Linjär Algebra och Geometri I

Kompendium till kursen 1MA025

Martin Herschend och Thomas Kragh.

Med inspiration från anteckningar av Ryszard Rubinsztein.

Innehåll

0 Introduktion

Detta kompendium är under utveckling. Denna version är daterat:

9 oktober 2022.

Om du hittar fel och kommenterar dessa (antingen på diskussionsforumet i Studium eller via mejl) kan du få ditt namn på en av följande listor.

Tack till (för viktiga kommenterar och rättelser): Anders Israelsson.

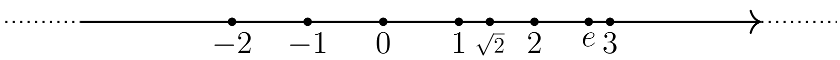
Tack till (för små icke-triviala rättelser):

1 Planet $\mathbb{R}^2$

I detta kapital går vi genom grundläggande geometriska begrepp inom Euklidisk geometri i planet. Vi börjar dock med det en-dimensionella fallet: de rella talen.

1.1 Den reella tallinjen $\mathbb{R}$

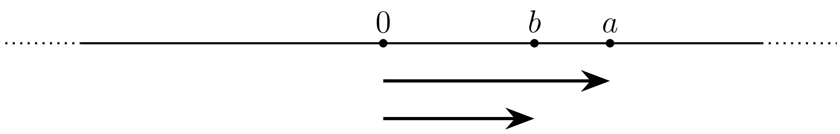
Mängden av alla reella tal (skrivet $\mathbb{R}$) visualiseras ofta som en oändligt lång linje:



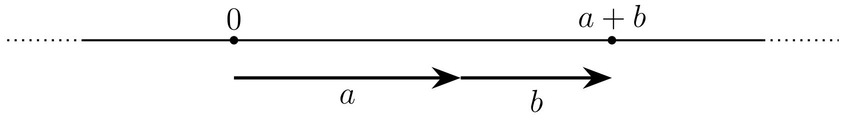
Här motsvarar varje reellt tal en punkt på linjen. Till exempel har vi ritat in punkterna som motsvarar talen $-2, -1, 0, 1, \sqrt{2}, 2, e, 3$. Pilen som inte alltid ritas indikerar åt vilket håll de positiva talen är, och det är vanligt att rita linjen som ovan med de negativa talen till vänster och de positiva till höger.

I stället för att skriva "a är ett reellt tal" skriver man ofta bara "$a \in \mathbb{R}$" (tecknet "$\in$" läsas som "ligger i" eller "är ett element i"). Man pratar också ofta om många tal på en gång, och i så fall pratar man om en delmängd av $\mathbb{R}$. T.ex. är de hela talen $\mathbb{Z}$ en delmängd av $\mathbb{R}$ och vi skriver detta som $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$.

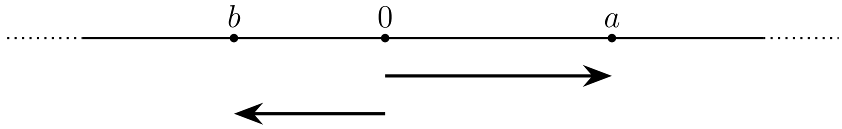
Om vi ska addera två positiva reella tal a och b. Så kan vi geometriskt representera a och b genom pilar som börjar i 0 och pekar på talet (förskjutet lite nedanför linjen i figuren):



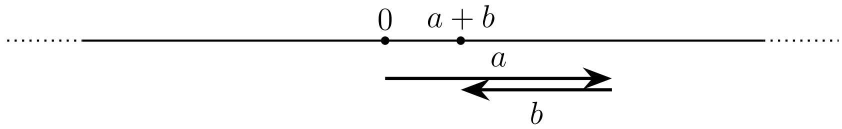
Då fås summan $a + b$ genom att lägga den ena efter den andra och se vart spetsen pekar:



Om till exempel b är negativ och a positiv kan vi geometriskt se detta som att pilarna pekar åt olika håll:



och summan blir då:



Som bekant kan man också multiplicera (gångra) reella tal.

Anmärkning 1.1.1: Antagende om de reella tal

I denna kurs antar vi att de reella talen $\mathbb{R}$ med $+, -, \cdot$ och $/$ och dessas räkneregler är välkända. Notera dock följande:

- Det är faktiskt inte matematiskt trivialt att visa att $\mathbb{R}$ med dessa räkneregler finns.
- I hela kursen kan $\mathbb{R}$ ersättas med en annan mängd som också har dessa operationer och uppfyller samma räkneregler t.ex. de komplexa talen $\mathbb{C}$. Detta är dock inte en del av kursen.

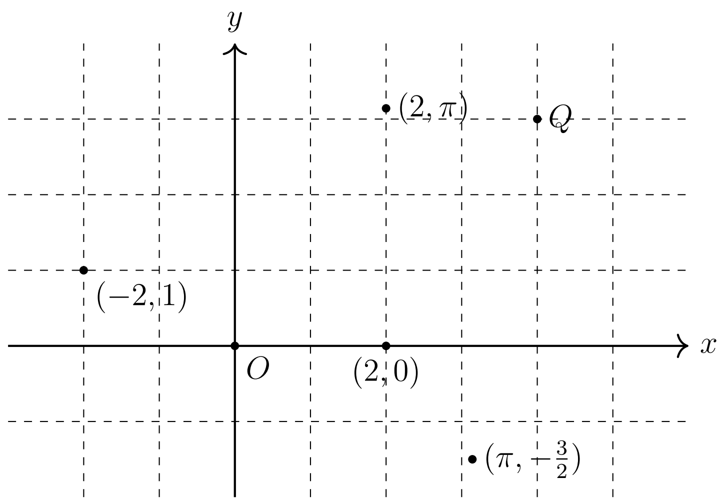
Vi kommer också att använda några välkända resultat om funktioner från envariabelanalys. T.ex. funktionerna $f(x) = x^2$ och $f(x) = \sqrt{x}$.

I uppgiftavsnittet (slutet av kapitlet) finns några uppgifter om de reella talen som är relevanta för denna kurs.

1.2 Punkter och vektorer i planet $\mathbb{R}^2$

En punkt i planet $\mathbb{R}^2$ har koordinater givna av ett ordnat par av reella tal (x, y) där x och y är reella tal. Punkten $(2, 4)$ har då första koordinaten

2 och andra koordinaten 4. Då det är väldigt vanligt att använda x för första koordinaten och y för andra koordinaten kallas dessa också ofta för x-koordinat och y-koordinat. Vi kan visualisera planet och dess punkter i ett ***koordinatsystem***:



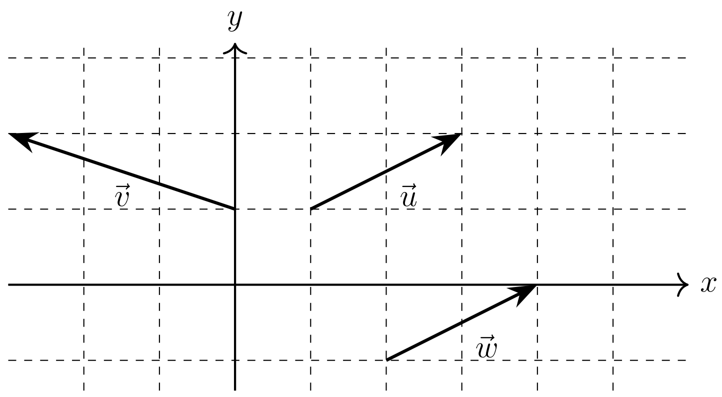
Här har vi, för att göra det lättare att avläsa koordinater för punkterna, ritat streckade linjer där en koordinat är ett heltal. Vi har också ritat in punkterna: $(2,0), (-2,1), (\pi, -\frac{3}{2}), (2,\pi), O, Q$. För punkterna O och Q har vi inte skrivit koordinaterna, men vi kan avläsa att de är $(0,0)$ och $(4,3)$ vi skriver detta som $O = (0,0)$ och $Q = (4,3)$.

Anmärkning 1.2.1

O är standard notation för $(0,0)$ och kallas origo (engelska: origin).

Vi kommer skilja mellan *punkter* i planet och *pilar* i planet. Pilar ska tänkas ange en riktning och en längd i planet, men är inte beroende på startpunkt. Dock kallas dessa inte för pilar i matematik uta istället ***vektorer***. Som illustrerat i Figur 1 visualiserar vi dock dessa som pilar. I Figuren har vi ritat tre vektorer $\vec{u}$, $\vec{v}$ och $\vec{w}$. Det vi menade ovan när vi skrev att en vektor inte beror på startpunkt betyder att två pilar som pekar åt samma håll och har samma längd ska förstås som samma pil. Till exempel är i figuren vektorerna $\vec{u}$ och $\vec{w}$ faktiskt samma vektorer då de har precis samma riktning och längd (den ena är en förskjutning av den andra). Vi skriver då $\vec{u} = \vec{w}$.

En vektor $\vec{v}$ kan (som punkter) beskrivas genom att använda koordinater. Den matematiska definitionen av en vektor $\vec{v}$ i $\mathbb{R}^2$ är (liknande punkter)



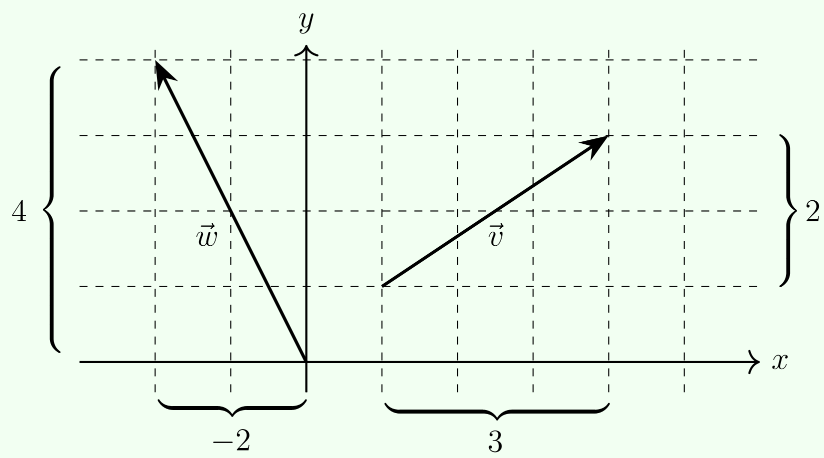
Figur 1: Vektorer ritat i planet $\mathbb{R}^2$.

ett talpar

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Notera dock att vi skriver detta i en stående kolonn för att indikera att det är en vektor och inte en punkt. Dessa koordinater beskriver hur långt pilen sträcker sig i x-led och hur långt den sträcker sig i y-led.

Exempel 1.2.2: Vektorer



Vektorn $\vec{v}$ pekar 3 i x-led och 2 i y-led. Vi skriver $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Vektorn $\vec{w}$ pekar -2 i x-led och 4 i y-led. Vi skriver $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Dessa koordinater är oberoende av var vi ritar vektorn. Till exempel har vi i Figur 1 att $\vec{u} = \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ eftersom båda går 2 i x-led och 1 i y-led. De är ju också samma vektor - så de har samma koordinater.

Anmärkning 1.2.3

När en vektor är ritad så att den börjar i punkten $O = (0, 0)$ (origo) så har vektorn samma koordinater som pilens ändpunkt. Av denna anledning definierar vi för en punkt $Q = (x, y)$ dennas ***ortvektor*** $\overrightarrow{OQ}$ som vektorn

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

alltså vektorn med samma koordinater som punkten Q.

I Exempel 1.2.2 ovanför börjar $\vec{w}$ i $(0, 0)$ och ändpunkten av $\vec{w}$ har koordinater $(-2, 4)$ - precis som vektorn (men skrivit annorlunda).

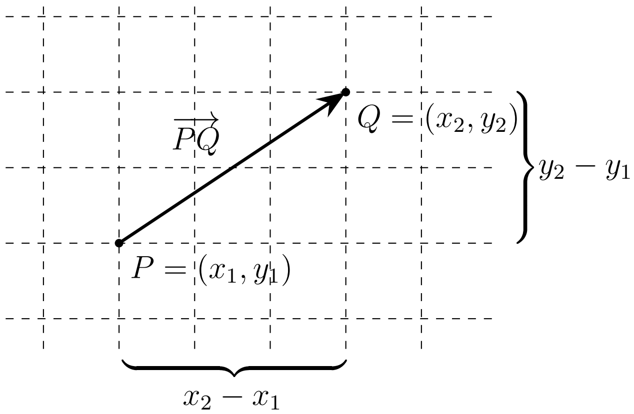
Mera generellt kan vi beräkna koordinater för den vektor som börjar i punkten $P = (x_1, y_1)$ och slutar i punkten $Q = (x_2, y_2)$. Formeln för detta blir

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Här betyder $\overrightarrow{PQ}$ vektorn som börjar i P och slutar i Q. Formeln är illustrerad i Figur 2. Varje koordinat i denna formel kan förklaras i ord genom:

- $x_2 - x_1$ är hur lång vektorn måste sträcka sig i x-led för att precis peka ifrån x_1 till x_2.

Om t.ex. $x_1 = 3$ till $x_2 = 10$ så måste vektorn sträcka sig $7 = 10 - 3$ i x-led.



Figur 2: Formel för vektor mellan punkter.

Exempel 1.2.4

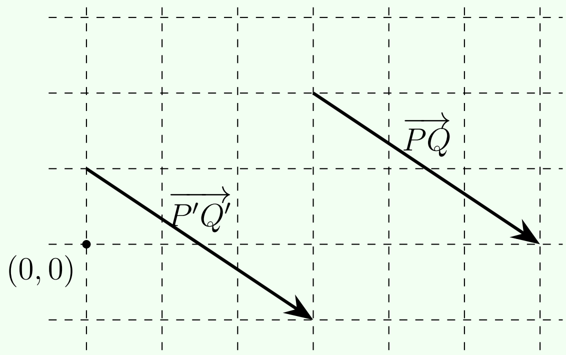
Vektorn som börjar i $P = (3, 2)$ och slutar i $Q = (6, 0)$ är

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 6-3 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Vektorn som börjar i $P' = (0, 1)$ och slutar i $Q' = (3, -1)$ är

$$\overrightarrow{P'Q'} = \begin{pmatrix} 3-0 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Så faktiskt är $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$ trots att de inte är ritade så att de börjar i samma punkt. Geometriskt ser detta ut som:



1.2.1 Nollvektorn

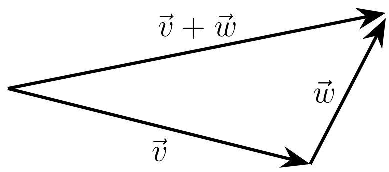
Vektorn

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

är lite speciell och kallas ***nollvektorn***. I princip har den inte en väldefinierat riktning och den har längd 0. Man kan tänka lite på en vektor som en beskrivning av en förskjutning av något i planet. Alltså oavsett vart man står i planet: vänd dig åt pilens håll och gå fram så långt som pilen visar. Då är nollvektorn den förskjutning där man står stilla - och det kan man ju göra oavsett vilket håll man vänder sig. Vi ska se att den bästa tolkningen (tumregeln) faktiskt är att nollvektorn har *alla* riktningar samtidig. Vi ska se mera senare om vad detta precist betyder/innebär.

1.2.2 Addition av vektorer

Geometriskt adderar vi vektorer $\vec{v}$ och $\vec{w}$ genom att lägga dem efter varandra:



Alltså: först ritas $\vec{v}$, sedan ritas $\vec{w}$ så att den börjar där $\vec{v}$ slutar. Då är $\vec{v} + \vec{w}$ vektorn som pekar från början av $\vec{v}$ till slutet av $\vec{w}$.

Anmärkning 1.2.5

Det är väldigt vanligt att införa koordinater som inte använder x-y notation, men istället syftar på koordinatnummer och namnet man har gett vektorn:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

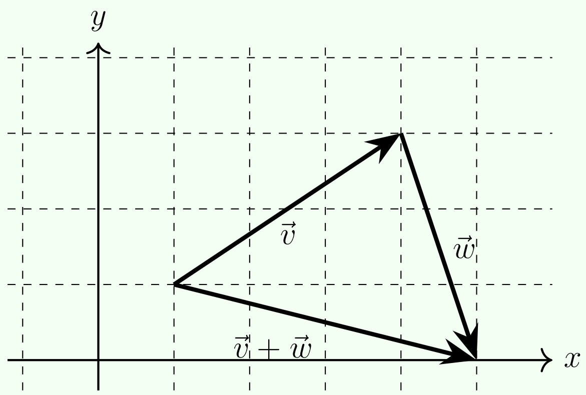
Vi kommer ofta att använda sådana koordinater utan att skriva ut det.

I koordinater motsvarar denna förlängning/addition formlen:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Det är faktiskt denna formel som vi använder som vår definition av vektoraddition i planet $\mathbb{R}^2$, och den geometriska beskrivningen ovan bör egentligt bara anses vara en bra geometriskt tolkning av vad detta innebär. Notera, att den geometriska tolkningen kan förklaras ifrån formeln: Om man först går v_1 i x-led och sedan w_1 i x-led så har man totalt gått $v_1 + w_1$ i x-led (liknande för y-led).

Exempel 1.2.6



Här är

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

och vi ser att

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Vi har räkneregler for denna vektoraddition, som är väldigt lika de regler vi har för addition av reella tal. Som beviset visar är detta inte en slump.

Sats 1.1: Räkneregler för addition av vektorer

För vektorer $\vec{u}, \vec{v}$ och $\vec{w}$ gäller

(a) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

(b) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$.

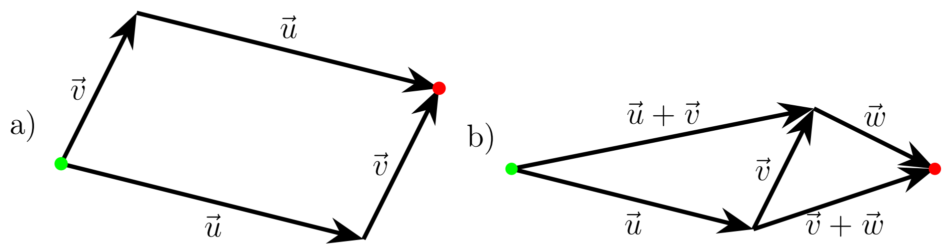
(c) $\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$.

(d) För varje $\vec{v}$ finns en vektor $-\vec{v}$ så att $\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{0}$.

I b) betyder (som vanligt) parenteserna ”gör denna addition först”. Vi forkorter ofta $+(-\vec{v})$ till $-\vec{v}$. T.e.

$$\vec{w}-\vec{v}=\vec{w}+(-\vec{v}).$$

Figur 3 illustrerar den geometriska intuition bakom dessa. I båda tar man



Figur 3: Geometriskt tolkning av Sats 1.1

sig ifrån den gröna punkten till den röda, men på olika sätt som illustrerar ekvationen. På grund av b) får man skriva $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$, som enligt figuren kan tolkas som att lägga alla tre vektorer efter varandra.

Bevis för Sats 1.1: I de röda likhetstecken används definitionen i Ekvation (1.2) och i de gröna används vanliga räkneregler för de reella talen (i varje koordinat).

(a) $\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_1+u_1\\v_2+u_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$

(b)
$$\left(\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\right)+\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}(u_1+v_1)+w_1\\(u_2+v_2)+w_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1+(v_1+w_1)\\u_2+(v_2+w_2)\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v_1+w_1\\v_2+w_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}\right)$$

(c) $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0+u_1\\0+u_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$

(d) Anta $\vec{v} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ då fungerar $-\vec{v} = \begin{pmatrix}-v_1\\-v_2\end{pmatrix}$ eftersom

$$\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-v_1\\-v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_1+(-v_1)\\v_2+(-v_2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Exempel 1.2.7

Uppgift: Visa att för $Q, P \in \mathbb{R}^2$ så är

$$\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}.$$

(Alltså vektorn som pekar ifrån Q till P är minus vektorn som pekar ifrån P till Q.)

Lösning: Vi ger koordinater till $Q = (q_1, q_2)$ och $P = (p_1, p_2)$. Då är enligt definitionen i Ekvation (1.1)

$$\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix}p_1-q_1\\p_2-q_2\end{pmatrix}$$

och

$$-\overrightarrow{PQ} = -\begin{pmatrix}q_1-p_1\\q_2-p_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-(q_1-p_1)\\-(q_2-p_2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_1-q_1\\p_2-q_2\end{pmatrix}.$$

Alltså är $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$.

Lite mera generellt än exemplen har vi också formeln:

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$$

som är liknande motivationen för hur vi addera vektorer.

Exempel 1.2.8

Uppgift: Förenkla $4\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{AD}$.

Lösning: Vi ser att $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB}$ så därför är

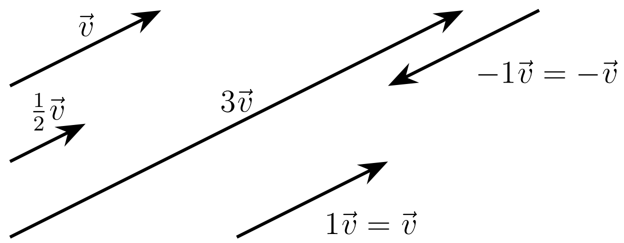
$$4\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{AD} = 6\overrightarrow{AB}.$$

1.2.3 Skalning av vektorer

Vi kan också "skala om" en vektor med ett reellt tal $k \in \mathbb{R}$. Med formel är detta definierat genom

$$k\vec{v} = k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Denna operation kallas också ***skalärmultiplikation***. I detta och likande sammanhang kallas reella tal ofta ***skalärar***. Geometriskt kan vi visualisera skalning som:



Här har till exempel $3\vec{v}$ samma riktning som $\vec{v}$ men är 3 gånger så lång, och $-1\vec{v}$ har motsatt riktning men samma längd som $\vec{v}$. Den geometriska tolkningen är alltså:

- När vi skalar om med ett positivt tal ändras längden men inte riktningen.
- När man skalar om med ett negativt tal ändras längden och riktningen blir den rakt motsatta.

Sats 1.2: Räkneregler för skalning av vektorer

För vektorer $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ och skalärar $k, c \in \mathbb{R}$ gäller

(a) $0\vec{v} = \vec{0}$

(b) $1\vec{v} = \vec{v}$

(c) $k(\vec{v}+\vec{w}) = k\vec{v}+k\vec{w}$

(d) $(k+l)\vec{v} = k\vec{v}+l\vec{v}$

Bevis: Vi skriver vilken ekvation/definition som används ovanför likhetstecken, och gröna likhetstecken indikerar att vi använder vanliga räkneregler för de reella talen (i varje koordinat).

(a) $0\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{(1.3)}{=} \begin{pmatrix} 0\cdot x \\ 0\cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{(1.3)}{=} \begin{pmatrix} 1\cdot x \\ 1\cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(c) $k\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right) \overset{(1.2)}{=} k\begin{pmatrix} v_1+w_1 \\ v_2+w_2 \end{pmatrix} \overset{(1.3)}{=} \begin{pmatrix} k(v_1+w_1) \\ k(v_2+w_2) \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} kv_1+kw_1 \\ kv_2+kw_2 \end{pmatrix} \overset{(1.2)}{=} \begin{pmatrix} kv_1 \\ kv_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} kw_1 \\ kw_2 \end{pmatrix} \overset{(1.3)}{=} k\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$

(d) Liknande c).

1.3 Skalärprodukten

I detta avsnitt ska vi definiera och förstå en ”produkt” som tar två vektorer och ger ut en skalär (ett reellt tal). Denna kallas ***skalärprodukten*** och namnet syftar alltså på det man får ut av att ta produkten. Detta bör inte förväxlas med skalärmultiplikationen ovan (som innebär att skala om en vektor). Skalärprodukten kallas också ***inreprodukten***, kanske ett mindre förvirrande namn, men inte helt så vanligt i detta sammanhang.

För att skilja mellan de två operationerna skriver vi skalärprodukten av två vektorer $\vec{v}$ och $\vec{w}$ som

$$\vec{v} \bullet \vec{w}$$

medan omskalning skriver vi som $k\vec{v}$ (utan något tecken).

Denna skalärprodukt hänger ihop med båda begreppen längd av vektorer och vinklar mellan vektorer. Så vi börjar med att förklara dessa begrepp.

1.3.1 Längder, avstånd och vinklar

För en vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ definiera vi dennas ***längd***, skrivet $\|\vec{v}\|$, som det reella talet

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.4}$$

Notera att denna formel är inspirerad av Pythagoras och detta är den faktiska längden av de pilar vi ritar.

Vi har följande räkneregler för längden av vektorer.

Sats 1.3

För $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ och $k \in \mathbb{R}$ gäller

(a) $\|k\vec{v}\| = |k|\|\vec{v}\|$.

(b) Om $\|\vec{v}\| = 0$, så är $\vec{v} = \vec{0}$.

Den sista säger i ord att den enda vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ med längden 0 är nollvektorn $\vec{0}$.

Bevis: Som tidigare refererar vi till ekvationsnummer när vi använder definitionerna ovan och gröna likhetstecken betyder vi använder vanliga räkneregler för $\mathbb{R}$, kvadrat och kvadratrot.

(a) $\|k\vec{v}\| \overset{(1.3)}{=} \left\| \begin{pmatrix} kv_1 \\ kv_2 \end{pmatrix} \right\| \overset{(1.4)}{=} \sqrt{(kv_1)^2 + (kv_2)^2}$

$= \sqrt{k^2((v_1)^2 + (v_2)^2)} = \sqrt{k^2}\sqrt{((v_1)^2 + (v_2)^2)} \overset{(1.4)}{=} |k|\|\vec{v}\|$.

(b) Om $\|\vec{v}\| = 0$, så är $\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 0$ som ger $v_1^2 + v_2^2 = 0$, men detta händer bara om $v_1 = v_2 = 0$ alltså att $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$.

Liknande definierar vi ***avståndet*** mellan två punkter $Q, P \in \mathbb{R}^2$ som

$$d(Q, P) = \|\overrightarrow{QP}\|.$$

Här syftar bokstaven "d" på "distans" (engelska "distance"). Så avståndet ifrån Q till P är längden av den vektor som pekar ifrån Q till P.

Exempel 1.3.1

Avståndet ifrån $P = (1,1)$ till $Q = (4,5)$ är

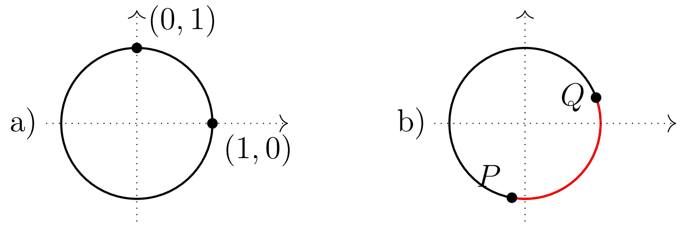
$$d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \left\| \begin{pmatrix} 4-1 \\ 5-1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3^2+4^2} = 5.$$

Observera att

$$d(Q,P) = \|\overrightarrow{QP}\| \overset{Ex\ 1.2.7}{=} \|-\overrightarrow{PQ}\| \overset{Sats\ 1.3.a}{=} |-1|\|\overrightarrow{PQ}\| = \|\overrightarrow{PQ}\| = d(P,Q).$$

Det vore också konstigt om avståndet ifrån P till Q inte var det samma som avståndet ifrån Q till P!

Enhetscirkeln är mängden av punkter i $\mathbb{R}^2$ med avstånd 1 till origo (se



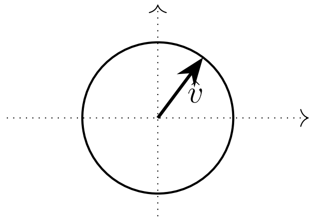
Figur 4: Enhetscirkeln. Längden av den röda bågen är $\frac{3\pi}{2} \approx 2{,}09$.

Figur 4.a) . Det vill säga mängden av punkter $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ så att

$$\sqrt{x^2+y^2} = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2+y^2 = 1.$$

Vi kommer använda begreppet ***båglängd*** på enhetscirkeln. Två olika punkter Q och P på enhetscirkeln delar denna i två bågar. Båglängden mellan Q och P är längden av den kortaste av dessa två bågar (om $Q = P$ är båglängden mellan dessa 0). Detta är ett tal i intervallet $[0,\pi]$ (där π är definierat som precis hälften av enhetscirkeln omkrets). Om detta tal är π betyder det att de två punkterna delar cirkeln i två lika stora bågar (och alltså har precis motsatta riktningar ifrån O). I Figur 4.b) har vi ritat in två punkter som delar cirkeln i två bågar där den ena är två gånger så lång som den andra.

En ***enhetsvektor*** $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ är en vektor med längd 1. Om man ritar en enhetsvektor så den börjar i origo så pekar den alltså på någon punkt på enhetscirkeln (se Figur 5). Som i figuren skrivs enhetsvektorer ofta med en ”hatt” över istället för en pil. Detta betyder: istället för $\vec{v}$ skriver man vanligtvis $\hat{v}$ om man av någon orsak råkar veta att vektorn är en enhetsvektor.



Figur 5: Enhetscirkeln och enhetsvektor.

Om $\vec{v}$ är en godtycklig vektor som inte är nollvektorn $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, så kan man alltid skala om den med ett positivt tal så att man får en ny vektor med längd 1 och samma riktning som $\vec{v}$. Detta kallas att ***normera*** vektorn $\vec{v}$. Man brukar även då att skriva den nya vektorn med samma symbol/bokstav men där pilen är ersatt med en hatt. Formeln för detta är

$$\hat{v} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}. \tag{1.5}$$

Vi dubbelkollar att denna har längd 1:

$$\|\hat{v}\| \overset{(1.5)}{=} \left\| \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} \right\| \overset{\text{Sats 1.3.}a}{=} \frac{1}{\|\vec{v}\|}\|\vec{v}\| = 1.$$

Exempel 1.3.2

Om

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

då är

$$\hat{v} = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

På detta viset kan vi associera en punkt på enhetscirkeln till varje vektor. Vi tänker på denna punkt eller enhetsvektor som ***riktningen*** av $\vec{v}$.

Första delen av följande definition är lite annorlunda än hur man kanske tidigare har hanterat vinklar i planet. Den andra delen är kanske den som man är van vid, men när man ska förstå vad som händer i 3 dimensioner i Kapitel 2 är det viktigt att förstå skillnaden.

Definition 1.4

Vinkeln mellan två vektorer $\vec{v}$ och $\vec{w}$ i planet $\mathbb{R}^2$ är båglängden $\theta \in [0, \pi]$ mellan de punkter på enhetscirkeln som motsvarar riktningarna av $\vec{v}$ och $\vec{w}$.

Vinkeln från x-axlen ***till*** $\vec{v}$ är den båglängd man måste röra sig *moturs* längs enhetscirkeln från $(1, 0)$ så att man kommer till punkten som motsvara riktningen av $\vec{v}$.

Notera att den första är symmetrisk i betydelsen att vinkeln mellan $\vec{v}$ och $\vec{w}$ är den samma som vinkeln mellan $\vec{w}$ och $\vec{v}$. Medans i den andra använder vi ord som ”från” och ”till” för att klargöra att detta beror på ordningsföljd och riktning på enhetscirkeln.

Den andra vinkeln är i princip också bara definierad upp till att addera ett heltal gånger 2π. Det är för att man kan välja att gå extra varv. Man tolkar även negativa vinklar som att gå bakläns runt på cirkeln. Faktisk är vinkeln från x-axeln till $\vec{v}$ given av ett $\theta \in \mathbb{R}$ så att

$$\vec{v} = r \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

för något $r \geq 0$. Om $r = 0$ betyder θ ingenting och vi ser här första exemplet på tumregeln att $\vec{0}$ tolkas som att kunna ha en godtycklig vinkel.

Faktiskt är detta i princip hur vi definierar funktionerna cos och sin.

Definition 1.5

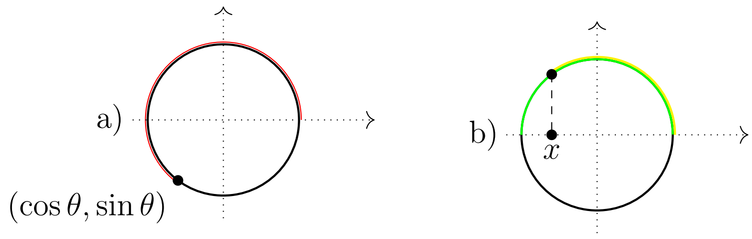
Funktionerna $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ och $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ är definierade genom att $(\cos\theta, \sin\theta)$ är koordinaterna i $\mathbb{R}^2$ för den punkt på enhetscirkeln som har vinkel θ *från* x-axlen (se Figur 6.a) .

Dessa är alltså 2π periodiska, vilket mer precist betyder

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta \qquad \text{och} \qquad \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$$

för godtyckligt $\theta \in \mathbb{R}$.

En grund till att använda vinkeln *mellan* två vektorer istället för denna periodiska version är att man kan beräkna den direkt om man känner cos av denna vinkeln (och detta kommer bli väldigt relevant). Punkter på



Figur 6: Den röda bågen har i figuren båglängd $\theta \approx 4{,}07$. Varje punkt på den gröna båge är entydigt bestämd av dennas x-koordinat. Längden av den gula bågen är $\arccos(x)$.

enhetscirkeln med vinkel $[0, \pi]$ från x-axeln är nämligen entydigt bestämda av deras x-koordinat (se Figur 6). Funktionen som tar detta ”inversa” värde i intervallet $[0, \pi]$ kallas ”arccos” (eller ibland ”$\cos^{-1}$”) och är därför en funktion:

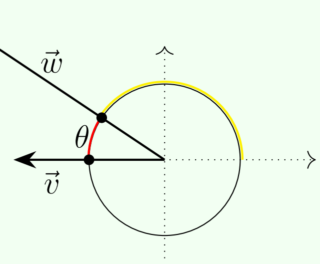
$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

Denna funktion ”tar” alltså en x-koordinat i intervallet $[-1, 1]$ och ger ut vinkeln för den punkt som hänger på enhetscirkeln över x-koordinaten.

Exempel 1.3.3: (Illustrerande! Lättare formel senare)

Uppgift: Hitta vinkeln θ mellan $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Lösning: Vi ritar in dem (utgående från O) och de motsvarande punkterna på enhetscirkeln:



Vi ska hitta den röda vinkeln θ. De normerade vektorerna som pekar från O till punkterna är (se Exempel 1.3.2)

$$\hat{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \hat{w} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$$

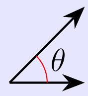
Vinkeln θ är π minus den gula vinkeln:

$$\theta = \pi - \arccos(\tfrac{-3}{\sqrt{13}}) = \arccos(\tfrac{3}{\sqrt{13}})$$

(Den sista ekvationen kan ses geometrisk i figuren genom att spegla i y-axeln.)

Anmärkning 1.3.4

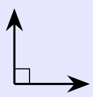
Notera att det är vanligt att rita vinklar i skisser som små (eller stora) bågar med vinkelns namn bredvid:



Det är i denna notation underförstått att man måste skala om för att tolka denna cirkelbåge som en del av enhetscirkeln - och att vinkeln då är båglängden av denna.

I Exempel 1.3.3 ovan råkade cirkelbågen vi ritade redan var en del av enhetscirkeln - så man behövde inte skala om.

Om man råkar veta att en vinkel är rät ritar man ofta detta som:



Begreppet ”parallell” är mest praktiskt att definiera på följande sätt, men Uppgift 1.19 går ut på att visa att detta är samma sak som att vinkeln mellan vektorerna är 0 eller π (i fallet inga av vektorerna är $\vec{0}$).

Definition 1.6

Två vektorer $\vec{v}$ och $\vec{w}$ kallas ***parallella*** om den ena är en omskalning av den andra.

Observera att eftersom $\vec{0} = 0\vec{v}$ är en omskalning av en godtycklig vektor $\vec{v}$ betyder detta att $\vec{0}$ är parallell med *alla* vektorer. Igen ser vi tumregeln att $\vec{0}$ ”kan ha alla riktningar”.

1.3.2 Definition och beräkning

Definition 1.7

Skalärprodukten $\vec{v} \bullet \vec{w}$ av två vektorer $\vec{v}$ och $\vec{w}$ definieras som talet

$$\vec{v} \bullet \vec{w} = \|\vec{v}\|\|\vec{w}\| \cos(\theta) \qquad \in \mathbb{R},$$

där θ är vinkeln mellan de två vektorerna. Om en av vektorerna råkar vara $\vec{0}$ definierar vi $\vec{v} \bullet \vec{w} = 0$.

Den sista delen är naturlig då längden $\|\vec{0}\| = 0$ och vi behöver därför inte värdet av $\cos(\theta)$ i formeln (som ju inte är definierat - eller med tumregeln för $\vec{0}$: kan vara vad som helst).

Observera att:

$$\vec{v} \bullet \vec{v} = \|\vec{v}\|^2 \cos(0) = \|\vec{v}\|^2$$

eftersom vinkeln mellan $\vec{v}$ och $\vec{v}$ själv är lika med 0.

Man kan fråga sig själv: ”varför precis denna definition?” Ett svar på detta är att vi i Sats 1.9 kommer att se en speciellt enkel formel för att beräkna detta talet. Med den formel och omskrivningen av definitionen till:

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|}\right) \tag{1.6}$$

uppnår man det lättaste och mest systematiska sättet att beräkna vinklar mellan vektorer.

Exempel 1.3.5: (Illustrerande! Lättare formel senare)

Vi beräknar skalärprodukten av $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ och $\vec{w} = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. I Exempel 1.3.3 hittade vi vinkeln mellan dessa vektorer, men mera viktigt hittade vi att

$$\cos\theta = \tfrac{3}{\sqrt{13}}.$$

Längderna är

$$\left\|\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$
$$\left\|\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$$

Med detta fås att

$$\vec{v} \bullet \vec{w} = \sqrt{13} \cdot 2 \cdot \tfrac{3}{\sqrt{13}} = 6.$$

Vi ska se i Sats 1.9 att det inte är en slump att vi fick ett heltal (vektorer med heltalskoordinater har alltid ett heltal som skalärprodukt).

Definition 1.8

Två vektorer $\vec{v}$ och $\vec{w}$ kallas ***ortogonala*** (vinkelräta mot varandra) om $\vec{v} \bullet \vec{w} = 0$.

Igen ser vi att $\vec{0}$ är ortogonal mot *alla* vektorer och därför är tumregeln att $\vec{0}$ kan tänkas ha alla riktningar fortfarande bra.

Definition ger mening då $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ ($\frac{\pi}{2}$ är rät vinkel). Faktiskt ser vi att tecknet på $\cos(\theta)$ ju bestämmer om en vinkel θ är större eller mindre än $\frac{\pi}{2}$.

