pri običajnem delovanju na stolpcih) matrika J. Takole. Vzemi poljuben $v_3 \in \operatorname{Ker}(A-\lambda_1 I)^3 \setminus \operatorname{Ker}(A-\lambda_1 I)^2$, naprimer $v_3 := [0,0,1,0,0]^t$, in definiraj $v_2 := (A-\lambda_1 I)v_3 = Av_3 = [1,0,0,0,0]^t$

in $v_1 := (A-\lambda_1 I)v_2 = Av_2 = [0,0,0,0,1]^t$. Vektorja v_4 in v_5, ki tvorita bazo lastnega podprostora $\operatorname{Ker}(A-\lambda_2 I)$, naj bosta naprimer $v_4 := [0,1,0,0,0]^t$ in $v_5 := [1,0,0,1,0]^t$. Iskana matrika je potem

$$P := [v_1, v_2, v_3, v_4, v_5] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Opomba *Pozor, glej opombo k nalogi 430.*

⊳⊳⊳ 430., 432.

Rešitev 432. naloge

Iščeš urejeno bazo Ω prostora $\mathbb{C}^{7\times 1}$, v kateri pripada matriki A (oziroma operatorju $\mathcal{A}$, ki ga na $\mathbb{C}^{7\times 1}$ določa matrika A) jordanska matrika J. Smiselno je najprej poiskati jordansko matriko J.

Ugotovi, da ima matrika A karakteristični polinom $p_A(\lambda) = \lambda^7$. Torej je A nilpotentna matrika, njena edina lastna vrednost je $\lambda_1 = 0$. Ker je

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

in $A^3 = 0$, je A nilpotent reda 3. Red lastne vrednosti λ_1 je torej $r_1 = 3$ oziroma največja jordanska celica v jordanski matriki J matrike A ima velikost 3×3. Označi $d_{1j} := \dim \operatorname{Ker} A^j$ in izračunaj $d_{11} = 3$, $d_{12} = 5$, $d_{13} = 7$. Sklepaj (naprimer kot v nalogi 414), da ima J tri jordanske celice: eno velikosti 1×1 in dve velikosti 3×3. Matrika A je torej podobna jordanski matriki

$$J := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pripadajočo jordansko bazo Ω sestavi takole. Najprej izberi taka neodvisna vektorja $v_3, v_6 \in V$, da velja

$$\operatorname{Ker} A^3 = \operatorname{Ker} A^2 \oplus \mathcal{L}\{v_3, v_6\},$$

naprimer $v_3 := [1,0,0,0,0,0,0]^t$ in $v_6 := [0,1,0,0,0,0,0]^t$. (Vektorja je smiselno oštevilčiti v skladu s postavljeno jordansko matriko. V tem konkretnem primeru iščeš tretji in šesti vektor iz

urejene baze Ω.) Nato definiraj

$$\begin{aligned} v_2 &:= Av_3 = [1,-2,-1,0,-2,-1,0]^t, \\ v_1 &:= Av_2 = [-1,1,0,-2,0,1,-2]^t, \\ v_5 &:= Av_6 = [1,-2,-1,0,-1,0,0]^t, \\ v_4 &:= Av_5 = [-1,1,0,-1,0,0,-1]^t. \end{aligned}$$

Vektor v_7 izberi tako, da drži

$$\operatorname{Ker} A = \mathcal{L}\{v_1, v_3\} \oplus \mathcal{L}\{v_7\},$$

naprimer $v_7 := [0,0,0,0,0,0,1]^t$. Urejena baza $\Omega := \{v_1, v_2, \ldots, v_7\}$ je potem jordanska baza matrike A. Če definiraš matriko $P := [v_1, v_2, \ldots, v_7]$, potem velja

$$A = PJP^{-1}.$$

Opomba *Premisli, zakaj je smiselno poiskati najprej jordansko matriko endomorfizma, šele nato pa jordansko bazo.*
Pozor: v gornjem primeru je nujno poiskati bazo dopolnila podprostora $\operatorname{Ker} A^2$ *do podprostora* $\operatorname{Ker} A^3$*, ne pa vzeti poljubna linearno neodvisna vektorja iz množice* $\operatorname{Ker} A^3 \setminus \operatorname{Ker} A^2$*. Glej tudi nalogo 430 in tamkajšnjo opombo.*

⊳⊳⊳ 414., 430., 431.

Rešitev 433. naloge

Ker je $\mathcal{A}$ endomorfizem kompleksnega prostora, je njegov karakteristični polinom razcepen v produkt linearnih faktorjev, naprimer

$$p_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{k_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{k_s},$$

kjer so $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ vse paroma različne lastne vrednosti endomorfizma $\mathcal{A}$. Njegov minimalni polinom $m_{\mathcal{A}}$ ima potem razcep

$$m_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{r_1}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$$

za neke $r_i \in \mathbb{N}$, $1 \le r_i \le k_i$.

Trditev dokaži s pomočjo teorije jordanskih matrik. Bodi J neka jordanska matrika endomorfizma $\mathcal{A}$. Ker je velikost največje jordanske celice pri lastni vrednosti λ_i v jordanski matriki J enaka $r_i \times r_i$, drži naslednja veriga enakovrednih izjav: $p_{\mathcal{A}} = m_{\mathcal{A}} \iff k_i = r_i$ za vse $i \iff$ za vse i ima največja jordanska celica pri λ_i v matriki J velikost $k_i \times k_i \iff$ za vse i ima J natanko eno jordansko celico pri $\lambda_i \iff d_i = 1$ za vse i.

Opomba *V jordanski matriki endomorfizma so na kombinatoričen način povzete mnoge pomembne lastnosti tega endomorfizma. Zato jo pogosto uporabljamo pri študiju endomorfizmov kompleksnega končnorazsežnega prostora.*

⊳⊳⊳ 427., 430.

Rešitev 434. naloge

1. način reševanja. Naj bo $B := \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ urejena jordanska baza prostora V, to je baza, v kateri endomorfizmu $\mathcal{A}$ pripada jordanska matrika. Predpostavi, da je baza B urejena tako, da je množica $B' := \{v_1, \ldots, v_m\}$ baza korenskega podprostora lastne vrednosti 0. Označi $B'' := \{v_{m+1}, \ldots, v_n\}$.

