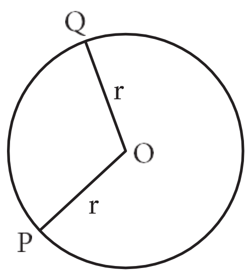
CIRCUNFERENCIAS – 5to de secundaria.

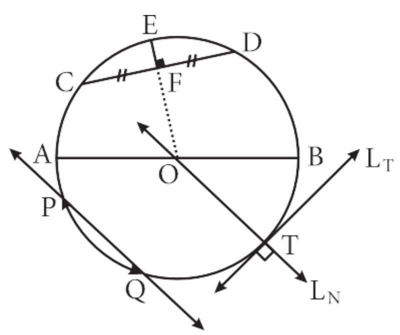
DEFINICIÓN:

Es el conjunto de todos los puntos de un plano que equidistan de otro punto (centro) de dicho plano.



- P y Q son puntos de la circunferencia.
- OP = OQ = radio = r

LÍNEAS ASOCIADAS A LA CIRCUNFERENCIA



CIRCUNFERENCIA DE CENTRO "O" Y RADIO "R"

Cuerda: $\overline{CD}$

Diámetro: $\overline{AB}$

Flecha o sagita: $\overline{EF}$

Recta secante: $\overline{PQ}$

Recta tangente: $\overleftrightarrow{L_T}$ (T: punto de tangencia)

Recta normal: $\overleftrightarrow{L_N}$

Arco PQ: $\overset{\frown}{PQ}$

TEOREMAS FUNDAMENTALES

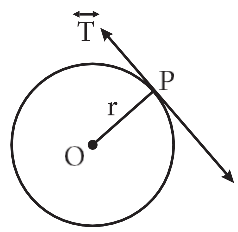
1. Teorema del radio y la tangente

P: punto de tangencia

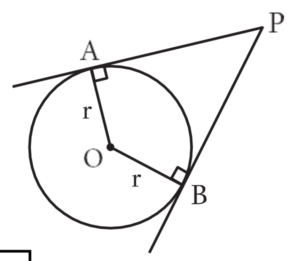
R: radio

T: recta tangente

$\Rightarrow \overline{OP} \perp \overleftrightarrow{T}$



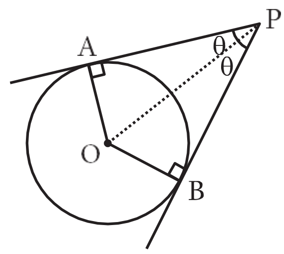
2. Teorema de las dos tangentes



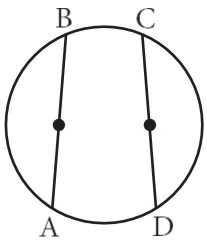
$\boxed{AP = BP}$

A y B son puntos de tangencia

3. Teorema de la bisectriz del ángulo formado por 2 tangentes:



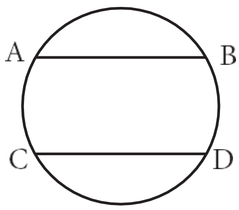
4. Si:



Si AB = CD

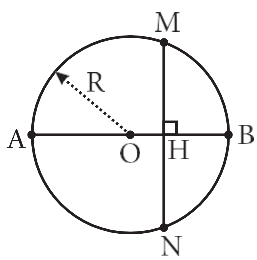
Entonces: $\boxed{m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{CD}}$

5. Si $\overline{AB}$ // $\overline{CD}$



Entonces: $\boxed{m\overset{\frown}{AC} = m\overset{\frown}{BD}}$

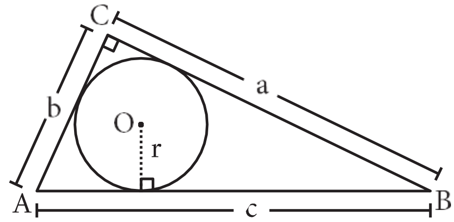
6. Si



Entonces: MH = HN

$m\overset{\frown}{AM} = m\overset{\frown}{AN}$ y $m\overset{\frown}{MB} = m\overset{\frown}{NB}$