Anmärkning 1.3.6

Vinkeln mellan två vektorer $\vec{v}$ och $\vec{w}$ är

- Ortogonal om $\vec{v} \bullet \vec{w} = 0$,
- Spetsig om $\vec{v} \bullet \vec{w} > 0$, och
- Trubbig om $\vec{v} \bullet \vec{w} < 0$.

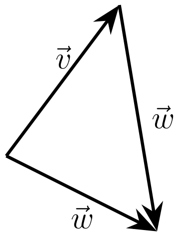
Sats 1.9

En alternativ formel för skalärprodukten är

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2.$$

Följande bevis antar cosinussatsen och att den gäller i vår kontext.

Bevis: Betrakta triangeln:



Enligt cosinussatsen gäller

$$\|\vec{w} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - 2\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\cos(\theta). \tag{1.7}$$

Vi vet också att

$$\|\vec{v}\|^2 = v_1^2 + v_2^2 \qquad \text{och} \qquad \|\vec{w}\|^2 = w_1^2 + w_2^2.$$

En beräkning visar:

$$\begin{aligned}\|\vec{w} - \vec{v}\|^2 &= (w_1 - v_1)^2 + (w_2 - v_2)^2 = \\ &= v_1^2 + w_1^2 - 2v_1w_1 + v_2^2 + w_2^2 - 2v_2w_2.\end{aligned}$$

Sätter vi dessa in i Ekvation (1.7) och förkortar bort termer som finns på både sidorna fås:

$$-2v_1w_1 - 2v_2w_2 = -2\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\cos(\theta).$$

Vilket medför

$$\boxed{\vec{v} \bullet \vec{w} := \|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\cos(\theta) = v_1w_1 + v_2w_2}$$

Exempel 1.3.7: Exempel 1.3.3 och Exempel 1.3.5 på ett lättare sätt

Uppgift: hitta skalärprodukten av och vinkeln mellan $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Lösning: Enligt Sats 1.9 ovan är

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = (-3) \cdot (-2) + 2 \cdot 0 = 6.$$

Enligt Ekvation (1.6) är vinkeln θ mellan dem

$$\theta = \arccos\left(\frac{6}{\sqrt{(-3)^2+2^2}\cdot\sqrt{(-2)^0+0^2}}\right) = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right).$$

Några av följande räkneregler är svåra att se direkt från Definition 1.7, men följer lätt från Sats 1.9. Några har vi redan sett.

Sats 1.10: Räkneregel för skalärprodukten

För $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vektorer i $\mathbb{R}^2$ och $a \in \mathbb{R}$ gäller

(a) $\vec{v} \bullet \vec{v} = \|v\|^2$.

(b) $\vec{v} \bullet \vec{w} = \vec{w} \bullet \vec{v}$.

(c) $\vec{v} \bullet (\vec{u} + \vec{w}) = \vec{v} \bullet \vec{u} + \vec{v} \bullet \vec{w}$.

(d) $(a\vec{v}) \bullet \vec{w} = \vec{v} \bullet (a\vec{w}) = a(\vec{v} \bullet \vec{w})$.

Bevis: Vi visar bara c) (som är svårast). Vänsterledet är

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \bullet \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right) \overset{(1.2)}{=} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} u_1 + w_1 \\ u_2 + w_2 \end{pmatrix} \overset{\text{Sats 1.9}}{=}$$
$$= v_1(u_1 + w_1) + v_2(u_2 + w_2) = v_1u_1 + v_1w_1 + v_2u_2 + v_2w_2$$

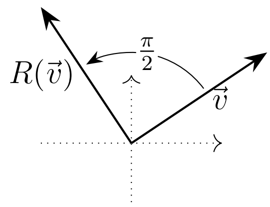
och högerledet är

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \overset{\text{Sats 1.9}}{=} v_1u_1 + v_2u_2 + v_1w_1 + v_2w_2$$

vilket är samma reella tal.

Givet en vektor $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right)$ kan vi i planet rotera denna vektor $\frac{\pi}{2}$ radianer moturs (se Figur 7). Vi skriver denna nya vektor som $R(\vec{v})$ och en formel för den är

$$R(\vec{v}) = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} \tag{1.8}$$



Figur 7: Rotation av vektor med vinkel $\frac{\pi}{2}$.

Vi ser att

$$\vec{v} \bullet R(\vec{v}) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} = v_1(-v_2) + v_2 v_1 = 0.$$

Så $R(\vec{v})$ är verkligen ortogonal mot $\vec{v}$. Den har också samma längd som $\vec{v}$ och det är inte svårt att övertyga sig om att den är roterat moturs (genom att se på vilket kvadrant $R(\vec{v})$ ligger i beroende på vilket kvadrant $\vec{v}$ ligger i).

1.4 Linjer i Planet

Begreppet "en linje i $\mathbb{R}^2$" kan beskrivas/definieras på lite olika sätt. En linje är oändlig lång och ska inte förväxlas med ett linjestycke som har en begränsat längd - eller en halv linje (eller stråle) som är begränsat i en riktning men inte i den andra.

Det mest vanliga sättet att beskriva en linje i $\mathbb{R}^2$ är genom att använda en ekvation av typen

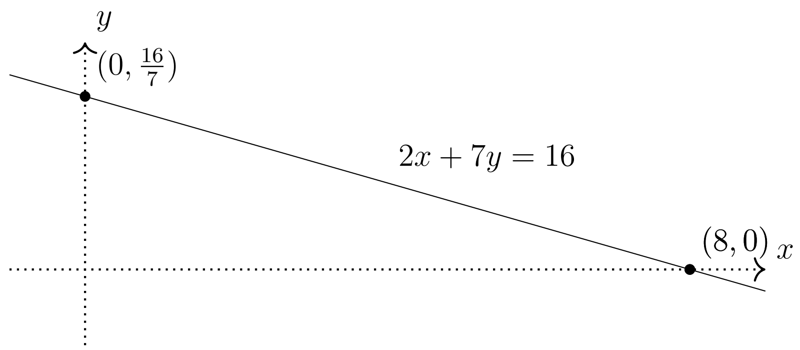
$$ax + by = c \tag{1.9}$$

där $a, b, c \in \mathbb{R}$ är konstanter där inte båda a och b är 0. Här kallas x, y är de ***obekanta*** i ekvationen. Det betyder att alla lösningar $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ till ekvationen är en delmängd av $\mathbb{R}^2$ kallad ***lösningsmängden***. För denna typ av ekvation är lösningsmängden en rak linje, och när man beskriver raka linjer på detta sätt så säger man att man har skrivet linjen på ***ekvationsform***.

T.ex. kan man se på alla lösningarna till ekvationen

$$2x + 7y = 16.$$

Dessa beskriver en linje i planet $\mathbb{R}^2$:



Hur kan vi beskriva *alla* (reella) lösningar? Vi skriver om ekvationen

$$2x + 7y = 16 \quad \Leftrightarrow \quad x + \tfrac{7}{2}y = 8 \quad \Leftrightarrow \quad x = 8 - \tfrac{7}{2}y.$$

Vi ser då att för varje reellt värde y har vi precis en lösning, och denna ”formel” ger oss x om vi känner y. Liknande kan man isolera y och se vad denna blir beroende på x. Detta visar att vi bara behöver en koordinat för att beskriva alla lösningarna, men också att vi behöver åtminstone en sådan koordinat (vi har ju en lösning för *varje* y).

Det är dock inte uppenbart om man bör använda x eller y som koordinat för linjen. Faktiskt kan man införa många andra möjliga koordinater för linjen. Så det är vanligt att införa ett nytt bokstav t, kallad en ***parameter***, för att beskriva alla punkterna på en sådan linje. T.ex. kan linjen ovan skrivas på följande olika sätt där t används som parameter:

- $(x, y) = (8 - \frac{7}{2}t, t), t \in \mathbb{R}$.
- $(x, y) = (t, \frac{16}{7} - \frac{2}{7}t), t \in \mathbb{R}$.
- $(x, y) = (t + 8, -\frac{2}{7}t), t \in \mathbb{R}$.
- $(x, y) = (8 - 7t, 2t), t \in \mathbb{R}$.

Den första är den man får om man sätter $y = t$ och bara sätter in i formeln för x ovan. Nummer två är den man får om man istället använder $x = t$ (och isolerar y). Den sista använder inte bråk och kan härledas om man sätter $y = 2t$ och sätter in i formeln ovan för x (den är ju också snarlik den första).

Att skriva lösningsmängden=linjen på detta sätt är lite annorlunda än genom en ekvation av typen ovan. En linje i $\mathbb{R}^2$ sägas att vara skriven på ***parameterform*** om den är beskriven genom antingen

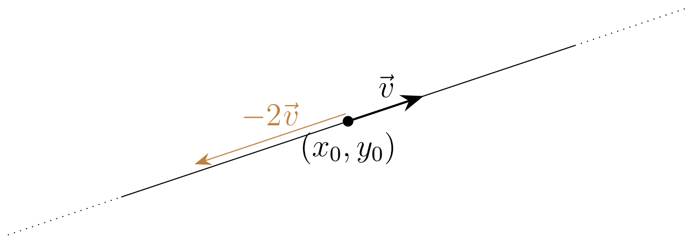
$$(x, y) = (x_0 + tv_1, y_0 + tv_2), t \in \mathbb{R}$$

eller (i stort sett samma men med vektornotation)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

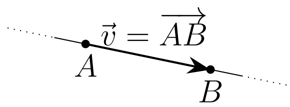
Den geometriska tolkning här är (se figur 8):

- (x_0, y_0) är en punkt på linjen - faktiskt den som beskrivs när $t = 0$
- vektorn $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$ är parallell med linjen och nollskild. Denna kallas en ***riktningsvektor*** för linjen.



Figur 8: parameterform för linje

Intuitionen är: om man börjar i punkten (x_0, y_0) kan man ta sig till varje punkt på linjen genom att följa en vektor som är parallel med $\vec{v}$. Varje sådan parallell vektor kan skrivas som $t\vec{v}$ (i figuren är denna för $t = -2$ ritad in och förskjuten lite från linjen).



Figur 9: parameterform för linje

Om man har givet en linje och ska hitta en så riktningsvektor $\vec{v}$ kan man ta $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ där $A \neq B$ är två punkter på linjen (se figur 9).

Exempel 1.4.1

Uppgift: Hitta en parameterform av linjen som går genom punkterna $Q = (1, 1)$ och $P = (-2, 3)$.

Lösning: Vi har redan en punkt på linjen t.ex. $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Riktningsvektorn kan vi välja som

$$\vec{v} = \overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Så därför kan linjen skrivas på parameterform:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Eftersom en parameterform kan skrivas med vilken punkt som helst på linjen som utgångspunkt (x_0, y_0) och vilken riktningsvektor $\vec{v}$ (som är parallell linjen) som helst gäller följande.

Anmärkning 1.4.2

Varje linje i planet kan beskrivas på oändligt många olika parameterformer.

Vi har sett att man kan gå ifrån ekvationsform till parameterform genom att essentiellt lösa ekvationen och skriva upp alla lösningar. Hur går man åt andra hållet? För att förstå detta är det bra att ta två punkter på linjen $Q = (x_1, y_1)$ och $P = (x_2, y_2)$ så att $\vec{v} = \overrightarrow{QP}$ är en riktningsvektor för linjen. Om vi då vill hitta a, b och c i en ekvation för linjen $ax + by = c$ så vet vi att de två punkterna måste uppfylla denna och därför gäller

$$\begin{aligned} 0 = c - c =& ax_1 + by_1 - (ax_2 + by_2) = a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = \\ &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \bullet \overrightarrow{QP} \end{aligned}$$

Så vektorn

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

är ortogonal mot riktningsvektorn (och därför ortogonal mot linjen). En nollskild vektor som är ortogonal mot linjen kallas en *normalvektor* för linjen. Om man har givet en sådan normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ och tar skalärprodukt med en parameterform (vektor version) ses att

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \bullet \vec{n} = \left(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t\vec{v} \right) \bullet \vec{n} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \bullet \vec{n} + t\vec{v} \bullet \vec{n} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = ax_0 + by_0$$

vilket är en konstant som inte beror på $t \in \mathbb{R}$. Det betyder att punkterna (x, y) på linjen uppfyller

$$ax + by = c$$

där c är konstanten $c = ax_0 + by_0$ och $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ är en normalvektor.

Exempel 1.4.3

Uppgift: Hitta en ekvationsform för linjen från Exempel 1.4.1.

Lösning: Vi har redan punken $(1, 2)$ och riktningsvektorn $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ för linjen. Vi kan som normalvektor då välja

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = R(\vec{v}) = R\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

där $R(-)$ är rotation med $\frac{\pi}{2}$ från Ekvation (1.8). Det betyder (enligt ovan) att alla punkterna på linjen uppfyller

$$-2x - 3y = c$$

för någon konstant c. Vi kan nu sätta in punkten vi känner för att hitta c:

$$c = -2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -8$$

så en möjlig ekvationen blir $-2x - 3y = -8$ som kanske är bättre att skala om till $2x + 3y = 8$.

Notera speciellt här att $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ också är en normalvektor.

1.4.1 Skärningspunkter

Om man börjar med två linjer t.ex.

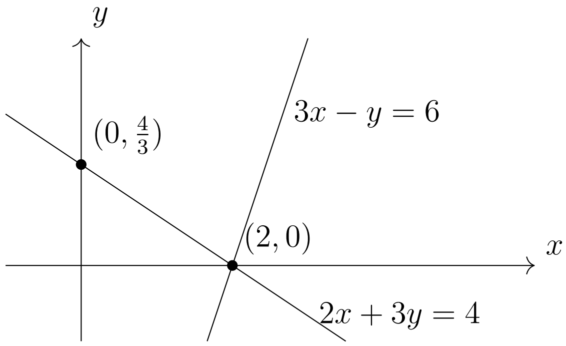
$$\begin{aligned} l_1 &: 2x + 3y = 4 \\ l_2 &: 3x - y = 6 \end{aligned}$$

så kan man fråga om de skär och i så fall i vilken (vilka om de sammanfaller) punkt. Detta är det samma som att hitta de (x, y) i $\mathbb{R}^2$ som löser båda ekvationerna samtidigt. Vi skriver detta på följande sätt:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x - y = 6 \end{cases}$$

När man skriver flera ekvationer på detta sätt som ska vara uppfylla samtidig kallas detta ett *ekvationssystem*. Vi ska senare lära oss ett systematiskt sätt att lösa sådana (linjära) ekvationssystem.

I detta exempel ser vi:



Det ser ut som om att det finns precis en lösning $(x, y) = (2, 0)$ alltså en punkt (0-dimensionellt). Detta går att visa genom:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x - y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ y = 3x - 6 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad 2x + 3(3x - 6) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 11x = 22 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2.$$

Vi vet alltså nu att om det finns en lösning så måste $x = 2$. Med detta ser vi att vi precis har en lösning för y i de ursprungliga ekvationerna:

$$\begin{cases} 2 \cdot 2 + 3y = 4 \\ 3 \cdot 2 - y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \quad y = 0.$$

Alltså finns precis en lösning $(x, y) = (2, 0)$.

Anmärkning 1.4.4

När vi löser ekvationsystem betyder:

- "$A \Leftrightarrow B$": att ekvationssystemet A har *precis* samme lösningar som ekvationssystemet B.

- "$A \Rightarrow B$": Varje lösning i A är också en lösning i B.
- "$A \Leftarrow B$": Varje lösning i B är också en lösning i A.

I bland måste man hitta skärningar av två linjer där den ena är på ekvationsform och den andra på parameterform i det fallet är det faktiskt enklare att hitta skärningen.

Exempel 1.4.5

Uppgift: Hitta skärningen av linjerna:

$$l : x + y = 3$$
$$k : (x, y) = (2 - t, 3 - 2t), t \in \mathbb{R}.$$

Lösning: Vi måste hitta de punkter på k som uppfyller ekvationen för l. Det betyder: sätt in den beskrivning av punkter vi har för k i ekvationen för l och lösa för t:

$$\underbrace{(2 - t)}_{x} + \underbrace{(3 - 2t)}_{y} = 3$$

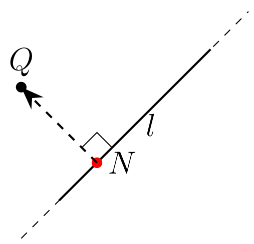
Detta ger $t = \frac{2}{3}$ och punkten

$$(x, y) = (2 - \tfrac{2}{3}, 3 - 2\tfrac{2}{3}) = (\tfrac{4}{3}, \tfrac{5}{3}).$$

Man kan också hitta skärningar av två linjer på parameterform. Det ska ni själv göra i uppgifterna.

1.4.2 Närmaste punkt och avstånd

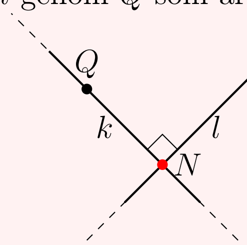
Vi har tidigare sett hur man hittar avståndet mellan två punkter i planet $\mathbb{R}^2$. I detta avsnitt ska vi se hur man hittar avstånd mellan en punkt Q och en linje l i $\mathbb{R}^2$. Vi ska även se hur man hittar den punkt N på linjen l som är närmast punkten Q (se figur 10). Avståndet ifrån Q till l blir då det samma som avståndet ifrån N till Q. Vi kommer att använda utan bevis att vektorn $\overrightarrow{NP}$ som pekar från punkten N till P är ortogonal mot linjen (som illustrerat i figuren). Den är alltså en *normalvektor* till linjen. Vi kan hitta N på följande sätt.



Figur 10: N är punkten på l närmast Q.

Metod 1.11: Hitta punkten på linjen l som är närmast en punkt Q

Först hittar vi linjen k genom Q som är ortogonal mot linjen l.



Då är N given som skärningspunkten av linjerna l och k.

Exempel 1.4.6

Uppgift: Hitta den punkten på $l : 2x + 3y = 6$ som är närmast $Q = (1, 1)$. Hitta även avståndet från Q till l.

Lösning (gör själv en skiss): Konstanterna framför x och y ger koordinaterna för en normalvektor till linjen:

$$\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Denna är då en riktningsvektor för k (med k som i Metod 1.11), och då vi vet att k går genom Q kan vi skriva k på parameterform:

$$k : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2t \\ 1 + 3t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

För att hitta skärningen sätts detta in för x och y i ekvationen för linjen:

$$2(1 + 2t) + 3(1 + 3t) = 6 \quad \Rightarrow \quad 4t + 9t = 1$$

så $t = \frac{1}{13}$ och det ger punkten:

$$N = (1 + 2\tfrac{1}{13}, 1 + 3\tfrac{1}{13}) = (\tfrac{15}{13}, \tfrac{16}{13}).$$

Avståndet från N till Q blir då:

$$\left\| \begin{pmatrix} \frac{2}{13} \\ \frac{3}{13} \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{13}\sqrt{2^2 + 3^2} = \frac{1}{\sqrt{13}}.$$

Lösningsmetoden ändrar sig lite gran om linjen är på parameterform (samma linje i nästa exempel - så vi ska få samma svar).

Exempel 1.4.7

Uppgift: Hitta den punkten på $l : (x, y) = (3 - 3t, 2t), t \in \mathbb{R}$ som är närmast $Q = (1, 1)$. Hitta även avståndet från Q till l.

Lösning (gör själv en skiss): Vi kan avläsa en riktningsvektorn för l (givet av konstanterna fram för t i varje koordinat) som:

$$\vec{v}_l = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Denna är då en normal för linjen genom Q som är ortogonal mot l. Så en ekvation för denna blir

$$-3x + 2y = c$$

för något c. Vi hittar detta c genom att sätta in Q.

$$c = -3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = -1$$

så ekvationen är $-3x + 2y = -1$. Vi hittar skärningen mellan de två linjerna:

$$-3(3 - 3t) + 2(2t) = -1 \quad \Rightarrow \quad 13t = 8$$

så $t = \frac{8}{13}$ som ger punkten:

$$N = (3 - 3\tfrac{8}{13}, 2\tfrac{8}{13}) = (\tfrac{15}{13}, \tfrac{16}{13}).$$

Så avståndet från N till Q blir då:

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 - \frac{15}{13} \\ 1 - \frac{16}{13} \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -\frac{2}{13} \\ -\frac{3}{13} \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{13}\sqrt{2^2 + 4^2} = \frac{\sqrt{20}}{13}.$$

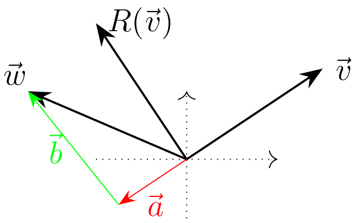
Anmärkning 1.4.8

Man kan även hitta avstånd mellan två linjer, men om de skär är detta avstånd 0. Om de inte skär är de parallella och man kan hitta avstånden genom att ta en punkt på den ena linjen och hitta avståndet från denna till den andra linjen. I dimension 3 blir denna typ av uppgift svårare.

1.5 Ortogonal projektion

I detta avsnitt ska vi definiera den ortogonala projektionen av en vektor på en annan vektor. Detta är faktiskt ett specialfall av att hitta närmaste punkten, men formuleringen för vektorer blir lite annorlunda.

Låt $\vec{v}$ vara en nollskild vektor i $\mathbb{R}^2$. Givet en annan vektor $\vec{w} \in \mathbb{R}^2$ kan vi försöka skriva $\vec{w}$ som en vektor $\vec{a}$ parallell med $\vec{v}$ *plus* en vektor $\vec{b}$ ortogonal mot $\vec{v}$ (se figur 11). Här har vi använd $R(\vec{v})$ ifrån Ekvation (1.8) för att



Figur 11: $\vec{a}$ är parallel med $\vec{v}$, $\vec{b}$ är ortogonal mot $\vec{v}$ och $\vec{w} = \vec{a} + \vec{b}$.

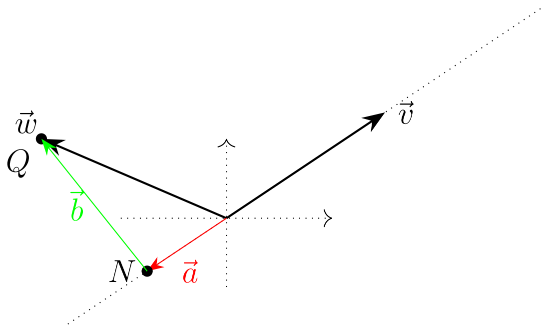
indikera en riktning ortogonal mot $\vec{v}$. Det vill säga $\vec{b}$ är parallell med $R(\vec{v})$. I figur 12 illustreras hur (enligt diskussionen i Avsnitt 1.4.2) spetsen N av $\vec{a}$ i figuren är den närmaste punkten till Q (spetsen av $\vec{w}$) på linjen genom origo med riktning $\vec{v}$.

Definition 1.12

Med $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{w}$ och $\vec{a}$ som ovan definieras den ***ortogonala projektionen*** av $\vec{w}$ på $\vec{v}$ som

$$\operatorname{proj}_{\vec{v}}(\vec{w}) = \vec{a}$$

Vi kan beräkna den ortogonala projektionen på likande sätt som i förra



Figur 12: $\vec{a}$ är parallel med $\vec{v}$, $\vec{b}$ är ortogonal mot $\vec{v}$ och $\vec{w} = \vec{a} + \vec{b}$.

avsnittet. Så om

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

kan vi skriva en ekvation för linjen ortogonal mot $\vec{v}$ genom spetsen av $\vec{w}$ som

$$v_1 x + v_2 y = v_1 w_1 + v_2 w_2$$

(se Exempel 1.4.1). På parameterform kan linjen genom $\vec{0}$ med riktning $\vec{v}$ skrivas

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Vi hittar skärningspunkten genom att sätta in dessa i ekvationen:

$$v_1(tv_1) + v_2(tv_2) = v_1 w_1 + v_2 w_2$$

vilket direkt ger

$$t = \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2}{v_1^2 + v_2^2} = \frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\|\vec{v}\|^2}.$$

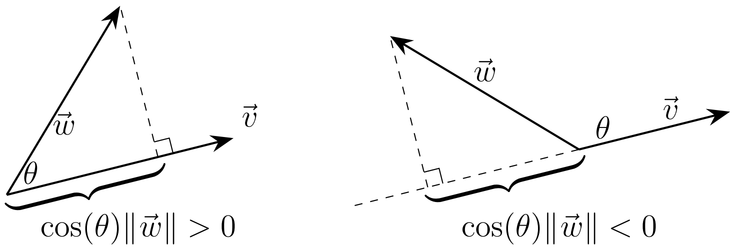
När detta sätts in i formeln för linjen ses följande formel.

Sats 1.13

För nollskild $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ och varje $\vec{w} \in \mathbb{R}^2$ är

$$\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}$$

Observera här att $t = \frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\|\vec{v}\|^2}$ är ett reellt tal (en skalär) som $\vec{v}$ ska skalas om med för att få projektionen. Följande är en annan lite mera geometriskt motivering för denna formel. I båda fall i Figur 13 har hypotenusen av den



Figur 13: Tecken på skalären i Sats 1.13

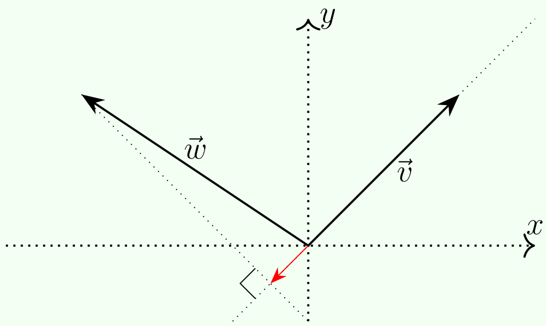
rätvinkliga triangeln längd $\|\vec{w}\|$ och figuren motiverar att längden av $\vec{a}$ måste vara $|\|w\| \cos(\theta)|$, men också att tecknet på den relevanta omskalning av $\vec{v}$ är korrekt om vi tar bort absolutbeloppet (se Anmärkning 1.3.6). Så för att få $\vec{a}$ måste vi skala om $\vec{v}$ med något så längden och riktningen blir detta. Ett sätt att göra detta på är att skala om i två steg, först normera $\vec{v}$ till en enhets vektor och då skala om med denna faktor:

$$\vec{a} = \|\vec{w}\| \cos(\theta) \left(\frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v} \right) \overset{\text{Def 1.7}}{=} \frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\|\vec{v}\|} \left(\frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v} \right) = \frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}.$$

Exempel 1.5.1

Uppgift: Hitta en ortogonala projektionen av $\vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ på vektorn $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Lösning: Vi ritar först vektorerna (började i origo) för att få en känsla för hur det borde bli:



Det ser ut som om att vektorerna är nästan ortogonala - så vi förväntar en kort vektor (röd i figuren) med en därför liten (och figuren indikerar negativ) skalär framför $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Vi sätter in i formeln

$$\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}}{2^2 + 2^2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{-6+4}{8} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -\tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Så skaläran framför $\vec{v}$ var $-\frac{1}{4}$.

.

Uppgifter till Kapitel 1

Avsnitt 1.1

1.1) Låt följande räkneregler var givna för de reella talen $\mathbb{R}$.

(a) $a + b = b + a$

(b) $ab = ba$

(c) $a(b + c) = ab + ac$

Bevisa att $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$, genom att bara använda räknereglerna ovan. (du får använda att $(a+b)+c = a+(b+c)$ så du inte behöver sätta parenteser för "+").

Länk till svar

1.2) Visa att $|a + b| \leq |a| + |b|$.

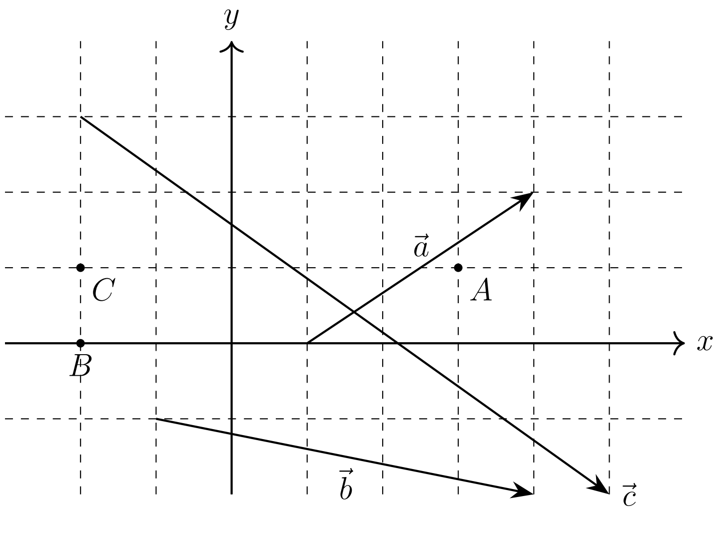
Länk till svar

1.3) Visa att $||a| - |b|| \leq |a + b|$.

Länk till svar

Avsnitt 1.2

1.4) Ange koordinaterna för punkter och vektorerna i figuren:



Länk till svar

1.5) Förenkla $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$

Länk till svar

1.6) Förenkla $2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BC}$

Länk till svar

1.7) Förenkla $2\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$

Länk till svar

1.8) Förenkla $2\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{AD}$

Länk till svar

1.9) Låt $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Beräkna och rita följande vektorer i ett koordinatsystem

(a) $\vec{v} + \vec{w}$

(b) $\vec{v} - \vec{w}$

(c) $3\vec{v} + 2\vec{w}$

(d) $0\vec{v} + 0\vec{w}$.

Länk till svar

1.10) Hitta alla $k \in \mathbb{R}$ så att $k^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Länk till svar

1.11) Hitta alla vektorer $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ som uppfyller att

$$3\vec{v} = \vec{v}.$$

Ledning: Antingen skriv ut direkt vad det betyder eller använd räkneregler till att skriva om ekvationen först.

Länk till svar

Avsnitt 1.3

1.12) Hitta avståndet mellan punkterna $(0, 3)$ och $(4, 0)$.

Länk till svar

1.13) Hitta avståndet mellan punkterna $(-2, 7)$ och $(3, -3)$.

Länk till svar

1.14) Normera vektorn $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Länk till svar

1.15) Normera vektorn $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Länk till svar

1.16) Visa att om $\vec{v} \neq \vec{0}$ och att $\vec{w}$ och $\vec{v}$ är parallella då är $\vec{w}$ en omskalning av $\vec{v}$.

Länk till svar

1.17) Hitta villkor på $a \in \mathbb{R}$ så att $\begin{pmatrix} a \\ 3 \end{pmatrix}$ är parallell med $\begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix}$.

Länk till svar

1.18) Hitta villkor på $a, b \in \mathbb{R}$ så att $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ är parallell med $\begin{pmatrix} ab \\ 1 \end{pmatrix}$.

Länk till svar

1.19)

(a) Visa att parallell i Definition 1.6 för nollskilda $\vec{v}$ och $\vec{w}$ är ekvivalent med att vinkeln mellan dem är 0 eller π. (Här får du anta lite uppenbara saker om båglängd som vi inte har visat)

(b) Beskriva vad skillnaden på vinkeln 0 och π är i termer av Definition 1.6.

Länk till svar

1.20) Hitta skalärprodukten av

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} \pi \\ -\pi \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} -10 \\ 11 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 11 \\ -10 \end{pmatrix}$.

Länk till svar

1.21) Hitta vinklarna mellan vektorer (samma som ovan):

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}\pi\\-\pi\end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix}-10\\11\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}11\\-10\end{pmatrix}$.

Länk till svar

1.22) Låt $A = (-2, -3)$, $B = (1, 2)$ och $C = (0, 4)$. Är triangeln trubbig, rättvinklat eller spetsig? (En triangel är trubbig om en av vinklarna är trubbig, annars är den spetsig eller rättvinklat)

Länk till svar

Avsnitt 1.4

1.23) Hitta en parameterform för linjen genom punkterna $(-3, 2)$ och $(2, 1)$.

Länk till svar

1.24) Hitta en ekvation för linjen genom punkterna $(-3, 2)$ och $(2, 1)$ (samma punkter som uppgiften ovan).

Länk till svar

1.25) Hitta skärningen av linjerna:

$$\begin{aligned} l &: 2x - 7y = 100 \\ k &: (x, y) = (3 + t, -7 - 3t), t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Länk till svar

1.26) Hitta skärningen av linjerna

$$\begin{aligned} l &: 2x + y = 4 \\ k &: 3x - y = 1. \end{aligned}$$

Länk till svar

1.27) Hitta närmaste punkt på linjen

$$l : (x, y) = (2 + t, 4 + 7t), t \in \mathbb{R}$$

till punkten $Q = (10, 10)$. Hitta även avståndet mellan l och Q .

Länk till svar

1.28) Hitta närmaste punkten N på linjen

$$l : x - 2y = -1$$

till punkten $Q = (-1, a)$ beroende på värdet $a \in \mathbb{R}$. (Här kan man geometriskt förställa sig att man flytter på punkten Q beroende på a, och det närmaste punkt på l samtidigt ändrar sig och ni måste hitta en formel för detta).

Länk till svar

Avsnitt 1.5

1.29) Hitta den ortogonala projektionen av $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ på $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Länk till svar

1.30) Hitta den ortogonala projektionen av $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ på $\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$

Länk till svar

1.31) Hitta den ortogonala projektionen av $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ på $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Länk till svar

1.32) Kolla på Uppgift 1.29 och Uppgift 1.30 och deras svar. Förklar geometriskt sammanhangen mellan koordinaterna för vektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och de två ortogonala projektionerna?

Länk till svar

1.33) Vad karakteriserar de vektorer i $\mathbb{R}^2$ vars ortogonal projektion på en vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ ger $\vec{0}$.

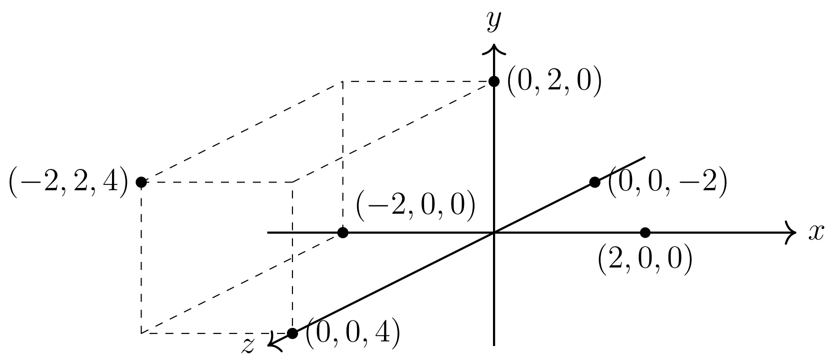
Länk till svar

2 Rummet $\mathbb{R}^3$

I detta kapitel generaliserar vi koncepten från Kapitel 1 till 3 dimensioner. Det är därför viktigt att man har läst Kapitel 1.

2.1 Koordinater i $\mathbb{R}^3$

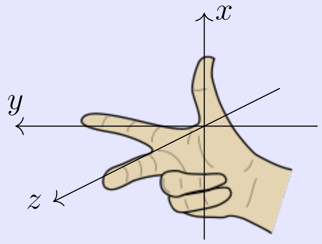
En punkt i rummet $\mathbb{R}^3$ har koordinater givna som en ordnad trippel (x, y, z) där x, y och z är reella tal. Vi kan visualisera detta som:



Här måste du föreställa dig att z-axeln pekar ut från pappret. Vi har ritat de streckade linjerna för att illustrera precis var i rummet punkten faktiskt är (på pappret har vi ju bara 2 dimensioner, så vi måste göra något för att kompensera så att vi kan se var punkten är relativt till axlarna).

Anmärkning 2.1.1

Det är standard konvention att i 3 dimensioner uppfyller x,y och z axlarna ***högerhandsregeln***. Det betyder: om man håller upp sin högerhand som i följande bild:



så att tumman är parallell med x-axeln och pekfingret parallellt med y-axeln. Då måste riktningen på z axeln (relativt till x och y) peka åt det hål man faktiskt kan hålla sitt långfinger ortogonalt mot pekfingret och tumman. Det är därför att man bör förställa sig att z axeln ovan pekar *ut* av pappret och *inte* in i pappret.

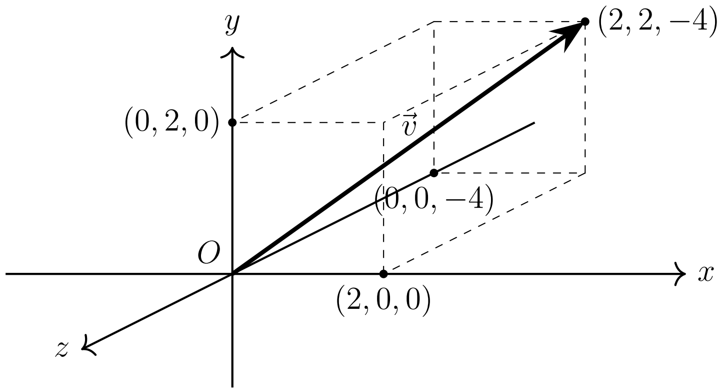
En vektor $\vec{v}$ i $\mathbb{R}^3$ är också given av 3 koordinater

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

och representerar en riktning och en längd i det 3-dimensionella rummet. Återigen har vi en nollvektor

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

och återigen har vi att om vi börjar en vektor i $O = (0, 0, 0)$ (origo) så har ändpunkten samma koordinater som vektorn:



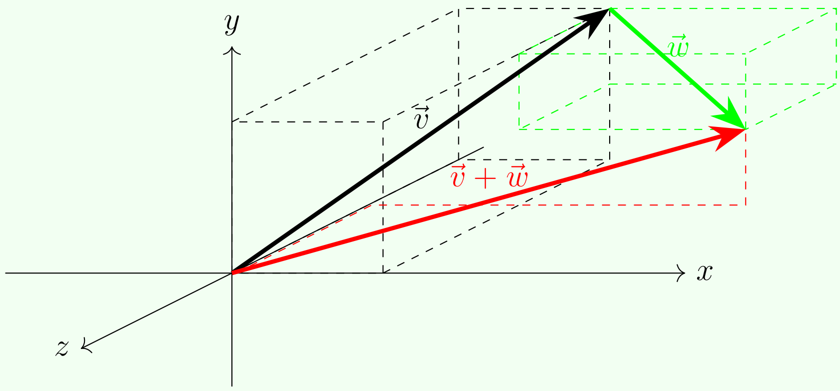
Så vektorn $\vec{v}$ är $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Mycket fungerar precis som i planet $\mathbb{R}^2$, men med 3 koordinater i stället för 2. T.ex. adderar vi vektorer i $\mathbb{R}^3$ på liknande sätt som i planet $\mathbb{R}^2$ (och $\mathbb{R}$):

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{pmatrix}$$

och den geometriska tolkningen är fortfarande att vi sätter dem efter varandra och tar vektorn från början av den första till slutet av den andra.

