Optimisation hivernale

Deniza Alzhanova, Vi Long Luong, Axel Cochepin
Aristide Bronchard, Mohamed Aziz Amiri

June 2023

1 Introduction

La ville de Montréal est confrontée chaque année à des épisodes neigeux de grande envergure entre les mois d'octobre et d'avril. Afin de prévenir toute paralysie de l'activité économique, la municipalité met en place des équipes de déneigement. Cependant, le déneigement représente un coût significatif pour la municipalité. Face à cette situation, la municipalité a confié à notre entreprise mère la mission d'étudier et de proposer des solutions pour minimiser les coûts des opérations de déblaiement sur une journée type.

Notre objectif principal est de trouver des moyens de réduire les trajets des appareils de déblaiement dans la ville de Montréal, tout en garantissant que toutes les zones affectées soient traitées. Pour y parvenir, notre équipe devra analyser les niveaux de neige sur les routes à l'aide d'un drone, et déterminer les itinéraires optimaux pour les véhicules chargés du déneigement des secteurs identifiés par le drone.

2 Trajet minimal du drone

2.1 Mise en place

La première mission consiste à optimiser les opérations de déploiement des drones à Montréal en minimisant les coûts, en utilisant des données précises et en proposant des solutions efficaces afin de rechercher le chemin le plus optimal qui nous permettra de parcourir toutes les routes de la ville dans le but d'analyser le niveau de neige de chaque route.

2.2 Hypothèses et choix de modélisation

En analysant le problème de déneigement des routes de Montréal, nous avons constaté des similitudes avec le problème du postier chinois. Comme dans le problème du voyageur de commerce, notre objectif était de trouver le trajet le plus optimal pour traverser tous les segments du réseau routier tout en retournant au point de départ.

Toujours dans cette direction, nous avons décidé de représenter Montréal sous la forme d'un graphe afin de pouvoir adapter le problème du postier chinois à notre situation. Pour ce faire, nous considérons les routes à déneiger comme des arêtes du graphe et les intersections comme les sommets. Le poids qu'on met sur les arêtes représente la distance entre les deux intersections. Comme le drone ne se limite pas aux sens des routes, nous avons pu simplifier le problème en modélisant Montréal comme un graphe non orienté.

2.3 Solutions retenues et comparaisons

Notre objectif est de trouver une manière de parcourir les routes de manière optimale avec un coût le plus bas possible, tout en revenant au point de départ. En termes de graphe, cela revient à trouver un cycle qui passe "exactement" une fois par chaque arête du graphe, un tel cycle s'appelle un cycle eulérien.

Cependant, ce cycle est déterminé seulement pour une famille de graphes eulériens. Un graphe connexe non orienté est eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair. Donc, la première chose à faire est de rendre le graphe de Montréal eulérien si ce n'est pas déjà le cas. D'abord, nous devons identifier tous les sommets de degrés impairs. Ensuite, à partir de ces sommets, nous serons capables de construire un graphe complet avec les arêtes dont le poids est la longueur du plus court chemin liant les deux sommets. Puis, il faut chercher un couplage de poids minimal et intégrer ces nouvelles arêtes du couplage dans notre graphe de départ. Ainsi, nous obtiendrons un graphe eulérien. La dernière chose à faire est de trouver un cycle eulérien dans ce nouveau graphe. Ce cycle représente le trajet optimal du drone, en minimisant les distances et le temps nécessaires pour déneiger toutes les routes de la ville.

2.4 Étude du coût et mise en place réaliste

En étudiant de près notre solution, nous avons constaté que pour rendre le graphe eulérien, nous devrions ajouter des arêtes "fictives" dans le graphe pour parcourir chaque arête exactement une fois, ce qui ne semble pas possible dans la réalité, car cela signifie qu'on doit rajouter des routes entre les deux sommets.

Afin de résoudre ce problème, nous avons décidé de trouver les "vrais" chemins dont la longueur est égale à celle renseignée sur l'arête fictive correspondante en utilisant l'algorithme de Dijkstra. Cette nouvelle approche nous oblige à emprunter chaque arête plus d'une fois, mais cela reste optimal car nous avons choisi le chemin le moins coûteux pour aller d'un sommet à l'autre.

Pour évaluer les coûts des opérations de déneigement, nous avons pris en compte le coût du drone lui-même. Dans notre étude, nous avons utilisé des drones de haute performance disponibles auprès de la municipalité, qui ont un coût de 100 € par jour. De plus, nous avons considéré un coût de 0,01 € par kilomètre parcouru par le drone.