Če je $B' = \emptyset$, pomeni, da 0 ni lastna vrednost preslikave $\mathcal{A}$, in je zato $\mathcal{A}$ obrnljiva. Zato obstaja razcep

$$V = \{0\} \oplus V.$$

Potem je $\mathcal{A}|_{\{0\}} = 0$ nilpotenten operator in $\mathcal{A}|_V = \mathcal{A}$ obrnljiv. Očitno sta podprostora $\{0\}$ in V invariantna za preslikavo $\mathcal{A}$ (saj sta invariantna za vsak endomorfizem na V).

Če je $B'' = \emptyset$, je edina lastna vrednost preslikave $\mathcal{A}$ število 0. Zato ima Jordanova forma vse diagonalce enake 0 in jo uniči potenca stopnje, ki je enaka velikosti največje jordanske celice. Zato je iskani razcep prostora enak

$$V = V \oplus \{0\},$$

saj je $\mathcal{A}|_{\{0\}} = 0$: $\{0\} \to \{0\}$ obrnljiva preslikava.

Naj bosta odslej B' in B'' neprazni množici. Potem je podprostor $U := \mathcal{L}(B')$ invarianten za endomorfizem $\mathcal{A}$, ker celice, ki imajo število 0 na diagonali, tvorijo blok v jordanski matriki endomorfizma $\mathcal{A}$. Če izračunaš m-to potenco tega bloka, kjer je m velikost največje celice lastne vrednosti 0, se blok uniči. Zato je $\mathcal{A}|_U$ nilpotent. S pomočjo jordanske matrike endomorfizma $\mathcal{A}$ premisli, da je $W := \mathcal{L}\{B''\}$ invarianten podprostor endomorfizma $\mathcal{A}$. Zato zožitvi $\mathcal{A}|_W$: $W \to W$ v urejeni bazi B'' pripada matrika, ki je bločnodiagonalno sestavljena iz celic jordanove matrike, ki pripadajo neničelnim lastnim vrednostim. Ker so v tej zgornjediagonalni matriki vsi diagonalci neničelni, je matrika obrnljiva, in je zato obrnljiva tudi preslikava $\mathcal{A}|_W$.

2. način reševanja. Če je $\mathcal{A}$ obrnljiv, vzemi $U := \{0\}$ in $W := V$ ter premisli, da ustrezata pogojem.

Če je $\mathcal{A}$ neobrnljiv, je $\operatorname{Ker}\mathcal{A} \neq \{0\}$, in zato je $\lambda_1 := 0$ njegova lastna vrednost. Po nalogi 411 se da prostor V razcepiti na premo vsoto korenskih podprostorov endomorfizma $\mathcal{A}$:

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I})^{r_i} = \operatorname{Ker}\mathcal{A}^{r_1} \oplus \bigoplus_{i=2}^{k} \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I})^{r_i}, \tag{167}$$

kjer so $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ vse paroma različne lastne vrednosti operatorja $\mathcal{A}$ in $r_1, \ldots, r_k$ pripadajoče stopnje v minimalnem polinomu $m_{\mathcal{A}}(\lambda)$. Vzemi $U := (\operatorname{Ker}\mathcal{A})^{r_1}$ in $W := \oplus_{i=2}^{k}\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I})^{r_i}$ in premisli:

(a) Iz (167) sledi $V = U \oplus W$.

(b) Iz invariantnosti prostora U za operator $\mathcal{A}$ sledi $\mathcal{A}|_U$: $U \to U$ in velja $(\mathcal{A}|_U)^{r_1} = \mathcal{A}^{r_1}|_U = 0|_U = 0$, zato je operator $\mathcal{A}|_U$ nilpotenten.

(c) Iz invariantnosti prostora W za operator $\mathcal{A}$ sledi $\mathcal{A}|_W$: $W \to W$. Če bi bilo jedro operatorja $\mathcal{A}|_W$ netrivialno, bi veljalo $\operatorname{Ker}\mathcal{A} \cap W \neq \{0\}$, protislovje z (167). Zato je $\operatorname{Ker}(\mathcal{A}|_W) = \{0\}$, torej je operator $\mathcal{A}|_W$ injektiven. Ker je W končnorazsežen, (saj je V končnorazsežen), iz injektivnosti operatorja $\mathcal{A}|_W$ sledi njegova bijektivnost in odtod njegova obrnljivost.

⊳⊳⊳ 411.

Rešitev 435. naloge

Smiselno je najprej poiskati čimveč potrebnih pogojev za obstoj iskanega endomorfizma $\mathcal{A}$ na prostoru V:

- Ugotovi, da je jedro $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ vsaj dvorazsežno, naprimer takole. Primerjaj razsežnosti $d := \dim\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ in $d' := \dim\operatorname{Ker}\mathcal{A}^2$: iz verige vsebovanosti sledi $d' \geq d + 2$, iz neenakosti (15) v nalogi 116 (ali iz premisleka s pomočjo jordanske matrike) pa $d' \leq 2d$. Sklepaj, da je $d \geq 2$. Odtod sledi, da je $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ vsaj 5-razsežen, torej je

$$\dim V = \dim\operatorname{Ker}\mathcal{A} + \dim\operatorname{Im}\mathcal{A} \geq 7.$$

- Opazi, da je $\mathcal{A}$ nilpotent reda največ 4: iz $\operatorname{Im}\mathcal{A}^2 < \operatorname{Ker}\mathcal{A}^2$ sledi $\mathcal{A}^2(\operatorname{Im}\mathcal{A}^2) = 0$, torej $\mathcal{A}^4 = 0$. Zato ima $\mathcal{A}$ eno samo lastno vrednost, $\lambda_1 = 0$, in velikost največje celice v njegovi jordanski matriki J je kvečjemu 4×4.

- Iz neenakosti $\operatorname{Ker}\mathcal{A} < \operatorname{Im}\mathcal{A}^2$ sklepaj, da ima vsaka jordanska celica v matriki J velikost vsaj 3×3.