Exempel 2.1.2



Vi har inte skrivit ut koordinaterna i figuren, men det figuren ska föreställa är vektoradditionen:

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Här illustreras ändpunkten $(5, 1, -2)$ av den röda vektorn med de röda streckade linjerna, men hela boxen är inte ritad då det blir väldigt rörigt.

Vi skalar också om vektorer i $\mathbb{R}^3$ på samma sätt som i planet:

$$k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix} \quad \text{för } k \in \mathbb{R}.$$

Igen är detta geometriskt som att ändrar längden (och ger vektorn den precis motsatta riktning om skalningen är negativ). Vektorn som pekar ifrån punkten $P = (x_1, y_1, z_1)$ till punkten $Q = (x_2, y_2, z_2)$ kan på liknande sätt beräknas genom

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}.$$

Parallella vektorer är också definierade på liknande sätt.

Definition 2.1

Två vektorer $\vec{v}$ och $\vec{w}$ i $\mathbb{R}^3$ kallas ***parallella*** om den ena är en omskalning av den andra.

Precis som vi visade för $\mathbb{R}^2$ I Uppgift 1.16 gäller det att om $\vec{v} \neq \vec{0}$ så är $\vec{w}$ parallell med $\vec{v}$ om och endast om $\vec{w}$ är en omskalning av $\vec{v}$ (så man behöver bara tänka på ett fall istället för två).

Exempel 2.1.3

Vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$ är parallella då $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exempel 2.1.4

Uppgift: Avgör om vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ är parallella.

Lösning: Då de båda är nollskilda är det nog att avgöra om $k\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ för någon skalär k. Detta betyder:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 2k \\ 3k \end{pmatrix}$$

vilket i första koordinaten säger $k = 2$ men i andra koordinaten $k = \frac{3}{2}$ vilket inte kan gälla samtidig.

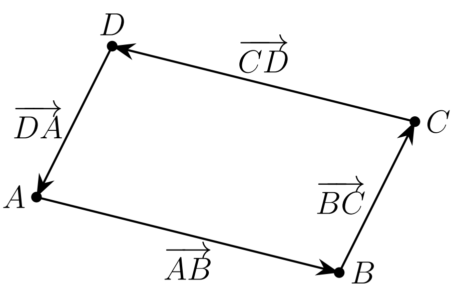
Alltså är de två vektorerna *inte* parallella.

Vektorbegreppet gör redan här att vi kan generalisera begrepp ifrån planet till 3 dimensioner. Vi kan nämligen definiera en parallellogram (ja det hettar ”en”) i rummet.

Definition 2.2

Fyra punkter A, B, C och D i $\mathbb{R}^3$ (eller $\mathbb{R}^2$) utgör en parallellogram $ABCD$ om

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \qquad (= -\overrightarrow{CD})$$



Figur 14: Parallellogram

Observera att för fyra godtyckliga punkter A, B, C och D gäller alltid:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

(summan av de 4 vektorerna börjar i A och slutar i A). Så i en parallellogram har vi också automatiskt

$$\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AD}.$$

Som i planet har vi också ortvektorn för en punkt $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ definierad som

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Följande exempel visar att det ibland är bra att ”konvertera” en punkt till dennas ortsvektor för beräkningar.

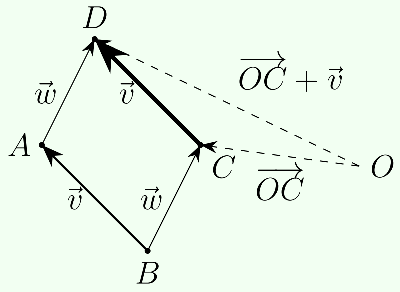
Exempel 2.1.5

Uppgift: Ett parallellogram har 3 av hörnen i punkterna:

$$A = (1, 1, 2) \quad B = (2, -1, 2) \quad C = (3, 1, 0).$$

Det sista hörnet ligger i punkten D och har inte en gemensam sida med B. Bestäm koordinaterna för D.

Lösning: Vi ritar en skiss av situationen och parallellogrammen:



(Detta är bara en skiss - den är inte trogen de riktiga koordinaterna!)

Vi ser därför att:

$$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v} = \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 1-(-1) \\ 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

och därför

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Så $D = (2, 3, 0)$.

Räknereglerna ifrån Sats 1.1 och Sats 1.2 fungerar också för vektorer i rummet $\mathbb{R}^3$. Bevisen är i stort de samma, men med 3 koordinater istället för 2. Vi sammanfattar dem i följande sats.

Sats 2.3

För $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ och $k, l \in \mathbb{R}$ gäller

(a) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

(b) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.

(c) $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$.

(d) $0\vec{v} = \vec{0}$

(e) $1\vec{v} = \vec{v}$

(f) $k(\vec{v} + \vec{w}) = k\vec{v} + k\vec{w}$

(g) $(k + l)\vec{v} = k\vec{v} + l\vec{v}$

2.2 Längd och avstånd

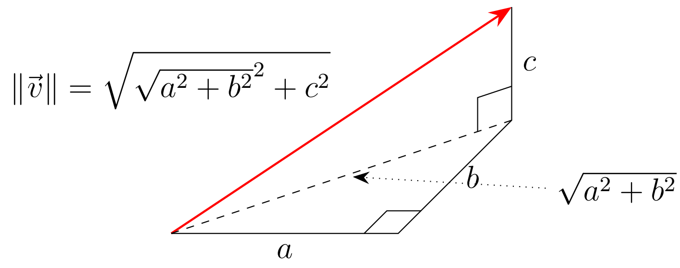
Längden (eller ***normen***) av en vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ är definierad genom

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \tag{2.1}$$

Exempel 2.2.1

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^3} = \sqrt{14}.$$

Formeln för längd är igen motiveratdav Pythagoras (som i planet $\mathbb{R}^2$). I detta fallet måste man dock (se Figur 15) använda Pythagoras två gånger.



Figur 15: Längd i rummet $\mathbb{R}^3$ och Pythagoras. Här kan man föreställa sig att trigangeln med sidorna a och b och den streckade hypotenusan ligger ned på ett bord, medans triangeln med den streckade linjen tillsammans med sidan c och hypotenusa den röda vektor står rakt upp på bordet.

Anmärkning 2.2.2

Som i Figur 15 ritar vi ofta inte axlarna för att göra vår figur mera överskådlig. Vi har också ritat räta vinklar som i figuren inte är räta! Det är för de ses i perspektiv och vi har även ritat symbolen ”$\llcorner$” för att en vinkel är rät i samma perspektiv för att göra detta klart.

Vi har följande räkneregler för längden av en vektor.

Sats 2.4

För $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ (eller $\mathbb{R}^2$) och $k \in \mathbb{R}$ gäller

(a) $\|k\vec{v}\| = |k|\|\vec{v}\|$.

(b) Om $\|\vec{v}\| = 0$ är $\vec{v} = \vec{0}$.

Igen är beviset i princip det samma som för Sats 1.3, men med 3 koordinater.

Avståanden mellan två punkter $Q = (x_1, y_1, z_1)$ och $P = (x_2, y_2, z_2)$ är igen definierat som längden av vektoren $\overrightarrow{PQ}$:

$$d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}.$$

Igen kan vi definiera enhetsvektorer som de som har längd 1 och igen skriver vi dem med en hatt istället för en pil. Då vi har samma sats för omskalning av vektorer fås att vi kan normera en nollskild vektor med samma formel som i $\mathbb{R}^2$:

$$\hat{v} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}. \tag{2.2}$$

Extra för den intresserade: ***Enhetssfären*** är de punkter i $\mathbb{R}^3$ som har avstånd 1 till $O = (0, 0, 0)$. Denna ska vi inte använda i denna kurs, men är i princip en 2-dimensionell yta i $\mathbb{R}^3$ som oftast skrivs S^2 (enhets cirkeln i $\mathbb{R}^2$ skrivas ofta S^1). Man kan som i planet tänka på denna mängd som att den representerar alla möjliga riktningar i $\mathbb{R}^3$.

2.3 Skalärprodukt

Som i $\mathbb{R}^2$ vill vi definiera skalärprodukt av vektorer, men då det är mera komplicerat att prata om vinklar gör vi det i en lite annan ordningsföljd.

Definition 2.5

Skalärprodukten av $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ är definierad genom

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3.$$

Vinkeln $\theta \in [0, \pi]$ mellan $\vec{v}$ och $\vec{w}$ är definierat som

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|}\right)$$

Speciellt sägs $\vec{v}$ och $\vec{w}$ att vara ***ortogonala*** om $\vec{v} \bullet \vec{w} = 0$.

För att den sista delen ska ge mening måste bråket ge ett tall i $[-1, 1]$. Alltså

$$\frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|} \in [-1, 1]$$

detta är ekvivalent med

$$|\vec{v} \bullet \vec{w}| \leq \|\vec{v}\|\|\vec{w}\|.$$

Denna olikhet kallas Cauchy–Schwarz olikhet. Vi kommer inte bevisa denna men bara anta att den gäller. De som ska gå kursen Linjär algebra

II kommer att se ett bevis. Den har dock en viktigt konsekvens kallad triangeln-olikheten. Med denna antagning gäller som i $\mathbb{R}^2$ följande räknerelger.

Sats 2.6: Räkneregel för skalärprodukten

För $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vektorer i $\mathbb{R}^3$ och $a \in \mathbb{R}$ gäller

(a) $\vec{v} \bullet \vec{v} = \|v\|^2$.

(b) $\vec{v} \bullet \vec{w} = \vec{w} \bullet \vec{v}$.

(c) $\vec{v} \bullet (\vec{u} + \vec{w}) = \vec{v} \bullet \vec{u} + \vec{v} \bullet \vec{w}$.

(d) $(a\vec{v}) \bullet \vec{w} = \vec{v} \bullet (a\vec{w}) = a(\vec{v} \bullet \vec{w})$.

Vi har också följande geometriska intuitiva olikhet.

Sats 2.7: Triangelolikhet

För varje $\vec{v}$ och $\vec{w}$ i $\mathbb{R}^3$ (och $\mathbb{R}^2$) gäller

$$\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|.$$

Intuitionen i denna sats är enklare om man tänker sig en triangel med 3 hörn A,B och C. Då säger satsen

$$d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$$

vilket i ord kan beskrivas som: går man den raka vägen ifrån A till C är detta kortare än att gå via B.

Bevis: Följande använder Cauchy–Schwarz olikhet (som vi har antagat i denna kurs). Då längder är icke-negativa är det nog att visa att kvadraten på båda sidorna uppfyller olikheten:

$$\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = (\vec{v} + \vec{w}) \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 + 2\vec{v} \bullet \vec{w} \leq$$
$$\leq \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 + 2|\vec{v} \bullet \vec{w}| \leq \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 + 2\|\vec{v}\|\|\vec{w}\| = (\|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|)^2$$

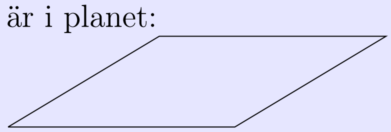
2.4 Linjer och plan i $\mathbb{R}^3$

Vi har redan använt och kommer använda begreppet *dimension* lite löst, men inte i viktiga matematisk argument - bara som förklaring runt hur man kan föreställa sig vissa rum. I kursen Linjär algebra II kommer detta begrepp att definieras ordentligt. Dimensionen av ett rum betyder ungefär: ”hur många koordinater/parametrar som man måste använde för att beskriva punkter i detta rum”. De rum vi bryr oss om i detta avsnitt är:

- Punkter (0-dimensionella rum).
- Linjer (1-dimensionella rum) t.ex. $\mathbb{R}$.
- Plan (2-dimensionella rum) t.ex. $\mathbb{R}^2$).
- Rummet $\mathbb{R}^3$ (ett 3-dimensionellt rum).

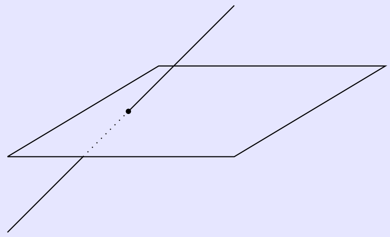
Anmärkning 2.4.1

Precis som vi hade att linjer alltid är oändligt långa (inte som t.ex. linjestycker) så betyder ***plan*** i $\mathbb{R}^3$ också något som har oändlig utsträckning och area (men som samtidigt är oändligt tunt!). Det är väldigt svårt att rita. Så ofta ritar man bara en rektangel som man måste föreställa sig är i planet:



Detta ser kanske inte ut som en rektangel, men det är för att vi har ritat den i perspektiv för att ge känslan av att planet inte är ”parallellt med pappret”. I detta fallet ser det ut som att rektangeln ligger ned på ett bord fram för oss. I så fallet är bordytan (om bordet är oändligt stort) precis det plan vi försöker illustrera med ”rektangeln”.

Tanken är också att det vi har gjort är att rita den begränsade delen av det oändliga plan som rektangeln innesluter (precis som vi ritar linjestycken för att representera linjer). Så om man ritar en linje i samma figur som skär planet i denna delen och därför går lite bakom - kunna man göra detta genom:



Här är skärningspunkten också ritat.

Vi har redan sett linjer i $\mathbb{R}^2$ som exempel på linjer, och de var givna av en enda ekvation av typen $ax + by = c$.

Om man i $\mathbb{R}^3$ ser på alla lösningarna till en liknande ekvation

$$2x + y - 2z = 4 \tag{2.3}$$

kan man som tidigare isolera en variabel

$$2x + y - 2z = 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad z = x - \tfrac{1}{2}y - 2$$

och se att för varje (x, y) finns precis en lösning där z ges av denna "formel". Det betyder att lösningarna utgör ett 2-dimensionellt rum. Generellt definierar vi ett ***plan*** i $\mathbb{R}^3$ som lösningsmängden i $\mathbb{R}^3$ till en ekvation

$$ax + by + cz = d$$

där inte alla a, b och c är 0. Igen kallas x, y och z de ***obekanta*** och alla lösningarna utgör en delmängd i $\mathbb{R}^3$ som är den typ av delmängd vi kallar "ett plan". När man beskriver ett plan via en sådan ekvation säger vi att vi har skrivet planet på ***ekvationsform***.

I exemplet i Ekvation (2.3) finns det igen (som för linjer i $\mathbb{R}^2$) oändligt många sätt att beskriva alla lösningarna på. Här är ett par exempel hur lösningarna till ekvation (2.3) kan beskrivas

- $(x, y, z) = (s, t, s - \frac{1}{2}t - 2), s, t \in \mathbb{R}$.
- $(x, y, z) = (1 + s, -2s + 2t, -1 + t), s, t \in \mathbb{R}$

Den första kommer direkt från analysen ovan där $x = s$ och $y = t$ och vi hittar z beroende på dessa. Vi kan dubbelkolla att den sista faktiskt beskriver lösningar genom att sätta in i vänsterledet av ekvationen:

$$2(1 + s) + (-2s + 2t) - 2(-1 + t) = 2 + 2s - 2s + 2t + 2 - 2t = 4$$

Vi ser att detta alltid blir 4 oberoende av s och t. Att vi faktiskt har beskrivit *alla* lösningar är inte helt lätt att se, sådana frågor återkommer vi till när vi mera systematiskt ska lära oss lösa linjära ekvationssystem i Kapitel 3.

När man skriver ett plan via två parameter som ovan eller på följande vektornotation:

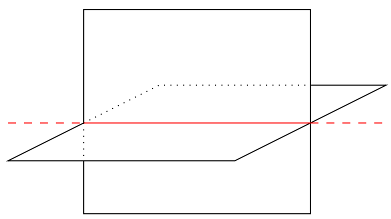
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R}$$

säger man att man har skrivit planet på ***parameterform***.

Liknande då vi hittade skärningspunkter av linjer i $\mathbb{R}^2$ (som oftast skär i en punkt) kan vi också ha två ekvationer/plan i $\mathbb{R}^3$. T.ex:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 4 \\ x - y - 2z = 6 \end{cases} \tag{2.4}$$

Om inte dessa plan är parallella illustrerar Figur 16 att de borde skära i en



Figur 16: Plan som skär i en röd linje. De prickade linjerna i rektangeln betyder att rektangeln är bakom den del av det plan som den andra rektangeln representerar. Precis som planen är linjen faktiskt oändlig lång vilket vi kan illustrera med streckade linjer i änderna. Att planen sträcker sig oändligt i alla riktningar är svårt att illustrera (se Anmärkning 2.4.1).

linje. När en linje är representerad via så två ekvationer säger vi att linjen är skriven på ***ekvationsform***.

Om vi vill lösa ekvationssystemet kan vi i detta fall addera de två ekvationerna och se att $2x = 10 \Leftrightarrow x = 5$. Sätts detta in ser vi

$$\begin{cases} 5 + y + 2z = 4 \\ 5 - y - 2z = 6 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y + 2z = -1 \\ y - 2z = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad y + 2z = -1$$

Vilket ger $y = -1 - 2z$. Så för varje z har vi precis en lösning givet av $(x, y) = (5, -1 - 2z)$. Då vi precis behöver en koordinat (här z koordinaten) är lösningsmängden 1-dimensionell (faktiskt en linje). Den geometriska tolkingen av detta är att vi har hittat skärningslinjen av de två plan (ett plan för varje ekvation) genom att lösa ekvationssystemet. Lösningarna kan vi igen skriva på parameterform som

$$(x, y, z) = (5, -1 - 2t, t), t \in \mathbb{R} \qquad \text{eller} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

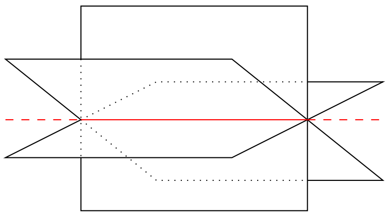
Igen säger vi att vi har skrivit linjen på ***parameterform***.

Anmärkning 2.4.2: Tumregel för dimension

För varje "ny" ekvation man lägger till ett ekvationssystem går lösningsmängden ned med 1 dimension.

Här ska "ny" tolkas genom att lösningsmängden inte redan automatiskt uppfyller eller automatiskt inte uppfyller denna ekvation, och man kan tänka på detta som att man inför ett nytt villkor som gör att en av koordinaterna (som tidigare kunna väljas fritt) nu blir beroende på de andra.

Om vi förställer oss tre plan i $\mathbb{R}^3$ (see figur 17) som skär i en linje så



Figur 17: Tre plan som skär i en linje

att inga av de 3 plan sammanfaller. Så ser vi att om man tar bort ett av dem (motsvarar att ta bort en av 3 ekvationer) så skär de två resterande planen i samma linje. Detta visar att begreppet "ny" i anmärkningen ovan är mera subtilt än "bara" parallella plan. Igen kommer den generella lösning av linjära ekvationssystem att ta hand om sådana frågor.

Tabell 2.1 visar hur många parametrar (i en parameterform) man måste ha och hur många ekvationer man måste använda för att representera/beskriva olika mängder (objekt).

Mängd	Antal parametrar	antal ekvationer
Punkt i $\mathbb{R}^2$	0	2 (två linjer kan skära i en punkt)
linje i $\mathbb{R}^2$	1	1
hela $\mathbb{R}^2$	2 (x och y)	0
Punkt i $\mathbb{R}^3$	0	3 (tre plan kan skära i en punkt)
linje i $\mathbb{R}^3$	1	2 (två plan kan skära i en linje)
plan i $\mathbb{R}^3$	2	1
hela $\mathbb{R}^3$	3	0

Tabell 2.1: Dimensionen av en mängd är löst förklarat antalet parametrar man behöver för att beskriva alla punkterna i mängden. Antalet ekvationer är hur många ekvationer man åtminstone måste ha för att beskriva mängden.

Tabellen indikerar att det i $\mathbb{R}^3$ ofta är lättare att beskriva linjer på parameterform medans plan är lättare att beskriva med en ekvation.

Exempel 2.4.3

Man behöver inga parametrar för att beskriva en punkt. T.ex. $Q = (1, 2, 3)$. Man behöver 1 parameter (här t) för att beskriva en linje. T.ex.

$$(x, y, z) = (1 + t, 1 - t, t), t \in \mathbb{R}.$$

Man behöver 2 parametrar för att beskriva ett plan. T.ex.

$$(x, y, z) = (s, t, s - \tfrac{1}{2}t - 2), s, t \in \mathbb{R}.$$

men det är lättare att beskriva detta samman plan med ekvationen:

$$2x + y - 2z = 4$$

Anmärkning 2.4.4

I fysik pratar man ofta om ”antalet frihetsgrader” och detta är i stortset det samma som dimension eller antalet parametrar.

2.4.1 Skärningspunkter

Man måste beroende på hur plan och linjer är representerade hitta skärning på lite olika sätt. Vi ska se flera exempel på detta i Kapitel 3.

Följande exempel illusterar ett av dessa fall och är det som vi ska använda i resten av detta kapitlet.

Exempel 2.4.5

Uppgift: Hitta skärningspunkterna av linjen

$$l : (x, y, z) = (1 + 2t, t, 1), t \in \mathbb{R}$$

och planet

$$\pi : 2x + 3y - 22z = 1.$$

Lösning: Vi sätter in beskrivningen av punkterna på l i ekvationen för att se om några av dessa uppfyller ekvationen för planet:

$$2(\underbrace{1 + 2t}_{x}) + 3(\underbrace{\ t\ }_{y}) - 22(\underbrace{\ 1\ }_{z}) = 1$$

Detta ger $2 + 4t + 3t - 22 = 1$ som ger $t = 3$. Så skärningspunkten blir:

$$(7, 3, 1)$$

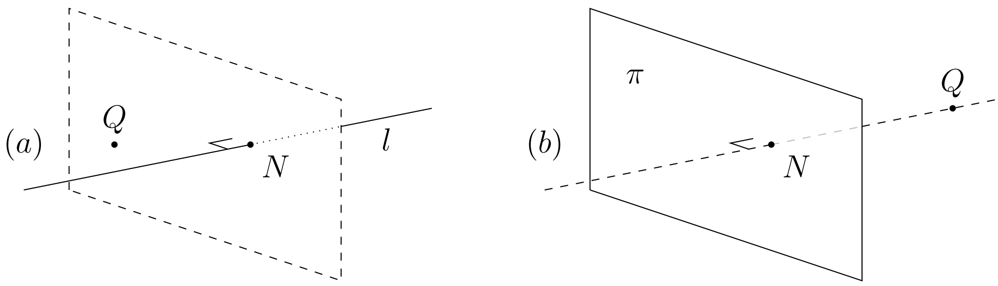
2.5 Närmaste punkter

Problemet att i $\mathbb{R}^2$ hitta den närmaste punkten på en linje till en given punkt liknar några olika problem vi kan formulera i $\mathbb{R}^3$. I det som följer beskriver vi problemen och vad idén i lösningarna är.

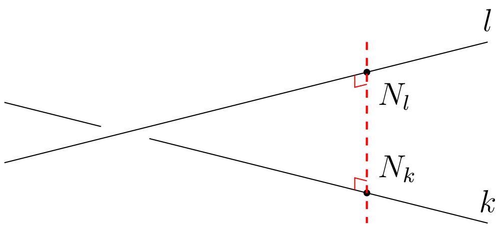
Metod 2.8

- Låt l vara en linje och Q en punkt. Den närmaste punkten N på l till punkten Q kan hittas genom att ta skärningen mellan linjen l och det plan genom Q som är ortogonalt mot l. Se Figur 18.a) .

- Låt π vara ett plan och Q en punkt. Den närmaste punkten N på π till punkten Q kan hittas genom att ta skärningen mellan planet π och den linje genom Q som är ortogonal mot π. Se Figur 18.b).
- Låt l och k vara två icke parallella linjer. Då finns en precis en linje som skär båda l och k ortogonalt. De två skärningspunkterna, kallade N_l och N_k (på l respektive k) är punkten på l närmast k respektive punkten på k närmast l (se Figur 19).



Figur 18: I (a) måste man hitta planet och då skärningen. I (b) måste man hitta linjen och då skärningen



Figur 19: Närmaste punkter mellan två linjer. Hitta den röda linjen först.

Exempel 2.5.1

Uppgift: Hitta närmaste punkten på linjen

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

till punkten $Q = (3, -3, 1)$. Hitta även avståndet mellan Q och l.

Lösning: Planet som är ortogonalt mot linjen har normalvektor given av linjens riktningsvektor:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

det vill säga dess ekvation är

$$2x - y + 3z = c$$

där $c = 2 \cdot 3 - (-3) + 3 \cdot 1 = 12$ (beräknas genom att sätta in Q som ju måste ligga på planet). Så skärningen kan hittas genom att sätta in linjens beskrivning:

$$2(2t) - (2 - t) + 3(3t) = 12 \quad \Rightarrow \quad 4t + t + 9t = 14$$

så $t = 1$, som ger punkten

$$N = (2, 1, 3).$$

Avståndet blir då:

$$d(Q, N) = \left\| \begin{pmatrix} 3 - 2 \\ -3 - 1 \\ 1 - 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{21}.$$

I Uppgift 2.13 vägleds du genom en liknande uppgift för att hitta närmaste punkt i ett plan till en punkt.

Exempel 2.5.2

Uppgift: Hitta avståndet mellan linjerna:

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

och

$$k : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R}.$$

Lösning: En generell punkt på l kan skrivas $A = (1+t, t, 3)$ och en generell punkt på k kan skrivas $B = (-2+s, 0, 2s)$. Vi måste bestämma s och t så att

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2+s-(1+t) \\ 0-t \\ 2s-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+s-t \\ -t \\ 2s-3 \end{pmatrix}$$

är ortogonal mot båda linjernas riktningsvektorer:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Genom att ta skalärprodukt ger detta ekvationerna:

$$\begin{cases} 1(-3+s-t) + 1(-t) + 0(2s-3) = 0 \\ 1(-3+s-t) + 0(-t) + 2(2s-3) = 0 \end{cases}$$

som är samma som

$$\begin{cases} s - 2t = 3 \\ 5s - t = 9 \end{cases}$$

vilket ger $(s,t) = (\frac{5}{3}, -\frac{2}{3})$. Som i tur ger

$$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Så denna vektor pekar ifrån l till k och är ortogonal mot båda. Det betyder att avståndet från l till k är $\|\overrightarrow{AB}\| = 1$.

Om man bara ska hitta avståndet (inte närmaste punkt) ifrån t.ex. en punkt till ett plan då kan man använda ovan till att härleda följande formel.

Avståndet ifrån punkten (x_0, y_0, z_0) till planet $ax + by + cz = d$ är

$$\frac{|d - ax_0 - by_0 - cz_0|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \tag{2.5}$$

Detta inses på följande sätt (metod som i Uppgift 2.13). Linjen genom punkten ortogonal mot planet är:

$$(x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct), t \in \mathbb{R}.$$

Vi hittar det t som motsvarar skärningspunkten

$$a(x_0 + at) + b(y_0 + bt) + c(z_0 + ct) = d \quad \Rightarrow \quad t = \frac{d - ax_0 - by_0 - cz_0}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Vektorn som pekar ifrån (x_0, y_0, z_0) till närmaste punkten blir då

$$\frac{d - ax_0 - by_0 - cz_0}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

vars längd är formeln i Ekvation (2.5).

2.5.1 Parallella mängder och avstånd

I bland händer det att man inte kan hitta skärningar mellan två mängder även om deras dimensionerna indikera att man borde ha skärningar. Detta är ofta för att mängderna har parallella riktningar. Ex på detta är

- Två parallella linjer i planet.
- Två parallella plan i rummet $\mathbb{R}^3$.
- Ett plan och en parallell linje i rummet $\mathbb{R}^3$.

Intuitionen är: om två mängders dimension addera upp till bakgrundsrummets dimension (i vår fall $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$ som respektive har dimension 2 och 3), så förväntar man sig nästen att de borde skära i en eller flera punkter. För plan och linjer (och punkter) är detta ofta fel när mängderna råkar ha parallella riktningar.

Det finns i dessa fall inte något entydigt närmaste punkt (ett sådant ville man alltid kunna parallellförskjuta och få ett annat sådant). Avståndet däremot ger fortfarande mening och formeln i Ekvation (2.5) blir då väldigt bekväm.

Exempel 2.5.3

Uppgift: Hitta avståndet mellan de parallella planen:

$$\pi : x + y + z = 10$$
$$\tau : 2x + 2y + 2z = 4$$

Lösning: Observera att de två normalvektorer man kan avläsa ifrån ekvationerna är parallella. Vilket är det samma som att planen är parallella (men det hade uppgiften redan berättat för oss).

Då de är parallella kan vi hitta avståndet genom att ta en godtycklig punkt på π (t.ex. $(10, 0, 0)$) och hitta dess avstånd till τ. Formeln i Ekvation (2.5) ger denna som

$$\frac{|4 - 2 \cdot 10 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{16}{2\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

På liknande sätt hittar man avstånd mellan parallellt plan och linje genom att ta en godtycklig punkt på linjen och hitta avståndet till planet. Notera, att man får inte bara ta en godtycklig punkt på planet och hitta avstånd till linjen (Uppgift 2.16).

2.6 Ortogonal projektion

Formeln för ortogonal projection av en vektor $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ på en nollskild vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ är den samma som i $\mathbb{R}^2$:

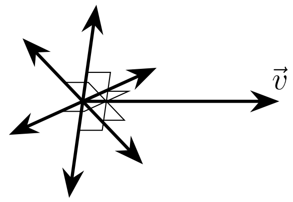
$$\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{w} = \frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v} \tag{2.6}$$

Denna kan som i $\mathbb{R}^2$ härledas genom att hitta närmaste punkten på linjen genom origo parallel med $\vec{v}$ till spetsen av $\vec{w}$ (när denna ritas början i origo). Detta ser ut precist som i Figur 12 bortset från att man borde rita in en extra axel och inte anta att vektorerna ligger i xy-planet.

Dock ska man akta sig lite för tolkningen. Det är fortfarande korrekt att om vi skrivar

$$\vec{w} = \underbrace{\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{w}}_{\vec{a}} + \underbrace{(\vec{w} - \operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{w})}_{\vec{b}} \tag{2.7}$$

så är $\vec{a}$ parallell med $\vec{v}$ och $\vec{b}$ ortogonal mot $\vec{b}$ (samma bevis om för Sats 1.13 - som inte hade några referenser till antalet koordinater), *men* det finns inte någon vektor $R(\vec{v})$ (som i Figur 11) där det att vara ortogonal mot $\vec{v}$ är det samma som att vara parallell med $R(\vec{v})$. Det finns i stället ett helt "plan" av vektorer som är ortogonala mot $\vec{v}$ (se figur 20).



Figur 20: Många vektorer med olika riktningar ortogonal mot $\vec{v}$. (se Anmärkning 2.2.2 (och 2.4.1) om du inte förstår figuren)

Exempel 2.6.1

Uppgift: Hitta $\vec{a}$ och $\vec{b}$ så att $\begin{pmatrix}-1\\3\\-1\end{pmatrix} = \vec{a}+\vec{b}$ där $\vec{a}$ är parallel med $\vec{v} = \begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$ och $\vec{b}$ är ortogonal mot $\vec{v}$.

Lösning: Vi gör som förklarat i Ekvation (2.7) som använder Ekvation (2.6) och får

$$\vec{a} = \text{proj}_{\vec{v}}\begin{pmatrix}-1\\3\\-1\end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix}-1\\3\\-1\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}}{(-1)^2+2^2+3^2}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} = \frac{2}{7}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

detta ger

$$\vec{b} = \begin{pmatrix}-1\\3\\-1\end{pmatrix} - \frac{2}{7}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}-5\\17\\-13\end{pmatrix}$$

.

Uppgifter till Kapitel 2

Avsnitt 2.1

2.1) Förklara varför man inte kan ersätta ”högerhand” med ”vänsterhand” i Anmärkning 2.1.1.

Länk till svar

2.2) Låt $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ och $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$. Beräkna följande vektorer.

(a) $\vec{v} + \vec{w}$

(b) $\vec{v} - \vec{w}$

(c) $1000\vec{v} + \vec{w}$

Länk till svar

2.3) En parallellogram $ABCD$ har

$$A = (0, 0, 0), \quad B = (3, 10, 3), \quad \text{och} \quad D = (10, 3, -3).$$

Hitta C. (Vi använder konventionen att när man skrivar $ABCD$ så beskriver detta hörnens cykliska ordning)

Länk till svar

Avsnitt 2.2

2.4) Hitta avståndet mellan $(3, 1, 2)$ och $(10, 2, 1)$.

Länk till svar

2.5) I varje deluppgift hitta längen av vektorn och den normerade vektorn:

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Länk till svar

Avsnitt 2.3

2.6) Bevisa räkneregeln i Sats 2.6.d) .

Länk till svar

2.7) Hitta skalärprodukten av

(a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Länk till svar

2.8) Hitta vinklarna mellan vektorer (samma som ovan):

(a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Länk till svar

2.9) Låt $A = (-2, -3, 10)$, $B = (1, 2, 0)$ och $C = (0, 4, 10)$. Är triangeln trubbig, rättvinklat eller spetsig? (En triangel är trubbig om en av vinklarna är trubbig, annars är den spetsig eller rättvinklat)

Länk till svar

2.10) Om man jämnför Uppgift 1.22 och Uppgift 2.9 så ser man att det är samma x och y koordinater på punkterna. Svaret blev dock olika. Det är för att när man ger A och C så stor höjd i z koordinat över B så gör man vinklen i B mindre. Bestäm för vilket $a \in \mathbb{R}$ triangeln ABC med hörn

$$A = (-2, -3, a), \quad B = (1, 2, 0) \quad \text{och} \quad C = (0, 4, a)$$

är respektive

- spetsig,
- trubbig,
- rättvinklat.

Länk till svar

Avsnitt 2.4

2.11) Hitta skärningspunkterna av linjen

$$l : (x, y, z) = (1 - t, 1 + t, 1), t \in \mathbb{R}$$

och planet

$$\pi : 2x + 2y + z = 1.$$

Länk till svar

2.12) Hitta skärningspunkterna av linjen

$$l : (x, y, z) = (1 - t, 1 + 2t, 1), t \in \mathbb{R}$$

och planet

$$\pi : 2x + 2y + z = 1.$$

Länk till svar

Avsnitt 2.5

2.13) I denna uppgift vägleds du till att hitta närmaste punkten N på planet

$$\pi : x - 2y - 3z = 1$$

till punkten $Q = (1, 1, 1)$ - och sedan avståndet mellan Q och π.

(a) Ange en normalvektorn för planet π.

(b) Hitta en parameterform för linjen l genom Q ortogonal mot π.

(c) Hitta skärningen N av l och π (detta är närmaste punkten).

(d) Hitta avståndet ifrån Q till π.

Länk till svar

2.14) Hitta den närmaste punkten i planet

$$\pi : x + y - z = 5$$

till punkten $Q = (1, 1, 1)$.

Länk till svar

2.15) Hitta den närmaste punkten N på linjen

$$(x, y, z) = (1 + t, 2 + t, -1 - t), t \in \mathbb{R}$$

till $Q = (1, 7, 4)$.

Länk till svar

2.16) Ge ett exempel som visar att avståndet från en punkt i ett plan till en parallell linje kan bero på punkten i planet

Länk till svar

2.17) Visa att linjen $(x, y, z) = (-1 + 3t, t, t), t \in \mathbb{R}$ är parallell till planet $x - 2y - z = 10$ och hitta avståndet mellan dem.

Länk till svar

Avsnitt 2.6

2.18) Vad karakteriserar de vektorer i $\mathbb{R}^3$ vars ortogonal projektion på en vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ ger $\vec{0}$.

Länk till svar

2.19) Hitta $\vec{a}$ och $\vec{b}$ så att $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{a} + \vec{b}$ och $\vec{a}$ är parallell med vektorn $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\vec{b}$ är ortogonal mot denna.

Länk till svar

2.20) Hitta närmast punkten i planet $2x - y + z = 0$ till $Q = (0, 0, 100)$.

Länk till svar

3 Linjära ekvationssystem

I det här kapitlet kommer vi att studera en viss typ av ekvationssystem som kallas linjära. Vi går igenom hur dessa kan lösas systematiskt och hur många lösningar de kan ha.

3.1 Inledande exempel och begrepp

Vi har tidigare sett att lösningarna till en ekvation som

$$2x + 7y = 16.$$

beskriver punkterna på en linje i planet. På liknande sätt har vi sett att

$$5x - 2y + 3z = 2.$$

beskriver ett plan i rummet. Vänsterleden i dessa ekvationer består av okända tal x, y respektive x, y, z som har multiplicerats med några kända tal och därefter summerats. I högerleden står ett ytterligare känt tal. De okända talen kallas obekanta och de kända konstanter (i kontrast till de obekanta som vi ofta tänker på som variabler).

Ekvationer vars vänsterled är en summa av obekanta multiplicerade med konstanter och vars högerled är en ytterligare konstant dyker upp i många olika sammanhang, inklusive sådana som inte direkt har med geometri att göra. Trotts detta kallas alla sådan ekvationer för linjära. Mer precist gör vi följande ekvation

Definition 3.1

En linjär ekvation i obekanta $x_1, x_2, \ldots, x_n$ är en ekvation på formen

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b_n$$

där $a_i \in \mathbb{R}$ och $b_n \in \mathbb{R}$ är konstanter.

I exemplen betecknades de obekanta med olika bokstäver $x, y, \ldots$ men i definitionen betecknas de med samma bokstav fast med olika index $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Detta är inte väsentligt, utan de obekanta kan betecknas med vilka symboler som helst. Att använda index gör att vi kan prata om x_i som obekant nummer i, vilket ofta är praktiskt. Som i definitionen är det vanligt att beteckna konstanten framför x_i med en symbol med samma index (alltså a_i). Denna konstant kallas för x_i:s koefficient. Konstanten b_n kallas högerled.

Om vi ersätter de obekanta $x_1, x_2, \ldots, x_n$ med tal $s_1, s_2, \ldots, s_n$ så får vi i ekvationen en likhet av två tal som antingen gäller eller inte. Om den gäller så kallar vi tippeln $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ för en lösning till ekvationen.