En ce qui concerne le nombre de jours nécessaires, nous avons pris en compte la durée quotidienne de fonctionnement du drone, qui est de 12 heures. Cependant, nous avons fait l'hypothèse que le drone ne peut pas travailler en dehors de cette période quotidienne définie. Cette hypothèse nous permet de nous concentrer sur l'optimisation des trajets du drone dans le cadre de contraintes réalistes.

En nous basant sur cette hypothèse, et en considérant que la vitesse du drone est de 40 km/h, nous avons constaté que le fait d'envoyer seulement un drone pour effectuer une étude complète de l'intégralité de la ville de Montréal peut prendre un temps considérable, ici 10 jours. Mais en réalité, cela pose un problème majeur, car on ne peut pas attendre 10 jours pour obtenir les informations sur la ville, donc cela nous pousse à optimiser notre approche en envoyant un drone par quartier. En faisant cela, les drones commencent au même moment et cela nous permet de réduire considérablement le temps, qui passe de 10 jours à seulement 3 jours.

Pour calculer le coût, on peut appliquer la formule suivante pour chaque quartier :

$$P = 100 * J + 0.01 * D$$

avec J = nombre de jours nécessaires, D = longueur totale du parcours

Par exemple, pour Outremont, nous avons trouvé une longueur de parcours de 54 km, donc le coût dans ce quartier sera de 100,54 €.

Finalement, pour obtenir le coût total du parcours du drone sur l'ensemble de Montréal, il suffit de faire la somme des coûts de tous les quartiers.

3 Le déneigement de Montréal

3.1 Hypothèses et choix de modélisation

Le problème de déneigement est assez similaire à celui du drone, c'est-à-dire trouver un chemin optimal pour parcourir toutes les routes de la ville. La différence majeure est que cette fois-ci, nous devrons prendre en compte les sens des routes, ce qui nous oblige à modéliser la carte de Montréal par un graphe orienté.

3.2 Solutions retenues et comparaisons

Les étapes à suivre restent inchangées, c'est-à-dire rendre le graphe eulérien et y trouver un cycle eulérien. Cependant, en rendant le graphe orienté, nous avons constaté que nous devons travailler sur un graphe non fortement connexe, donc incapable de rendre l'ensemble du graphe eulérien. Afin de pallier ce problème, nous allons déterminer les composants fortement connexes de ce graphe et effectuer le même processus sur ces composants. Ensuite, nous allons condenser ce graphe en considérant chaque composant comme un nouveau sommet. Malheureusement, le nouveau graphe obtenu n'est toujours pas eulérien, donc nous devrons trouver une autre approche. Cette fois-ci, nous effectuerons un parcours en profondeur (DFS) adapté qui donne un chemin pour parcourir toutes les arêtes du graphe condensé. Comme ce nouveau graphe sera beaucoup plus petit que l'ancien graphe, le parcours en profondeur sera assez efficace pour déterminer le chemin.

En plus de cette approche, nous avons essayé de n'effectuer qu'un seul parcours en profondeur (DFS) sur l'ensemble du graphe pour trouver le chemin à parcourir. Un résultat assez étonnant est que sur les petits quartiers comme Outremont et Verdun, le DFS semble plus efficace car il permet d'obtenir une distance totale de parcours moins importante, et le temps d'exécution est également plus rapide. Cependant, si nous l'essayons sur des quartiers un peu plus grands comme Saint-Léonard, le DFS échoue car il entraîne un nombre important de récursions, ce qui dépasse la limite de la récursion. Par conséquent, sur Saint-Léonard, nous sommes obligés d'opter pour l'approche décrite ci-dessus.