Uporabi gornje ugotovitve in sestavi kompleksno jordansko matriko velikosti 7×7:

$$\left[\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & & & & \\ \hline & & & 0 & 1 & & \\ & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 \end{array}\right].$$

Ta matrika predstavlja endomorfizem $\mathcal{A}$ prostora $\mathbb{C}^{7\times 1}$, ki zadošča postavljenim pogojem.

Opomba *Za kakšne razsežnosti prostora V je naloga rešljiva?*

Rešitev 436. naloge

1. način reševanja. Izračunaj

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 4I,$$

in dokaži z indukcijo, da je $A^{2k} = 4^k I$ in $A^{2k+1} = 4^k A$ za vsak $k \in \mathbb{N}$. Po definiciji eksponentne funkcije velja

$$\begin{aligned} e^A &= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} \\ &= I + \tfrac{A}{1!} + \tfrac{A^2}{2!} + \tfrac{A^3}{3!} + \tfrac{A^4}{4!} + \cdots \\ &= I + \tfrac{A}{1!} + \tfrac{4I}{2!} + \tfrac{4A}{3!} + \tfrac{4^2 I}{4!} + \cdots \\ &= (1 + \tfrac{2^2}{2!} + \tfrac{2^4}{4!} + \cdots)I + (\tfrac{1}{1!} + \tfrac{2^2}{3!} + \tfrac{2^4}{5!} + \cdots)A \\ &= (\operatorname{ch} 2)I + (\tfrac{1}{2}\operatorname{sh} 2)A \\ &= \begin{bmatrix} e^2 & 2\operatorname{sh} 2 & 2\operatorname{sh} 2 \\ 0 & \operatorname{ch} 2 + 5\operatorname{sh} 2 & 4\operatorname{sh} 2 \\ 0 & -6\operatorname{sh} 2 & \operatorname{ch} 2 - 5\operatorname{sh} 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2. način reševanja. Diagonaliziraj matriko A, pa dobiš $A = PDP^{-1}$, kjer je

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

To upoštevaj pri računu

$$\begin{aligned} e^A &= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}(PDP^{-1})^i \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}PD^iP^{-1} \\ &= P(\textstyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{D^i}{i!})P^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2} \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} e^2 & e^2 - e^{-2} & e^2 - e^{-2} \\ 0 & 3e^2 - 2e^{-2} & 2e^2 - 2e^{-2} \\ 0 & -3e^2 + 3e^{-2} & -2e^2 + 3e^{-2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Opomba *Primerjaj oba rezultata.*

Rešitev 437. naloge

Z razcepom ali z Evklidovim algoritmom ugotovi, da $x + 1$ deli obe strani enačbe in da zato zadošča reševati ekvivalentno enačbo

$$(x^2 + 1)a(x) + (x^3 - 1)b(x) = 1. \tag{168}$$

Poženi Evklidov algoritem na polinomih $x^3 - 1$ in $x^2 + 1$:

$$\begin{aligned} x^3 - 1 &= x(x^2 + 1) + (-x - 1), \\ x^2 + 1 &= (-x + 1)(-x - 1) + 2. \end{aligned}$$

Zdaj lahko izraziš

$$(x^2 + 1)(-x^2 + x + 1) + (x^3 - 1)(x - 1) = 2$$

in prebereš partikularni rešitvi enačbe (168)

$$a_1(x) := \tfrac{1}{2}(-x^2 + x + 1), \qquad b_1(x) := \tfrac{1}{2}(x - 1).$$

Enačbi (168) prirejena homogena enačba $(x^2 + 1)a(x) + (x^3 - 1)b(x) = 0$ ima zaradi tujosti polinomov $x^2 + 1$ in $x^3 - 1$ splošno rešitev

$$a_0(x) := (x^3 - 1)p(x), \qquad b_0(x) := -(x^2 + 1)p(x),$$

kjer je polinom $p \in \mathbb{R}[x]$ poljuben. Splošna rešitev enačbe (168) se torej glasi

$$\begin{aligned} a(x) &= \tfrac{1}{2}(-x^2 + x + 1) + (x^3 - 1)p(x), \\ b(x) &= \tfrac{1}{2}(x - 1) - (x^2 + 1)p(x), \end{aligned}$$

kjer je $p \in \mathbb{R}[x]$ poljuben.

⋙ 410.

Bilinearne forme

Rešitev 438. naloge

Preslikava ϕ_A: $\mathbb{F}^{n\times 1} \times \mathbb{F}^{n\times 1} \to \mathbb{F}$ (natančneje, ϕ_A: $\mathbb{F}^{n\times 1} \times \mathbb{F}^{n\times 1} \to \mathbb{F}^{1\times 1}$) je linearna v svojem prvem argumentu, saj velja

$$\phi_A(\alpha x + \beta y, z) = (\alpha x + \beta y)^{\mathrm{t}} Az = (\alpha x^{\mathrm{t}} + \beta y^{\mathrm{t}})Az = \alpha x^{\mathrm{t}} Az + \beta y^{\mathrm{t}} Az = \alpha\phi_A(x, z) + \beta\phi_A(y, z)$$

za vsaka $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ in za vse $x, y, z \in \mathbb{F}^{n\times 1}$. Podobno preveriš, da je ϕ_A linearna v svojem drugem argumentu.

⋙ 440.

Rešitev 439. naloge

(a) $\mathrm{M}_\Omega(\phi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $\mathrm{M}_\Omega(\phi) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}$.

(c) $\mathrm{M}_\Omega(\phi) = \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & 0 & 2/5 \\ 2/3 & 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 & 2/7 \\ 2/5 & 0 & 2/7 & 0 \end{bmatrix}$.

(d) $\mathrm{M}_\Omega(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Upoštevaj, da v polju $\mathbb{F}$ velja $1 + 1 = 0$.

Opomba *Če je ϕ skalarni produkt, je matrika $\mathrm{M}_\Omega(\phi)$ enaka Gramovi matriki baze Ω.*

⋙ 311., 312., 440., 441.