Betraktar två linjära ekvationer med samma obekanta x, y:

$$x + 3y = 1, \qquad 2x - y = 3$$

De beskriver två linjer i planet. Som vi sett tidigare består de gemensamma lösningarna till dessa ekvationer av de punkter som tillhör båda planen, det vill säga skärningen mellan planen. När vi studerar flera linjära ekvationer samtidigt i syfte att hitta deras gemensamma lösningar pratar vi om ett linjärt ekvationssystem. Vi betecknar ekvationssystemet bestående av ekvationerna ovan såhär

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

Ett litet ekvationssystem som det ovan är förhållandevis lätt att lösa genom substitution. Men när vi ska hantera ekvationssystem med många obekanta och många ekvationer, kan denna metod bli rörig. Vi ska därför gå igenom en annan strategi för att lösa linjära ekvationssystem. I korthet är strategin att skriva om ett givet ekvationssystemet till ett annat enklare system som har samma lösningar som det ursprungliga. Genom upprepa denna strategi kommer vi förhoppningsvis fram till ett system som är så enkelt att vi lätt kan skriva ner dess lösningar.

Omskrivningarna görs genom tre grundläggande operationer.

λ: Ta ekvationen som står framför cirkeln, multiplicera med konstanten λ och lägg till resultatet i ekvationen som pilen pekar på. Observera att ekvationen som står framför cirkeln inte förändras. Till exempel:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \;\; \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1 + \lambda a_2)x + (b_1 + \lambda b_2)y = c_1 + \lambda c_2 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

λ: Multiplicera ekvationen med konstanten $\lambda \neq 0$. Till exempel:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \;\; \lambda \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda a_1)x + (\lambda b_1)y = \lambda c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

: Byt plats på de två ekvationerna som pilarna pekar på. Exempel:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2x + b_2y = c_2 \\ a_1x + b_1y = c_1 \end{cases}$$

I exemplen ovan är det klart att om x, y löser det ursprungliga systemet så kommer samma x, y även ge en lösning till det nya systemet. Men vi hävdar att systemen har precis samma lösningar. Hur kan vi vara säkra på att varje varje lösning till det nya systemet också är en lösning till det ursprungliga? En förklaring är att operationerna kan omvändas så att det ursprungliga systemet återfås. Om vi lägger till en ekvation multiplicerat med λ till en annan kan vi upprepa samma operation fast med $-\lambda$ som konstant istället. Om vi multiplicerar en ekvation med $\lambda \neq 0$ kan vi multiplicera samma ekvation med λ^{-1}. Om vi byter plats på två ekvationer kan vi byta plats på samma ekvationer igen. På så sätt kan vi alltid återskapa systemet som vi hade från början.

För att se hur vi kan använda ovanstående operationer på ett praktiskt sätt går vi igenom några exempel. Observera att det i nuläget inte är så klart varför vi gör just de operationer som vi gör. Det kommer klarna lite senare, men fundera gärna på om du kan se någon princip för vilka operationer vi gör.

Exempel 3.1.1

Lös det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

Vi skriver om vårt ekvationssystem:

$$\begin{cases} x + 3y = 1 & -2 \\ 2x - y = 3 & \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 1 & \\ -7y = 1 & -\frac{1}{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 1 & \\ y = -\frac{1}{7} & -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{7} \\ y = -\frac{1}{7} \end{cases}$$

Alltså har vi en entydig lösning $(x, y) = (\frac{10}{7}, \frac{-1}{7})$. Vi kan lätt kolla att lösningen stämmer genom att sätta in i ekvationen:

$$\begin{cases} \frac{10}{7} + 3(\frac{-1}{7}) = \frac{7}{7} = 1 \\ 2(\frac{10}{7}) - (\frac{-1}{7}) = \frac{21}{7} = 3 \end{cases}$$

Det stämmer! Vi kan tolka ekvationerna som linjer i planet. Att systemet har en unik lösning betyder att linjerna skär varandra i en punkt.

Anledningen att de sista systemet är enklare än det första är att varje obekant står i en ekvation för sig själv. Detta är en tumregel som vi kommer att utveckla till allmän strategi: ju färre obekanta i varje ekvation desto enklare blir det.

Exempel 3.1.2

Lös det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - 2y = 2 \\ -3x + 6y = -6 \end{cases}$$

Vi skriver om vårt ekvationssystem:

$$\begin{cases} x - 2y = 2 \quad 3 \\ -3x + 6y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Den andra ekvationen säger nu att $0 = 0$, vilket är gäller oavsett värdena på x och y. Alltså kan vi strunta i den ekvationen när vi undersöker lösningar. I den första ekvationen kan vi lösa ut x och får då $x = 2 + 2y$. Vi parametriserar $y = t$ vilket ger $x = 2 + 2t$. Lösningarna är alltså $(x, y) = (2 + 2t, t), t \in \mathbb{R}$.

Vi undersöker nu samma system fast vi ändrar lite i högerledet:

$$\begin{cases} x - 2y = 2 \\ -3x + 6y = 5 \end{cases}$$

Vi skriver om på liknande sätt:

$$\begin{cases} x - 2y = 2 \quad 3 \\ -3x + 6y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 2 \\ 0 = 11 \end{cases}$$

Den andra ekvationen säger nu istället att $0 = 11$, vilket inte gäller oavsett värdena på x och y. Alltså finns inga lösningar till systemet.

Geometriskt kan vi förstå det första exemplet som att vi beskrivit samma linje med två olika ekvationer. När vi i det andra exemplet ändrar i högerleden förflyttas linjerna något. Vi får då två parallella linjer som inte skär varandra.

I de två senaste exemplen uppstod ekvationer utan någon obekant alls. En sådan ekvation är antingen sann (som $0 = 0$) eller falsk (som $0 = 11$) oavsett vad de obekanta har för värden. I det första fallet kan vi ignorera ekvationen, i det andra får vi att systemet saknar lösningar. I vilket fall blir systemet enklare.

Exempel 3.1.3

Lös det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 2 \\ -x + 2y + z = -1 \end{cases}$$

Vi skriver om vårt ekvationssystem:

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 2 & 1 \\ -x + 2y + z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + 2z = 2 \\ -y + 3z = 1 & \boxed{-1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + 2z = 2 \\ y - 3z = -1 & 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 7z = -1 \\ y - 3z = -1 \end{cases}$$

Det sista systemet kan vi skriva om som

$$\begin{cases} x = -1 + 7z \\ y = -1 + 3z \end{cases}$$

För varje värde på z fås entydiga värden på x och y som löser systemet. Vi parametriserar därför $z = t$ vilket ger lösningarna $(x, y, z) = (-1 + 7t, -1 + 3t, t), t \in \mathbb{R}$.

I det ovanstående ekvationssystemet lyckades vi isolera x och y i varsin ekvation, men z dyker upp i båda ekvationerna. Genom att sätta z till en parameter t kan vi ändå beskriva alla lösningar. Vi kommer att se att det alltid går att få till en likande situation då lösningar existerar: några obekanta står i sin egen ekvation och de övriga kan väljas som parametrar.

Som vi nämnt behöver linjära ekvationer inte ha något linjer och plan att göra. Här kommer ett exempel från kemin.

Exempel 3.1.4

I kemi kan man balansera en reaktion som

$$x_1 C_{12} H_{26} + x_2 O_2 \to x_3 CO_2 + x_4 H_2 O$$

Här är $C_{12}H_{26}$ ett drivmedel som reagerar med syre när det förbränns. De obekanta x_1, x_2, x_3 och x_4 anger hur många molekyler det förekommer av varje typ före och efter reaktionen. Eftersom det är precis lika många grundämnesatomer före och efter reaktionen har vi en ekvation för varje grundämne:

C: $12x_1 = x_3,$

H: $26x_1 = 2x_4,$

O: $2x_2 = 2x_3 + x_4.$

Dessa tre ekvationer bildar ett ekvationssystem som vi löser:

$$
\begin{cases}
12x_1 \phantom{{}+2x_2} - x_3 \phantom{{}-2x_4} = 0 & \left(-\frac{26}{12}\right) \\
26x_1 \phantom{{}+2x_2 - x_3} - 2x_4 = 0 & \\
\phantom{12x_1 +{}} 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 &
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
12x_1 - x_3 = 0 \\
\frac{13}{6}x_3 - 2x_4 = 0 \\
2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0
\end{cases}
\Leftrightarrow
$$

$$
\Leftrightarrow
\begin{cases}
12x_1 - x_3 = 0 & \\
2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 & \\
\frac{13}{6}x_3 - 2x_4 = 0 & \left(\frac{6}{13}\right)
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
12x_1 - x_3 = 0 & \\
2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 & \\
x_3 - \frac{12}{13}x_4 = 0 & \boxed{2}\boxed{1}
\end{cases}
\Leftrightarrow
$$

$$
\Leftrightarrow
\begin{cases}
12x_1 - \frac{12}{13}x_4 = 0 & \left(\frac{1}{12}\right) \\
2x_2 - \frac{37}{13}x_4 = 0 & \left(\frac{1}{2}\right) \\
x_3 - \frac{12}{13}x_4 = 0 &
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
x_1 - \frac{1}{13}x_4 = 0 \\
x_2 - \frac{37}{26}x_4 = 0 \\
x_3 - \frac{12}{13}x_4 = 0
\end{cases}
$$

De obekanta x_1, x_2 och x_3 står nu i varsin ekvation som för varje möjligt värde på x_4 ger entydiga värden på de andra obekanta. Vi kan alltså välja $x_4 = t$ som parameter och får alla lösningar som:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\tfrac{1}{13}t, \tfrac{37}{26}t, \tfrac{12}{13}t, t), t \in \mathbb{R}.$$

Speciellt för denna situation är att de obekanta måste vara positiva heltal. Så vi sätter $t = 26n$ där n är ett positivt heltal och får då lösningarna

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2n, 37n, 24n, 26n), n > 0.$$

Det minsta möjliga $n = 1$ ger reaktionen

$$2C_{12}H_{26} + 37O_2 \to 24CO_2 + 26H_2O,$$

Det förekommer komplicerade reaktioner som involverar många olika molekyler och många olika grundämnen. Så ekvationssystemen kan bli stora.

Vid det här laget har du kanske lagt märke till att vi alltid skriver ekvationerna på ett speciellt sätt: de obekanta kommer alltid i samma ordning och vi lämnar utrymmen så att varje obekant står i samma position vertikalt i de olika ekvationerna. Att skriva så blir mer lättläst, men gör också att vi i princip bara behöver hålla reda på konstanterna som står framför varje obekant och i högerledet (de obekanta skrivs ju alltid på samma ställe). Istället för att skriva ut hela ekvationssystemet varje gång kommer vi därför bara bokföra konstanterna i systemet. Till exempel ersätter vi systemet :

$$\begin{cases} \;\;x - 3y + 2z = \;\;\,2 \\ -x + 2y + \;\;z = -1 \end{cases} \quad \text{med} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Notera att vi drar ett streck för att skilja koefficienterna från högerledet.

En uppsättning tal, ordnade rektangulärt som i exemplet ovan kallas för en matris. Matriser dyker upp i många olika sammanhang i linjär algebra, men just nu fokuserar vi på användning av matriser vid lösning av linjära ekvationssystem. Matriserna

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

kallas för systemets koefficientmatris respektive högerledsmatris. Dessa kan kombineras till systemet totalmatris

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Operationerna som vi gjort på ekvationssystem kan tolkans som radoperationer på motsvarande matriser.

Definition 3.2: Radoperationer

- λ Multiplicera en rad med $\lambda \neq 0$.
- Byt plats på två rader.
- λ Lägg till λ gånger en rad till en annan.

I exemplet nedan löser vi ett ekvationssystem som tidigare til vänster. Till höger gör vi samma beräkningar, men använder matriser och radoperationer. Jämför det som står till vänster med det till höger och se till att du förstår vad som händer i varje steg. Färgerna markerar vad som motiverar våra radoperationer. Grön färg markerar element som vi är nöjda med. Röd och blå färg markerar element som vi vill ändra på.

Exempel 3.1.5

Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + 3y + z = 1 \end{cases}$$

Lösning:

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 & (-2)(-1) \\ 2x - y + z = 3 & \\ x + 3y + z = 1 & \end{cases} \qquad \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \overbrace{1 \quad 2}^{\text{Koefficientmatris}} & & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right)}_{\text{Totalmatris}} \; (-2)(-1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ -5y + 5z = 1 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ y + 3z = 0 & (5) \\ -5y + 5z = 1 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 1 \end{array}\right) \; (5)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ y + 3z = 0 \\ 20z = 1 & \left(\frac{1}{20}\right) \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 1 \end{array}\right) \; \left(\frac{1}{20}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ y + 3z = 0 \\ z = \frac{1}{20} & (-3)(2) \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{20} \end{array}\right) \; (-3)(2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = \frac{22}{20} \\ y = -\frac{3}{20} & (-2) \\ z = \frac{1}{20} \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & \frac{22}{20} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{20} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{20} \end{array}\right) \; (-2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & = \frac{28}{20} \\ \quad y & = -\frac{3}{20} \\ \quad\quad z = & \frac{1}{20} \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{28}{20} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{20} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{20} \end{array}\right)$$

Vi ser att systemet har precis en lösning $(x, y, z) = (\frac{28}{20}, -\frac{3}{20}, \frac{1}{20})$.

Viktigt: Det är lätt att göra fel, så det är alltid klokt att göra en kontroll genom att sätta in lösningar i det ursprungliga ekvationssystemet:

$$\begin{cases} \frac{28}{20} + 2 \cdot (-\frac{3}{20}) - 2(\frac{1}{20}) = 1 \\ 2(\frac{28}{20}) - (-\frac{3}{20}) + \frac{1}{20} = 3 \\ \frac{28}{20} + 3(-\frac{3}{20}) + \frac{1}{20} = 1 \end{cases}$$

Det stämmer!

För att hänga med på resten av vår diskussion om lösning av linjära ekvationssystem är det mycket viktigt att kunna översätta mellan ett system och dess totalmatris. Nedan finns några ytterligare exempel. Notera att varje kolonn i koefficientmatrisen motsvarar en viss obekant som vi måste komma ihåg för att kunna återskapa ekvationssystemet. Om de obekanta är x, y, z (i den ordningen) så är första kolonnen x-kolonnen, andra y-kolonnen och tredje z-kolonnen. Men om de obekanta har andra beteckningar så blir det annorlunda.

Exempel 3.1.6

Ekvationssystem:	Totalmatris:
$\begin{cases} 3x + y - 4z = 7 \\ 2x + 5y - 2z = 8 \end{cases}$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 3 & 1 & -4 & 7 \\ 2 & 5 & -2 & 8 \end{array}\right)$
$\begin{cases} 5x + y = 4 \\ -x + 2y = 2 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$	$\left(\begin{array}{cc\|c} 5 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$
$\begin{cases} 11y + 7z = 1 \\ -2x + z = 2 \\ x + 3y = 3 \end{cases}$	$\left(\begin{array}{ccc\|c} 0 & 11 & 7 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right)$

3.2 Lösningsmetoder för linjära ekvationssystem

I föregående avsnitt löste vi ett antal linjära ekvationssystem genom att använda radoperationer, men vi gav ingen tydlig förklaring till hur vi valde ut radoperationerna. I det här avsnittet ska vi gå igenom hur man kan välja radoperationer för att lösa godtyckliga linjära ekvationssystem.

Vi börjar med att sammanfatta den terminologi vi infört hittills.

- Ett ***linjärt ekvationssystem*** med n obekanta $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ och m ekvationer har formen

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \ddots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

  där $a_{ij}, b_j \in \mathbb{R}$ är konstanter. Notera att koefficienterna a_{ij} är indexerade så att det första indexet i anger ekvationen, och de andra indexet j anger den obekanta som koefficienten tillhör. Högerleden b_i är indexerade efter vilken ekvation de tillhör.

- En ***lösning*** till systemet är en n-tippel $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ där varje $s_i \in \mathbb{R}$ sådan att

$$(x_1, \ldots, x_n) = (s_1, \ldots, s_n)$$

  löser *alla* ekvationerna i systemet.

- Att lösa systemet innebär att hitta alla dess lösningar.

- Två ekvationssystem är ekvivalenta om de har precis samma lösningar.

- Till systemet hör följande matriser.

$$\textbf{\textit{Koefficientmatris}}: \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \textbf{\textit{Högerledsmatris}}: \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\textbf{\textit{Totalmatris}}: \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right)$$

Som tidigare löser vi ekvationssystem med hjälp av omskrivningar som motsvarar radoperationer på systemens totalmatriser. Vi ska nu förklara hur vi på ett systematiskt sätt kan använda radoperationer för att nå fram till lösningarna. För att göra det behöver vi införa lite mer terminologi.

De nollskilda elementen i en matris som står längst till vänster i varje rad kallas för ***ledande element***. Om en rad som bara består av nollor saknar ledande element.

Exempel 3.2.1: Ledande element

I följande matris (utan streck då denna definition inte har något med strecken att göra) har vi färgat de ledande element röda:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \color{red}{3} & 4 & 7 & 0 \\ \color{red}{-2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{7} & 1 \end{pmatrix}$$

Notera att rad 1 och rad 4 inte har något ledande element eftersom hela raden består av nollor.

De ledande elementen spelar stor roll för vilka radoperationer vi väljer att göra. Vi kan se varför i Exempel 3.1.5. De ledande elementen är där markerade med grönt och rött. Observera hur de är kopplade till vilka radoperationer vi gör. I början ändras positionerna för de ledande elementen, men efter ett tag når de en stabil form där alla ledande element står som i en trappa. Att nå en sådan form är ett viktigt delmål. Vi kallar en matris som har en sådan form för en trappstegsmatris. Här kommer en precis definition.

Definition 3.3

En ***trappstegsmatris*** är en matris där:

(a) Alla rader som enbart består av nollor står längst ner.

(b) Varje ledande element är strikt längre till höger än det ledande elementen i raden ovanför.

Exempel 3.2.2

Nedan finns några exempel på matriser som är trappstegsmatriser och några som inte är det. Om matrisen inte uppfyller 1 markerar vi motsvarande nollrad med rött. Om matrisen uppfyller 1 markerar vi de ledande element som uppfyller 2 med grönt och de som inte gör det med rött. Alltså är det matriserna utan något rött som är trappstegsmatriser

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 3 \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \color{green}{2} & 0 & 3 & -1 \\ 0 & \color{green}{8} & 2 & 1 \\ 0 & \color{red}{-2} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \color{green}{3} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \color{green}{2} & 3 & 4 \\ 0 & \color{green}{-1} & 6 \\ 0 & 0 & \color{green}{9} \\ 0 & 0 & \color{red}{1} \end{pmatrix}$$

ej trappstegsmatris ej trappstegsmatris ej trappstegsmatris

$$\begin{pmatrix} \color{green}{5} & 3 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & \color{green}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \color{green}{-5} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \color{green}{2} & 4 & 2 & 11 \\ 0 & \color{green}{1} & -3 & 10 \\ 0 & 0 & \color{green}{6} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \color{green}{1} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \color{green}{7} & 6 & -2 \\ 0 & \color{green}{-4} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

trappstegsmatris trappstegsmatris trappstegsmatris

För att illustrera vikten av de ledande elementen löser vi ett ekvationssystem till.

Exempel 3.2.3

Lösning av ekvationssystem. Både ekvationssystemen och totalmatriserna är beskrivna. Färgerna är som i Exempel 3.2.2.

$$\begin{cases} \color{green}{x_1} + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 & \boxed{-2}\boxed{-1} \\ \color{red}{2x_1} - x_2 + x_3 - x_4 = 3 & \\ \color{red}{x_1} - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4 & \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} \color{green}{1} & 2 & -1 & 1 & 1 \\ \color{red}{2} & -1 & 1 & -1 & 3 \\ \color{red}{1} & -1 & 2 & -2 & 4 \end{array}\right) \boxed{-2}\boxed{-1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ \quad - 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 1 \; (-1) \\ \quad - 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 3 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right) (-1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ \quad - 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 1 \\ \quad 0 = 2 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Den sista ekvationen $0 = 2$ gäller inte oavsett värdena på de obekanta. Alltså finns det inga lösningar.

Det visar sig att man kan alltid se hur många lösningar ett ekvationssystem har när man har fått det på trappstegsform (matrisen är en trappstegsmatris). Det kommer vi att se i avsnitt

Om man som ovan ser att systemet inte har några lösningar kan man ju avsluta lösningsförfarandet. Annars behöver man jobba vidare för att hitta lösningarna. Det finns olika sätt att gå till väga. Det första vi går igenom bygger på att ytterligare förenkla sin matris så att man når det som kallas en radkanonisk matris. Definitionen är som följer.

Definition 3.4

En matris sägas att vara ***radkanonisk*** om

(a) Den är en trappstegsmatris.

(b) Alla ledande element är lika med 1. Dessa kallas ledande ettor.

(c) I kolonnorna där de ledande elementen står är alla andra element 0.

Observera att för en trappstegsmatris är elementen under ett ledande element 0. Det som tillkommer i punkt 3 är att elementen ovanför också är 0.

Exempel 3.2.4

Här är några trappstegsmatriser. De ledande elementen är markerade med grönt. Element ovanför de ledande elementen är markerade med blått.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ej radkanonisk ej radkanonisk ej radkanonisk

$$\begin{pmatrix} 1 & -11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

radkanonisk radkanonisk radkanonisk

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

radkanonisk matris

Metod 3.5: Gauss-Jordan-elimination

Generell metod för lösning av linjära ekvationssystem (metoden kan avslutas direkt efter punkt 2 om man ser att det inte finns lösningar):

1. Hitta totalmatrisen för ekvationssystemet.
2. Använd elementära radoperationer för att göra matrisen till en trappstegsmatris.
3. Fortsätt att använda radoperationer för att göra matrisen till en radkanonisk matris.
4. Ekvationssystemet som motsvarar denna matris har samma lösningar som det ursprungliga. Lösningarna kan avläsas direkt från den radkanoniska matrisen.

Vi har sett hur metoden fungerar i flera exempel, men för att bli helt övertygade om att metoden alltid fungerar i går vi igenom hur stegen kan genomföras generellt. I steg 1 får vi en totalmatris A till vårt system. I princip kan A vara vilken matris som helst. Hur kan vi vara säkra på att steg 2 alltid går att genomföra? Nedan visar vi hur trappstegsformen kan byggas upp rad för rad..

Betrakta de ledande elementen in A. Vi börjar med att se till att den första raden har ledande element längst till vänster. Om så inte redan är fallet byter vi plats på första raden och någon annan rad som har det. Vi gör nu om det ledande elementet i första raden till 1 genom att multiplicera med dess invers. Vi använder sedan första raden och dess ledande etta för att eliminera alla element under den ledande ettan. Nu har vi nått en matris som har följande form

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

där $*$ betecknar element som vi inte vet något om. Observera att det ofta sker att den ledande ettan i första raden står längst till vänster, men i allmänhet kan ett godtyckligt antal nollor (inklusive inga alls) dyka upp innan. Vi utför nu samma procedur som vi gjorde på A på de rader som står under den första raden. Observera att de inledande nollorna inte kommer att påverkas av några av radoperationerna så vi får nu en matris på formen

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

Genom att fortsätta på samma sätt och justera rad för rad, når vi till slut en trappstegsmatris där alla ledande element är 1.

Steg 3 är betydligt lättare. Vi går igenom raderna nedifrån och eliminerar alla element ovan de ledande ettorna. Genom att börja nedifrån ser vi till att inte förstöra något av den form vi bygger upp som till slut ger oss en radkanonisk matris.

Låt oss till slut förklara steg 4 där vi finner lösningarna. Om vi får en nollrad i koeffcicentmatrisen, men med ett nollskilt element i högerledet på samma rad så finns inga lösningar. Om så är fallet kommer vi se det redan efter steg 2. I annat fall finns antingen en lösning eller flera beroende på ett antal parametrar. Vi går nu igenom hur dessa parameterlösningar hittas. Vi börjar med ett till exempel.

Exempel 3.2.5

Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + 8x_2 \phantom{{}+2x_3} + x_4 = 1 \end{cases}$$

Vi utför Gauss-Jordan elimination på totalmatrisen för systemet:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & 8 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \boxed{-2}\boxed{-1}\boxed{-3} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -2 & -2 \end{array}\right) \boxed{-1} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim^{(*)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \boxed{-1}\boxed{-3} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \boxed{-1} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \boxed{\tfrac{1}{2}} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Notera att steg 2 är avslutat vid $(*)$. Vi fortsatte sedan att eliminera elementen ovanför de ledande. Till sist gjorde vi om de ledande elementen till 1. Notera att vi lika gärna kunde ha gjort de ledande elementen till 1 först.

Ekvationssystemet som motsvarar den sista matrisen har precis samma lösningar som det ursprungliga och är:

$$\begin{cases} x_1 \phantom{{}+x_2} - 4x_3 = 12 \\ x_2 + \frac{3}{2}x_3 = -4 \\ x_4 = -3 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 12 + 4x_3 \\ x_2 = -4 - \frac{3}{2}x_3 \\ x_4 = -3 \end{cases}$$

Vi har isolerat de obekanta som motsvarar ledande elementen i vänsterledet. Vi ser att för ett godtyckligt reellt $x_3 = t$ har vi precis en lösning för x_1, x_2 och x_4 så alla lösningar kan skrivas som:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (12 + 4t, -4 - \tfrac{3}{2}t, t, -3), t \in \mathbb{R}$$

Då det är lätt att göra fel kontrollerar vi lösningarna:

$$\begin{cases} (12+4t) + 2(-4-\frac{3}{2}t) - t - 3 = 1 \\ 2(12+4t) + 6(-4-\frac{3}{2}t) + t + 3 = 3 \\ (12+4t) + 4(-4-\frac{3}{2}t) + 2t + 2 \cdot 3 = 2 \\ 3(12+4t) + 8(-4-\frac{3}{2}t) - 3 = 1 \end{cases}$$

De obekanta som motsvarar de ledande elementen kallas för *ledande variabler*, och de resterande obekanta kallas för *fria variabler*. I exemplet ovanför är alltså x_1, x_2, x_4 ledande variabler och x_3 är en fri variabel.

Den radkanoniska formen garanterar att vi alltid kan parametrisera lösningarna (om det finns några det vill säga) på samma sätt i steg 4. Vi sätter de fria variablerna till parametrar och flyttar över i högerledet. Då ger varje ekvation ett entydigt värde på motsvarande ledande variabel i termer av parametervärdena. Fallet då det inte finns några fria variabler är då vi har entydig lösning.

Alternativt till Metod 3.5 ovan kan man använda följande istället.

Metod 3.6

Gausselimination efterföljd av Gauss bakåtsubstitution

(a) Hitta totalmatrisen för ekvationssystemet (samma som innan).

(b) Använd elementära radoperationer för att göra matrisen till en trappstegsmatris (samma som innan).

(c) Ekvationssystemet som motsvarar trappstegsmatrisen har samma lösningar som det ursprungliga. Lösningarna går att hitta med bakåtsubstitution.

Vi illustrerar bakåtsubstitutionen i ett exempel där matrisen redan är en trappstegsmatris. Notera att vi i praktiken gör samma räkningar som om vi fullgjort Gauss-Jordaneliminationen.

Exempel 3.2.6

Exempel 3.2.5 avslutat från (∗) på alternativt sätt Vi använde Gausselimination och kom fram till att totalmatrisen är radekvivalent med trappstegsmatrisen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Istället för att fortsätta med radoperationer tills vi når en radkanonisk matris, kan vi börja parametrisera direkt. Systemet är

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_4 = -3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Börjar nerifrån:

- Först ser vi att $x_4 = -3$.
- Sedan ser vi att x_3 är en fri variabel och sätter därför $x_3 = t$.
- Sedan löser vi ut x_2 ur ekvationen $2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 1$:

  $$2x_2 = 1 - 3x_3 + 3x_4 = 1 - 3t - 9 = -8 - 3t \Leftrightarrow x_2 = -4 - \tfrac{3}{2}t$$

- Sedan löser vi ut x_1 ur $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1$:

  $$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \quad \Leftrightarrow$$
  $$x_1 = 1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 + (8 + 3t) + t - 3 = 12 + 4t.$$

  Så lösningarna är

  $$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (12 + 4t, -4 - \tfrac{3}{2}t, t, -3), t \in \mathbb{R}.$$

Den här sista delen är det som kallas bakåtsubstitution.

Vilken metod man föredrar är en smaksak. Det är därför bra att försöka lösa uppgifter med båda metoderna och finna ut vilken metod man själv tycker bäst om.

Exempel 3.2.7

Vi löser ekvationssystemet

$$\begin{cases} \phantom{2x_1 + {}} x_2 - 7x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ \phantom{2x_1 + {}} 3x_2 - 21x_3 = 3 \end{cases}$$

Vi utför Gauss-Jordanelimination på totalmatrisen för systemet:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -7 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -21 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 3 & -21 & 3 \end{array}\right) \boxed{-3} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Vi skulle kunna fortsätta men det är inte nödvändigt. Vi ser ju att det motsvarande ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ \phantom{2x_1 + {}} x_2 - 7x_3 = 0 \\ 0 = 3 \end{cases}$$

inte har någon lösning. Så det ursprungliga ekvationssystemet har inte heller någon lösning

Observera att det i allmänhet blir så att vi inte lösningar om vi når en trappstegsmatris som har ett ledande element högerledet.

Exempel 3.2.8

Vi löser

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 \phantom{{}+x_3} - 3x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ \phantom{x_1 + 7x_2 {}} x_3 + x_4 - x_5 + 2x_6 = 2 \end{cases}$$

Vi skriver totalmatrisen:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 7 & 0 & -3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Då den redan är radkanonisk kan vi direkt hitta lösningarna. De ledande variablerna är x_1 och x_3, så vi sätter de fria variablerna lika med parametrar: $x_2 = s$, $x_4 = t, x_5 = u$ och $x_6 = v$ och skriver alla lösningar:

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) =\\ (1-7s+3t-u+v, s, 2-t+u-2v, t, u, v), s,t,u,v \in \mathbb{R}.$$

Vi har ofta använd tecknet $\sim$ ovan utan att förklara det.

Definition 3.7

Vi skriver $A \sim B$ om B kan fås från A genom en följd radoperationer. Vi säger då att A är radekvivalent med B.

Denna definition är bara meningsfull om A och B har samma antal rader och kolonner. Radoperationer kan alltid omvändas (precis som motsvarande operationer på ekvationer). Om vi lägger till en rad multiplicerat med λ till en annan kan vi upprepa samma operation fast med $-\lambda$ som konstant istället. Om vi multiplicerar en rad med $\lambda \neq 0$ kan vi multiplicera samma rad med λ^{-1}. Om vi byter plats på två rader kan vi byta plats på samma rader igen. Det visar att $A \sim B$ är samma sak som $B \sim A$.

Sats 3.8

Varje matris är radekvivalent med *precis en* radkanonisk matris.

Observera att detta innebär att den radkanoniska matrisen vi hittar om vi löser genom Gauss-Jordan-elimination *inte* kommer att bero på *vilka* radoperationer vi använder och i vilken ordningsföljds vi använder dem. Oavsett hur vi gör det så kommer vi alltid att sluta med samma radkanoniska matris! För fullständighets skull bevisar vi Sats 3.8 nedan. Beviset är inte det lättaste, men när vi gått igenom mer linjär algebra kommer vi kunna ge ett bevis som är lättare att förstå.

Bevis: Låt A vara en matris. Genom att utföra Gauss-Jordan elimination på A ser vi att A är radekvivalent med någon radkanonisk matris. Men för att visa att det finns precis en behöver vi ett ytterligare resonemang.

Vi antar därför att A är radekvivalent med B som är radkanonisk. Det vi vill visa är att vi kan återskapa B direkt från A. Vi gör det med induktion över antalet kolonner i A. Basfallet då A har precis en kolonn är enkelt. Antingen är A en matris med bara nollor och då är även B det eller så har A något nollskilt element och då är

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vi antar nu att A har fler än en kolonn och att påståendet som vi vill visa är sant för alla matriser med färre kolonner än A.

Vi behöver nu vaska fram information om B från A. Vi gör detta genom att studera mängden L av lösningar till ekvationssystemet med koefficientmatris A och högerled 0. Eftersom A och B är radekvivalenta så är L också lösningsmängden till ekvationssystemet med koefficientmatris B och högerled 0. Alltså kan elementen i L beskrivas genom att införa parametrar för de variabler som är fria med avseende på B. Fallet då inga sådana variabler finns är precis då L bara innehåller lösningen $(0, \ldots, 0)$ och eftersom B är radkanonisk måste då

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Antag nu att L innehåller nollskida lösningar. Då måste B innehålla kolonner utan ledande ettor. Låt k vara indexnumret på den första av dessa kolonner. Betrakta en lösning på formen

$$(x_1, \ldots, x_j, 0, \ldots 0) \in L$$

Om $j < k$ så finns bara en möjlighet, nämligen $x_1 = \cdots = x_j = 0$, då inga av $x_1, \ldots, x_j$ är parametrar. Om $j = k$ så får vi nollskilda lösningar eftersom x_j är en parametrar. Det minsta j som tillåter en sådan lösning är alltså $j = k$. Vi kan på så sett beräkna k från L. Om vi sätter $x_j = 1$ får vi en unik lösning (alla andra parametrar är ju 0):

$$(a_1, \ldots, a_{k-1}, 1, 0, \ldots 0) \in L$$

Vår metod för att parametrisera lösningarna från B ger att kolonn k i B måste vara precis

$$\begin{pmatrix} -a_1 \\ \vdots \\ -a_{k-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Med andra ord har vi lyckats återskapa kolonn k i B (med omvänt tecken). Låt nu A' och B' vara matriserna som vi får genom att stryka kolonn k i A respektive B. Från $A \sim B$ följer $A' \sim B'$. Eftersom kolonn k i B inte innehåller någon ledande etta är dessutom B' radkanonisk så från vårt induktionsantagande har vi att B' är entydigt bestämd av A' och därför A. Vi kan nu återskapa B genom att sätta tillbaka kolonnen som vi tidigare beräknat på rätt plats i B'.

Vi avslutar detta avsnitt med att lösa ett ekvationssystem där konstanterna beror på ett okänt tal a.

Exempel 3.2.9

Ett ekvationssystem beroende på en konstant Lös ekvationssystemet (över R)

$$\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ 2x + (a+3)y + 3z = -4 \\ x + (3-a)y + (a-2)z = a-1 \end{cases}$$

för alla reella värden på konstanten a.
Lösning: Total matrisen är

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & a+3 & 3 & -4 \\ 1 & 3-a & a-2 & a-1 \end{array}\right) \begin{matrix} -2 \; -1 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & a-1 & 1 & -2 \\ 0 & 1-a & a-3 & a \end{array}\right) \begin{matrix} \\ 1 \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & a-1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a-2 & a-2 \end{array}\right) (*)$$

Härifrån måste vi dela upp i fall eftersom metoden kommer att bero på vad a är, Fall 1: Om $a \neq 1, 2$ vet vi vilka elementen som är ledande i $(*)$. Så vi antar detta och fortsätter

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & a-1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a-2 & a-2 \end{array}\right) \frac{1}{a-2} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & a-1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) -1 \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & a-1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \frac{1}{a-1} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{1-a} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) -2 \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 - \frac{6}{(1-a)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{1-a} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Så i detta fall har vi precis en lösning $(x, y, z) = (\frac{2a-8}{1-a}, \frac{3}{1-a}, 1)$. Vi kollar att vi inte har gjort fel:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} (\frac{2a-8}{1-a}) & + & 2 \cdot (\frac{3}{1-a}) & + & 1 & = & \frac{2a-2}{1-a} + 1 & = & -1 \\ 2 \cdot (\frac{2a-8}{1-a}) & + & (a+3) \cdot (\frac{3}{1-a}) & + & 3 \cdot 1 & = & \frac{4a-16+3a+9}{1-a} + 3 & = & -4 \\ (\frac{2a-8}{1-a}) & + & (3-a) \cdot (\frac{3}{1-a}) & + & (a-2) \cdot 1 & = & \frac{2a-8+9-3a}{1-a} + (a-2) & = & a-1 \end{array}\right.$$

Fall 2: Om $a = 1$ är $(*)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) 1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Här har vi alltså inga lösningar.

Fall 3: Om $a = 2$ är $(*)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) -2 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Det betyder att alla lösningar är:

$$(x, y, z) = (3 + t, -2 - t, t), t \in \mathbb{R}.$$

Vi kollar igen att vi inte har gjort fel:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} (3+t) & + & 2(-2-t) & + & t & = & -1 \\ 2(3+t) & + & (2+3)(-2-t) & + & 3t & = & -4 \\ (3+t) & + & (3-2)(-2-t) & + & (2-2)t & = & 1 \end{array}\right.$$

Sammanfattat svar:

Om $a \neq 1, 2$: $(x, y, z) = (\frac{2a-8}{1-a}, \frac{3}{1-a}, 1)$.
Om $a = 1$: Inga lösningar.
Om $a = 2$: $(x, y, z) = (3 + t, -2 - t, t), t \in \mathbb{R}$.

3.3 Homogena linjära ekvationssystem

Ett linjärt ekvationssystem där högerledet bara består av nollor kallas ***homogent***. Med andra ord har det formen

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \quad\; \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Ett homogent linjärt ekvationssystem har alltid ***den triviala lösningen*** $(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$. Andra lösningar (om de finns) kallas ***icke-triviala***.

Exempel 3.3.1

Hitta alla icke-triviala lösningar till det reella ekvationssystemet:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Som vanligt utför vi Gauss-Jordanelimination på totalmatrisen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} -2 \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -6 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -\frac{1}{3} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -2 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Då kolonn 1 och 2 har ledande element är x_1 och x_2 ledande variabler, och x_3 och x_4 är fria variabler. Vi sätter därför $x_3 = s$ och $x_4 = t$ där $s, t \in \mathbb{R}$ är godtyckliga. Vi löser och ser att *alla* lösningar kan skrivas som:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3t, -s - 2t, s, t), s, t \in \mathbb{R}.$$

Det betyder att de icke-triviala lösningarna är dessa när inte både s och t är 0. Det kan skrivas som

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3t, -s - 2t, s, t), s, t \in \mathbb{R}, (s, t) \neq (0, 0).$$

Sats 3.9

(Sats 1.2.2 i boken Ett homogent linjärt ekvationssystem

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad \ddots \qquad\quad \vdots \quad\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

med $n > m$ (flera obekanta än ekvationer) har alltid några icke-triviala lösningar.

Bevis: Vi vet att vi kan göra radoperationer och få totalmatrisen på radkanonisk form:

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & ? & & 0 \\ & 1 & & & \vdots \\ 0 & & 1 & & \\ & & & & 0 \end{array}\right) = R,$$

där R är den unika radkanoniska matrisen som är radekvivalent till B. Observera att den sista kolonnen i R består av nollor (precis som i A) eftersom inga de tre elementära radoperationerna ändrar på detta.