Teorema de Poncelet

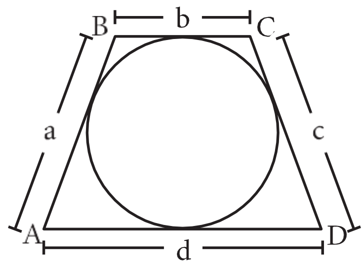


$\boxed{a + b = c + 2r}$

o: incentro

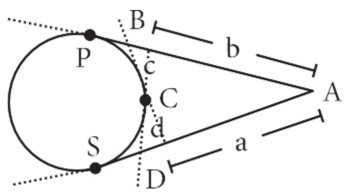
r: inradio

Teorema de Pitot



$\boxed{a + c = b + d}$

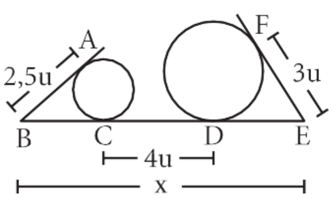
Teorema de Steiner



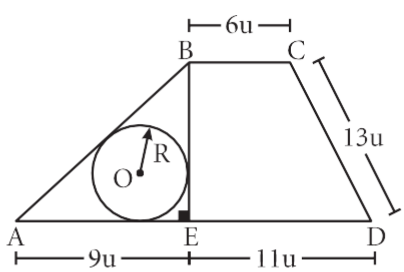
$\boxed{a - c = b - d}$

Ejercicios propuestos:

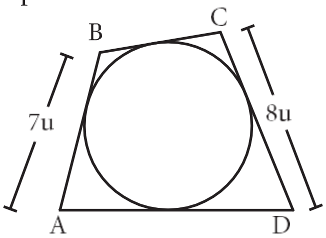
1. Calcula «x» si A, C, D y F son puntos de tangencia.



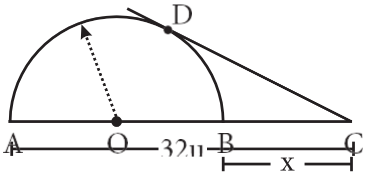
2. Calcula la longitud del inradio si $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ son paralelos.



3. Calcula el perímetro del cuadrilátero ABCD.

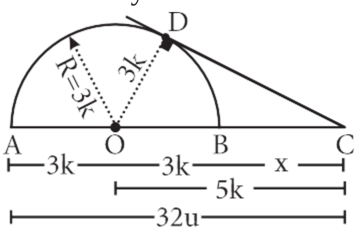


4. Calcula «x» si 4AO = 3CD y D es punto de tangencia.



Resolución:

Del dato AO = 3K y CD = 4K



Trazamos $\overline{OD} \perp \overline{CD} \Rightarrow \overline{OD} = R = 3K$

Triángulo rectángulo ODC (37° y 53°)

$\Rightarrow$ OC = 5K

Sabemos: OB = R = 3K $\Rightarrow$ x = 2K …. (1)

Del gráfico:

3K + 5K = 32u

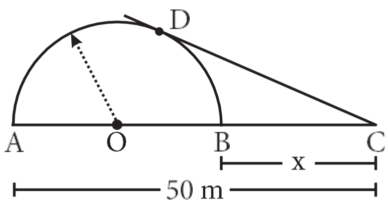
8K = 32 u

K = 4u

Reemplazando en ecuación (1):

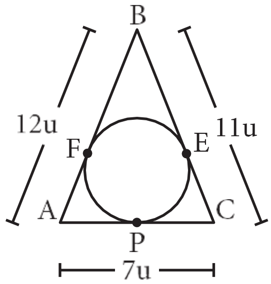
$\therefore$ x = 2(4) = 8 u

5. Calcula «x», si D es punto de tangencia y 15AO = 8CD.

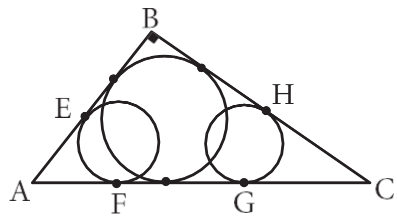


6. En una circunferencia de radio 25 u, se tiene una cuerda cuya longitud es 48 u, calcula la longitud de la flecha correspondiente.