Rešitev 440. naloge

Razvij vektorja u in v po bazi Ω: $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, $v = \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j$. Potem je $\mathrm{X}_\Omega(u) = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]^{\mathrm{t}}$ in $\mathrm{X}_\Omega(v) = [\beta_1, \ldots, \beta_n]^{\mathrm{t}}$. Izračunaj in primerjaj skalar

$$\phi(u, v) = \phi(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i\beta_j\phi(v_i, v_j)$$

z matriko (velikosti 1×1)

$$\mathrm{X}_\Omega(u)^{\mathrm{t}}\mathrm{M}_\Omega(\phi)\mathrm{X}_\Omega(v) = \sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_\Omega(u)^{\mathrm{t}})_i(\mathrm{M}_\Omega(\phi)\mathrm{X}_\Omega(v))_i$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} (\mathrm{M}_\Omega(\phi))_{ij} (\mathrm{X}_\Omega(v))_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \phi(v_i, v_j)\beta_j \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i\beta_j\phi(v_i, v_j). \end{aligned}$$

Opomba *Če je A kvadratna matrika, je po nalogi 438 preslikava*

$$\phi\colon (x, y) \mapsto x^t A y \tag{169}$$

bilinearna forma na ustreznem prostoru stolpcev. Obrat te trditve je ravno gornja naloga: vsako bilinearno formo je moč predstaviti z neko matriko in z običajnim množenjem te matrike in stolpcev kot v (169).

⊳⊳⊳ 438., 439., 441.

Rešitev 441. naloge

1. način reševanja. Naj bo $\Omega = \{u_1, \ldots, u_n\}$ in $\Pi = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Označi koeficiente matrike P z α_{ij}. Potem velja $v_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} u_i$ in odtod

$$(P^t\mathrm{M}_\Omega(\phi)P)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}(\mathrm{M}_\Omega(\phi)P)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \sum_{l=1}^{n} (\mathrm{M}_\Omega(\phi))_{kl}\alpha_{lj} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \sum_{l=1}^{n} \alpha_{lj}\phi(u_k, u_l) = \phi(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}u_k, \sum_{l=1}^{n} \alpha_{lj}u_l) = \phi(v_i, v_j) = (\mathrm{M}_\Pi(\phi))_{ij}.$$

2. način reševanja. Oglej si in utemelji enakosti

$$\begin{aligned} \phi(u, v) &= \mathrm{X}_\Omega(u)^t\mathrm{M}_\Omega(\phi)\mathrm{X}_\Omega(v) \\ &= (\mathrm{M}_\Omega^\Pi(\mathcal{I})\mathrm{X}_\Pi(u))^t\mathrm{M}_\Omega(\phi)(\mathrm{M}_\Omega^\Pi(\mathcal{I})\mathrm{X}_\Pi(v)) \\ &= \mathrm{X}_\Pi(u)^t(\mathrm{M}_\Omega^\Pi(\mathcal{I})^t\mathrm{M}_\Omega(\phi)\mathrm{M}_\Omega^\Pi(\mathcal{I}))\mathrm{X}_\Pi(v). \end{aligned}$$

Za vsaka $u, v \in V$ velja tudi $\phi(u, v) = \mathrm{X}_\Pi(u)^t\mathrm{M}_\Pi(\phi)\mathrm{X}_\Pi(v)$. Sklepaj, da je

$$\mathrm{M}_\Pi(\phi) = \mathrm{M}_\Omega^\Pi(\mathcal{I})^t\mathrm{M}_\Omega(\phi)\mathrm{M}_\Omega^\Pi(\mathcal{I}) = P^t\mathrm{M}_\Omega(\phi)P.$$

Opomba *Pomni: v dokazanem obrazcu nastopa transponiranka matrike P in ne njen obrat.*

⊳⊳⊳ 439., 440.

Rešitev 442. naloge

Vzemi poljubno bilinearno formo ϕ na prostoru V in definiraj preslikavi $\phi_s, \phi_a\colon V \times V \to \mathbb{F}$ s predpisoma $\phi_s(x, y) = (\phi(x, y) + \phi(y, x))/2$ in $\phi_a(x, y) = (\phi(x, y) - \phi(y, x))/2$ za vsaka $x, y \in V$. Ker je po predpostavki $2 = 1 + 1 \neq 0$, sta predpisa smiselna. Preveri, da je ϕ_s simetrična, ϕ_a pa alternirajoča bilinearna forma in da velja $\phi = \phi_s + \phi_a$.

Opomba *Podobno je vsaka kvadratna matrika (nad poljem, v katerem je $1 + 1 \neq 0$) vsota simetrične in antisimetrične matrike.*

Rešitev 443. naloge

Tu sta dve rešitvi. Prva temelji na diagonalizaciji simetrične matrike, druga pa na ortogonalizaciji vektorjev (pozor, Gram-Schmidtov postopek smeš uporabljati samo pri pozitivno definitni simetrični bilinearni formi – skalarnem produktu!).

1. način reševanja. Ker je karakteristični polinom matrike A enak $p_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 3)^2$, ima A dve lastni vrednosti $\lambda_1 = 0$ in $\lambda_2 = 3 > 0$ z geometrijskima kratnostma $d_1 = 1$ in $d_2 = 2$. Torej ima simetrična bilinearna forma ϕ ničelni indeks $\mathrm{ind}_0(\phi) = 1$ in pozitivni indeks $\mathrm{ind}_+(\phi) = 2$, zato ϕ ni pozitivno definitna. Poišči (v običajnem skalarnem produktu) kakšno ortogonalno bazo prostora $\mathbb{R}^{3\times1}$, sestavljeno iz lastnih vektorjev simetrične matrike A, naprimer

$$\{[1, 1, 1]^t, [1, -1, 0]^t, [1, 1, -2]^t\}.$$

Potem je

$$\{(1, 1, 1), (1, -1, 0), (1, 1, -2)\}$$

ortogonalna baza prostora $\mathbb{R}^3$ glede na formo ϕ.

