DIVISIBILIDAD – 5to de secundaria.

DEFINICIÓN:

I. CONCEPTO

Se dice que un número es divisble por otro cuando el cociente de su división resulta siempre un número entero.
Sean «a», «b» y «c» números enteros.
Si:

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline 0 & c \end{array}$$

o $\dfrac{a}{b} = c \qquad b \in Z^+$

Entonces podemos afirmar lo siguiente:

> «a» es múltiplo de «b»
> «b» es divisor de «a»

Notación:

$\overset{o}{n} \twoheadrightarrow$ se lee múltiplo de n

Ejemplo:

$\overset{o}{11} \twoheadrightarrow$ se lee múltiplo de 11

II. Representación general de los múltiplos de un número

Observemos los múltiplos de $\overset{o}{7}$:

$\overset{o}{7}$: ..., –14; –7; 0; 7; 14; 21; ...

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

..., 7(–2); 7(–1); 7(0); 7(1); 7(2); 7(3); ...

En general, todo múltiplo de siete es de la forma:

$\boxed{\overset{o}{7} = 7k}$ con $k \in Z$

En general:

$$\boxed{\overset{o}{n} = nk}$$

III. NÚMEROS NO DIVISIBLES

Ejemplos:

Expresa 43 en función de $\overset{o}{9}$

Por defecto

$$\begin{array}{r|l} 43 & 9 \\ \hline 7 & 4 \end{array}$$

$43 = 9 \times 4 + 7$

$43 = \overset{o}{9} + 7$

↳ sobran 7

Por exceso

$$\begin{array}{r|l} 43 & 9 \\ \hline 2 & 5 \end{array}$$

$43 = 9 \times 5 - 2$

$43 = \overset{o}{9} - 2$

↳ faltan 2

- **Propiedad:**

  Si:

  $N = \overset{o}{A} + 6$

  $N = \overset{o}{B} + 6$ ⟶ residuos iguales

  $N = \overset{o}{C} + 6$

  $\Rightarrow N = \overset{o}{\overline{MCM(A, B, C)}} + 6$

IV. OPERACIONES CON MÚLTIPLOS

1. $\boxed{\overset{o}{n} + \overset{o}{n} + \overset{o}{n} = \overset{o}{n}}$
2. $\boxed{\overset{o}{n} - \overset{o}{n} = \overset{o}{n}}$
3. $\boxed{k \cdot \overset{o}{n} = \overset{o}{n}}$ cuando $k \in Z$
4. $\boxed{\left(\overset{o}{n}\right)^k = \overset{o}{n}}$ cuando $k \in Z$

V. TEOREMA DE ARQUÍMEDES

Casos prácticos:

> Caso 1: si $5a = \overset{o}{9} \twoheadrightarrow a = \overset{o}{9}$
>
> Caso 2: $9x = \overset{o}{45} \twoheadrightarrow x = \overset{o}{5}$

Ejercicios propuestos:

1. De los primeros 600 números enteros positivos, ¿cuántos son múltiplos de 7?

2. ¿Cuántos números de 4 cifras son $\overset{\circ}{7} + 2$?

3. Al dividir «M» entre 7, el residuo fue 5; además, «N», al dividirse entre 7, dejó un residuo igual a 4. ¿Qué residuo se obtendrá al dividir «M × N» entre 7?

4. ¿Cuántos números de 4 cifras son múltiplos de 17 y terminan en cifra 3?

Resolución

Sea el número:

$\overline{abc3} = \overset{\circ}{17} = 17k$

Entonces:

$1000 \leq 17k < 10\,000$

$\frac{1000}{17} \leq 17k < \frac{10000}{17}$

$58; \ldots \leq K < 588, \ldots$

Valores posibles de k:

59, 60, 61, …, 588

Como debe terminar en cifra 3 los valores que tomen «k» debe de terminar en 9

Valores de k: 59; 69; 79; …; 579

Valores permitidos $= \frac{579 - 59}{10} + 1 = 53$

$\therefore$ 53 números

5. ¿Cuántos números de 3 cifras son múltiplos de 15 y terminan en cifra 0?

6. Si $5A = \overset{\circ}{10}$ y $3B = \overset{\circ}{15}$ (A y B son enteros), entonces el producto A x B es necesariamente:

7. Simplifica:

$E = (\overset{\circ}{7} + 1) + (\overset{\circ}{7} + 2) + (\overset{\circ}{7} + 3) + \ldots + (\overset{\circ}{7} + 70)$

8. Si $\overline{76m9n}$ es un múltiplo de 107, determina el máximo valor de (m + n)

Resolución:

$\overline{76m9n} = \overset{\circ}{107}$

Realizamos la descomposición polinómica del numeral

$76090 + 100m + n = \overset{\circ}{107}$

64748 64748

$\overset{\circ}{107} + 13 \quad \overset{\circ}{107} - 7$

$13 + n - 7m = \overset{\circ}{107}$

$\downarrow \quad \downarrow$

1 2

8 3

$m + n = 1 + 2 = 3$

$m + n = 8 + 3 = 11$

$\text{valor}_{(\text{máx})} = 11$

9. Si $\overline{52a6b}$ es un múltiplo de 115, calcula el máximo valor de a + b

10. Del 1 al 358, determina:

I. ¿Cuántos son múltiplos de 7?

II. ¿Cuántos no son múltiplos de 11?

Da como respuesta la suma de ambos términos

11. El numeral que resulta de: $\overline{aaa} - \overline{bbb}$ siempre es divisible por:

12. En una reunión se cuenta entre 400 y 450 personas, de las cuales 3/7 son varones; los 2/5 usan lentes y los 2/3 son profesionales. ¿Cuántas mujeres había en le reunión?

Resolución

400 < personas < 450

$\frac{3}{7} \times$ total = son varones

$\frac{2}{5} \times$ total = usan lentes

$\frac{2}{5} \times$ total = son profesionales

Total → múltiplo de 7

Total → múltiplo de 5

Total → múltiplo de 3

Total = $\overset{\circ}{\overline{\text{MCM}(7; 5; 3)}}$

Total = $\overset{\circ}{105}$

$\Rrightarrow$ Total = 420

Cantidad de mujeres = $\frac{4}{7} \times 420$

Rpta.: hay 240 mujeres

13. En un barco con 180 personas, ocurre un naufragio y de los sobrevivientes se conoce que: 2/5 fuman, 3/7 son casados y 2/3 son ingenieros. Determina cuántas personas murieron en dicho accidente.

14. Sabiendo que:

$A = \overline{abc3}_8 \times \overline{aa102}_8 \times \overline{bb32}_8$, calcula el residuo de dividir «A» entre 8.

Ejercicios pre-uni y concursos nacionales:

1. Sea $\overline{abc}$ un número de tres dígitos tal que $\overline{abc} = 5 \times a \times b \times c$. Halla $a + b + c$.

2. Encontrar todos los números de tres dígitos $\overline{abc}$ que tienen la siguiente propiedad: $\overline{abc}$ es múltiplo de 9, $\overline{cab}$ es múltiplo de 11 y $\overline{ac}$ es un número primo.

3. Sea N un número de 21 dígitos, donde todos son iguales a 1 excepto el dígito central. Si N es múltiplo de 7. ¿cuál es el dígito central?

4. ¿Cuál es el menor entero positivo $a > 1$ tal que $(5a + 1)(3a + 2)$ es múltiplo de 15?

5. ¿Cuántos elementos n del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ cumplen que $2^{2^n} + 2$ es múltiplo de 11?