7. Calcula “x” si E, F y P son puntos de tangencia.

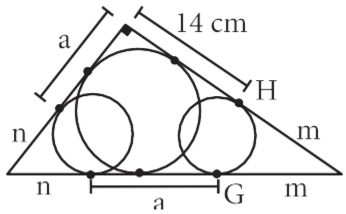


8. Calcula «R» si: BE = FG, BH = 14 cm y E, F, G y H: son puntos de tangencia.



Resolución:

Del dato: BE = FG = a, sea HC = b = GC, AE = C = AF (teorema de las tangentes).

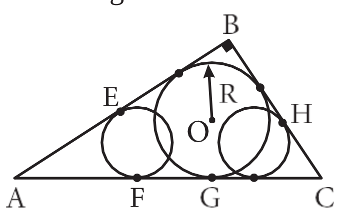


En el triángulo rectángulo ABC, aplicamos el teorema de Poncelet.

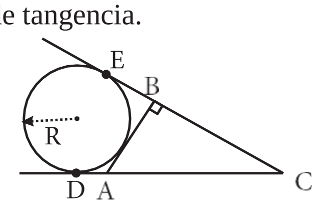
$\cancel{a} + \cancel{n} + 14cm + \cancel{m} = \cancel{n} + \cancel{a} + \cancel{m} + 2R$

R = 7 cm

9. Calcula «R» si BE = FG, BH = 12 cm, E, F, G y H son puntos de tangencia.



10. Calcular “R” si AB = 9 u , BC = 40 u y D,E son puntos de tangencia.



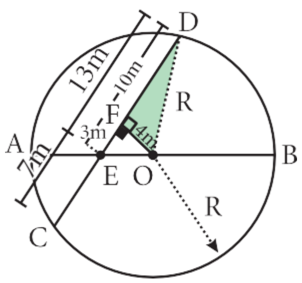
11. Si 20 u es la suma de las longitudes de los radios de las circunferencias exinscritas relativas a los catetos de un triángulo rectángulo, calcula la longitud de la hipotenusa.

12. En una circunferencia, un diámetro divide a una cuerda en dos segmentos que miden 7 m y 13 m. Si la distancia del centro de la circunferencia a la cuerda mide 4 m, calcula la longitud del radio de dicha circunferencia.

Resolución:

Sea: $\overline{AB}$: Diámetro y $\overline{CD}$: Cuerda

$\overline{OF}$: Distancia del centro a la cuerda CD = 20 m y OF ⊥ CD



$\Rightarrow$ CF = FD = 10 m

Por tanto en el triángulo rectángulo OFD, aplicamos el teorema de Pitágoras.

$R^2 = (4m)^2 + (10m)^2$

$R^2 = 116m^2$

$R = \sqrt{116}\ m = \sqrt{4 \times 29}\ m$

$\therefore R = 2\sqrt{29}\ m$

13. En una circunferencia, el diámetro $\overline{AB}$ divide a una cuerda CD (E: punto de intersección de la cuerda y el diámetro; AE > EB) en dos segmentos, CE (11 cm) y ED (21 cm). Si la distancia del centro de la circunferencia a la cuerda AB mide 12 cm, calcule AE.

14. Se tiene tres circunferencias de radios 1 u, 2 u y 3 u, tangentes exteriores entre sí, dos a dos. Calcula la longitud del radio de la circunferencia inscrita al triángulo formado al unir los centros de las primeras circunferencias.

Ejercicios pre-uni y concursos nacionales:

1. Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia. Las prolongaciones de los segmentos AD y BC se cortan en el punto E. Si $AC = CE, m\widehat{AD} = 88°$ y $m\widehat{BC} = 110°$, Hallar la medida del ángulo CAD.

2. $ABCD$ es un trapecio de bases AB y CD con $< ABC =< BCD = 90°, AB = 4$ y $CD = 9$. Si la circunferencia de diámetro BC es tangente a AD, determine la longitud del lado BC.

3. Sea $ABCDEF$ un hexágono circunscrito a una circunferencia. Si $AB = 1, BC = 2, CD = 3, DE = 4$ y $EF = 5$. ¿cuánto mide FA?

4. El cuadrilátero $ABCD$ está inscrito en una circunferencia de tal modo que AD es diámetro. Si $AB = BC = 1$ y $AD = 4$, determinar la longitud del segmento CD.

5. Si ABC es un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de radio 1 y P es un punto del arco menor BC, hallar $PA^2 + PB^2 + PC^2$