2. način reševanja. Vzemi poljuben $v_1 \in V_1 = \mathbb{R}^3$, za katerega je $\phi(v_1, v_1) \neq 0$, naprimer $v_1 = (1, 0, 0)$. (Če tak $v_1 \in \mathbb{R}^3$ ne bi obstajal, bi bila forma ϕ trivialna in bi vsaka baza iz $\mathbb{R}^3$ bila ortogonalna glede na to simetrično bilinearno formo.) Zdaj poišči kakšen vektor $v_2 \in V_2 = \{v_1\}^\perp$ (V_2 je prostor vektorjev, pravokotnih na v_1 glede na ϕ), za katerega je $\phi(v_2, v_2) \neq 0$, naprimer $v_2 = (1, 2, 0)$. (In spet, če tak $v_2 \in V_2$ ne bi obstajal, bi vsaka baza podprostora V_2 dopolnjevala množico $\{v_1\}$ do ortogonalne baze prostora $\mathbb{R}^3$ glede na formo ϕ.) Končno, poišči poljuben $v_3 \in V_3 = \{v_1, v_2\}^\perp$, naprimer $v_3 = (1, 1, 1)$. Množica $\{v_1, v_2, v_3\}$ je potem ortogonalna baza za $\mathbb{R}^3$ glede na simetrično bilinearno formo ϕ. Iz $\phi(v_1, v_1) > 0$, $\phi(v_2, v_2) > 0$, $\phi(v_3, v_3) = 0$ sledi $\mathrm{ind}_+(\phi) = 2$ in $\mathrm{ind}_0(\phi) = 1$, torej forma ϕ ni pozitivno definitna.

⊳⊳⊳ 444.

Rešitev 444. naloge

Označi z n razsežnost prostora V. Želiš dokazati, da V premore tako bazo $\{v_1, \ldots, v_n\}$, da velja

$$\phi(v_i, v_j) = 0 \text{ za vsaka } i \neq j.$$

Loči dva primera.

(a) Za vsak $v \in V$ velja $\phi(v, v) = 0$. Premisli (ali poglej nalogo 445), da za vsaka $v, w \in V$ velja

$$\phi(v, w) = (\phi(v + w, v + w) - \phi(v - w, v - w))/4 = 0 - 0 = 0.$$

(Tu je uporabljena predpostavka $1 + 1 \neq 0$.) Torej je ϕ ničelna forma in vsaka baza prostora V je zanjo pravokotna.

(b) Obstaja tak $v \in V$, da $\phi(v, v) \neq 0$. Oglej si funkcional f_v na prostoru V, $f_v(w) := \phi(v, w)$ za vsak $w \in V$. Funkcional f_v je linearen in ni ničeln, saj $f_v(v) \neq 0$. Torej je razsežnost jedra $\mathrm{Ker}\, f_v$ enaka $n - 1$. Povrhu velja $\{v\}^\perp = \mathrm{Ker}\, f_v$, torej

$$V = \mathcal{L}\{v\} \oplus \{v\}^\perp.$$

Definiraj $v_1 := v$. Ob predpostavki (indukcija!), da $\{v\}^\perp$ premore pravokotno bazo $v_2, \ldots, v_n$ za zožitev $\phi|_{\{v\}^\perp \times \{v\}^\perp}$, je $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ pravokotna baza prostora V za formo ϕ.

Iz gornjega razmisleka je razvidno, da se je smiselno lotiti dokaza z indukcijo na razsežnost prostora V.

Opomba *Kje je v gornjem dokazu uporabljena simetričnost preslikave ϕ? Ali obstaja tudi taka pravokotna baza prostora V, v kateri je $\phi(v_i, v_i) = 1$ za vsak $i = 1, \ldots, n$? (Taka baza bi bila posplošitev ortonormirane baze.)*

⊳⊳⊳ 443., 450.

Rešitev 445. naloge

Vzemi poljubna $u, v \in V$, oglej si

$$\begin{aligned} Q(u+v) &= \phi(u+v, u+v) = \phi(u,u) + 2\phi(u,v) + \phi(v,v), \\ Q(u-v) &= \phi(u-v, u-v) = \phi(u,u) - 2\phi(u,v) + \phi(v,v) \end{aligned}$$

in izračunaj

$$\phi(u,v) = (Q(u+v) - Q(u-v))/4.$$

Opomba *Gornji račun je pravilen, če v polju $\mathbb{F}$ velja $4 \neq 0$, kar je enakovredno pogoju $1+1 \neq 0$.*

Rešitev 446. naloge

Formi Q: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ pripada v običajni urejeni bazi prostora $\mathbb{R}^3$ simetrična matrika

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

s karakterističnim polinomom $p_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 4)$ in z lastnimi vrednostmi $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 4$.

Torej je kanonska oblika forme Q za ortogonalne tranformacije enaka

$$2\xi^2 - 2\eta^2 + 4\zeta^2.$$

Natančneje, obstaja taka urejena baza v_1, v_2, v_3 prostora $\mathbb{R}^3$, da velja

$$Q(\xi v_1 + \eta v_2 + \zeta v_3) = 2\xi^2 - 2\eta^2 + 4\zeta^2.$$

Bazo, v kateri ima Q to koordinatno obliko, določajo normirani (glede na običajni skalarni produkt) lastni vektorji f_1, f_2, f_3 matrike A pri lastnih vrednostih λ_1, λ_2, λ_3 (ni potrebno preverjati, da so f_1, f_2 in f_3 paroma ortogonalni, saj pripadajo različnim lastnim vrednostim simetrične matrike). Prepričaj se, da za matriki

$$D := \operatorname{diag}(2, -2, 4), \quad P := [f_1, f_2, f_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}.$$

velja $A = PDP^t$. Če pišeš $v := [x, y, z]^t$, potem je

$$Q(x, y, z) = v^t A v = v^t P D P^t v = (P^t v)^t D P^t v.$$

Nove koordinate ξ, η, ζ se s starimi izražajo takole: $[\xi, \eta, \zeta]^t = P^{-1}v = P^t v$ oziroma

$$\xi = (x+z)/\sqrt{2}, \quad \eta = (x-z)/\sqrt{2}, \quad \zeta = y.$$

H kanonski obliki glede na obrnljive transformacije lahko zdaj matrikiubereš dve poti. Ena je dopolnjevanje do popolnih kvadratov, druga se opira na gornji rezultat, takole. Definiraj diagonalni matriki $F := \operatorname{diag}(1, -1, 1)$ in $E := \operatorname{diag}(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$. Potem je

$$A = PDP^t = (EP^t)^t F (EP^t),$$

zato ima Q kanonsko obliko

$$\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2$$

v novih koordinatah

$$\alpha = x + z, \quad \beta = x - z, \quad \gamma = 2y.$$

Opomba *Namen iskanja odlikovane (kanonske) oblike dane kvadratne forme je podoben namenu iskanja jordanske matrike endomorfizma: v kanonski obliki se namreč razkrijejo mnoge lastnosti dane kvadratne forme.*

⊳⊳⊳ 447., 448.