3.3 Étude du coût et mise en place réaliste

Pour évaluer le coût des déneigement, on a fait une comparaison de deux types de déneigeuses disponibles. Le prix de chaque déneigeuse dépend de différents critères :
— Coût fixe : type I : 500€/jour, type II : 800 €/jour
— Coût kilométrique : type I : 1.1 €/km, type II : 1.3 €/km
— Coût horaire les 8 premières heures : type I : 1.1 €/h, type II : 1.3 €/h
— Coût horaire au delà des 8 premières heures : type I : 1.3 €/h, type II : 1.5 €/h
— Vitesse moyenne : type I : 10 km/h, type II : 20 km/h
En ce qui concerne le nombre de jours nécessaires, nous avons pris les mêmes hypothèses que celles du drone, à savoir : chaque déneigeuse travaille que 12 heures par jour. Ensuite, pour calculer le coût total, on peut appliquer les formules suivantes.

$$Coût\_total = Coût\_fixe + Coût\_kilométrique + Coût\_horaire$$

$$Coût\_fixe = c1 * nombre\_de\_jours$$

$$Coût\_kilometrique = c2 * distance\_totale$$

$$Coût\_horaire = (Coût\_8\_premieres\_heures + Coût\_4\_derniers\_heures) * nombre\_de\_jours$$

avec c1 et c2 sont des coefficients donnés dans le sujet.

Après avoir comparé les prix des différents types, nous avons remarqué que pour des distances inférieures à 100 km, le type 1 semble plus avantageux. Cependant, pour des distances légèrement plus grandes, le type 2 et le type mixte offrent plus d'avantages.

En réalité, l'envoi d'une seule déneigeuse pour l'ensemble de la ville de Montréal ne permettrait pas de répondre à l'objectif de dégager rapidement les routes, car cela prendrait plusieurs jours et le coût serait élevé.

Afin d'optimiser la solution, nous allons appliquer notre algorithme à chaque quartier de Montréal, et une fois les itinéraires obtenus, nous enverrons une déneigeuse par quartier. Cela nous permettra de réduire considérablement le temps de déneigement et de libérer progressivement la ville de Montréal, tout en maintenant un coût raisonnable.

4 Limites de la solution et Ouvertures

4.1 Récapitulatif des hypothèses

Dans le but de simplifier notre étude de déneigement de la ville de Montréal, nous avons posé certaines hypothèses telles que :
- Le drone de repérage se déplace à une vitesse constante de 40 km/h.
- Le drone de repérage est actif douze heures par jour.
- À la fin de la journée, le drone stationne à l'endroit où il se trouve à l'instant t, sans revenir au point de départ. Il a une autonomie infinie.
- L'ensemble des routes des quartiers d'Outremont, de Verdun ainsi que de Saint-Léonard sont enneigées de façon homogène.
- Un seul drone est utilisé.

4.2 Limites de notre modélisation

Notre étude étant simplifiée grâce à nos hypothèses, elle présente naturellement un écart avec la réalité. En effet, en situation réelle, le drone a une autonomie finie et doit donc régulièrement revenir au point de départ pour recharger ses batteries ou subir des opérations de maintenance.

De plus, la vitesse du drone peut varier à cause des conditions météorologiques ou d'obstacles sur son chemin. Le temps d'utilisation du drone peut varier également si le drone subit une maintenance due à une panne ou à une usure prononcée. Les conditions météorologiques peuvent également affecter le temps d'utilisation du drone.

En situation réelle, plusieurs drones seront utilisés simultanément. En effet, un seul drone n'est pas assez efficace pour réaliser un repérage de cette ampleur.

Pour finir, l'enneigement des routes des quartiers cités ci-dessus, ne peut pas être homogène sur l'ensemble du réseau routier, le niveau d'enneigement est variable.

4.3 Pour aller plus loin

L'idéal pour réaliser le repérage est de déployer un drone par quartier de Montréal. L'objectif est de gagner du temps de parcours ainsi que de réduire le nombre de retours du drone pour la recharge ou pour la maintenance. Mais cela pourrait engendrer des coûts plus importants.

Toujours dans le but de gagner du temps, il faudrait déployer une ou plusieurs déneigeuses pour chaque composant fortement connexe de la ville.

Dans un souci d'optimisation, il faudra veiller à ce que les déneigeuses ne se "chevauchent" pas, pour éviter le fait qu'une déneigeuse repasse sur une route déjà déneigée.

Le déneigement se rapproche de la modélisation du drone à la différence que le graphe est orienté. L'idéal serait que l'on puisse travailler sur un graphe eulérien non orienté afin de pouvoir réutiliser le trajet emprunté par le drone, ce qui permet de gagner du temps et de minimiser le coût supplémentaire à cause des nouvelles contraintes crées par un graphe orienté non fortement connexe. Mais cela signifie aussi que l'on devrait bloquer certains quartiers en déployant les déneigeuses sur ces zones. La question se pose est que la ville a-t-elle la capacité de bloquer certaines zones le temps de l'opération ?

Fin