- Vi har flera kolonner än rader i delen till vänster om linjen.
- Det betyder att det finnas en kolonn utan ledande element.
- Vi måste alltså ha parametrar som beskriver lösningar.
- Vi har därför oändligt många lösningar.
- Då bara en av dessa lösningar är den triviala finnas alltså icke-triviala lösningar. (faktiskt oändligt många icke-triviala lösningar). □

3.4 Antal lösningar och rang

Vi har sett att ledande element är mycket viktiga för lösning av linjära ekvationssystem. Detta motiverar delvis följande definition.

Definition 3.10

För en matris A definieras ***rangen*** av A, vilken betecknas $\text{rang}(A)$, som antalet ledande element i den radkanoniska matrisen som är radekvivalent till A.

Notera att rangen är väldefinierad på grund av Sats 3.8.

Exempel 3.4.1

Hitta rangen av

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösning: Vi måste hitta *den* radkanoniska matrisen som är radekvivalent till A. Det gör vi genom Gauss-Jordanelimination:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \; -3 \; -2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 7 & 14 & 5 \\ 0 & -7 & -7 & -14 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 7 & 14 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boxed{\tfrac{1}{7}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boxed{-2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{7} \\ 0 & 1 & 1 & 2 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Då vi har två ledande element i matrisen drar vi slutsatsen att: $\text{rang}(A) = 2$.

Observera att vi aldrig ändrar antalet ledande element i en matris när vi omvandlar den från trappstegsmatris till radkanonisk matris. Detta medför följande:

Anmärkning 3.4.2

Rangen av en matris är det samma som antalet ledande element i en godtycklig trappstegsmatris som är radekvivalent till A. Alltså antalet steg i ”trappan”.

I exemplet ovanför ses alltså redan i den tredje matrisen att rangen är 2. Så vi hade kunnat stoppa då.

Sats 3.11

Huvudsatsen för linjära ekvationssystem För ett linjärt ekvationssystem

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

med koefficientmatris och totalmatris:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

gäller följande:

- Systemet har precis en lösning omm (om och endast om):

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(B) = \text{antal obekanta.}$$

- Systemet har oändligt många lösningar omm:

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(B) < \text{antal obekanta.}$$

- Systemet har inga lösningar omm: $\text{rang}(A) \neq \text{rang}(B)$.

Dessutom täcker detta alla möjliga fall.

Bevis: Totalmatrisen kan genom radoperationer reduceras till en radkanonisk matris:

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & * \\ & 1 & & \vdots \\ 0 & & 1 & * \\ & & & b \\ & & & 0 \end{array}\right) = R,$$

där R är den radkanoniska matrisen som är radekvivalent med B. Så b är antigen ett ledande element vilket medför $b = 1$, eller också är $b = 0$. Observera att A är precis den del av B som står till vänster om linjen. Alltså är delen av R som står till vänster om linjen den radkanoniska matrisen som är radekvivalent med A.

- Om $b = 1$ motsvarar raden med b ekvationen $0 = 1$ - så det finns inga lösningar och $\text{rang}(B) = \text{rang}(A) + 1$. (det finns precis ett extra ledande element i hela matrisen jämfört med den del som motsvarar A)

- Om $b = 0$ fås $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$ (det är samma antal ledande element i de två matriserna).
  - Om $\text{rang}(A) = n =$ (antalet obekanta) fås ett ledande element i varje kolonn (till vänster om linjen) vilket ger att alla de obekanta är ledande och därför får vi inga parametrar och precis en lösning.
  - Om $\text{rang}(A) < n$ ser vi att det finns kolonner utan ledande element vilket betyder att vi får parameterlösningar, som då betyder att vi har oändligt många lösningar.

- Detta täcker alla fall. □

3.5 Skärningar av tre plan i rummet

Vi har tidigare sett hur man kan beskriva skärningen av två plan (som inte är parallella) som en linje på parameterform. I det här avsnittet ska vi se vad som händer om vi undersöker skärningen av tre plan.

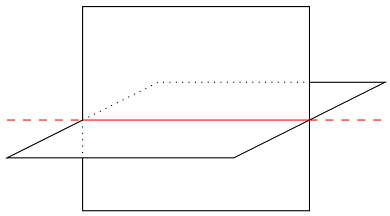
För att påminna oss börjar vi med att undersöka två plan igen. Skärningspunkterna av de två planen $x + 2y - z = 2$ och $2x + 5y + z = 3$ ges av lösningarna till ekvationssystemet:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + 5y + z = 3 \end{cases}$$

Vi löser med hjälp av radoperationer på totalmatrisen till ekvationssystemet:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix} -2 \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -2 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right).$$

Vi inför en parameter $z = t$ och får att planen skär i oändligt många punkter $(x, y, z) = (4 + 7t, -1 - 3t, t)$, där $t \in \mathbb{R}$. Geometriskt kan vi förstå situationen som två plan som skär i en linje (se Figur 21).



Figur 21: Två plan som skär i en röd linje.

Vi ändrar det andra planet och undersöker istället $x + 2y - z = 2$ och $-3x - 6y + 3z = 1$. Då får vi ekvationssystemet:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ -3x - 6y + 3z = 1 \end{cases}$$

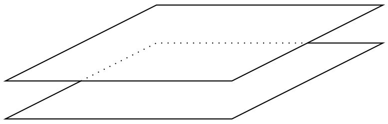
Vi löser på samma sätt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -3 & -6 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} 3 \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right).$$

Den sista raden säger att det inte finns några lösningar. Geometriskt tolkar vi det som att planen är parallella. (se Figur 22).

Vi ändrar nu högerledet för det andra planet till -6. Alltså undersöker vi $x + 2y - z = 2$ och $-3x + 6y + 3z = -6$. Då får vi ekvationssystemet:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ -3x + 6y + 3z = -3 \end{cases}$$



Figur 22: Två plan som är parallella.

Vi kan göra samma radoperation

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -3 & 6 & 3 & -6 \end{array}\right) \begin{matrix} 3 \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

men nu får vi lösningar med två parametrar. Det som hände var att vi hade två parallella plan, och sedan försköt vi ett av dem så att det faktiskt blev samma plan. Därför är skärningen hela planet $x + 2y - z = 2$.

Låt oss nu studera tre plan istället. En möjlighet är att två av planen är parallella. Då har vi ingen skärningspunkt. En annan möjlighet är att några av planen är samma. Då kan vi reducera till föregående fall av skärning mellan två plan. Mer intressant är det om inga av de tre planen är parallella med varandra. Då kan några olika situationer uppstå. Vi går igenom exempel som illustrerar varje möjligt fall.

Vi börjar med planen $x+2y-z = 2$, $2x+5y+z = 3$ och $3x+4y-4z = 3$. Eftersom vi har tre plan får vi ett ekvationssystemet med tre ekvationer och tre obekanta:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + 5y + z = 3 \\ 3x + 4y - 4z = 3 \end{cases}$$

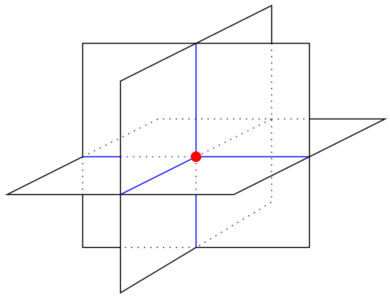
Vi löser:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -4 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix} -2 \;\; -3 \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ 2 \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \frac{1}{5} \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ -3 \;\; 1 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -2 \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Alltså har vi entydig lösning $(x, y, z) = (-3, 2, -1)$. Geometriskt betyder det att planen skär i en punkt (se Figur 23).

Vi ändrar nu det sista planet till $x + 4y + 5z = 1$. Då får vi istället ekvationssystemtet:



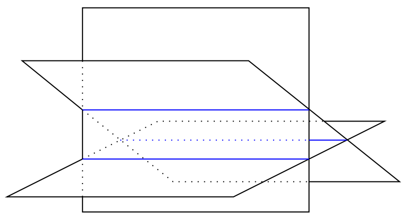
Figur 23: Tre plan som skär i en röd punkt. Planen skär varandra parvis i blåa linjer.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + 5y + z = 3 \\ x + 4y + 5z = 1 \end{cases}$$

Vi löser:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \end{array}\right) \boxed{-2}\boxed{-1} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & -1 \end{array}\right) \boxed{-2} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Den sista raden ger att systemet saknar lösning. Vi har alltså tre plan som inte skär i någon gemensam punkt, trots att inga av dem är parallella. Varje par av plan skär i en linje, vilket ger tre linjer som bildar kanterna i en slags triangulär tunnel (see Figur 24).



Figur 24: Tre plan som inte skär varandra i någon gemensam punkt. Planen skär varandra parvis i blåa linjer.

Notera att om vi skulle vicka lite på ett av planen skulle tunneln börja växa i en riktning och krympa i den andra. Rör vi oss i riktningen som tunneln krymper kommer vi till slut till en punkt där alla tre planen skär.

Alltså skulle vi då vara tillbaka i situationen som vi såg tidigare, med tre plan som skär i en punkt.

Nu ändrar vi högerledet i den sista ekvationen till 0. Det tredje planet är då $x + 4y + 5z = 0$ och vi får systemet:

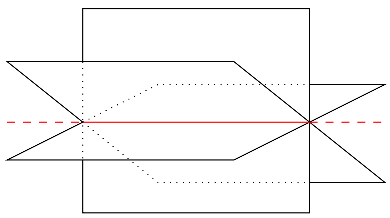
$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + 5y + z = 3 \\ x + 4y + 5z = 0 \end{cases}$$

Vi löser:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -7 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Vi inför en parameter $z = t$ och får oändligt många skärningspunkter $(x, y, z) = (4 + 7t, -1 - 3t, t)$, där $t \in \mathbb{R}$. Alltså skär planen i samma linje som vi såg tidigare. Det som hände var att vi försköt ett av planen så att hela tunneln krympte till en linje som är linjen av skärningspunkter (se Figur 25).



Figur 25: Tre plan som skär i en linje

Sammanfattningsvis kan vi säga följande om skärning av tre plan där inga av planen är parallella med varandra. Den vanligaste situationen är att planen skär i en punkt. Det motsvarar fallet då ekvationssystemet har entydig lösning. En mer ovanligt situation är att planen inte skär i någon gemensam punkt utan bildar som en tunnel. Det motsvarar fallet då ekvationssystemet saknar lösning. Ännu mer speciellt är att planen skär i en linje. Det motsvarar fallet då ekvationssystemet har oändligt många lösningar.

Uppgifter till Kapitel 3

Avsnitt 3.2

3.1) Hitta totalmatrisen till följande linjära ekvationssystem

a) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 4x + 5y = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 5y = -1 \\ 3x - z = 2 \\ x + 4y + 6z = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x - y + 7z = 0 \\ 4x + y + 11z = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3y + 2z = 3 \\ x - z = 1 \\ 4y = 4 \end{cases}$

Länk till svar

3.2) Vilket linjärt ekvationssystem med obekanta $x_1, x_2, \ldots$ har följande totalmatris

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$

b) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \end{array}\right)$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \end{array}\right)$

Länk till svar

3.3) Lös följande linjära ekvationssystem.

a) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \quad\quad\; y + 2z = -5 \\ x - \;\; y + 3z = -14 \\ 3x + 2y + \;\; z = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x + 2y \quad\quad\quad = 11 \\ 3x \quad\quad + \;\; 6z = 7 \\ 4x + 3y + 11z = 14 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 3x + \;\; y = 11 \\ x + \;\; y = 5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x - 4y + \;\; z = 5 \\ -x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$

Länk till svar

Avsnitt 3.4

3.4) Lös följande linjära ekvationssystem.

a) $\begin{cases} -x \quad\quad\quad + \;\; z = 2 \\ 2x + 3y + \;\; z = 5 \\ x - \;\; y + 11z = -5 \\ 2x + 4y + \;\; 4z = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \quad\quad\quad = 1 \\ 2x_1 + \;\; x_2 \quad\quad\quad = 1 \\ 3x_1 \quad\quad\quad + \;\; x_3 = 1 \\ \quad\quad\quad x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + \;\; z - 4w = 3 \\ 3x + 6y + 2z - 9w = 7 \\ 2x + 4y + \;\; z - 5w = 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 + \;\; x_2 + \;\; x_3 + \;\; x_4 \quad\quad\quad + 4x_6 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \;\; x_4 + 2x_5 + 9x_6 = 0 \\ 2x_1 + \;\; x_2 + \;\; x_3 + 3x_4 - \;\; x_5 + 4x_6 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1 - \;\; x_2 + 0x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 8 \end{cases}$

Länk till svar

3.5) I följande linjära ekvationssystem finns ett reellt tal $a \in \mathbb{R}$. Vi kan se det som att varje a ger ett nytt system. Lös systemen för alla värden på a. Ange även rangen för koefficientmatrisen och totalmatrisen för varje värde på a. Var försiktig så du inte delar med noll.

a) $\begin{cases} 2x + ay = -4 \\ ax + 2y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y - z = -2 \\ x - 2z = -1 \\ 3x + y + az = a \end{cases}$

c) $\begin{cases} -ax + y + 2z = 3 \\ 2x + (a+2)y + z = 2 \\ (1-a)x + y + z = 2 \end{cases}$

Länk till svar

4 Matriser

Vi har tidigare sett hur matriser är användbara för att lösa linjära ekvationssystem. Vi ska nu införa operations för att räkna med matriser. Det kommer bland annat göra det möjligt att skriva om ett helt linjärt ekvationssystem till en enda matrisekvation. Vi börjar med att precisera vilken notation vi använder för matriser.

4.1 Notation för matriser

En matris är en uppsättning tal ordnade rektangulärt i rader och kolonner. Till exempel är

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -7 \\ 2 & 14 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 6 & 10 \end{pmatrix}, \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 8 & -2 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

matriser. Som ovan betecknar vi ofta matriser med stora bokstäver: A, B, C etc. Talen i matrisen kallas för matrisens element. Ett element i en matris kan specificeras genom att ange dess plats, det vill säga i vilken rad och kolonn som elementet befinner sig. Enligt konvention numreras raderna uppifrån och ned som rad 1, rad 2 och så vidare. På liknande sätt numreras kolonnerna från vänster till höger som kolonn 1, kolonn 2, och så vidare. Till exempel är elementet på rad 2 och kolonn 3 i matrisen A ovan lika med -7.

En matris som har m rader och n kolonner kallar vi för en $(m \times n)$-matris, eller så säger vi att den har storlek $m \times n$. Matriserna A, B och C ovan har alltså storlek:

$$3 \times 3, \quad 2 \times 4, \quad \text{respektive} \quad 3 \times 2.$$

Om en matris har samma antal rader som kolonner kallar vi den för en kvadratisk matris. Till exempel är A ovan kvadratisk eftersom antalet rader och antalet kolonner båda är 3.

Ibland används olika parenteser för att skriva matriser. Det händer även att diverse linjer och cirklar skrivs i matriser för att poängtera något visst mönster. Det bör påpekas att dessa saker endast är en form av dekoration. Den egentliga informationen i en matris är dess storlek och dess element. Med andra ord är två matriser lika om de har samma storlek och samma element på samma plats. Till exempel gäller

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -7 \\ \hline 0 & 0 & 4 \end{array}\right).$$

I det här avsnittet ska vi gå igenom några grundläggande operationer som vi kan utföra på matriser. För att beskriva dessa operationer med formler använder vi följande notation: om vi vill introducera en godtycklig $(m \times n)$-matris A så betecknar vi elementet på rad i och kolonn j med a_{ij}. Vi skriver då

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

På liknande sätt betecknar vi elementen i B med b_{ij} och i C med c_{ij} och så vidare.

4.2 Matrisoperationer

Vi ska nu gå igenom tre operationer för matriser. De två första är addition av matriser och multiplikation av en matris med en skalär. Dessa operationer fungerar mycket likt samma operationer för vektorer. Faktum är att vi ofta skriver vektorer som kolonner, vilka kan förstås som $(m \times 1)$-matriser. Addition av vektorer och multiplikation av en vektor med en skalär, kan då ses som specialfall av samma operationer för matriser. Den tredje operationen är matrismultiplikation. Denna operation är lite mer komplicerad men gör att vi kan skriva om linjära ekvationssystem till matrisekvationer.

4.2.1 Addition

Två matriser A och B som båda har storlek $m \times n$ kan adderas och resulterar i en ny matris som betecknas $A + B$. Denna matris har också storlek $m \times n$. För att bestämma elementet i $A + B$ som finns på en viss plats adderas de två elementen i A och B som befinner sig på samma plats. Till exempel är

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -7 \\ 2 & 14 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 1 \\ 10 & -9 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & 2+1 & 3+0 \\ 0-1 & -1-4 & -7+1 \\ 2+10 & 14-9 & 4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & -5 & -6 \\ 12 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Mer generellt gäller

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Observera att om två matriser A och B inte har samma storlek så kan de inte adderas. Om vi skriver ett uttryck som $A+B$ är det alltså underförstått att A och B har samma antal rader respektive kolonner.

För addition av matriser gäller följande räkneregler.

Sats 4.1

Låt A, B och C vara matriser av samma storlek. Då gäller att

1) $A + (B + C) = (A + B) + C$,

2) $A + B = B + A$.

Denna sats bevisas lätt genom att observera att addition av matriser sker elementvis och sedan använda motsvarande regler för addition av tal.

En matris vars element alla är lika med 0 kallas för en nollmatris. Om en matris A adderas med en nollmatris får vi samma matris A. Till exempel gäller

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+0 \\ -2+0 & 4+0 \\ 0+0 & -1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Här följer några fler exempel på addition av matriser.

Exempel 4.2.1

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 6 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & 2-4 & -1+3 \\ -2+6 & 0+5 & 2-3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Exempel 4.2.2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 0-1 \\ 0-2 & 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

4.2.2 Multiplikation med skalär

När vi använder matriser och tal samtidigt är det viktigt att inte blanda ihop dessa. I sådana sammanhang spelar ofta talen rollen av omskalningsfaktorer. Till exempel motsvarar multiplikation med talet 2 konceptet att fördubbla något. Ofta används då ordet skalär som synonym till ordet tal och vi talar om multiplikation med en skalär. För att skilja skalärerna från matriserna betecknas skalärerna med små bokstäver.

Om A är en matris och k är en skalär (det vill säga ett tal) så kan A multipliceras med k, vilket ger upphov till en ny matris som betecknas kA. Denna matris fås genom att varje element i A multipliceras med k. Till exempel är

$$2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Om en matris innehåller bråktal är det ofta praktiskt att bryta ut inversen av minsta gemensamma nämnare från matrisen. Till exempel är

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & -2 & \frac{5}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 9 & 6 \\ 0 & -12 & 5 \end{pmatrix}.$$

För multiplikation av matriser med skalärer gäller följande räkneregler.

Sats 4.2

Låt k, l vara skalärer och A, B vara matriser av samma storlek. Då gäller att

1) $1A = A$,

2) $k(lA) = (kl)A$,

3) $k(A + B) = kA + kB$,

4) $(k+l)A = kA + lA$.

Observera att tecknet + i den sista likheten förekommer i två olika betydelser. Uttrycket $k+l$ i vänsterledet betyder summan av två tal, nämligen k och l. Uttrycket $kA + lA$ i högerledet betyder summan två matriser, nämligen kA och lA.

Precis som för tal skriver vi $-A = (-1)A$ och definierar subtraktion av matriser genom $A - B = A + (-B)$.

Exempel 4.2.3

$$\begin{aligned} 2\begin{pmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 10 & 1 \\ 4 & -5 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0+3 & -8+10 & 6+1 \\ 2+4 & -4-5 & 4+3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 6 & -9 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exempel 4.2.4

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 & 2+4 \\ -2-6 & 0-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}$$

4.2.3 Matrismultiplikation

Tidigare har vi använt matriser för att lösa linjära ekvationssytem som till exempel:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ -3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

Totalmatrisen till ovanstående system är

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 6 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right).$$

Den har två delar: koefficientmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 2 \\ -3 & 6 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

och högerledsmatrisen

$$B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Observera att matrisen B består av en enda kolonn. Sådana matriser kallar vi för kolonnmatriser.

Kopplingen mellan ekvationssystemet och matriserna A och B kan göras starkare genom att införa ytterligare en matrisoperation, nämligen multiplikation av två matriser. Innan vi kommer till definitionen av matrismultiplikation ska vi utforska denna koppling. Lösningarna till ekvationssystemet består av tal x_1, x_2, x_3 och x_4. Dessa kan vi också samla ihop till en kolonnmatris

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Vi observerar nu att ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ -3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

är ekvivalent med följande likhet av kolonnmatriser

$$\begin{pmatrix} 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 \\ -3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Den högra matrisen i denna likhet är precis matrisen B. Så vad är den vänstra matrisen? Matrismultiplikation definieras så att den vänstra matrisen är koefficientmatrisen A multiplicerat med X. Det vill säga

$$AX = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 2 \\ -3 & 6 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 \\ -3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 \end{pmatrix}.$$

Till exempel fås det första elementet i kolonnmatrisen AX genom matcha elementen i första raden i A med elementen i X, multiplicera dem och sedan lägga ihop. För att få fram elementet i andra raden i AX gör vi samma sak fast med andra raden i A och så vidare.

Mer generellt gäller att om A och X är matriser av storlek $m \times n$ respektive $n \times 1$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

så är A multiplicerat med X en matris av storlek $m \times 1$ som ges av

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Om B är en matris av storlek $m \times 1$:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

så är ekvationssystemet

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \ddots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

ekvivalent med matrisekvationen

$$AX = B.$$

Observera att ekvationssystemets koefficientmatris är A och högerledsmatris är B.

Här följer några exempel på hur en matris multipliceras med en kolonnmatris.

Exempel 4.2.5

Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

och

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Då är

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) \\ 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

På liknande sätt är

$$AY = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ och } AZ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ovan har vi definierat multiplikation av en matris A med en kolonnmatris X. Observera att definitionen kräver att antalet kolonner i A är samma som antalet rader i X. Denna restriktion gäller alltid för matrismultiplikation.

För att multiplicera en matris A med en matris B som består av flera kolonner kan vi multiplicera A med var och en av kolonnerna i B. De kolonnmatriser som då uppstår är precis kolonnerna i AB. Om vi till exempel låter

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ och } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

så får vi från Exempel 4.2.5 ovan att

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observera att i detta fall är A en (2×3)-matris, B en (3×3)-matris och AB en (2×3)-matris. Uttryckt i formler har vi följande definition.

Definition 4.3

Låt A vara en $(m \times r)$-matris och B vara en $(r \times n)$-matris. Då är A multiplicerat med B en $(m \times n)$-matris AB som definieras på följande vis. Om

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mr} \end{pmatrix} \text{ och } B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rn} \end{pmatrix}$$

$$\text{så är } AB = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{där } c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj} \\ &= \sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj} \end{aligned}$$

Exempel 4.2.6

Låt

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Då är

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) & 3 \cdot 3 + 4 \cdot (-2) \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) & 2 \cdot 3 + 0 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 1 + 5 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) & 1 \cdot 3 + 5 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & -3 & -7 \end{pmatrix},$$

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1+0+0 & 0+2+0 & 0+0+3 \\ 0+0+0 & 0-1+0 & 0+0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = B$$

och

$$CA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 3+0+0 & 4+0+0 \\ 0+2+0 & 0+0+0 \\ 0+0+1 & 0+0+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = A.$$

I exemplet ovan ser vi att $CA = A$ och $BC = B$. Det beror på att C är en speciell matris. För det första har C lika många rader som kolonner, det vill säga C är en kvadratisk matris. Sedan kan vi också observera att diagonalelementen i C, det vill säga elementen vars rad- och kolonnindex är samma, alla är lika med 1. De övriga elementen i C är alla lika med 0. En matris med dessa tre egenskaper kallas för en enhetsmatris eller identitetsmatris. För en enhetsmatris gäller att inget händer när vi multiplicerar med den från vänster eller höger. Vi betecknar enhetsmatrisen av storlek $n \times n$ med I_n eller bara I om n är underförstått. Alltså är

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

och så vidare.

I exemplet beräknade vi även att

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Om vi istället beräknar BA så får vi

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 19 \\ -4 & -10 \end{pmatrix}.$$

Som vi ser har matriserna AB och BA inte mycket med varandra att göra. De har inte ens samma storlek. Även när A och B är kvadratiska matriser, så att AB och BA har samma storlek, händer det ofta att de är olika. Till exempel är

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ men } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Dessa exempel visar att vi inte kan använda alla räkneregler som vi är vana vid för multiplikation av tal när vi multiplicerar matriser. Men vissa regler gäller och de mest grundläggande är följande.

Sats 4.4

Låt k vara en skalär och A, B, C vara matriser. Låt I vara enhetsmatrisen. Då gäller följande regler om storlekarna på A, B, C och I är sådana att vänsterled och högerled är väldefinierade.

1) $A(BC) = (AB)C$

2) $AI = A$

3) $IA = A$

4) $A(B + C) = AB + AC$

5) $(A + B)C = AC + BC$

6) $(kA)B = A(kB) = k(AB)$

Låt A vara en $(n \times n)$-matris. Då är $A \cdot A$ också en $(n \times n)$-matris som vi betecknar A^2. Mer allmänt definierar vi A^k som produkten av A med sig själv k gånger.

4.3 Matrisinvers

4.3.1 Inverterbara matriser

Tidigare har vi sett att varje linjärt ekvationssystem motsvarar en matrisekvation. Till exempel motsvarar ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ \phantom{x_1 + {}} 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 \phantom{{}+3x_3} = 3 \end{cases}$$

matrisekvationen $AX = B$ där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Låt nu

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -8 \\ -3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Matriserna A och C hänger ihop på ett speciellt sätt. Det är nämligen så att

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 3 & -8 \\ -3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

och

$$CA = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -8 \\ -3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Med hjälp av likheterna $AC = I$ och $CA = I$ kan vi nu lösa ekvationen

$$AX = B.$$

Om vi multiplicerar vänster- och högerled med C från vänster får vi att

$$CAX = CB.$$

Nu ger $CA = I$ att $CAX = IX = X$. Den enda möjliga lösningen är alltså

$$X = CB = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -8 \\ -3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Är detta X faktiskt en lösning till $AX = B$? Om vi sätter in $X = CB$ i vänsterledet får vi mycket riktigt att $AX = ACB = IB = B$ eftersom $AC = I$. Alltså har ekvationen $AX = B$ precis en lösning $X = CB$. Vi kan naturligtvis också sätta in $(x_1, x_2, x_3) = (-9, 4, -2)$ i det ursprungliga systemet och se att det stämmer. Gör det!

Detta sätt att lösa ekvationen $AX = B$ liknar hur vi löser ekvationer som $2x = 6$. Vi multiplicerar båda led med $\frac{1}{2}$ och får

$$\frac{1}{2}2x = \frac{1}{2}6 \iff x = 3.$$

En stor skillnad är att det i nuläget är oklart hur vi hittar matrisen C och varför det ens finns en sådan matris för detta A. För att urskilja de situationer då det finns en sådan matris C gör vi följande definition.

Definition 4.5

Vi säger att en $(n \times n)$-matris A är inverterbar om det finns en $(n \times n)$-matris C så att

$$AC = CA = I.$$

Då är C entydigt bestämd av A och kallas för A:s invers. Vi skriver $A^{-1} = C$.

För en $(n \times n)$-matris A gäller att om A är inverterbar så har varje matrisekvation $AX = B$ en unik lösning $X = A^{-1}B$. Det betyder i synnerhet att A har rang n. Senare ska vi se att om A har rang n så är A inverterbar. En kvadratisk matris är alltså inverterbar om och endast om den har maximal rang.

Exempel 4.3.1

Visa att matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

är inverterbar med invers

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

och lös ekvationssystemet:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 \phantom{{}+2x_2} + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 \phantom{{}-x_3} = 1 \end{cases}$$

För att visa att A är inverterbar behöver vi bara multiplicera A med den föreslagna inversen från höger respektive vänster och verifiera att vi får enhetsmatrisen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = I$$

och

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = I.$$

Vi skriver nu om ekvationssystemet som en matrisekvation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

och multiplicerar med A^{-1} från vänster:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Alltså är har systemet en unik lösning $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)$.

I termer av matrisavbildningar kan vi göra följande tolkning. Om A är en inverterbar matris så är matrisavbildningen T_A inverterbar med invers $T_A^{-1} = T_{A^{-1}}$. Det beror på att $T_A \circ T_{A^{-1}} = T_{AA^{-1}} = T_I = id$ och på liknande sätt är $T_{A^{-1}} \circ T_A = T_{A^{-1}A} = T_I = id$.

4.3.2 Linjära ekvationssystem med samma koefficientmatris

Innan vi går igenom hur inverser av matriser beräknas ska vi utforska kopplingen mellan ekvationssystem och matrisekvationer lite mer.

Exempel 4.3.2

Lös ekvationssystemen

a)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 0 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 = 1 \\ 2y_2 + 3y_3 = 2 \end{cases}$$

I båda fall kan vi ta fram totalmatrisen till systemet och lösa med Gausselimination.

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right) \boxed{-1} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right) \boxed{-2} \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \boxed{-1} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \boxed{-1} \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Lösning: $(x_1, x_2, x_3) = (4, -3, 3)$.

b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \boxed{-1} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \boxed{-2} \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \boxed{-1} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \boxed{-1} \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Lösning: $(y_1, y_2, y_3) = (-1, 1, 0)$.

Eftersom ekvationssystemen i a) och b) har samma koefficientmatris gör vi exakt samma radoperationer när vi utför Gausselimination. Vi kunde därför ha sparat tid genom att lösa a) och b) parallellt. För att hålla reda på de två högerleden kan vi helt enkelt sätta dem efter varandra i en (3×2)-matris som vi skriver till höger om koefficientmatrisen:

$$
\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right) \boxed{-1} \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right) \boxed{-2} \sim
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \boxed{-1} \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \boxed{-1} \sim
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)
$$

För att ta fram lösningarna $(x_1, x_2, x_3) = (4, -3, 3)$ och $(y_1, y_2, y_3) = (-1, 1, 0)$ tittar vi helt enkelt i första respektive andra kolonnen i den högra delen av den sista matrisen.

För att illustrera metoden tydligare kan vi kan tolka de två ekvationssystemen som en matrisekvation:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.
$$

Från

$$
\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)
$$

kommer vi fram till att matrisekvationen har en unik lösning

$$
\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.
$$

På liknande sätt kan vi hantera andra matrisekvationer. Nedan tar vi ett exempel som leder oss till en metod för att beräkna inversen till en matris.

Exempel 4.3.3

Låt
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$
Lös matrisekvationen $AX = I_3$.

Vi sätter
$$X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$
och får då matrisekvationen
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Den motsvarar tre ekvationssystem med tre uppsättningar obekanta (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) och (z_1, z_2, z_3). Koefficientmatriserna till de tre systemen är alla lika med A så vi kan bestämma alla obekanta på en gång som i föregående exempel:
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \boxed{-1} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \boxed{-2} \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \boxed{-1} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \boxed{-1} \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$
Vi får nu att matrisekvationen har en unik lösning
$$X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Denna matris X uppfyller alltså att $AX = I_3$. Vi kan dessutom beräkna att
$$XA = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

Att $AX = XA = I_3$ betyder att A är inverterbar med invers $A^{-1} = X$. I nästa avsnitt kommer vi att se att vi alltid kan beräkna inverser på detta sätt.

Vi formulerar denna metod för att lösa matrisekvationer som en sats.

Sats 4.6

Låt A vara en $(n \times n)$-matris och B vara en $(n \times m)$-matris. Om matrisen $(A \mid B)$ är radekvivalent med $(I \mid C)$ så har matrisekvationen

$$AX = B$$

en unik lösning $X = C$.

För att förstå varför satsen gäller kan vi resonera som i exemplen: första kolonnen i X motsvarar en lösning till ekvationssystemet med koefficientmatris A där högerledet är första kolonnen i B. Eftersom $(A \mid B) \sim (I \mid C)$ är lösningen just första kolonnen i C. På samma sätt kan vi resonera om andra kolonnen i X och så vidare. På så vis kommer vi fram till att $X = C$.

4.3.3 Beräkning av inverser

I föregående avsnitt lyckades vi hitta inversen till en matris A genom att lösa ekvationen $AX = I$. I nuläget är det oklart om det alltid går att göra på detta sätt. Det är klart att om A är inverterbar så är $X = A^{-1}$ en lösning till denna ekvation. Men hur vet vi att det är den enda lösningen? Och hur vet vi att om $AX = I$ så är även $XA = I$, vilket måste gälla om $X = A^{-1}$? Svaret är att det faktiskt bara kan vara på två sätt: antingen är A inverterbar och då har ekvationen $AX = I$ precis en lösning $X = A^{-1}$ eller så är A inte inverterbar och då har $AX = I$ ingen lösning. För att se varför detta gäller bevisar vi följande sats

Sats 4.7

Låt A vara en $(n \times n)$-matris. Då är följande villkor ekvivalenta.

1) A är inverterbar.

2) $AX = I$ har en lösning X.

3) $AY = B$ har en lösning Y för varje $(n \times m)$-matris B.

4) Rangen av A är n.

Om dessa ekvivalenta villkor är uppfyllda så har ekvationerna i 2) och 3) entydiga lösningar $X = A^{-1}$ och $Y = A^{-1}B$.

Bevis: 1) $\implies$ 2): Om A är inverterbar så gäller att $AA^{-1} = I$, och därmed finns lösningen $X = A^{-1}$ till $AX = I$.

2) $\implies$ 3): Om $AX = I$ så är $AXB = IB = B$. Alltså är $Y = XB$ en lösning till ekvationen $AY = B$.

3) $\implies$ 4): Från 3) följer att varje ekvationssystem med koefficientmatris A har en lösning. Därmed är rangen av A lika med antalet rader i A, det vill säga n.

4) $\implies$ 1): Om rangen av A är n så har ekvationerna i 2) och 3) entydiga lösningar eftersom antalet rader och kolonner i A är n. Låt nu X vara matrisen som uppfyller $AX = I$ och betrakta ekvationen $AY = A$. Eftersom $AXA = IA = A$ har vi en lösning $Y = XA$. Men $Y = I$ är en lösning till samma ekvation. Eftersom det bara finns en lösning måste då $XA = I$. Vi har nu att $AX = XA = I$. Alltså är A inverterbar med invers $A^{-1} = X$.

Nu följer att villkoren är ekvivalenta. Dessutom har vi visat att lösningarna i 2) och 3) är entydiga, samt att lösningen i 2) är $X = A^{-1}$. Vi har även sett att lösningen i 3) är $Y = XB = A^{-1}B$. Därmed är beviset klart.

Exempel 4.3.4

Hitta om möjligt inversen till matrisen A då

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Vi försöker att lösa matrisekvationen $AX = I$ genom att utföra Gausselimination på $(A \mid I)$. På grund av Sats 4.7 vet vi att om det finns en lösning så måste det vara inversen till A. Om det inte finns någon lösning så är A inte inverterbar.

a) Vi utför radoperationer på $(A \mid I)$ och försöker nå $(I \mid A^{-1})$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Alltså är A inverterbar med invers

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Vi använder samma metod som i a)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right).$$

Från rad 3 ser vi nu att det inte finns några lösningar och därmed är A inte inverterbar.

I exemplen ovan utnyttjar vi att om $AX = I$ så är A inverterbar och $X = A^{-1}$, vilket följer från Sats 4.7. Men vi kunde ju lika gärna utgå ifrån $XA = I$. Kan vi vara säkra på att A är inverterbar om det finns en sådan matris X? Svaret är ja. För att se det kan vi betrakta ekvationen

$$AY = 0.$$

Om vi multiplicerar både vänster- och högerled med en matris X som uppfyller $XA = I$ så får vi att

$$Y = XAY = 0.$$

Alltså har ekvationen $AY = 0$ precis en lösning $Y = 0$, och därmed är rangen av A lika med n. Från Sats 4.7 följer nu att A är inverterbar. Dessutom är $X = XAA^{-1} = IA^{-1} = A^{-1}$. Sammanfattningsvis har vi följande sats.

Sats 4.8

Låt A vara en $(n \times n)$-matris. Om det finns en $(n \times n)$-matris B som uppfyller att $AB = I$ eller $BA = I$ så är A inverterbar och $B = A^{-1}$.

Från denna sats följer även föjlande sats.

Sats 4.9

Låt A och B vara en $(n \times n)$-matriser. Då är AB inverterbar om och endast om A och B är inverterbara. I detta fall är dessutom $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Bevis: Om A och B är inverterbara så följer $ABB^{-1}A^{-1} = AA^{-1} = I$. Alltså är AB inverterbar med invers $B^{-1}A^{-1}$. Om vi istället antar att AB är inverterbar så följer $AB(AB)^{-1} = I$, vilket visar att A är invertervar me invers $A^{-1} = B(AB)^{-1}$. På liknande sätt är B inverterbar med $B^{-1} = (AB)^{-1}A$ eftersom $(AB)^{-1}AB = I$.

4.4 Determinanter

4.4.1 Determinanten av en (2×2)-matris

I många sammanhang är det viktigt att kunna avgöra om en kvadratisk matris A är inverterbar eller inte. Ett sätt som vi har lärt oss är att försöka lösa ekvationen $AX = I$. Det har fördelen att vi även får fram inversen om den existerar. Ett annat sätt är att beräkna A:s rang: på grund av Sats 4.7 vet vi att A är inverterbar om och endast om A:s rang är maximal, det vill säga lika med antalet rader och kolonner. I detta avsnitt ska vi gå igenom ett tredje sätt, nämligen att beräkna A:s determinant. Determinanten av A är ett tal som betecknas $\det A$. Determinanten har egenskapen att A är inverterbar om och endast om $\det A \neq 0$. Senare kommer vi se att determinanter av matriser kan användas för andra intressanta ändamål, men för närvarande behöver du bara känna till två saker:

- $\det A$ är ett tal som är definierat för varje kvadratisk matris A.
- $\det A \neq 0$ om och endast om A är inverterbar.

Exempel 4.4.1

Vi börjar med en (2×2)-matris

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

När är A inverterbar? Vi antar först att $a \neq 0$ och försöker lösa $AX = I$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \boxed{\tfrac{1}{a}} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \boxed{-c} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & d - \frac{bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right) \text{@}$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & ad - bc & -c & a \end{array}\right)$$

Vi ser nu att ekvationen är lösbar om och endast om $ad - bc \neq 0$. Vi skriver $\delta = ad - bc$ och fortsätter under under förutsättning att $\delta \neq 0$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \delta & -c & a \end{array}\right) \boxed{\tfrac{1}{\delta}} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{c}{\delta} & \frac{a}{\delta} \end{array}\right) \boxed{-\tfrac{b}{a}} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{a} + \frac{bc}{a\delta} & -\frac{b}{\delta} \\ 0 & 1 & -\frac{c}{\delta} & \frac{a}{\delta} \end{array}\right)$$

Vi beräknar

$$\frac{1}{a} + \frac{bc}{a\delta} = \frac{\delta + bc}{a\delta} = \frac{ad - bc + bc}{a\delta} = \frac{ad}{a\delta} = \frac{d}{\delta}$$

och finner att inversen till A är

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{\delta} & -\frac{b}{\delta} \\ -\frac{c}{\delta} & \frac{a}{\delta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Vi kollar nu vad som händer om $a = 0$. Då är

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

och rangen av A är 2 om och endast om både $b \neq 0$ och $c \neq 0$. Med andra ord är A inverterbar om och endast om $bc \neq 0$, vilket är ekvivalent med $ad - bc \neq 0$ eftersom $a = 0$ i detta fall.