Rešitev 447. naloge

Napiši simetrično matriko A, ki pripada kvadratni formi Q v običajni urejeni bazi prostora $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{bmatrix} 13 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Njen karakteristični polinom je $p_A(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-16)$, ortonormirana lastna vektorja pri $\lambda_1 = 1$ sta $f_1 := \frac{1}{\sqrt{5}}[1, 0, 2]^t$, $f_2 := [0, 1, 0]^t$, pri $\lambda_2 = 16$ pa je normirani lastni vektor $f_3 := \frac{1}{\sqrt{5}}[-2, 0, 1]^t$. Če pišeš $D := \operatorname{diag}(1, 1, 16)$ in $S := [f_1, f_2, f_3]$, potem velja $A = SDS^t$. Forma Q ima obliko

$$\xi^2 + \eta^2 + 16\zeta^2$$

v novih koordinatah

$$\xi = (x + 2z)/\sqrt{5}, \quad \eta = y, \quad \zeta = (-2x + z)/\sqrt{5}.$$

Sklepaj, da so polosi danega elipsoida enake $1, 1, 1/4$.

⊳⊳⊳ 446., 448.

Rešitev 448. naloge

Formi Q priredi simetrično matriko

$$A := \begin{bmatrix} 11 & 8 & 2 \\ 8 & 5 & -10 \\ 2 & -10 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Ja: preveri, da so 9, -9 in 18 lastne vrednosti matrike A.

(b) Ja: sledi iz Sylvestrovega izreka (ali pa sklepaj kot v nalogi 446).

⊳⊳⊳ 446., 447.

Rešitev 449. naloge

Dokaz, da je $S^\perp$ podprostor prostora V, gre takole. Očitno je $0 \in S^\perp$. Če so $v_1, v_2 \in S^\perp$ in $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$ poljubni, potem za vsak $u \in S$ velja

$$\phi(u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 \phi(u, v_1) + \alpha_2 \phi(u, v_2) = 0,$$

torej je $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in S^\perp$. Zato je $S^\perp \leq V$. Podobno dokažeš tudi $S^\top \leq V$.

Rang bilinearne forme ϕ na V je definiran kot rang matrike, ki pripada formi ϕ glede na katero koli urejeno bazo prostora V. Pribij torej neko urejeno bazo Σ prostora V in označi z $A := \mathrm{M}_\Sigma(\phi)$ matriko, ki pripada formi ϕ v bazi Σ. Potem je

$$\operatorname{rang}(\phi) = \operatorname{rang} A = \dim V - \dim \operatorname{Ker} A.$$

Ker velja

$$v \in V^\perp \iff \forall u \in V : \phi(u,v) = 0 \iff \forall u \in V : \mathrm{X}_\Sigma(u)^t A \mathrm{X}_\Sigma(v) = 0 \iff$$

$$\iff A\mathrm{X}_\Sigma(v) = 0 \iff \mathrm{X}_\Sigma(v) \in \operatorname{Ker} A,$$

sta prostora $V^\perp$ in $\operatorname{Ker} A$ izomorfna. Torej je

$$\dim V^\perp = \dim \operatorname{Ker} A$$

in prva enakost v (36) je dokazana. Drugo enakost v (36) dokažeš na podoben način z upoštevanjem, da je

$$\dim V^\top = \dim \operatorname{Ker} A^t = \dim \operatorname{Ker} A = \dim V^\perp.$$

Opomba *Če je bilinearna forma ϕ simetrična, je $S^\perp = S^\top$ pravokotni podprostor množice S. Če je ϕ povrhu pozitivno definitna – torej skalarni produkt – imenujemo podprostor $S^\perp$ pravokotno dopolnilo ali ortogonalni komplement množice S.*

Rešitev 450. naloge

Označi z n razsežnost prostora V in z $\mathbb{F}$ polje, nad katerim je zgrajen prostor V. Želiš dokazati, da V premore tako urejeno bazo

$$e_1, f_1, e_2, f_2, \ldots, e_m, f_m, g_{2m+1}, g_{2m+2}, \ldots g_n,$$

da je vsak par vektorjev iz te baze pravokoten z izjemo parov e_i, f_i: $\phi(e_i, f_i) = 1$ (in seveda $\phi(f_i, e_i) = -1$). Loči dva primera.

(a) Za vsaka $v, w \in V$ velja $\phi(v,w) = 0$. Potem je ϕ ničelna forma in vsaka baza prostora V je zanjo pravokotna. V tem primeru pripada formi ϕ v vsaki bazi ničelna matrika.

(b) Obstajata taka $v, w \in V$, da $\phi(v,w) \neq 0$. Definiraj $e_1 := v$ in $f_1 := w/\phi(v,w)$. Potem je $\phi(e_1, f_1) = 1$. Ker je ϕ alternirajoča in $1 + 1 \neq 0$, velja tudi $\phi(f_1, e_1) = -1$, $\phi(e_1, e_1) = 0$, $\phi(f_1, f_1) = 0$ in prostor $V_1 := \mathcal{L}\{e_1, f_1\}$ je dvorazsežen. Prepričaj se, da je

$$V = V_1 \oplus V_1^\perp,$$

naprimer tako, da ugotoviš $V_1 \cap V_1^\perp = 0$ (če je $x \in V_1 \cap V_1^\perp$, je $x := \alpha e_1 + \beta f_1$ za primerna skalarja $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ in $\phi(x, e_1) = \phi(x, f_1) = 0$, od koder $\alpha = \beta = 0$ in $x = 0$) in $\dim V_1^\perp = n-2$ (definiraj linearno preslikavo $\mathcal{A}$: $V \to \mathbb{F}^2$ s predpisom $\mathcal{A}$: $z \mapsto [\phi(z, e_1), \phi(z, f_1)]$, preveri $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = V_1^\perp$ in $\operatorname{Im} \mathcal{A} = \mathbb{F}^2$, nato izračunaj $\dim V_1^\perp = \dim V - \dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = n - 2$).