Talet $ad - bc$ är precis determinanten av A. Det vill säga

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & b \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Som vi har sett är A inverterbar om och endast om dess determinant $ad - bc \neq 0$. Om så är fallet är inversen av A:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & b \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

vilket vi lätt kan verifiera genom att multiplicera:

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad - bc & bd - bd \\ -ac + ac & -bc + ad \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exempel 4.4.2

Beräkna determinanten av

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

och bestäm om möjligt inversen till A.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 2 - 3 = -1.$$

Eftersom $\det A \neq 0$ så är A inverterbar. Dessutom kan vi räkna ut inversen som ovan

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

4.4.2 Determinanten av en $(n \times n)$-matris

Vi ska nu definiera determinanten $\det A$ av en godtycklig $(n \times n)$-matris A. Om vi utgår från

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & b \end{pmatrix} = ad - bc$$

ser vi att denna determinant är en summa av två termer ad och $-bc$. Elementen a och d är precis elementen på diagonalen:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Elementen b och c är de övriga två elementen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

För att definiera determinanter av större matriser inför vi lite terminologi.

- Ett *mönster* i en $(n \times n)$-matris A är ett val av n element från A, bestående av precis ett element från varje rad och kolonn.
- *Produkten* av ett mönster i A är produkten av motsvarande element i A.
- Vi säger att två element i ett mönster bildar ett *omvänt par* om det ena står ovanför och till höger om det andra.
- Vi säger att ett mönster är *jämnt* om det har ett jämnt antal omvända par och *udda* om det har ett udda antal omvända par.

Vi kan illustrera mönster genom att ringa in de valda elementen. Om två element bildar ett omvänt par illustrerar vi det genom att förbinda dem med en linje. Här är till exempel de två mönstren i en (2×2)-matris med omvända par markerade:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Motsvarande produkter är ad och bc. Det första mönstret har inga omvända par och är därför jämnt. Det andra mönstret har ett omvänt par och är därför udda. Determinanten är alltså i detta fall produkten av det jämna mönstret minus produkten av det udda mönstret. Vi är nu redo att definiera godtyckliga determinanter.

> **Definition 4.10**
>
> Determinanten $\det A$ av en kvadratisk matris A är summan av alla produkter av jämna mönster i A minus summan av alla produkter av udda mönster i A.

För att beteckna determinanten av en matris A byter vi ut parenteserna mot raka sträck. Till exempel skriver vi

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

När vi använder raka sträck menar vi alltså inte en matris utan dess determinant som är ett tal.

Vi ser vad definitionen ger oss för en (3×3)-matris:

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Totalt har vi 6 mönster som vi markerar med omvända par nedan:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Antalet omvända par är som vi ser 0, 1, 1, 2, 2 respektive 3. Alltså är

$$\begin{aligned}
\det A = \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} &= xbf - xce - yaf + ycd + zae - zbd \\
&= x(bf - ce) - y(af - cd) + z(ae - bd) \\
&= x\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Denna formel för att räkna ut en determinant av en (3×3)-matris med hjälp av tre determinanter av (2×2)-matriser är bra att komma ihåg. Vi formulerar den därför som en sats.

Sats 4.11

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

Observera att de tre (2×2)-matriserna vars determinanter dyker upp i högerledet fås genom att stryka första raden i

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

och därefter stryka kolonn 1, 2 respektive 3.

Exempel 4.4.3

Beräkna determinanten av

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi använder Sats 4.11 och finner att

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} &= 1 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \\ &= (-1-12) - 2(2-0) + 0(8-0) = -13 - 4 + 0 = -17 \end{aligned}$$

Ett annat praktiskt sätt att räkna ut determinanten av en (3×3)-matris är att komma ihåg de jämna mönstren:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

för sig och de och de udda mönstren:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

för sig. Då får vi

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = xbf + ycd + zae - zbd - xce - yaf.$$

Exempel 4.4.4

Beräkna determinanten av

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Om vi nu räknar jämna och udda mönster var för sig får vi

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} =& 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \cdot 4 \\ & - 0 \cdot (-1) \cdot 0 - 4 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 2 \\ =& -1 + 0 + 0 - 0 - 12 - 4 = -17. \end{aligned}$$

Vid det här laget börjar det kanske märkas att förekomsten av nollor i en matris förenklar uträkningen av dess determinant. Det beror på att alla mönster som väljer ut en nolla har produkt 0. Till exempel kommer en matris med en nollrad alltid att ha determinant 0 eftersom varje mönster innehåller en av nollorna i den raden. Vi ska nu se på ett annat exempel då determinanten enkelt kan räknas ut.

Exempel 4.4.5

Beräkna determinanten av

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 18 & 23 \\ 0 & 2 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Vi reder ut vilka mönster som har nollskild produkt. Från första kolonnen måste vi välja elementet 1 eftersom övriga är 0. Om vi nu fortsätter med andra kolonnen ser vi att vi måste välja 2 eftersom 10 står i den första raden som redan är upptagen och övriga element är 0. På liknande sätt ser vi att vi i tredje kolonnen måste välja 3 och i fjärde 4. Alltså finns bara ett mönster vars produkt inte är noll nämligen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 18 & 23 \\ 0 & 2 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Detta diagonalmönster har inga omvända par och är därför jämnt. Alltså är

$$\begin{vmatrix} 1 & 10 & 18 & 23 \\ 0 & 2 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

En matris där alla element under diagonalen är 0 (som i exemplet ovan) kallas för en övertriangulär matris. För en sådan kan vi uppenbarligen räkna ut determinanten genom att multiplicera diagonalelementen.

Sats 4.12

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

Om vi använder definitionen för att beräkna determinanter av större matriser och vi inte kan använda något resonemang som ovan måste vi helt enkelt gå igenom alla mönster. Hur många mönster finns det i en $(n \times n)$-matris? Vi kan välja elementet på rad 1 på n sätt. Därefter har vi bara $(n-1)$ sätt att välja elementet i rad 2 eftersom en kolonn redan är upptagen. Fortsätter vi med rad 3 har vi bara $(n-2)$ sätt och så vidare. Alltså finns

$$n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 = n!$$

mönster. Med andra ord motsvarar mönstren i matrisen permutationer av n element. Det betyder alltså att en (4×4)-matris har $4! = 24$ mönster, en (5×5)-matris har $5! = 120$ mönster och så vidare. Eftersom $n!$ växer mycket snabbt är det inte praktiskt att använda definitionen för att beräkna determinanter av stora matriser. För hand är det redan besvärligt för (4×4)-matriser och med en dator kommer man inte heller särskilt långt. Lyckligtvis finns ett effektivare sätt, genom att använda radoperationer. Det går vi igenom i nästa avsnitt.

4.4.3 Beräkning av determinanter med radoperationer

Låt A vara en $(n \times n)$-matris och B vara den matris som uppstår när vi utför någon viss radoperation på A. I det här avsnittet ska vi undersöka vad det finns för samband mellan determinanterna $\det A$ och $\det B$. Vi börjar med att studera fallet $n = 2$ och skriver

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Då är som vi har sett $\det A = ad - bc$. Om vi multiplicerar första raden i A med en konstant k får vi matrisen

$$B = \begin{pmatrix} ka & kb \\ c & d \end{pmatrix}$$

vars determinant är $\det B = kad - kbc = k(ad - bc) = k \det A$. Om B istället matrisen som uppstår då vi multiplicerar andra raden i A med k så gäller på liknande sätt att $\det B = akd - bkc = k(ad - bc) = k \det A$. Vi har alltså

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ kc & kd \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Motsvarande gäller för determinanter av större matriser: om vi multiplicerar någon viss rad i en matris med en konstant så förändras determinanten genom multiplikation med samma konstant. Det beror på att varje mönster innehåller precis ett element i raden, så motsvarande produkt multipliceras med konstanten precis en gång.

Låt nu istället B vara matrisen som uppstår då vi byter plats på de två raderna i A:

$$B = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$$

Då är $\det B = cb - da = -(ad - bc) = -\det A$. För determinanter av större matriser gäller på liknande sätt att om två rader byter plats så byter determinanten tecken. Denna regel är inte lika lätt att se. Ett bevis ges i Avsnitt 4.4.6.

Låt till sist B vara matrisen som uppstår då vi lägger till k gånger första raden i A till den andra. Det vill säga

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c + ka & d + kb \end{pmatrix}.$$

Då är $\det B = a(d + kb) - b(c + ka) = ad + akb - bc - bka = ad - bc = \det A$. För determinanter av större matriser gäller mer allmänt att om vi lägger till en konstant gånger en rad till en annan rad, så påverkas inte determinantens värde. Inte heller denna regel är inte så lätt se. Den bevisas i Avsnitt 4.4.6.

Vi sammanfattar hur radoperationer påverkar determinantens värde i följande sats

Sats 4.13

Låt A och B vara $(n \times n)$-matriser. Då gäller att

1) om B fås från A genom att multiplicera en rad med en konstant k så är
$$\det B = k \det A,$$

2) om B fås från A genom att byta plats på två rader så är
$$\det B = -\det A,$$

3) om B fås från A genom lägga till en konstant gånger en rad till en annan rad så är
$$\det B = \det A.$$

Vi kan nu beräkna determinanter genom att utföra radoperationer och hålla reda på hur determinantens värde förändras.

Exempel 4.4.6

Beräkna determinanten av

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Vi använder radoperationer och håller koll på hur determinanten förändras

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 \;\; -1 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -2 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -1 \\ \\ \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5 = 10.$$

Den sista likheten gäller eftersom determinanten av en övertriangulär matris är produkten av diagonalelementen. Från beräkningen kan vi se att matrisen A har rang 4. Alltså är A inverterbar och mycket riktigt är $\det A = 10 \neq 0$. Vi har nu fått en ledtråd till beviset av följande sats.

Sats 4.14

En kvadratisk matris A är inverterbar om och endast om $\det A \neq 0$.

Bevis: Antag att A är en $(n \times n)$-matris och låt B vara matrisen som vi får om vi utför Gausselimination på A. Från Sats 4.13 vet vi att radoperationerna som tar oss från A till B bara förändrar determinantens värde med någon nollskild faktor. Alltså gäller $\det A \neq 0$

om och endast om $\det B \neq 0$. Men B är övertriangulär så $\det B$ är produkten av diagonalelementen i B enligt Sats 4.12. Alltså är $\det B \neq 0$ ekvivalent med att alla diagonalelement i B är skilda från 0. Det i sin tur är ekvivalent med att rangen av A är n, vilket enligt Sats 4.7 är ekvivalent med att A är inverterbar. Därmed är beviset klart.

Till sist går vi igenom ett samband mellan matrismultiplikation och determinanter.

Sats 4.15

Låt A och B vara $(n \times n)$-matriser. Då är $\det(AB) = \det A \det B$.

Bevis: Vi börjar med en observation om sammansatta matriser $(A|B)$, alltså de som fås genom att sätta två kvadratiska matriser bredvid varandra. Om vi gör en följd radoperationer på $(A|B)$ och får $(A'|B')$ så kommer $\det A' = c \det A$ och $\det B' = c \det B$ för någon nollskild konstant c som beror på vilka radoperationer vi utförde enligt Sats 4.13. Alltså är $\det A \det B' = c \det A \det B = \det A' \det B$. Med andra ord har vi att

$$(A|B) \sim (A'|B') \implies \det A \det B' = \det A' \det B$$

Nu till beviset. Om A inte är inverterbar, så är inte heller AB inverterbar enligt Sats 4.9. Från Sats 4.14 följer $\det(AB) = 0 = \det A \det B$.

Antag att A är inverterbar och betrakta den sammansatta matrisen $(A|AB)$. Eftersom A är inverterbar gäller $A \sim I$ och därmed $(A|AB) \sim (I|C)$ för någon matris C. Enligt Sats 4.6 är $X = C$ den unika lösningen till $AX = AB$. Men $X = B$ är uppenbarligen en lösning så $C = B$. Vi har alltså $(A|AB) \sim (I|B)$. Nu kan vi använda observationen som vi gjorde i början och får

$$\det A \det B = \det I \det(AB) = \det(AB).$$

4.4.4 Transponatet av en matris

Det finns en viktig operation på matriser som kallas transponat. Enkelt sagt är transponatet av en matris A den matris $A^\top$ vi får genom att spegla matrisen i diagonalen. Effekten är att raderna i A står som kolonner i A^T och vice versa. Formellt gör vi följande definition.

Definition 4.16

Låt A vara en $(m \times n)$-matris. Då är transponatet av A den $(n \times m)$-matris $A^\top$ som har element a_{ji} på rad i och i kolonn j.

Exempel 4.4.7

Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

Då är

$$A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

Att ta transponatet av en matris är kompatibelt med matrisoperationerna enligt följande sats.

Sats 4.17

Följande gäller för matriser A och B av lämpliga storlekar.

(a) $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$

(b) $(\lambda A)^\top = \lambda A^\top$

(c) $(AB)^\top = B^\top A^\top$

(d) $\det A^\top = \det A$

Bevis: a) och b) följer av att addition och multiplikation med skalär är definierade elementvis.

c) Om A är en $(m \times r)$-matris och B är en $(r \times n)$-matris så är $A^\top$

är en $(r \times m)$-matris och B är en $(n \times r)$-matris. Alltså kan vi utföra multiplikationen $B^\top A^\top$. I position ij har $B^\top A^\top$ elementet

$$\sum_{k=1}^{r} b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^{r} a_{jk} b_{ki}$$

vilket är elementet i AB i position ji, alltså elementet i position ij i $(AB)^\top$.

d) Varje mönster i A motsvarar ett mönster i $A^\top$ med samma element och samma antal omvända par. Det följer att $\det A = \det B$

Radoperationer på A motsvarar kolonnoperationer på $A^\top$ och vice versa. Eftersom $\det A^\top = \det A$ betetyder det att vi får likande regler för hur kolonnoperationer påverkar determinantens värde som för radoperationer.

4.4.5 Utveckling efter rader och kolonner

I Sats 4.11 såg vi att determinanten av en (3×3)-matris A kan beräknas utifrån de tre deteminanter som dyker upp om vi stryker första raden och var och en av de tre kolonnerna i A. I detta stycke presenterar vi en generalisering av denna metod.

Låt A vara en godtycklig $(n \times n)$-matris. Låt M_{ij} beteckna determinanten av den matris som vi får om vi stryker rad i och kolonn j i A med. En sådan determinant kallas för en minor till A.

Exempel 4.4.8

Låt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Minoren som motsvarar rad 2 och kolonn 3 är då

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 2 - 20 - 0 - 0 - 1 = -23.$$

Om

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

så är enligt Sats 4.11

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

eller mer kompakt

$$\det A = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}.$$

Detta sätt att räkna ut $\det A$ kallas för utveckling längs rad 1. Faktum är att man på liknade sätt kan utveckla längs någon av de andra raderna eller till och med längs någon kolonn. Det går även att hantera större determinanter på likande sätt. Mer precist gäller följande sats.

Sats 4.18

Låt A vara en $(n \times n)$-matris. Kalla elementet i A på rad i och kolonn j för a_{ij} och motsvarande minor för M_{ij}. Då gäller följande formler:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}, \quad \text{utveckling efter rad } i.$$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}, \quad \text{utveckling efter kolonn } j.$$

Ett bevis ges i slutet av avsnitt 4.4.6.

Exempel 4.4.9

Låt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Att utveckla determinanten av A längs kolonn 3 betyder att använda formeln $\det A = \sum_{i=1}^{4}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}$ med $j = 3$. Vi får då

$$\begin{aligned}\det A &= a_{13}M_{13} - a_{23}M_{23} + a_{33}M_{33} - a_{43}M_{43}\\ &= 0M_{13} - (-M_{23}) + 0M_{33} - 6M_{43} = M_{23} - 6M_{43}\\ &= \begin{vmatrix}0 & 1 & -4\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 5 & 1\end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix}0 & 1 & -4\\ 1 & 2 & 7\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix} = -23 - 6\cdot 16 = -119.\end{aligned}$$

Som vi ser blir det färre beräkningar om vi väljer en rad eller kolonn där många element är 0. Ett lämpligt alternativ till att utveckla längs kolonn 3 som vi gjorde hade därför varit att utveckla längs rad 1 eller rad 3.

4.4.6 Bevis för Sats 4.13 och Sats 4.18

Vi ger ett bevis för Sats 4.13. Beviset består av flera steg och är att betrakta som överkurs. Det finns här för att stilla den intresserade läsarens nyfikenhet.

1) Låt B vara matrisen som fås genom att multiplicera en rad i A med en konstant k. Varje mönster väljer ut precis ett element i raden. Så motsvarande produkt i matrisen B är k gånger motsvarande produkten i matrisen A. Nu följer att $\det B = k \det A$.

2) Låt B vara matrisen som fås genom byta plats på två rader i A. Vi börjar med att anta att raderna ligger intill varandra och kallar motsvarande radbyte för ett intilliggande radbyte. Betrakta ett mönster i A och kalla dess produkt p. Om vi byter plats på de två raderna så får vi ett annat mönster vars produkt i B också är p. Skillnaden mellan mönstren är följande: om de två raderna har ett omvänt par så kommer det att försvinna, och om inget fanns kommer ett nytt att uppstå. Alltså förändras mönstret från ett udda till ett jämnt eller från ett jämnt till ett udda. Bidragen av dessa mönster till $\det A$ respektive $\det B$ är alltså samma fast med omvänt tecken. Resonemanget gäller för alla mönster så $\det B = -\det A$.

Vad händer om vi vill byta plats på två rader r_1 och r_2 som inte är intilliggande utan separeras av säg k rader. Då kan vi flytta ner den övre raden r_1 förbi de k mellanliggande genom att utföra k intilliggande radbyten. Därefter byter vi plats på rad r_1 och r_2 som nu är intilliggande. Till sist flyttar vi upp r_2 förbi de k ovanstående raderna genom ytterligare k

intilliggande radbyten. Totalt har vi utfört $2k+1$ intilliggande radbyten vilket är ett udda antal. Alltså ändras tecknet ett udda antal gånger och vi får igen att $\det B = -\det A$.

3) För denna radoperation behöver vi lite förberedelser. Vi börjar med att observera att om två rader i A är lika så är $\det A = 0$: om vi byter plats på raderna händer inget, men tecknet ska ju ändras enligt 2). Alltså är $\det A = -\det A$, vilket ger $2\det A = 0$ och $\det A = 0$. Vi fortsätter med att visa

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x_1 & \cdots & a_{1n}+x_n \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

För att se detta fixerar vi något mönster. Säg att mönstret från första raden väljer ut elementet i kolonn j. I vänsterledet kommer mönstret att ge upphov till en produkt på formen $(a_{1j}+x_j)q$. I de två determinanterna i högerledet kommer samma mönster ge upphov till produkterna $a_{1j}q$ och x_jq vars summa är just $(a_{1j}+x_j)q$. Varje mönster bidrar alltså med samma sak till vänster- och högerled. Alltså gäller likheten.

Om vi nu adderar k gånger rad i till den första raden i A får vi en matris B med determinant

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{i1} & \cdots & a_{1n}+ka_{in} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} \\ &= \det A + k\begin{vmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Determinanten längst till höger är noll eftersom rad 1 och rad i är lika. Alltså är $\det B = \det A + 0 = \det A$. Att vi valde just första raden i A har ingen betydelse. Vi kan resonera på samma sätt om de andra raderna. Därmed är beviset klart.

Vi ger ett bevis för Sats 4.18. Förklaringen till formlerna är att de mönster som väljer ut elementet a_{ij} i matrisen A bidrar till determinantens värde med precis $(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}$. Den första formeln följer av att vi kan dela in mönstren efter vilket elements som väljs på rad i och summera dessa för sig. Den andra formeln följer av att dela in efter vilket element som väljs i kolonn j och summera dessa för sig.

För att se att den första observationen stämmer kan börja vi med fallet $i = 1, j = 1$. Om vi i vårt mönster väljer a_{11} ska vi sedan välja element i matrisen i raderna och kolonnerna som återstår när vi stryker rad 1 och kolonn 1. Elementet a_{11} kan inte vara inblandat i något omvänt par så hela mönstret har samma antal omvända par som det vi väljer i resten av matrisen. Det är då klart att bidraget av dessa mönster är precis $a_{11}M_{11}$.

För att förstå det allmänna fallet då vi väljer a_{ij} godtyckligt kan vi byta plats på rader och kolonner. Vi sorterar upp rad i till första raden genom $i-1$ intilliggande radbyten. Sedan sorterar vi kolonn j till första kolonnen genom $j-1$ intilliggande kolonnbyten. Nu står a_{ij} i position 11 och stryker vi första raden och fösta kolonnen har vi precis matrisen som vi får om vi stryker rad i och rad j i den ursprungliga matrisen. Varje mönster där vi väljer position ij i den ursprungliga matrisen motsvarar ett mönster där vi väljer position 11 i den nya matrisen, men tecknet har ändrats med en faktor $(-1)^{i-1}(-1)^{j-1} = (-1)^{i+j}$.

Uppgifter till Kapitel 4

Avsnitt 4.2

4.1) Ange enhetsmatrisen av storlek 1, 2, 3 och 4.

Länk till svar

4.2) Ange nollmatrisen av storlek 2×2, 1×4 och 4×3.

Länk till svar

4.3) Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

Beräkna a) $A + B$, b) $A - B$, c) $2A$, d) $3A + B - 2A$.

Länk till svar

4.4) Lös matrisekvationerna

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Länk till svar

4.5) Låt

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Beräkna a) AX, b) AY, c) $A(X + Y)$, d) $A(X - Y)$.

Länk till svar

4.6) Låt

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Beräkna a) AB, b) BA, c) $A(A+B)$.

Länk till svar

4.7) Beräkna produkterna AB och BA i de fall då de är definierade för följande matriser A, B:

a) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 5 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) $$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

d) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Länk till svar

4.8) Låt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beräkna a) A^2, b) A^4, c) A^{2000}, d) A^{2023}.

Länk till svar

Avsnitt 4.3

4.9) Lös matrisekvationen

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Länk till svar

4.10) Visa att matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 9 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

är varandras inverser.

Länk till svar

4.11) Lös matrisekvationen $AX = B$, där A är som i uppgift 4.10 och

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Länk till svar

4.12) Hitta alla (3×3)-matriser X som uppfyller $2AX = BX + I$, där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 6 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Länk till svar

4.13) Hitta inversen till följande matriser

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{c)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Länk till svar

4.14) Invertera matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Länk till svar

4.15) Invertera matrisen

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Länk till svar

4.16) För vilka värden på $a \in \mathbb{R}$ är följande matris inverterbar?

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

Länk till svar

4.17) Visa att om A och B är inverterbara $(n \times n)$-matriser så är även AB inverterbar med invers $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Länk till svar

4.18) Visa att rotationsmatrisen

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

är inverterbar för varje α och bestäm dess invers.

Länk till svar

Avsnitt 4.4

4.19) Bestäm determinanterna av följande (2×2)-matriser. Bestäm om möjligt även matrisernas invers.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

Länk till svar

4.20) Beräkna determinanterna av följande (3×3)-matriser:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Vilka av matriserna är inverterbara?

Länk till svar

4.21) Beräkna determinanten av

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Länk till svar

4.22) Bestäm transponatet $A^\top$ för följande matriser A. Ange även $\det A$ och $\det A^\top$ när dessa är definierade.

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 7 & -8 & 11 \\ -6 & -3 & 9 & 13 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 9 \\ 6 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

Länk till svar

4.23) I följande linjära ekvationssystem finns ett reellt tal $a \in \mathbb{R}$. Avgör hur många lösningar systemen har för varje värde på a. Bestäm lösningarna för de värden då systemen har oändligt många lösningar. Ledning: du kan använda determinanter för att avgöra när systemen har entydig lösning (du behöver inte hitta lösningarna i dessa fall).

a) $\begin{cases} ax_1 + 4x_2 = 1 \\ 2x_1 + a^2x_2 = a - 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + ax_3 = 1 \\ 2x_1 + (a-1)x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + (a+2)x_3 = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} ax_1 + 2x_2 + x_3 = a \\ a^2x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \\ ax_1 - x_2 + ax_3 = 1 \end{cases}$

Länk till svar

4.24) Bestäm alla reella tal x så att

$$\begin{vmatrix} x & x & x \\ 1 & x-1 & 9 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Länk till svar

4.25) Beräkna

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Länk till svar

4.26) Bestäm alla reella tal x så att

$$\begin{vmatrix} x & 1 & x & x \\ 1 & x & x & x \\ 2 & x & 4 & 2x \\ x & 2 & x & x \end{vmatrix} = 0.$$

Länk till svar

4.27) Bestäm alla reella tal x så att matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x & 2 \\ x & 1 & 2 & x \\ x & 2 & 1 & x \\ 2 & x & x & 0 \end{pmatrix}$$

är inverterbar.

Länk till svar

5 Vektorprodukt, area och Volym

I detta kapitel ska vi givet två vektorer $\vec{v}$ och $\vec{w}$ i $\mathbb{R}^3$ definierar en ny vektor $\vec{v} \times \vec{w}$ i $\mathbb{R}^3$ kallat vektorprodukten. Denna produkt fungerar enbart i $\mathbb{R}^3$ och inte t.ex. $\mathbb{R}^2$. Vektorprodukt, determinant, area och volym är alla kopplade till varandre, och vi ska beskriva dessas sammanhang. I fysik är vektorprodukten väldigt viktig och används bland annat för att beskriva och förstå magnetfält.

5.1 Egenskapar och definition

Vi börjar med en sats som vi kommer delvist att bevisa i loppet av kapitlet. Vi gör detta för att denna beskriver de viktiga egenskapar vid vektorprodukten.

Sats 5.1

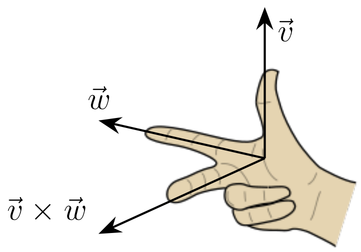
Låt $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$. Vektorprodukten $\vec{v} \times \vec{w}$ i $\mathbb{R}^3$ är den entydiga vektor där uppfyller:

(a) $\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{v}\|\|\vec{w}\| \sin(\theta)$.

(b) riktningen av $\vec{v} \times \vec{w}$ är ortogonal till både $\vec{v}$ och $\vec{w}$.

(c) Om $\vec{v}$ och $\vec{w}$ inte är parallella då uppfyller vektorerna $\vec{v}$, $\vec{w}$ och $\vec{v} \times \vec{w}$ i denna ordningsföljd högerhandsregeln.

Här betyder (som tidigare) högerhandsregeln följande: Om man pekar längs $\vec{v}$ med tumlen (på höger hand!), och längs $\vec{w}$ med pekfingret, då pekar $\vec{v} \times \vec{w}$ ortogonalt mot dessa och åt hållet som långfingret kan peka.

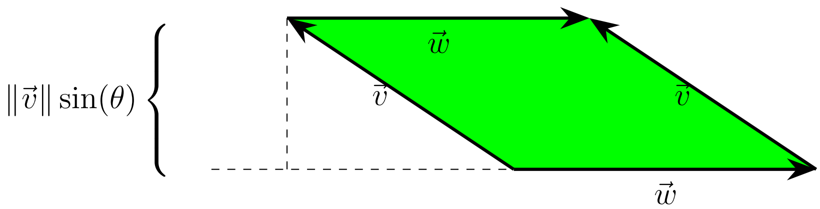


Kom ihåg att ordningsföljden på vektorna är viktig för högerhandsregeln.

Geometriskt ser vi att längden av $\vec{v} \times \vec{w}$ beskrivet i satsen:

$$\|\vec{w}\|\|\vec{v}\| \sin(\theta)$$

faktiskt är arean av det parallellogram som definieras av $\vec{v}$ och $\vec{w}$:



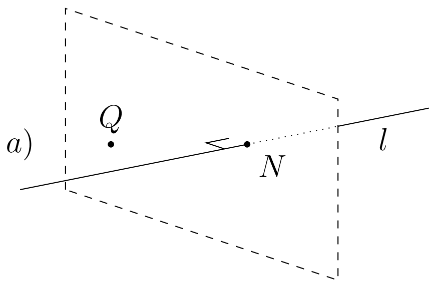
Höjden i figuren är $\|\vec{v}\| \sin(\theta)$ och basen (sidan i botten) har längd $\|\vec{w}\|$. Observera speciellt att detta betyder att om $\vec{v}$ och $\vec{w}$ är parallella så är

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(den ända vektorn med längd 0). Detta förklarar att de tre geometriska villkorna är nog till att bestämma vektorn $\vec{v} \times \vec{w}$ entydigt. Mera precist:

- Om $\vec{v}$ och $\vec{w}$ är parallella då är $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$ enligt första villkoret, och andra villkoret är automatiskt.

- Om $\vec{v}$ och $\vec{w}$ inte är parallella då finns precis ett plan π genom origo som är parallell med båda vektorerna. Att vara ortogonal mot $\vec{v}$ och $\vec{w}$ är då det samma som att vara ortogonal mot π (se Figur 26). Det finns precis två vektorer med rätt längd som också är ortogonala mot π. Dessa pekar ut på de två olika sidorna av π. Vektorprodukten $\vec{v} \times \vec{w}$ är den av dessa två som uppfyller högerhandsregeln i punkt 3.

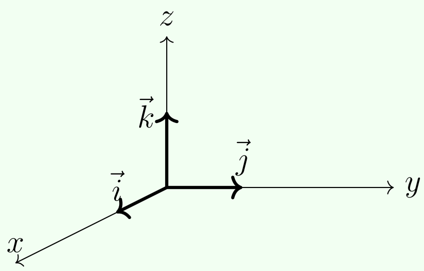


Figur 26: Plan med två ortogonala riktningar.

Exempel 5.1.1

I $\mathbb{R}^3$ är det rätt vanligt att kalla de tre koordinatenhetsvektorer för $\vec{i}, \vec{j}$ och $\vec{k}$ respektive. Detta betyder:

$$\vec{i} = (1, 0, 0) \qquad \vec{j} = (0, 1, 0) \qquad \vec{k} = (0, 0, 1).$$



Observera att de parallellogram som varje par av dessa definiera är ett kvadrat med sidlängd 1 och har därför area 1. När man då använde högerhandsreglen ser man:

$$\begin{array}{ccc} \vec{i} \times \vec{i} = \vec{0} & \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0} & \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0} \\ \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} & \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \end{array}$$

I exemplet ovan såg vi att:

$$\vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{j}) = -\vec{j}$$
$$(\vec{i} \times \vec{i}) \times \vec{j} = \vec{0}$$

Därför **viktig varning**: vi har ***inte*** en regel där säger vi kan flytta parenteser.

Formellt definiera vi inte $\vec{v} \times \vec{w}$ genom dessa geometriska egenskapar ovan, men i stället ger vi en formel och visar senare att dessa faktiskt ger denna entydiga geometriskt definierat vektor.

Definition 5.2

Givet $\vec{v}$ och $\vec{w}$ i $\mathbb{R}^3$ definierar vi deras vektorprodukt genom

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

Denna Formeln kan skrives med 2×2 determinanter:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Exempel 5.1.2

Uppgift: Hitta en vektor i $\mathbb{R}^3$ där är ortogonal till $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Lösning: Vi tar deras vektorprodukt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi kontrollera att vi har räknat korrekt och att den faktiskt är ortogonal till både:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{och} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Exempel 5.1.3

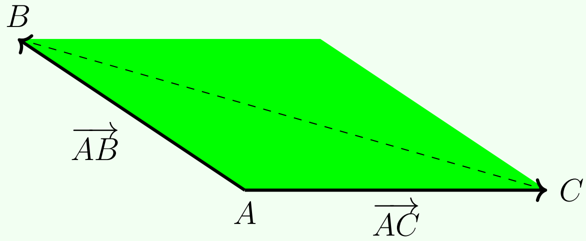
Uppgift: Beräkna arean av den triangeln där har hörnen:

$$A:(2,3,4) \qquad B:(1,-3,4) \qquad C:(4,4,3)$$

Lösning: Först beräknar vi de två vektorer:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Arean av triangeln är hälften av arean av parallellogramet:



Så enligt Sats 5.1 får vix

$$\text{Area}(\triangle ABC) = \tfrac{1}{2}\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| =$$
$$= \tfrac{1}{2}\left\| \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix} \right\| = \tfrac{1}{2}\sqrt{36+1+121} = \sqrt{\frac{79}{2}}$$

Observera att formeln för vektorprodukten i Definition 5.2 är väldigt liknande utvecklingsformlen för determinanter. Detta är inte en slump och ett sätt att komma ihåg den på är att skriva in vektorerna som de två sista kolonnorna i en 3×3 matris och skriver obekanta x, y och z i den första kolonnen:

$$\begin{pmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & w_3 & x_3 \end{pmatrix}$$

Om man då beräknar dennas determinant enligt utveckling i kolonn 1 (se Sats 4.18) så får man:

$$\begin{vmatrix} x & v_1 & w_1 \\ y & v_2 & w_2 \\ z & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} \tag{5.1}$$

Här ser vi att koordinaterna för vektorprodukten $\vec{v} \times \vec{w}$ är koefficienterna multiplicerat på x, y och z.

Exempel 5.1.4

för att hitta

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

utvecklar vi determinanten som ovan

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 3 \\ y & -2 & 2 \\ z & -3 & 1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4x - 8y + 4z$$

så vektorprodukten blir:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

5.2 Räkneregler och trippelprodukt

Ovan såg vi hur formeln för vektorprodukten relatera till determinanter. En liten omskrivning visar:

$$\vec{u} \bullet (\vec{v} \times \vec{w}) = u_1 \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

Detta kallas vektortrippelprodukten av $\vec{u}, \vec{v}$ och $\vec{w}$. Denna beror på ordningsföljden av de tre vektorerna, men enligt Sats 4.13 och Sats 4.17 ändrar det bara på tecknet att byta om på ordningsföljden av kolonner. Vi ska i Avsnit 5.3 se geometrisk tolkning av detta talet i termer av de tre vektorerna.

Sats 5.3

För $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ och $k \in \mathbb{R}$ gäller

(a) $\vec{v} \bullet (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$

(b) $\vec{w} \bullet (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$

(c) $\|\vec{v} \times \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\|^2 - (\vec{v} \bullet \vec{w})^2$

(d) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

(e) $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$

(f) $k(\vec{v} \times \vec{w}) = (k\vec{v}) \times \vec{w} = \vec{v} \times (k\vec{w})$

(g) $\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}$.

Notera att (a) och (b) precis är det geometriska villkoret (b) i Sats 5.1 ovan. Så detta har vi redan använd i flera exempel ovan.

Exempel 5.2.1

Uppgift:Beräkna en ekvation för det plan som innehåller punkterna:

$$A : (1, 1, 1) \qquad B : (1, 2, 3) \qquad C : (2, 3, 4)$$

Lösning: Vi beräknar två vektorer där är parallella med planet men inte varandra:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Nu hitter vi en normalvektor till planet genom att ta deras vektorprodukt:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-4 \\ -(0-2) \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Nu har vi alltså en normalvektor till planet och en punkt i planet $A : (1, 1, 1)$. Så vi sätter in som vanligt för att hitta konstanten:

$$c = ax_0 + by_0 + cz_0 = -1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + -1 \cdot 1 = 0.$$

Så en ekvation för planet är $-x + 2y - z = 0$.

Om man vill dubbelkolla resultatet sättar man också in B och C och ser att man får samma konstant.

Bevis för Sats 5.3 Först (a) och (b): Enligt formeln ovan är båda dessa determinanten av en matris där två kolonner är lika. En så matris har determinant 0. För att se detta inser vi att två lika kolonner kan man byta plats på utan att matrisen och därför determinanten ändrar sig, men enligt Sats 4.13.(b) bytar denna determinant tecken när man bytar. Det ända talet som uppfyller $x = -x$ är $x = 0$.

Bevis för (c): I vänsterledet kollar vi på alla termerna:

$$\begin{aligned} \|\vec{v} \times \vec{w}\|^2 &= (v_2w_3 - v_3w_2)^2 + (v_3w_1 - v_1w_3)^2 + (v_1w_2 - v_2w_1)^2 = \\ &= v_2^2w_3^2 + v_3^2w_2^2 - 2v_2v_3w_2w_3 + v_1^2w_3^2 + \\ &+ v_3^2w_1^2 - 2v_1v_3w_1w_3 + v_1^2w_2^2 + v_2^2w_1^2 - 2v_1v_2w_1w_2. \end{aligned}$$

I högerledet ingår

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\|^2 &= (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) \\ (\vec{v} \cdot \vec{w})^2 &= (v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3)^2. \end{aligned}$$

Om man gånger ut och subtrahera de två sista ser man att man får de samma termerna som i vänsterledet.

Bevis för (d): Uppgift 5.6

Bevis för (e): Determinanten i Ekvation (5.1) som kan användas för att beräkna $\vec{v} \times \vec{w}$ bytar tecken enligt sats 4.13 när man bytar om på $\vec{v}$ och $\vec{w}$.

Bevis for (f): Determinanten i förste koordinaten uppfyller:

$$k\begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} kv_2 & w_2 \\ kv_3 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_2 & kw_2 \\ v_3 & kw_3 \end{vmatrix}$$

Linkande för de andra koordinater.

Bevis för (g): Alla determinanterna är 0 eftersom de har två lika kolonner.

Exempel 5.2.2

Uppgift: Förenkla $(\vec{v} - \vec{w}) \times (\vec{v} + \vec{w})$.