Zdaj sestavi indukcijski dokaz.

Opomba *Posledica: rang alternirajoče bilinearne forme je vselej sodo število. Število diagonalnih blokov $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ v kanonski matriki alternirajoče forme je enako polovici ranga te forme.*
Če v polju $\mathbb{F}$ velja $1 + 1 = 0$ in je $\phi(y,x) = -\phi(x,y)$ za vsaka $x, y \in V$, potem je ϕ simetrična (saj $1 = -1$) in ne moremo sklepati $\phi(x,x) = 0$ za vse $x \in V$. Zato definicijo alternirajoče bilinearne forme včasih popravimo tako, da zahtevamo $\phi(x,x) = 0$ za vse $x \in V$. Tako popravljena definicija se v primeru, ko je v polju $1+1 \neq 0$, ujema z običajno definicijo alternirajoče bilinearne forme. Z novo definicijo velja trditev v nalogi 450 nad vsakim poljem.

⋙ 444., 451.

Rešitev 451. naloge

Preveri bilinearnost. Ker za vsak $x \in \mathbb{R}^3$ velja $\phi(x,x) = 0$, je ϕ alternirajoča. V običajni urejeni bazi Σ prostora $\mathbb{R}^3$ pripada formi ϕ matrika

$$A := \mathrm{M}_\Sigma(\phi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(Zaradi $A^t = -A$ je tu še en dokaz, da je ϕ alternirajoča!) Ker je ϕ neničelna alternirajoča forma na $\mathbb{R}^3$, je možna ena sama kanonska matrika (glej tudi nalogo 450), to je

$$K := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poišči še tako urejeno bazo $\Omega := \{u, v, w\}$ prostora $\mathbb{R}^3$, da bo $K = \mathrm{M}_\Omega(\phi)$, takole: iz matrike A je razvidno, da lahko vzameš $u := (1,0,0)$ in $v := (0,1,0)$. Tretji bazni vektor $w := (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$ izberi tako, da bo veljalo $\phi(u,w) = \phi(v,w) = 0$. Torej je $w_2 - w_3 = -w_1 + w_3 = 0$ in lahko pribiješ $w := (1,1,1)$. Naredi še preizkus:

$$\mathrm{M}_\Omega(\phi) = \mathrm{M}_\Sigma^\Omega(\mathcal{I})^t \mathrm{M}_\Sigma(\phi) \mathrm{M}_\Sigma^\Omega(\mathcal{I}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = K.$$

⋙ 450., 452.

Rešitev 452. naloge

Za vsak $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ definiraj preslikavo $\psi_{\vec{a}}$: $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ s predpisom $\psi_{\vec{a}}(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{a})$ za vsaka $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$. Preveri, da je $\psi_{\vec{a}}$ alternirajoča bilinearna forma na $\mathbb{R}^3$.

Iščeš tak $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, da velja $\phi = \psi_{\vec{a}}$. Bilinearni formi na istem prostoru sta enaki natanko takrat, ko se ujemata na isti bazi prostora oziroma ko jima v isti bazi pripadata enaki matriki. Torej zadošča poiskati tak $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, da velja $\mathrm{M}_\Sigma(\phi) = \mathrm{M}_\Sigma(\psi_{\vec{a}})$, kjer je $\Sigma := \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ običajna urejena baza prostora $\mathbb{R}^3$. Piši $\vec{a} := (a_1, a_2, a_3)$. Gornja matrična enakost je potem

$$\begin{bmatrix} \phi(\vec{\imath},\vec{\imath}) & \phi(\vec{\imath},\vec{\jmath}) & \phi(\vec{\imath},\vec{k}) \\ \phi(\vec{\jmath},\vec{\imath}) & \phi(\vec{\jmath},\vec{\jmath}) & \phi(\vec{\jmath},\vec{k}) \\ \phi(\vec{k},\vec{\imath}) & \phi(\vec{k},\vec{\jmath}) & \phi(\vec{k},\vec{k}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ker je ϕ alternirajoča (in ker $1+1 \neq 0$ v polju $\mathbb{R}$), velja $\phi(e_i, e_i) = 0$, zato matrična enakost ni protislovna. Sklepaj, da iskani vektor $\vec{a}$ obstaja in da je enak

$$\vec{a} = (\phi(\vec{\jmath},\vec{k}), \phi(\vec{k},\vec{\imath}), \phi(\vec{\imath},\vec{\jmath})).$$

Torej je $\vec{a}$ enolično določen z alternirajočo bilinearno formo ϕ.

⊳⊳⊳ 251., 451.

Pot do jordanske matrike J endomorfizma $\mathcal{A}: V \to V$ n-razsežnega kompleksnega prostora V

$p_\mathcal{A} \in \mathbb{C}_n[\lambda]$ je karakteristični polinom endomorfizma $\mathcal{A}$

k_i je algebrska kratnost lastne vrednosti λ_i

$$p_\mathcal{A}(\lambda) := \det(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}) = (-1)^n \det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})$$

$$p_\mathcal{A}(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{k_s}$$

λ_i so lastne vrednosti endomorfizma $\mathcal{A}$

$$m_\mathcal{A}(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$$

$m_\mathcal{A}$ je minimalni polinom endomorfizma $\mathcal{A}$

r_i je red lastne vrednosti λ_i, $m_\mathcal{A} \mid p_\mathcal{A}$, $1 \le r_i \le k_i$

jordanska celica pri lastni vrednosti λ_i

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

$d_{ij} := \dim \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{I})^j$, $d_i = d_{i1}$ je geometrijska kratnost lastne vrednosti λ_i, $d_{i1} < d_{i2} < \cdots$ $\cdots < d_{ir_i} = d_{ir_{i+1}} = \cdots$, velja zveza $k_i = d_{ir_i}$