Lösning (där vi indikerar vilka regler från satsen ovan vi använder):

$$\begin{aligned}(\vec{v} - \vec{w}) \times (\vec{v} + \vec{w}) &\overset{\text{d)}}{=} (\vec{v} - \vec{w}) \times \vec{v} + (\vec{v} - \vec{w}) \times \vec{w} = \\ &\overset{\text{e)}}{=} -\vec{v} \times (\vec{v} - \vec{w}) - \vec{w} \times (\vec{v} - \vec{w}) = \\ &\overset{2\cdot\text{d)}}{=} -\vec{v} \times \vec{v} - \vec{v} \times (-\vec{w}) - \vec{w} \times \vec{v} - \vec{w} \times (-\vec{w}) = \\ &\overset{2\cdot\text{f)}}{=} -\vec{v} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{w} - \vec{w} \times \vec{v} + \vec{w} \times \vec{w} = \\ &\overset{2\cdot\text{g)}}{=} \vec{v} \times \vec{w} - \vec{w} \times \vec{v} \overset{\text{e)}}{=} 2\vec{v} \times \vec{w}\end{aligned}$$

5.2.1 Bevis för Sats 5.1

I texten mellan Satsen och Exempel 5.1.1 argumenterade vi för att villkoren entydigt bestämmer en vektor. Det är därför tillräckligt att visa att vektorn $\vec{v} \times \vec{w}$ som definierat i Definition 5.2 uppfyller de tre geometriska villkoren.

Enligt del (c) i satsen ovan är

$$\begin{aligned}\|\vec{v} \times \vec{w}\|^2 &= \|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\|^2 - (\vec{v} \cdot \vec{w})^2 = \\ &= \|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\|^2(1 - cos(\theta)^2) = \|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\|^2(\sin(\theta)^2\end{aligned}$$

vilket visar (a).

(b) i Sats 5.1 följer av (a) och (b) i Sats 5.3 ovan.

Extra för de intresserade: (c) i Sats 5.1: Då vektorprodukten blir $\vec{0}$ när vektorerna är parallella behöver vi bara bry oss om fallet där $\vec{v}$ och $\vec{w}$ inte är parallella. I det fallet finns ett entydigt plan π genom origo parallell med båda vektorerna. Enligt det vi redan har visad är $\vec{v} \times \vec{w}$ en normalvektor till π. Åtminstone en av de 3 koordinataxlar är inte parallell med planet vi antar att det är z-axeln (argumentet i de andra 2 fall är liknande).

Vi har alltså att $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pekar på den ena sida och $-\vec{k}$ på den andra sida av π, men kanske inte ortogonalt. För att avgöra vilken sida av planet $\vec{v} \times \vec{w}$ pekar kan vi se på tecknet av skalärprodukt mellan $\vec{k}$ och $\vec{v} \times \vec{w}$. Detta visar att tredje koordinaten

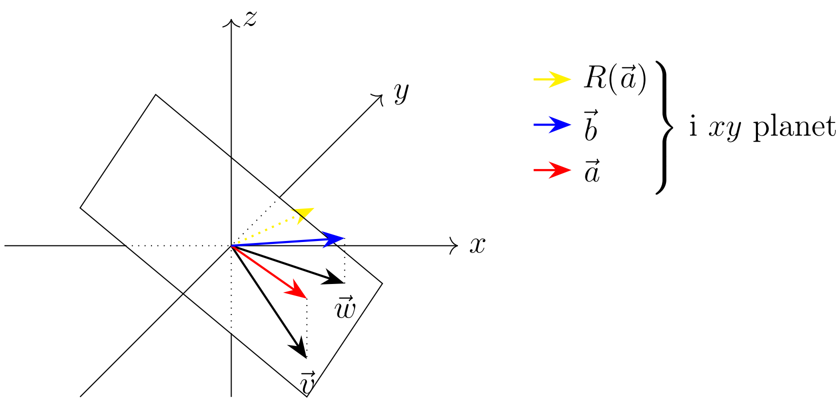
$$\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}$$

av $\vec{v} \times \vec{w}$ avgör detta. Alltså om detta talet är positivt pekar $\vec{v} \times \vec{w}$ på samma sida av π som $\vec{k}$ och annars pekar den på den andra sidan.

För att avgöra om $\vec{v}, \vec{w}$ och $\vec{v} \times \vec{w}$ (i den ordningsföljd) uppfyller högerhånds reglen ser vi på vektorerna

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

Dessa är $\vec{v}$ och $\vec{w}$s ortogonala projektion i xy-planet. I följande figur



ser vi att $\vec{v}, \vec{w}$ och $\vec{z}$ (i den ordning) uppfyller högerhands regeln om och endast om $\vec{a}, \vec{b}$ och $\vec{z}$ (i den ordning) uppfyller högerhandsregeln.

För att avgöra detta för $\vec{a}$, $\vec{b}$ och $\vec{z}$ ser vi på rotationen med $\frac{\pi}{2}$ radianer av $\vec{a}$ i xy-planet (gul i figuren).

$$R(\vec{a}) = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

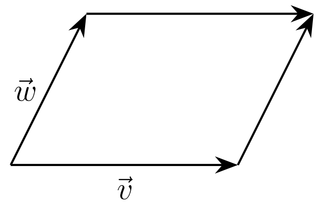
och inser att $\vec{a}$, $\vec{b}$ och $\vec{z}$ (i den ordning) uppfyller högerregeln om och endast om skalär produkten av $\vec{b}$ och $R(\vec{a})$ är positiv (alltså igen om dessa pekar på samma sida om $\vec{a}$ i xy-planet):

$$\vec{b} \bullet R(\vec{a}) = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} = v_1 w_2 - v_2 w_1 = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}$$

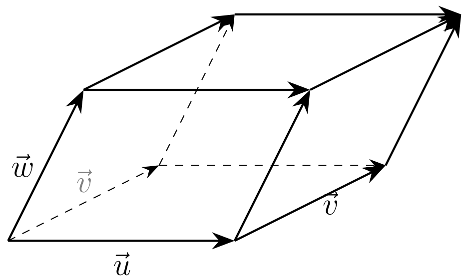
Så det tecken som avgör om $\vec{v}$, $\vec{w}$ och $\vec{z}$ uppfyller högerhandsregeln är det samma tecken som bestämmer om $\vec{v} \times \vec{w}$ pekar på samma sida av planet π som $\vec{z}$.

5.3 Geometrisk betydelse av determinant

Idéen om en parallellogram definierad genom $\vec{v}$ och $\vec{w}$:



har en tre-dimensionell motsvarighet: ***Parallellepipeden*** med sidorna $\vec{u}$, $\vec{v}$ och $\vec{w}$ är:



Sats 5.4

För två vektorer $\vec{u}$ och $\vec{v}$ i $\mathbb{R}^2$ är arean av den parallellogram de definierar absolutbeloppet av determinanten.

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$

För tre vektorer $\vec{u}$, $\vec{v}$ och $\vec{w}$ i $\mathbb{R}^2$ är volymen av den parallellepiped de definierar absolutbeloppet av determinanten.

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

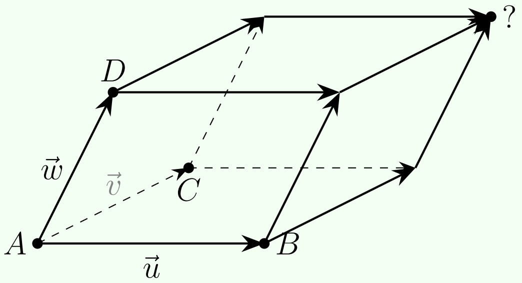
Exempel 5.3.1

Uppgift: Hitta punkten motstående A i den parallellepiped som har 4 av sina hörn i

$$A = (1,0,0), B = (0,1,0), C = (0,3,1), D = (3,-2,-1)$$

så att A har gemensam sida med varje punkt B, C och D. Hitta även volymen av denna parallellepiped.

Lösning: Betrakta figuren (som inte är gjord enligt koordinaterna, men en skissa av den generella situationen):



Vi beräknar de indikerade vektorer:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Punkten motsatt A har då koordinaterna:

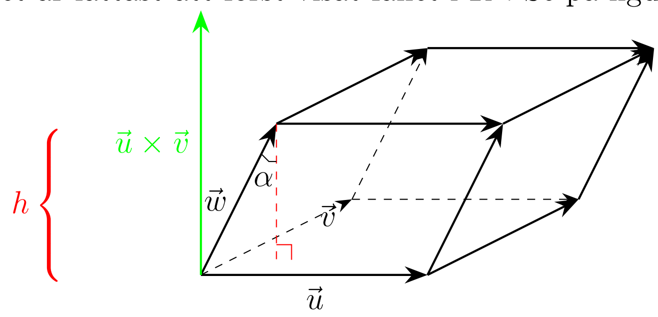
$$\overrightarrow{OA} + \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Arean blir enligt satsen ovan absolutbeloppet av

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 1 \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} =^* -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2.$$

Vid $*$ utvecklade vi efter kolonn 1.

Bevis: Det är lättast att först visat fallet i $\mathbb{R}^3$. Se på figuren:



Anta att det är som i figuren att $\vec{w}$ pekar på samma siden av botten som $\vec{u} \times \vec{v}$. Vi ser då att

$$h = |\cos(\alpha)\|\vec{w}\||$$

I Sats 5.1 såg vi att arean av basen (en parallellogram) är

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\|$$

och volymen är då (upp till tecken - som försvinnar om man tar absolut belopp):

$$h\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \pm\cos(\alpha)\|\vec{w}\|\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \pm\vec{w} \bullet (\vec{u} \times \vec{v}) = \pm \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

Om $\vec{w}$ pekar på den andra sidan då ändras enbart tecknet.

I fallet med två vektorer i $\mathbb{R}^2$ kan vi lägga till en extra koordinat 0 och se på den parallellepiped som är definierat av vektorerna

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{och} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi vill hitta arean av basen i xy-planet. Detta är samma som volymen av parallellepipeden eftersom höjden är 1. Arean blir alltså

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 0 \\ u_2 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$

Exempel 5.3.2

Uppgift: Avgör om det finns ett plan som är parallellt med alla vektorna $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$.

Lösning: Om parallellepipeden med dessa sidor har volym 0 så är den plat och vektorerna är parallella med något plan. Om volymen är större än 0 kan vektorerna inte vara parallella mot ett och samma plan:

$$\text{Volym} = \begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}\begin{matrix} \\ 1 \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix}2 & 0 & 4\\ 1 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix} = 0.$$

Alltså finns det ett plan som är parallellt med alla vektorerna.

Uppgifter till Kapitel 5

Avsnitt 5.1

5.1) Hitta en nollskild vektor som är ortogonal mot $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Länk till svar

5.2) Hitta en ekvation för planet som går genom origo och är parallell med vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (samma som ovan).

Länk till svar

5.3) Hitta arean av den parallellogrammen som definieras av $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (samma som ovan).

Länk till svar

5.4) Hitta arean av triangeln med hörn

$$A = (3, -2, 1), \quad B = (0, 7, 2) \quad \text{och} \quad C = (9, 1, 2).$$

Länk till svar

5.5) För vilka värden på $a \in \mathbb{R}$ är vektorerna

$$\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix}$$

parallella? (Använd vektorprodukt)

Länk till svar

Avsnitt 5.2

5.6) Bevis (d) i Sats 5.3

Länk till svar

5.7) Förenkla $(\vec{v}+\vec{w})\times(\vec{v}+\vec{w})$.

Länk till svar

5.8) Anta att $\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^3$ uppfyller att $\|\vec{v}\times\vec{w}\|=2$ och $\|\vec{v}\|=\|\vec{w}\|=3$. Anta också att vinkeln mellan $\vec{v}$ och $\vec{w}$ är trubbig. Hitta denna vinkel.

Länk till svar

5.9) Anta att $\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^3$ uppfyller att $\|\vec{v}\times\vec{w}\|=4$ och $\vec{v}\bullet\vec{w}=3$. Hitta vinkeln mellan $\vec{v}$ och $\vec{w}$.

Länk till svar

5.10) Anta att $\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^3$ uppfyller att $\|\vec{v}\|=2$, $\vec{v}\bullet\vec{w}=4$ och $\|\vec{v}+\vec{w}\|=5$. Hitta $\|\vec{v}\times\vec{w}\|$.

Länk till svar

5.11) Förenkla $(a\vec{v}+b\vec{w})\times(c\vec{v}+d\vec{w})$.

Länk till svar

Avsnitt 5.3

5.12) Hitta volymen av parallellepipden med sidorna

$$\vec{u}=\begin{pmatrix}7\\2\\1\end{pmatrix},\quad \vec{v}=\begin{pmatrix}-3\\-2\\9\end{pmatrix}\quad \vec{w}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Länk till svar

5.13) Avgör för vilka $a\in\mathbb{R}$ de tre vektorerna

$$\vec{u}=\begin{pmatrix}a\\2\\1\end{pmatrix},\quad \vec{v}=\begin{pmatrix}-3\\-2\\9\end{pmatrix}\quad \vec{w}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}.$$

är parallell med ett gemensamt plan.

Länk till svar

6 Linjära avbildningar och $\mathbb{R}^n$

I detta kapitel ska vi lära om generellt euklidiska rummet $\mathbb{R}^n$. Vi ska också lära vad en linjär avbildning

$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

är - och lite om varför de är viktiga. Vi ska också se många konkreta exempel på dessa. Vi ska även lära vad en matrisavbildning är, men då visa att det faktiskt är det samma som en linjär avbildning.

Det kan verka lite konstigt att man införar ett nytt namn för något som visar sig vara samma sak, men i praktiken (och i Linjär algebra II) möter man inte bara vektorrummet $\mathbb{R}^n$, och för andra vektorrum visar det sig att dessa begrepp inte riktigt är helt samma sak (mera om detta i linjär algebra II). Detta innebär att det är viktigt att förstå båda sätt att tänka på och varför de råkar vara samma sak i fallet $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Anmärkning 6.0.1

I detta kapitel är det alltid bra att tänka på vektorer i $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$ som exempel och analogi till hur grejarna fungerar i högre dimension. Faktiskt, kan det vara riktigt bra att i bland tänka följande igenom

(a) Hur var det för $\mathbb{R}$ och $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$?

(b) Vad är egentligen skillnaden mellan $\mathbb{R}$ och $\mathbb{R}^2$?

(c) Vad är egentligen skillnaden mellan $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$?

(d) Kan jag använda detta till att förstå skillnaden mellan $\mathbb{R}^3$ och $\mathbb{R}^4$ och därigenom förstå $\mathbb{R}^4$ bättre?

6.1 Det n dimensionella euklidiska rummet

Som i dimension 2 och 3 så kommer vi skriva punkter i det ***euklidiska*** rummet $\mathbb{R}^n$ på formen

$$(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Som för matriser vet vi inte alltid precis vad n är och måste därför skriva ”...”.

Vektorer i $\mathbb{R}^n$ skriver vi (som tidigare för $n = 2$ och $n = 3$) som kolonmatriser

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Alltså en $1 \times n$ matris.

Addition och omskalning är som för matriser (och vektorer i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$) och är därför

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad k \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kv_1 \\ kv_2 \\ \vdots \\ kv_n \end{pmatrix}.$$

Vi har alltså därför samma räkneregler som tidigare (se Sats 4.1 och Sats 4.2)

Härtill är allt som för matriser, men nästa delen är inte det. Vi definierar nu ***skalärprodukten*** av två vektorer genom

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n = \sum_{j=1}^{n} v_j w_j.$$

Vi definierar också ***längden*** (också kallat norm) genom

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \bullet \vec{v}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} v_j^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}.$$

Vi har samma räkneregler som tidigare.

Sats 6.1: Räkneregel för skalärprodukten

För $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vektorer i $\mathbb{R}^3$ och $k \in \mathbb{R}$ gäller

(a) $\vec{v} \bullet \vec{v} = \|v\|^2$.

(b) $\vec{v} \bullet \vec{w} = \vec{w} \bullet \vec{v}$.

(c) $\vec{v} \bullet (\vec{u} + \vec{w}) = \vec{v} \bullet \vec{u} + \vec{v} \bullet \vec{w}$.

(d) $(k\vec{v}) \bullet \vec{w} = \vec{v} \bullet (k\vec{w}) = k(\vec{v} \bullet \vec{w})$.

(e) $\|k\vec{v}\| = |k|\|\vec{v}\|$.

(f) Om $\|\vec{v}\| = 0$, så är $\vec{v} = \vec{0}$.

Bevis: Precis som i $\mathbb{R}^3$ men med flera koordinater

Som i 2 och 3 dimensioner kan vi givet punkter $P = (p_1, \ldots, p_n)$ och $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ definiera vektorn där pekar från P till Q som

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix}.$$

Vi kan därför igen definiera avstånden från P till Q som:

$$d(Q, P) = \|\overrightarrow{PQ}\|.$$

Exempel 6.1.1

Uppgift: Hitta avståndet ifrån $Q = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^8$ till origo i $\mathbb{R}^8$.

Lösning: Vi tar längden av vektorn som pekar ifrån origo $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ till punkten:

$$d(O, Q) = \|\overrightarrow{OQ}\| = \left\| \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ 1-0 \\ 1-0 \\ 1-0 \\ 1-0 \\ 1-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2+1^2+1^2+1^2+1^2} = \sqrt{8}.$$

Skalärprodukten och längden uppfyller samma räkneregler som tidigare, men då kunna vi geometriskt se/tolka att

$$\vec{v} \bullet \vec{w} = \|\vec{v}\|\|\vec{w}\| \cos(\theta)$$

där θ är vinklen mellan vektorerna. Det är svårt att argumentera geometriskt i 4 dimensioner och högre. Så som i $\mathbb{R}^3$ använder vi igen Cauchy-Schwarz.

Sats 6.2: Cauchy-Schwarz olikheten

För $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ gäller

$$|\vec{v} \bullet \vec{w}| \leq \|\vec{v}\|\|\vec{w}\|$$

Igen vill vi inte bevisa denna (blir gjort i linjär algebra II). Vi ser dock att olikheten visar att

$$\frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|} \in [-1, 1]$$

och att vi därför kan *definiera* ***vinklen*** θ mellan vektorerna $\vec{v}$ och $\vec{w}$ genom

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|}\right).$$

Detta beräknar den geometriska vinklen i 2 dimensioner, men i högre dimensioner är detta *definitionen* av vinklen.

Exempel 6.1.2

Uppgift hitta vinkeln mellan

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i $\mathbb{R}^8$.

Lösning:

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|} = \frac{1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 2\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0}{\sqrt{1^2+1^2+2^2+1^2+1^2+1^2}\sqrt{1^2+0^2+0^2+0^2+0^2+0^2}} = \frac{1}{3}$$

Så vinklen är $\theta = cos^{-1}(1/3) \approx 1.23 \qquad (\approx 70,5°)$.

Observera: två vektorer är igen ortogonala (har rättvinkel mellan dem) precis när deras skalärprodukt är 0. Med denna definition fungerar allt som tidigare (samma formler och räkneregler), bortom att det är svårt att föreställa sig en vinkel i 4 eller flera dimensioner.

Igen har vi triangelolikheten.

Sats 6.3: Triangelolikheten

Om $\vec{v}$ och $\vec{w}$ är vektorer i $\mathbb{R}^n$ då gäller

$$\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$$

Eller för punkter och avstånd:

$$d(Q, P) \leq d(Q, A) + d(A, P).$$

(den direkta vägen är kortare än omvägen)

Bevis: Samma bevis som Sats 2.7

Man kan som tidigare också ***normera*** en vektor:

$$\hat{v} = \tfrac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$$

och få en vektor i samma riktning som $\vec{v}$ men med längd (norm) 1.

Exempel 6.1.3

Uppgift: Normera vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

Lösning:

$$\hat{v} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Vi definierar igen ***parallella*** vektorer på samma sät. Alltså: två vektorer är parallella om den ena är en skalning av den andra.

I $\mathbb{R}^n$ har vi n axlar, och enhets vektorerna som pekar längs dessa kallar vi

$$\vec{e}_i = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

där 1 är på $i$te platsen. Dessa kallas standard enhetsvektorerna i $\mathbb{R}^n$.

Exempel 6.1.4

Standard enhetsvektorerna i $\mathbb{R}^5$ är

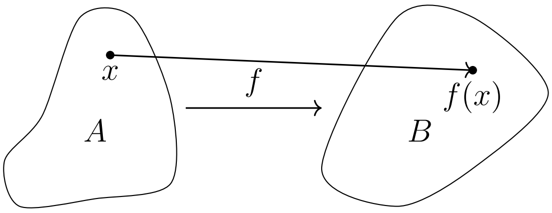
$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{e}_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \text{ och } \vec{e}_5 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

6.2 Avbildningar och funktioner

Vi börjar med en lite generell diskussion om vad avbildningar är generellt. Låt A och B vara mängder. En funktion eller avbildning f från A till B är en tillordning till varje element $x \in A$ ett element $f(x) \in B$. Vi skriver

$$f : A \to B.$$

Visuellt kan man tänka sig:



mängden A kallas definitionsmängden (domain), och B målmängden (codomain). Två funktioner $f : A \to B$ och $g : A \to B$ är lika omm $f(x) = g(x)$ för alla $x \in A$. Vi skriver $f = g$ för detta. Detta är inte något nytt om $A = \mathbb{R}$ och $B = \mathbb{R}$.

Vi ska i denna kurs enbart använda $A = \mathbb{R}^n$ och $B = \mathbb{R}^m$, och eftersom addition och skalning är viktigt för begreppet linjärt kommer vi använde vektor (och inte punkt) notation.

Anmärkning 6.2.1

I kursen flervariabel analys kommer ni få se vad det betyder att en funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är kontinuerlig. Det är rätt så vanligt att använda ordet ***avbildning*** för en kontinuerlig funktion. Eftersom den typ av funktioner vi ska kolla på också råkar vara kontinuerliga kallas de oftast avbildningar. Vi kommer använda detta.

Exempel 6.2.2

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ där $f(x) = \sin(x)$. Borde vara välkänd.

Exempel 6.2.3

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ där $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^5$. Här tar f alltså 3 tal och ger 1 nytt tal.

Exempel 6.2.4

$\|-\| : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ där $\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Detta är samma definitionsmängd och målmängd som exemplet ovan, men avbildningen är ju en annan och ger som oftast ett annat tal.

För $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kommer vi använda notationen:

$$\vec{y} = T(\vec{x}).$$

Här är då $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ och $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ och vi säger att $\vec{y}$ år ***bilden*** av $\vec{x}$ under T. Vi skriver också

$$\vec{y} = T(\vec{x}) = T\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ \vdots \\ T_n\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

där varje

$$T_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

beskriver den $i$te koordinat i målmängden.

Exempel 6.2.5

För $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definierad som

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ T_2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

är $y_1 = T_1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2$ och $y_2 = T_2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 - x_2$ och

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = T(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

.

6.3 Matrisavbildningar

Låt A vara en $m \times n$ matris. Den kan man gånga på en $n \times 1$ kolonnvektorer och få en $m \times 1$ kolonnvektor:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Detta definierar en avbildning från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$, som vi skrivar

$$T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m.$$

Vi kan skriva detta kort som $T_A(\vec{x}) = A\vec{x}$.

Definition 6.4

en avbildning $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ kallas en ***matrisavbildning*** om den är lik T_A för någon matris $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

Exempel 6.3.1

Uppgift: Visa att $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ där

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2 + x_4, -x_1 + 2x_3 + 5x_4, x_1 + x_2 - x_3 - x_4)$$

är en matrisavbildning.

Lösning: vi ser att

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_4 \\ -x_1 + 2x_3 + 5x_4 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Så $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ för

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

och T är därför en matrisavbildning.

För $c \in \mathbb{R}$ kan vi definiera $S_c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ genom

$$S_c(\vec{x}) = T_{cI}(\vec{x}) = \underbrace{(cI)\vec{x}} = c\vec{x}.$$

Detta är alltså den avbildning som skalar om vektorerna i $\mathbb{R}^n$ med skalären c. Då vi skrev det som en matrisen cI gånger $\vec{x}$ ser vi att detta är en matrisavbildning. Speciellt för $c = 1$ har vi

$$S_1(\vec{x}) = I\vec{x} = \vec{x}$$

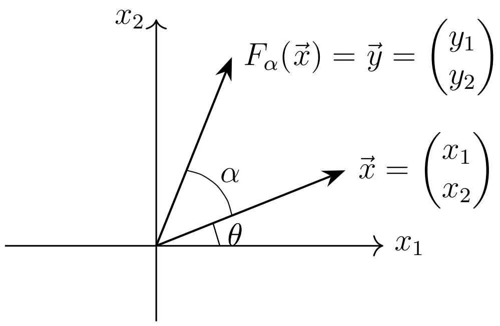
är identitets avbildningen. Det vill säga den avbildning där tillordnar $\vec{x}$ till $\vec{x}$.

Generellt om $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ skriver vi

$$A = [T] = T\text{:s standard matris}$$

Med denna notation har vi alltså $[T_A] = A$.

Låt $F_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara avbildningen där vrider moturs kring origo med vinkeln α.



Om vi skriver $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$ ser vi att:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta+\alpha) \\ r\sin(\theta+\alpha) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\alpha - r\sin\theta\sin\alpha \\ r\cos\theta\sin\alpha + r\sin\theta\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cdot x_1 - \sin\alpha\cdot x_2 \\ \sin\alpha\cdot x_1 + \cos\alpha\cdot x_2 \end{pmatrix}$$

Detta använde additionsformlerna för cosinus och sinus. Detta visar att:

$$F_\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cdot x_1 - \sin\alpha\cdot x_2 \\ \sin\alpha\cdot x_1 + \cos\alpha\cdot x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Alltså är F_α en matrisavbildning och standardmatrisen är

$$[F_\alpha] = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

En viktig fråga är nu: Hur hittar man standardmatris $[T]$ om man redan vet att T är en matrisavbildning?

För att förstå svaret måste vi först kolla lite på matris multiplikationen. Om $A = (a_{ij})_{m\times n}$ är en matris då är

$$A\vec{e}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \qquad \text{den } j\text{:te kolonnen i } A \tag{6.2}$$

Exempel 6.3.2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \text{här är } \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

Detta betyder att om vi ville hitta den j:te kolonnen i $[T]$ så blir denna

$$\text{den } j\text{:te kolonnen i } [T] = [T]\vec{e}_j = T(\vec{e}_j).$$

Metod 6.5

För $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ en matrisavbildning är standardmatrisen

$$[T] = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ T(\vec{e}_1) & T(\vec{e}_2) & \cdots & T(\vec{e}_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

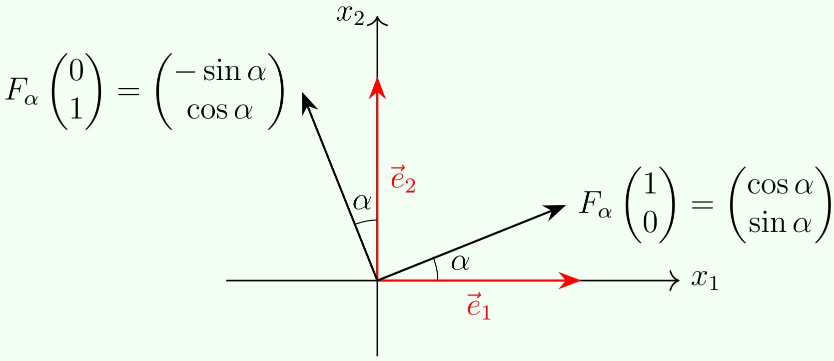
Följande är inte bara ett exempel på denna formel, men en bra tumregel för hur man kan använda denna metod till att komma ihåg formeln i Ekvation (6.1) som ju var rätt lång att härleda.

Exempel 6.3.3

Vi kommer ihåg att $F_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rotation med vinkel α (som ovan) är en matrisavbildning. Därför kan vi hitta standard matrisen genom

$$[F_\alpha] = \begin{pmatrix} F_\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & F_\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Det siste ekvationstecken är relativt lätt att inse om man ritar in vektorerna i planet (och kommer ihåg vad cosinus och sinus betyder):

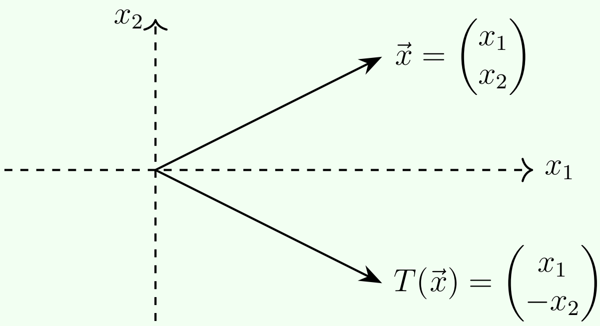


Ännu mera konkret ser vi att rotation med vinkel $\frac{\pi}{2}$ som vi skrev $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ och definierade i Ekvation (1.8) är matrisavbildningen

$$R \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}.$$

Exempel 6.3.4

Låt $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara spegling i x_1-axeln. Detta ser ut som:



Så vi ser att

$$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\-x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

Så T är en matrisavbildning med

$$[T]=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

Exempel 6.3.5

Uppgift: Hitta standardmatrisen $[T]$ för matrisavbildningen $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ som uppfyller

$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\qquad\text{och}\qquad T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

Lösning: Vi sätter direkt in i formeln i Metod 6.5 ovan:

$$[T]=\left(T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\;\;T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&-3\\2&-2\\3&-1\end{pmatrix}.$$

6.4 Linjära avbildningar

I bland kan det vara lite svårt att känna igen att någon avbildning är en matrisavbildning. Det finns dock två egenskapar som visar sig vara ekvivalent med att en avbildning är en matrisavbildning.

Definition 6.6

Definition: En funktion (eller avbildning) $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ kallas ***linjär*** om den uppfyller: För alla $\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^n$ och $k\in\mathbb{R}$ gäller

(i) $T(\vec{v}+\vec{w})=T(\vec{v})+T(\vec{w})$

(ii) $T(k\vec{v})=kT(\vec{v})$

Det följer ifrån Sats 4.1 och Sats 4.2 att matrisavbildningar är linjära:

$$\begin{aligned} T_A(\vec{v} + \vec{w}) &= A(\vec{v} + \vec{w}) = A\vec{v} + a\vec{w} = T_A(\vec{v}) + T_A(\vec{w}) \\ T_A(k\vec{v}) &= Ak\vec{v} = kA\vec{v} = kT_A\vec{v}. \end{aligned}$$

Här är notation kanske lite förvirrande. Här betyder $T_A(-)$ att man ska ta bilden av någon vektor under avbildningen och $A(-)$ betyder multiplicera det som står i parentesen med matrisen A. I detta fall är definitionen av matrisavbildningen att detta faktiskt är samma sak.

I Uppgift 6.10 ska ni visa att $T(\vec{0}) = \vec{0}$ för en godtycklig linjär avbildning.

Exempel 6.4.1

Givet en vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ är avbildningar $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definierat genom

$$B(\vec{v}) = \vec{a} \bullet \vec{v}$$

linjär. Detta följer av räknereglerna för skalärprodukt

$$\begin{aligned} \vec{a} \bullet (k\vec{v}) &= k(\vec{a} \bullet \vec{v}) \\ \vec{a} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{a} \bullet \vec{v} + \vec{a} \bullet \vec{w}. \end{aligned}$$

Vi ser även att detta är en matrisavbildning då vi kan skriva den på matrisform genom:

$$B(\vec{v}) = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

där resultatet är en 1×1 matris (ett vanligt tal).

Exempel 6.4.2

Givet en vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ är avbildningar $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definierat genom

$$V(\vec{x}) = \vec{a} \times \vec{x}$$

linjär. Detta följer av räknereglerna i för vektorprodukt

$$\vec{a} \times (k\vec{v}) = k(\vec{a} \times \vec{v})$$

$$\vec{a} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{a} \times \vec{v} + \vec{a} \times \vec{w}.$$

Vi ser även att detta är en matrisavbildning eftersom

$$V(\vec{v}) = \begin{pmatrix} a_2v_3 - a_3v_2 \\ a_3v_1 - a_1v_3 \\ a_1v_2 - a_2v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Sats 6.7

Linjära avbildningar och matrisavbildningar $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är samma sak.

Bevis: Vi har redan argumenterat ovan att matrisavbildningar är linjära. Det återstår att visa att en godtycklig linjär avbildning $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är en matrisavbildning.

Så anta T är linjär (uppfyller (i) och (ii) i Definition 6.6 ovan). Definiera

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ T(\vec{e}_1) & T(\vec{e}_2) & \cdots & T(\vec{e}_k) \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

Notera att detta är formeln för standardmatrisen om vi visste att T var en matrisavbildning så om satsen är korrekt (det är den) så måste detta vara den korrekta matris.

Enligt Ekvation (6.2) uppfyller denna matris

$$T(\vec{e}_j) = A\vec{e}_j.$$

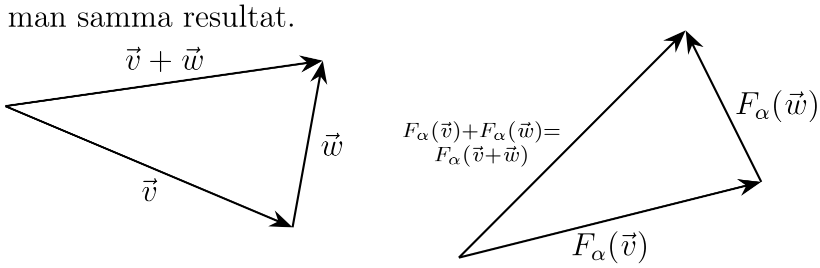
Men vi måste ju kolla att detta gäller för *alla* $\vec{x} \in \mathbb{R}^k$ inte bara de n standard enhetsvektorna. Så det gör vi med följande trick:

$$\begin{aligned} T(\vec{x}) &= T(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_k\vec{e}_k) = && \text{(använd (i) många gånger)} \\ &= T(x_1\vec{e}_1) + T(x_2\vec{e}_2) + \cdots + T(x_k\vec{e}_k) = && \text{(använd (ii) många gånger)} \\ &= x_1T(\vec{e}_1) + x_2T(\vec{e}_2) + \cdots + x_kT(\vec{e}_k) = && \text{(använd formeln ovan m.g.)} \\ &= x_1A\vec{e}_1 + x_2A\vec{e}_2 + \cdots + x_kA\vec{e}_k = && \begin{pmatrix}\text{använda räkneregler för} \\ \text{matrisen många gånger}\end{pmatrix} \\ &= A(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_k\vec{e}_k) = A\vec{x}. \end{aligned}$$

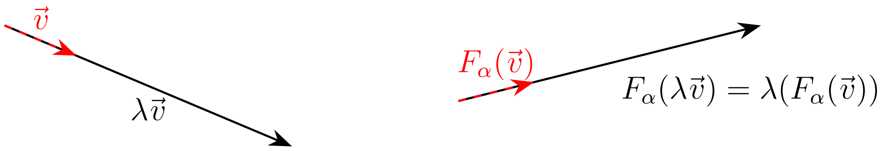
Så T är en matrisavbildning med standardmatris $[T] = A$.

Observera att denna sats förklarar på ett geometriskt sätt varför vridningen F_α ovan är en matrisavbildning:

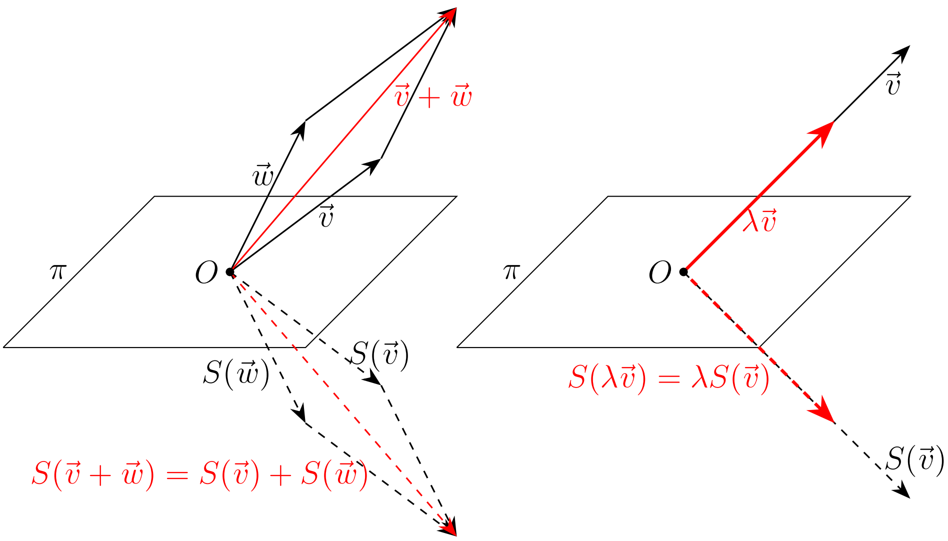
(i) motsvarar för F_α: om man addera vektorer förr eller efter man vrider dem får man samma resultat.



(ii) motsvarar för F_α: om man skalar om en vektor förr eller efter man vrider den får man samma resultat.



Låt π vara ett plan i rymden genom origo. Låt $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara avbildningen där speglar vektorer i π. Följande två figurer illustrerar varför denna är en linjär avbildning (och därför en matrisavbildning).



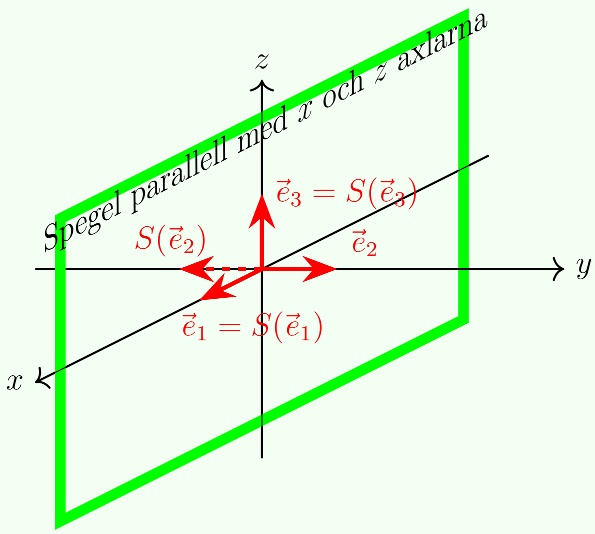
Figur 27: Spegling är linjär

Vi återkommer senare till en formel för att beräkna standardmatriser för dessa, men i följande exempel är det inte så svårt eftersom planet är xz-planet.