$J_i \in \mathbb{C}^{k_i \times k_i}$ je jordanski blok lastne vrednosti λ_i

$$J_i := \begin{bmatrix} \boxed{\lambda_i} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \boxed{\lambda_i} & & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix}\lambda_i & 1 \\ & \lambda_i\end{matrix}} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \boxed{\begin{matrix}\lambda_i & 1 \\ & \lambda_i\end{matrix}} \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & r_i\left\{\boxed{\begin{matrix}\lambda_i & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda_i\end{matrix}}\right. \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & r_i\left\{\boxed{\begin{matrix}\lambda_i & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda_i\end{matrix}}\right. \end{bmatrix}_{k_i \times k_i}$$

c_{i1} celic velikosti 1×1

c_{i2} celic velikosti 2×2

.....

c_{ir_i} celic velikosti $r_i\times r_i$

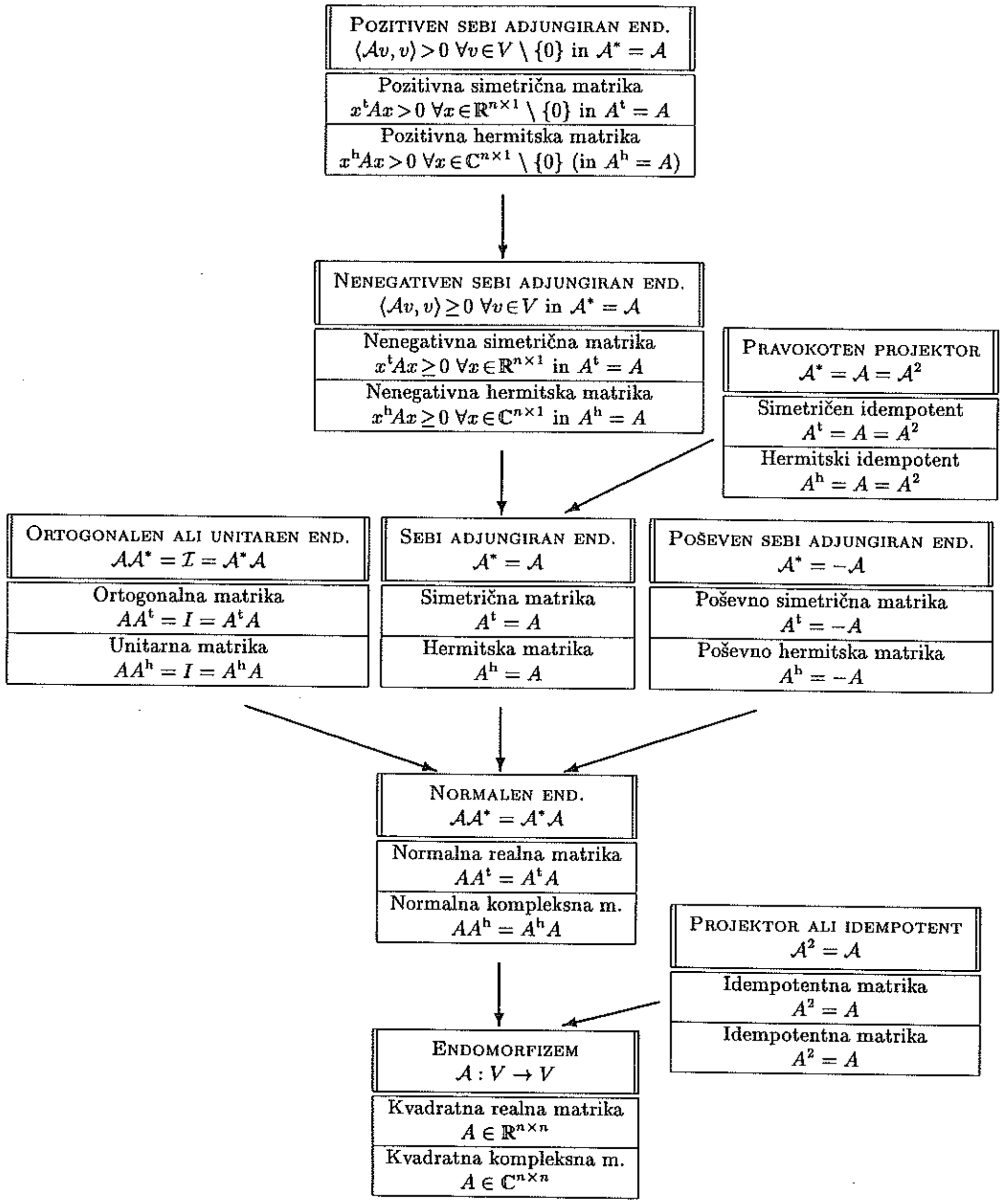
število jordanskih celic v J_i je enako geometrijski kratnosti lastne vrednosti λ_i: $d_i = c_{i1} + \cdots + c_{ir_i}$

$$c_{ij} = 2d_{ij} - d_{i,j-1} - d_{i,j+1}$$

$J \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je jordanska matrika endomorfizma $\mathcal{A}$

$$J := \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}$$

Preglednica posebnih endomorfizmov



Izbor spremljajoče literature

Slovenski učbeniki

J. Grasselli — Linearna algebra. Linearno programiranje, ZOTKS, Ljubljana 1986.

F. Križanič — Linearna algebra in linearna analiza, DZS, Ljubljana 1993.

M. Omladič — Končnorazsežni vektorski prostori, DMFA SRS, Ljubljana 1986.

Tuji učbeniki

S. Axler — Linear algebra done right, Springer, New York 1996.

K. Jänich — Linear algebra, Springer, New York 1994.

S. Lang — Linear algebra, Springer, New York 1993.

Slovenski zbirki nalog

M. Dobovišek, D. Kobal, B. Magajna — Naloge iz algebre I, DMFAS, Ljubljana 1990.

E. Kramar — Rešene naloge iz linearne algebre, DMFAS, Ljubljana 1994.

Pedagoška fakulteta Univerze v Ljubljani
Oddelek za matematiko in računalništvo

Kolar
Zgrablić
Več kot nobena, a manj kot tisoč in ena rešena naloga iz
LINEARNE ALGEBRE
K

Matej Kolar
Boris Zgrablić

Več kot nobena,
a manj kot tisoč in ena
rešena naloga iz

LINEARNE ALGEBRE

PITAGORA