Exempel 6.4.3: Spegling i xz-planet

Låt $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara Spegling i xz-planet. På följande figur ser vi vad som händer med standardbas vektorerna

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Vektorerna $\vec{e}_1$ och $\vec{e}_3$ är i spegeln så när vi speglar dem händer inte något. Så

$$S\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad S\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vektorn $\vec{e}_2$ därimot är ortogonal med spegeln så vi ser för den att:

$$S\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sätter vi dessa in som kolonner (Metod 6.5) fås:

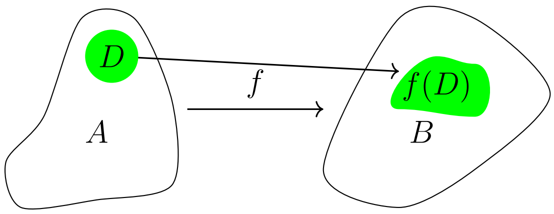
$$[S] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.5 Bilden av en mängd

För en funktion $f : A \to B$ och en delmängd $D \subseteq A$ definierar man bilden av D under f som delmängden

$$f(D) = \{b \in B \mid \text{så att det finns } a \in D \text{ så att } f(a) = b\} \subseteq B.$$

Det vill säga mängden av alla de element i B som träffas av något från D. Detta är illustrerat i Figur 6.5.



Bilden av en punkt (eller vektor) är bara funktionen tagit på denna punkt (eller vektor).

Exempel 6.5.1

Bilden av 3 under $f(x) = x^2$ är $f(3) = 9$.

Det är mera intressant begrepp när D består av flera element än bara ett.

Exempel 6.5.2

Uppgift: Hitta bilden av linjen $(x, y) = (1+t, 1-t), t \in \mathbb{R}$ under den linjära avbildning $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ givet av

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}.$$

Lösning: Vi tar funktionen på punkterna (ortsvektorerna) på linjen:

$$T\begin{pmatrix}1+t\\1-t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(1+t)+(1-t)\\1+t)-(1-t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2t\end{pmatrix}.$$

Så svaret blir alltså den nya linjen $(x, y) = (2, 2t), t \in \mathbb{R}$.

I bland är bilden mycket mindra än den ursprungliga mängd

Exempel 6.5.3

Uppgift: Hitta bilden av linjen $(x, y) = (1+t, 1-t), t \in \mathbb{R}$ under den linjära avbildning $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ givet av

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y\\x+y\end{pmatrix}.$$

Lösning: Vi tar funktionen på punkterna (ortsvektorerna) på linjen:

$$T\begin{pmatrix}1+t\\1-t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(1+t)+(1-t)\\1+t)+(1-t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}.$$

Så svaret blir alltså punkten $(2, 2)$ (eller vektorn $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ om man fördrar att skriva allt med vektorer).

6.6 Geometriska linjära avbildningar

6.6.1 Ortogonal projektion på linje

Vi såg i tidigare kapitel att den ortogonala projektionen av en vector $\vec{w}$ på en annan vektor $\vec{v}$ kan beräknas genom

$$\text{proj}_{\vec{v}}\, \vec{w} = \frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}.$$

Detta var också en formel för närmaste punkt på en linje när linjen går genom origo.

Denna formel fungerar också i högra dimension med $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ till att skriva $\vec{w}$ som

$$\vec{w} = \underbrace{\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{w}}_{\text{parallell med } \vec{v}} + \underbrace{(\vec{w} - \operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{w})}_{\text{ortogonal mot } \vec{v}}. \tag{6.3}$$

det kan visas precis som i beviset för Sats 1.13 som inte använda antalet koordinater alls. Det som är mest relevant i detta avsnitt är dock att denna avbildning är linjär.

Sats 6.8

Avbildningen

$$\operatorname{proj}_{\vec{v}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

är linjär.

Bevis: Först visar vi villkor (i) från Definition 6.6. I alla steg använder vi räkneregler för skalärprodukt och vektorräkning.

$$\begin{aligned}
\operatorname{proj}_{\vec{v}}(\vec{u} + \vec{w}) &= \frac{\vec{v} \bullet (\vec{u} + \vec{w})}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} = \\
&= \frac{\vec{v} \bullet \vec{u} + \vec{v} \bullet \vec{w}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} = \\
&= \left(\frac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{\|\vec{v}\|^2} + \frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\|\vec{v}\|^2}\right)\vec{v} = \\
&= \frac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} + \frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} = \operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u} + \operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{w}
\end{aligned}$$

Därefter (ii):

$$\operatorname{proj}_{\vec{v}}(k\vec{w}) = \frac{\vec{v} \bullet (k\vec{w})}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} = k\frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} = k \operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{w}.$$

Denna sats och Sats 6.7 visar att vi kan hitta en standardmatris som beskriver ortogonal projektion. Så för $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ beskriver vi nu en generell formel för denna matris. Vi såg i i Exempel 6.4.1 att det att ta skalär produkt är linjärt. Följande är lite mera generellt:

$$\text{proj}_{\vec{v}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v} = \frac{v_1x + v_2y + v_3z}{\|\vec{v}\|^2} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{\|\vec{v}\|^2} \begin{pmatrix} v_1^2x + v_1v_2y + v_1v_3z \\ v_1v_2x + v_2^2y + v_2v_3z \\ v_1v_3x + v_2v_3y + v_3^2z \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{\|\vec{v}\|^2} \begin{pmatrix} v_1^2 & v_1v_2 & v_1v_3 \\ v_1v_2 & v_2^2 & v_2v_3 \\ v_1v_3 & v_2v_3 & v_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Så standard matrisen är:

$$[\text{proj}_{\vec{v}}] = \frac{1}{\|\vec{v}\|^2} \begin{pmatrix} v_1^2 & v_1v_2 & v_1v_3 \\ v_1v_2 & v_2^2 & v_2v_3 \\ v_1v_3 & v_2v_3 & v_3^2 \end{pmatrix} \tag{6.4}$$

Liknande beräkning visar för $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ att ortogonal projektion på linjen parallell med $\vec{v}$ kan skrivas

$$[\text{proj}_{\vec{v}}] = \frac{1}{\|\vec{v}\|^2} \begin{pmatrix} v_1^2 & v_1v_2 \\ v_1v_2 & v_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Man behöver inte komma i håg dessa formler för $[\text{proj}_{\vec{v}}]$, man kan göra beräkningarna ovan när man löser uppgifter.

Exempel 6.6.1

Uppgift: Hitta standardmatrisen för den ortogonala projektion $\text{proj}_{\vec{v}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ på linjen parallell med $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Lösning: Vi sätter in i formeln för projektionen:

$$\text{proj}_{\vec{v}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v} = \frac{1x - 2y + 3z}{1^2 + (-2)^2 + 3^2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{14}\begin{pmatrix} x-2y+3z \\ -2x+4y-6z \\ 3x-6y+9z \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

och ser därför att standardmatrisen är

$$[\mathrm{proj}_{\vec{v}}] = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

6.6.2 Ortogonal projektion på plan

Som vi såg i Ekvation (6.3) kunna vi skriva varje vektor som en summa av en vektor parallell med $\vec{v}$ och en vector ortogonal mot $\vec{v}$. Det sista betyder dock att om $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ och π är planet genom origo som är ortogonal mot $\vec{v}$ (har ekvation $v_1x + v_2y + v_3z = 0$) då kommer den andra termen i ekvationen

$$P(\vec{w}) = \vec{w} - \mathrm{proj}_{\vec{v}}\, \vec{w}$$

alltså att vara parallell med detta plan π. Denna vektorn kallar vi ***den ortogonala projektionen på planet*** π. Denna är också en matrisavbildning vilket lätt ses genom att använda att vi förra avsnitt visade detta för $\mathrm{proj}_{\vec{v}}$:

$$P(\vec{v}) = \vec{w} - \mathrm{proj}_{\vec{v}}\, \vec{w} = I\vec{w} - [\mathrm{proj}_{\vec{v}}]\vec{w} = (I - [\mathrm{proj}_{\vec{v}}])\vec{w}.$$

Vi ser även att standard matrisen är

$$[P] = I - [\mathrm{proj}_{\vec{v}}]$$

Vilket enligt formeln i Ekvation (6.4) visar att

$$[P] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\|\vec{v}\|^2}\begin{pmatrix} v_1^2 & v_1v_2 & v_1v_3 \\ v_1v_2 & v_2^2 & v_2v_3 \\ v_1v_3 & v_2v_3 & v_3^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\|\vec{v}\|^2}\left(\begin{pmatrix} v_1^2+v_2^2+v_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & v_1^2+v_2^2+v_3^3 & 0 \\ 0 & 0 & v_1^2+v_2^2+v_3^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_1^2 & v_1v_2 & v_1v_3 \\ v_1v_2 & v_2^2 & v_2v_3 \\ v_1v_3 & v_2v_3 & v_3^2 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{\|\vec{v}\|^2}\begin{pmatrix} v_2^2+v_3^2 & v_1v_2 & v_1v_3 \\ v_1v_2 & v_1^2+v_3^2 & v_2v_3 \\ v_1v_3 & v_2v_3 & v_1^2+v_2^2 \end{pmatrix}$$

Igen behöver man inte komma ihåg hela formeln, men bara metoden.

Exempel 6.6.2

Uppgift: Hitta standardmatrisen för den ortogonala projektionen $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ på planet $\pi : x + 2y - z = 0$.

Lösning: Vi hittar först en formel för den ortogonala projektionen på linjen genom origo med rikning

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

som är normalvektor till planet.

$$\operatorname{proj}_{\vec{n}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}{1^1 + 2^2 + (-1)^2} \vec{n} = \frac{1x + 2y - 1z}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} x + 2y - z \\ 2x + 4y - 2z \\ -x3 - 4y + z \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

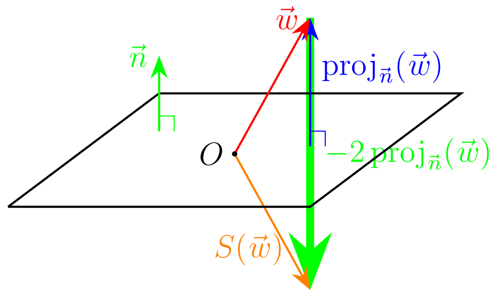
Så standardmatrisen för ortogonal projektion i planet π blir:

$$[P] = I - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} \left(\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

6.6.3 Spegling i plan

I Figur 27 såg vi ett argument för att spegling i ett plan är linjärt. Figur 28 visar hur man kan tänka på spegling och formeln den illustrerar är snarlik formeln for ortogonal projektion i planet. Den visar nämligen att



Figur 28: Formel för spegling

för spegling $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ i ett plan med normalvektor $\vec{n}$ gäller:

$$S(\vec{w}) = \vec{w} - 2\,\text{proj}_{\vec{n}}\,\vec{w}$$

Så matrisen blir

$$[S] = I - 2[\text{proj}_{\vec{n}}].$$

Istället för att skriva ut formeln igen så använder vi bara idéen i ett exempel

Exempel 6.6.3

Uppgift: Hitta standardmatrisen för $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som speglar i planet $\pi : x + 2y - z = 0$. (Notera att det är samma plan som i Exempel 6.6.2)

Lösning: I Exempel 6.6.2 hittade vi redan den ortogonala projektionen på linjen genom origo med rikning

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

som är normalvektor till planet. Denna hade standardmatris

$$[\text{proj}_{\vec{n}}] = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Så standardmatrisen för speglingen i planet π blir:

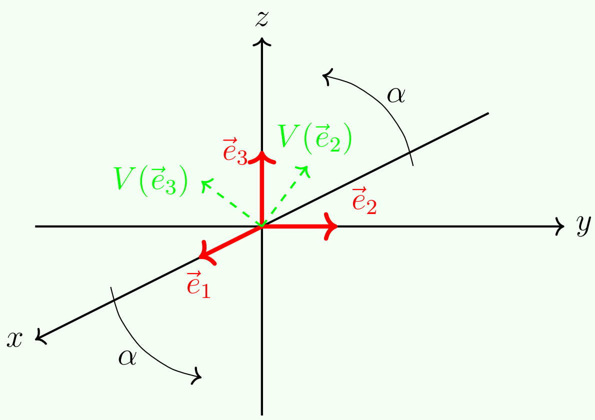
$$[P] = I - 2\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

6.6.4 Rotationer i $\mathbb{R}^3$

Vi återkommer till mera generella rotationer=vridningar lite senare, men för nu ger vi bara exempel på rotation runt de vanliga axlarna i $\mathbb{R}^3$.

Exempel 6.6.4

Låt $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara vridning runt x-axeln med vinkel α (moturs set från $(1, 0, 0)$ mot origo). Igen kollar vi vad som händer med standard bas vektorerna:



vridningen bevarar vektorn $\vec{e}_1$ då den ligger på vridningsaxeln. Vridningen av de två vektorer $\vec{e}_2$ och $\vec{e}_3$ stannar i yz-planet, och vridas precis som vi så förr för F_α i $\mathbb{R}^2$. Så vi ser att:

$$V(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$$
$$V(0, 1, 0) = (0, \cos\alpha, \sin\alpha)$$
$$V(0, 0, 1) = (0, -\sin\alpha, \cos\alpha)$$

Detta betyder att

$$[V] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

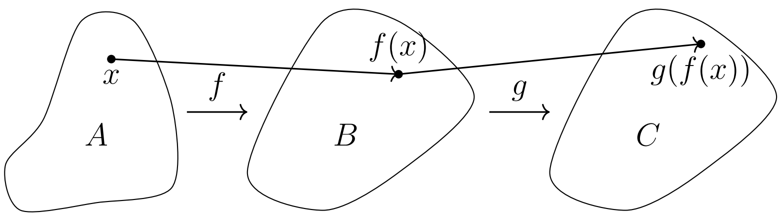
Om man i stället låter $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara vridning runt t.ex. y-axeln med vinkel α blir standardmatrisen istället:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

6.7 Sammansättning av linjära avbildningar

Låt $f : A \to B$ och $g : B \to C$ vara functioner. Vi definierar den sammensatte functionen genom

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$



För matrisavbildninger ser vi att:

$$(T_A \circ T_B)(\vec{x}) = T_A(T_B(\vec{x})) = A(B\vec{x}) = (AB)\vec{x} = T_{AB}(\vec{x}).$$

Så vi har $T_A \circ T_B = T_{AB}$. Vilket i ord är:

- Sammensätningen av två matrisavbildninger är matrisavbildningen definierad av produkten av de två standardmatriser.

Detta passar jätte bra med att:

- Vi kan bara sammansätta T_A med T_B och få $T_A \circ T_B$ om $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ och $T_B : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$. Alltså att T_B:s målmängd är lika med T_A:s definitionsmängd.
- Vi kan bara gånga A med B och få AB om A är $m \times n$ och B är $n \times k$.

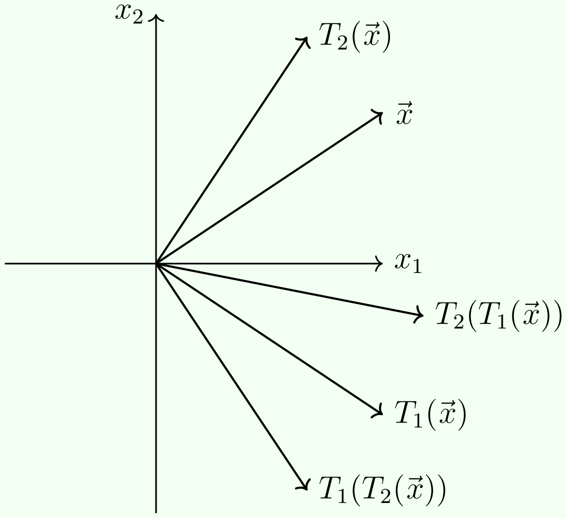
Detta kan också skrivas som $[T \circ S] = [T][S]$. Alltså standardmatrisen för sammensätningen är produkten av standard matriserna. Eftersom att vi ofta har $AB \neq BA$. Så har vi också ofta $T_A \circ T_B \neq T_B \circ T_A$.

Exempel 6.7.1

Låt

$T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$	vara spegling i x_1-axeln
$T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$	vridningen F_{10° ovan

Då ser vi geometriskt att $T_1 \circ T_2 \neq T_2 \circ T_1$ genom:



Alltså: att först vrida 10° moturs och så spegla är inte det samma som att spegla och så vrida 10° moturs.

Uppgifter till Kapitel 6

Avsnitt 6.1

6.1) Hitta avståndet mellan $Q = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$ och $P = (1, 0, 1, 7, -1, 1)$ i $\mathbb{R}^6$.

Länk till svar

6.2) Hitta vinkeln mellan

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Länk till svar

6.3) Normera vektorn

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(från ovan)

Länk till svar

6.4) Vad är den tredje standard enhetsvektor i $\mathbb{R}^{10}$?

Länk till svar

Avsnitt 6.2

6.5) Som i Exempel 6.2.5 skriv upp T_1 och T_2 för avbildningen

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(x_1) + x_2 \\ \cos(x_1 x_2) \end{pmatrix}$$

Länk till svar

Avsnitt 6.3

6.6) Ange standard matrisen för $S_3 : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ som skalar om vektorer i $\mathbb{R}^7$ med faktorn 3

Länk till svar

6.7) Ange standard matrisen för den avbildningen $F_{\frac{\pi}{4}}$ som roterar vektorer i planet med vinkel $\frac{\pi}{4}$.

Länk till svar

6.8) Hitta standardmatris för matrisavbildningen $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ som uppfyller

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pi\\\pi^2\end{pmatrix}, \qquad T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Länk till svar

6.9) Låt $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ vara avbildningen som tar bort de två sista koordinater. Det vill säga

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

Visa att T är en matrisavbildning och hitta standardmatrisen $[T]$.

Länk till svar

Avsnitt 6.4

6.10) Visa att $T(\vec{0}) = \vec{0}$ om T är linjär.

Länk till svar

6.11) Ange standardmatrisen för $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som speglar i yz-planet.

Länk till svar

6.12) Avgör i varje deluppgift om funktionen är linjär.

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ där $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ där $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x\\y\\-x\end{pmatrix}$.

(c) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ där $T(x) = x^2$.

(d) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ där $T(x) = |x|$.

(e) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ där $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ x+1 \\ -x \end{pmatrix}$.

(f) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ där $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ yw \end{pmatrix}$.

(g) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ där $T(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \vec{a} \bullet \vec{x} \\ \vec{b} \bullet \vec{x} \\ \vec{c} \bullet \vec{x} \end{pmatrix}$ där $\vec{a}, \vec{b}$ och $\vec{c}$ är (konstanta) vektorer i $\mathbb{R}^2$.

(h) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ där $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \ln(e^x e^y (e^z)^2)$.

Länk till svar

6.13) Hitta standard matrisen $[T]$ i varje av deluppgifterna i Uppgift 6.12 där T råkade vara linjär.

Länk till svar

6.14) Visa att om $T, S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är två linjära avbildningar då är avbildningen $S + T$ definierat genom

$$(S+T)(\vec{x}) = S(\vec{x}) + T(\vec{x})$$

linjär.

Länk till svar

Avsnitt 6.5

6.15) Hitta bilden av linjen $(x, y, z) = (t, 2t, t-1), t \in \mathbb{R}$ av avbildningen $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ givet av

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + z \\ x + y \end{pmatrix}.$$

Länk till svar

Avsnitt 6.6

6.16) Hitta standardmatrisen för den ortogonala projektionen $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ på vektorn $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Länk till svar

6.17) Låt $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den ortogonala projektionen på planet $\pi : x - y + z = 0$.

(a) Bestäm standardmatrisen $[P]$.

(b) Bestäm bilden under avbildningen P av linjen $l : (x, y, z) = (1 + t, 1 - 2t, 2 - t), t \in \mathbb{R}$.

Länk till svar

6.18) Med samma plan π som i Uppgift 6.17 hitta standardmatrisen för speglingen $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ i planet.

Länk till svar

Avsnitt 6.7

6.19) Hitta standardmatrisen, för varje av de (ordnade) par av funktion som var linjära i Uppgift 6.12 och som går att sammansätta.

Länk till svar

7 Baser

7.1 Span (det linjära höljet) av vektorer

Låt $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$. En vektor i $\mathbb{R}^n$ skrivet på formen

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_k\vec{v}_k,$$

där $c_1, \ldots, c_k$ är reella tal, kallas en linjärkombination av vektorerna.

Exempel 7.1.1

Uppgift: Avgör om vektorn $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ är en linjärkombination av

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Lösning: Vi måste kolla om vi kan hitta $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ så att

$$c_1\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

Detta är ekvivalent med ekvationssystemet som har totalmatrisen (som vi löser på vanligt sätt):

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&0&1\\3&-1&2\\2&1&3\end{array}\right)\begin{matrix}\boxed{-3}\boxed{-2}\\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c}1&0&1\\0&-1&-1\\0&1&1\end{array}\right)\begin{matrix} \\ \boxed{1}\boxed{-1}\\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{array}\right)$$

Så ekvationssystemet har den entydiga lösning: $(c_1, c_2) = (1, 1)$ och vi ser att vektorn faktiskt *är* linjärkombination:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Om vi i exemplet hade haft många lösningar hade vektorn fortfarande varit en linjärkombination av $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$. Flera lösningar betyder bara att det finns flera olika sätt att skriva den givna vektorn som en linjärkombination.

Definition 7.1

Spannet av vektorerna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ i $\mathbb{R}^n$ definieras som mängden av alla de vektorer som är linjärkombinationer av dessa.

$$\operatorname{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\} = \{c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_k\vec{v}_k \mid c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}\}$$

Spannet kallas också ibland ***det linjära höljet***.

Exempel 7.1.2

Uppgift: Bestäm villkor på $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ så att

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Lösning: Då vi har samma vektorer som exemplet ovan måste vi lösa samme ekvationssystem som ovan men med generell högersida:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b_1 \\ 3 & -1 & b_2 \\ 2 & 1 & b_3 \end{array}\right) \begin{matrix} -3 \;\; -2 \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & -1 & b_2 - 3b_1 \\ 0 & 1 & b_3 - 2b_1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ 1 \;\; -1 \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 - 3b_1 \\ 0 & 0 & b_2 + b_3 - 5b_1 \end{array}\right)$$

Vi har lösningar om och endast om $-5b_1 + b_2 + b_3 = 0$. Det vill säga att vektorn ligger i spannet om och endast om denna ekvation gäller.

Ekvationen hittat i exemplet kan skrivas med x, y och z som: $-5x + y + z = 0$, och då ser vi att det faktiskt är ett plan (genom origo). Men vi ser ju faktiskt också att

$$\operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

år en parameterform (skrivet som en mängd) av detta plan. Alternativt till lösningen ovan kan vi alltså hitta en normalvektor genom att ta vektorprodukten:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Vi ser då igen (på ett annat sätt) att planet kan beskrivas som

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5b_1 - b_2 - b_3 = 0.$$

Exempel 7.1.3

Om vi har en vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ i $\mathbb{R}^3$ är

$$\text{Span}\{\vec{v}\} = \{t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$$

linjen genom origo med riktningsvektor $\vec{v}$. Fungerar för generellt $\mathbb{R}^n$.

Exempel 7.1.4

Om vi har vektorer $\vec{v}$ och $\vec{w}$ i $\mathbb{R}^3$ som inte är parallella då är

$$\text{Span}\{\vec{v}, \vec{w}\} = \{t\vec{v} + s\vec{w} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

planet genom origo parallellt med $\vec{v}$ och $\vec{w}$.

Exempel 7.1.5

Uppgift: Vad är spannet

$$\text{Span}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$$

där $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$?

Lösning: Vi hittar detta genom att hitta villkor på b_1, b_2 och b_3 så att ekvationen

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

har lösningar. Vi löser detta:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & b_1 \\ 2 & 2 & 0 & b_2 \\ 3 & 1 & 0 & b_3 \end{array}\right) \begin{matrix} -2 & -3 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & b_1 \\ 0 & -4 & -2 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & -8 & -3 & b_3 - 3b_1 \end{array}\right) -2 \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & b_1 \\ 0 & -4 & -2 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 1 & b_3 + b_2 - 5b_1 \end{array}\right)$$

Då vi har ledande element i varje kolonn har vi en lösning (entydig faktiskt) för alla $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ och vi ser därför att

$$\operatorname{Span}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = \mathbb{R}^3.$$

Sagt i ord: det linjära höljet (eller spannet) av vektorerna $\vec{u}$, $\vec{v}$ och $\vec{w}$ är hela $\mathbb{R}^3$.

Det vill säga att genom att använda linjära kombinationer av dessa vektorer kan man uppnå varje vektor i $\mathbb{R}^3$.

Exemplen leder till följande viktiga metod. Låt $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$. Skriv vektorerna som kolonnvektorer och sätt in dem i en matris:

$$V = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_k \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

V är alltså en $n \times k$ matris.

Sats 7.2: Om Span

Let V vara som ovan. Då är

$$\operatorname{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\} = \mathbb{R}^n$$

om och endast om $\operatorname{rang}(V) = n$.

Alltså: alla vektorer i $\mathbb{R}^n$ kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna $\vec{v}_1 \ldots, \vec{v}_k$ om och endast om rangen av V är n.

Bevis: Låt R beteckna den radkanoniska matrisen som är radekvivalent med V. För att avgöra om $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ ligger i spannet lösas följande ekvationssystem (som i exemplen ovan):

$$\left(\begin{array}{c|c} & b_1 \\ V & \vdots \\ & b_n \end{array} \right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{c|c} & ? \\ R & \vdots \\ & ? \end{array} \right)$$

Vi har här använd att R är radekvivalent med V och utfört samma radoperationer som tar V till R på hela den augmenterade matrisen.

Nu visar vi "$\Leftarrow$": Anta alltså att $\text{rang}(V) = n$. Enligt definition av rang betyder detta att R har precis n ledande element. Det betyder att R måste ha ett ledande element i varje rad. Då R har ledande element i varje rad har vi alltid lösning. Så $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ är i spannet oavsett vad $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ är. Så spannet är hela $\mathbb{R}^n$.

Det andra hållet "$\Rightarrow$": Anta nu att $\text{rang}(V) \neq n$ alltså $\text{rang}(V) < n$ då har R *inte* ledande element i varje rad och måste därför ha att rad n är en nollrad. Det betyder vi kan fylla i ? i matrisen till höger så att vi inta har lösning - t.ex. genom att sätta ett 1 tal efter nollraden. Om vi då går baklänges med radoperationerna - så kommer vi till några $b_1, \ldots, b_n$ som inte har lösning - och motsvarande vektor ligger därför inte i spannet. Därför är spannet *inte* hela $\mathbb{R}^n$.

Exempel 7.1.6

Uppgift: Avgör om

$$\text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^4.$$

Lösning: Vi skriver V som ovan och utför radoperationer för att komma på trappstegsform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -4 \; -1 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi är på trappstegsform och ser vi har ledande element i varje *rad*. Så $\text{rang}(V) = 4$ och därför är spannet lika med hela $\mathbb{R}^4$. Observera (som i bevisat och exemplet ovan satsen): om vi försöker att skriva (b_1, b_2, b_3, b_4) som en linjärkombination av vektorerna måste vi lösa:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 3 & b_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & b_4 \end{array}\right) \begin{matrix} -4 \; -1 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & b_3 - 4b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_4 - b_2 \end{array}\right)$$

som på grund av ledande element i varje rad alltid har lösning (oberoende på vad b'erna är). Så *alla* vektorer i $\mathbb{R}^4$ kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna. Om vi fick fram nollrader hade vi inte kunna lösa allt och spannet kunna därför inte vara hela $\mathbb{R}^4$.

7.2 Linjärt beroende och oberoende

Kom ihåg: två vektorer $\vec{v}$ och $\vec{w}$ är parallella om den ena är en omskalning av den andra. Detta kan skrivas om till

$$c_1\vec{v} + c_2\vec{w} = \vec{0}$$

enbart har lösningen $c_1 = c_2 = 0$ (kallat den triviala lösningen). För att se detta: anta att $\vec{v} = k\vec{w}$ då är

$$-\vec{v} + k\vec{w} = \vec{0}$$

en icke-trivial lösning. Liknande för $\vec{w} = k\vec{v}$. Å andra sidan om vi har en icke-trivial lösning $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ och $c_1 \neq 1$ är

$$\vec{v} = \frac{-c_2}{c_1}\vec{w}$$

och liknande om $c_2 \neq 0$. Intuitionen i denna omformulering kan skrivas i ord som

- Om man kan gå c_1 åt det hål $\vec{v}$ pekar och då c_2 åt det hål $\vec{w}$ pekar på ett så sätt att man inte bara har stått ställa $(c_1 = c_2 = 0)$ men är tillbaka där man började $(\vec{0})$ då måste vektorerna vara parallella.

Omskrivningen ger ett sätt att generalisera begreppet parallella till fler än två vektorer.

Definition 7.3

Vektorer $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ i $\mathbb{R}^n$ sägas att vara ***linjärt oberoende*** om:

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_k\vec{v}_k = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0.$$

Det vill säga att ända linjär kombination som ger $\vec{0}$ är när vi använder alla skalärar lika 0.

Om en samling vektorer inte är linjärt oberoende kallas dem ***linjärt beroende*** och det betyder ju att där finns en lösning

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

där inte alla c_i'erna är 0.

Exempel 7.2.1

Uppgift: avgör om $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ är linjärt beroende eller linjärt oberoende.

Lösning: Vi ska se om där finns icke-triviala lösningar till:

$$c_1\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Vi får alltså totalmatrisen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} -2 & -3 \\ & \\ & \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -2 \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vi ser alltså att där finns lösningar med parameter och därför också icke-triviala lösningar. Så slutsatsen är:

- Vektorerna är linjärt *beroende*.

Låt $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$. Skriv igen vektorerna som kolonnvektorer och sätt in dem i matrisen

$$V = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_k \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

V är igen en $n \times k$ matris - precis som i förra avsnitt. Exemplen ovan är exempel på följande sats.

Sats 7.4: Om linjärt oberoende

Let V vara som ovan. Då är Vektorerna

$$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$$

linjärt oberoende om och endast om $\text{rang}(V) = k$.

Bevis för Sats 7.4 Igen är rangen av V antalet ledande element i den radkanoniska matrisen R ekvivalent med V. Vi använder igen att

$$\left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ V & \vdots \\ & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ R & \vdots \\ & 0 \end{array}\right)$$

Observera att antalet kollonner i R är k. Om $\text{rang}(V) \neq k$ måste vi ha kolonner utan ledande element och det betyder att vi har fria variabler och därför parametrar i lösningen och därför icke-triviala lösningar. Om $\text{rang}(V) = k$ har vi ledande element i varje kolonn och därför inga fria variabler och därför enbart den triviala lösningen.

Exempel 7.2.2

Uppgift: Avgör om vektorerna $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}1\\3\\5\\7\\9\end{pmatrix}$ är linjärt beroende.

Lösning: Vi har 3 vektorer i $\mathbb{R}^5$ så i satsen ovan är $k = 3$ och $n = 5$. Vi skriver vektorerna in i en matris som kolonner och beräknar rangen:

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&5\\1&4&7\\1&5&9\end{pmatrix} \begin{matrix}\boxed{-1}\boxed{-1}\boxed{-1}\boxed{-1}\\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&2&4\\0&3&6\\0&4&8\end{pmatrix} \begin{matrix}\\ \boxed{-2}\boxed{-4}\boxed{-6}\\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Vi ser att rangen är 2 som är mindre än $k = 3$ (vi har inte ledande element i varje *kolonn*). Så satsen säger att vektorerna är linjärt beroende.

Om man räkner vidare kan man t.ex. hitta lösningan:

$$-\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\\5\\7\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

7.3 Bas och koordinater i en bas

Kombinera man linjärt oberoende med spannet$= \mathbb{R}^n$ fås begreppet bas.

Definition 7.5

En ordnad uppsättning $\underline{\mathbf{v}} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k)$ av vektorer $\vec{v}_i \in \mathbb{R}^n$ kallas en ***bas*** omm

- $\mathrm{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\} = \mathbb{R}^n$ och
- vektorerna är linjärt oberoende.

Sats 7.6

En bas $\underline{\mathbf{v}}$ för $\mathbb{R}^n$ består av n vektorer.

Bevis: Låt V vara $n \times k$ matrisen som i Sats 7.2 och Sats 7.4. Den förste sats om spann ger $\operatorname{rang}(V) = n$. Den andra sats om linjärt oberoende ger $\operatorname{rang}(V) = k$. Så för att ha både måste $k = n$.

Om man ser tillbaka på bevisorna för de två satser inser vi följande. för att vara linjärt oberoende måste R (från bevisen) ha ledande element i varje kolonn och för att spannet är hela $\mathbb{R}^n$ måste R ha ledande element i varje rad, och därför måste antalet rader=antalet kolonner. Det följer enligt Sats 4.7 att den kvadratiska matrisen

$$V = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

inverterbar.

Exempel 7.3.1

Ett par $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ av vektorer i $\mathbb{R}^2$ som *inte* är parallella är en bas för $\mathbb{R}^2$.

Definition 7.7

För en bas $\underline{\mathbf{v}} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ för $\mathbb{R}^2$ och en vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ där

$$\vec{u} = t\vec{v}_1 + s\vec{v}_2$$

skriver och kallar vi

$$[\vec{u}]_{\underline{\mathbf{v}}} = \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix}$$

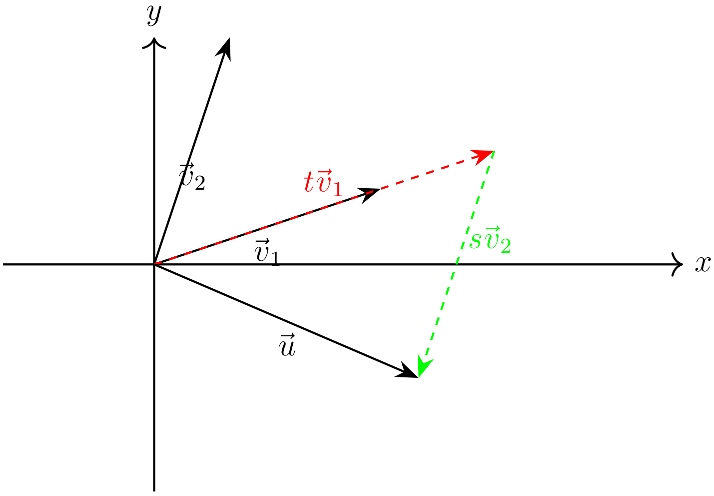
koordinaterna av $\vec{u}$ i basen $\underline{\mathbf{v}}$. Liknande säger vi att punkten P har koordinater

$$[P]_{\underline{\mathbf{v}}} = (t, s)$$

i basen $\underline{\mathbf{v}}$ om ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ har dessa koordinater i basen $\underline{\mathbf{v}}$.

Notera att det att spannet är hela $\mathbb{R}^2$ gör att det finns sådana s och t. Dessutom gör det att vektorerna är linjärt oberoende att dessa s och t är entydiga. Vi ska se detta i generell dimension i Sats 7.9

Geometriskt betyder definitionen:



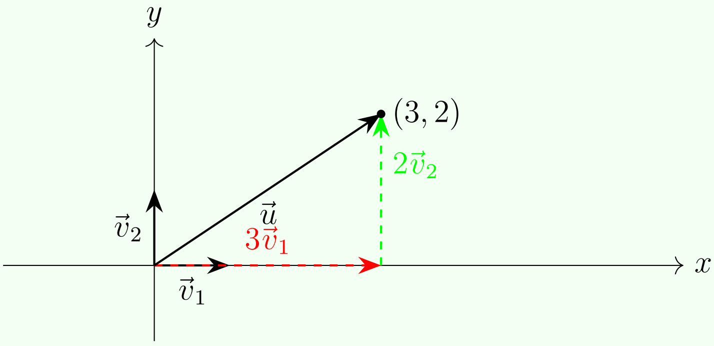
Alltså t mäter vilken skalning av $\vec{v}_1$ och s vilken skalning av $\vec{v}_2$ vi måste addera för att få $\vec{u}$.

Exempel 7.3.2

De vanliga koordinaterna i $\mathbb{R}^2$ är i basen:

$$\underline{\mathbf{v}} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Alltså enhetsvektorerna längs axlarna.



Exempel 7.3.3

Exempel: Låt

$$\underline{\mathbf{v}} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \quad \text{där: } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$$

Vad är koordinaterna för $\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}$ i basen $\underline{\mathbf{v}}$?

Lösning: Vi måste hitta $t, s \in \mathbb{R}$ så att

$$t\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}.$$

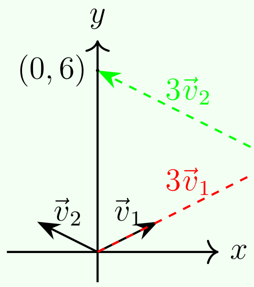
Detta är ekvivalent med det linjära ekvationssystemet med totalmatris:

$$\left(\begin{array}{cc|c}2&-2&0\\1&1&6\end{array}\right)\begin{array}{c}\frac{1}{2}\ \ -1\\ \ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c}1&-1&0\\0&2&6\end{array}\right)\begin{array}{c} \ \\ \frac{1}{2}\ \ 1\end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c}1&0&3\\0&1&3\end{array}\right)$$

Så entydig lösning: $(t, s) = (3, 3)$ och därför kan vi skriva

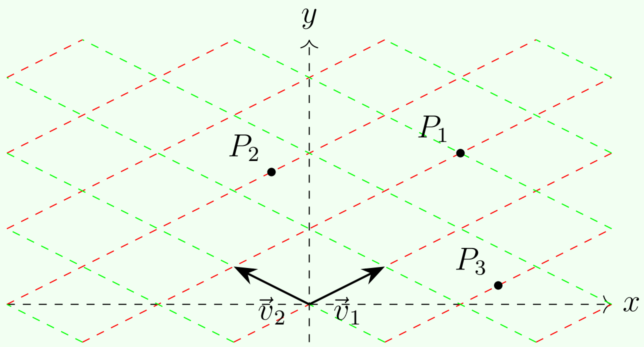
$$\left[\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}\right]_{\underline{\mathbf{v}}} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}.$$

Geometriskt har vi följande figur som förklarar detta:



Exempel 7.3.4

Låt igen $\underline{\mathbf{v}} = \left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right)$. För att illustrera koordinater i basen $\underline{\mathbf{v}}$ kan vi rita streckade linjer för alla de punkter i $\mathbb{R}^2$ där har ett heltal som en av koordinaterna i basen $\underline{\mathbf{v}}$. Detta ser ut som:



Här har vi använt röd när koordinaten där motsvarar skalning av $\vec{v}_2$ är ett heltal. Koordinaterna för de ritade punkter (i basen) är:

- P_1 har koordinaterna i basen $\underline{\mathbf{v}}$: $(3, 1)$.
- P_2 har koordinaterna i basen $\underline{\mathbf{v}}$: $(\frac{3}{2}, 2)$.
- P_3 har koordinaterna i basen $\underline{\mathbf{v}}$: $(\frac{3}{2}, -1)$.

I de vanliga koordinater för $\mathbb{R}^2$ har dessa punkterna koordinaterna:

- $P_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- $P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix} \qquad = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- $P_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Generellt i alla dimensioner definierar vi koordinater

Definition 7.8

För en bas $\underline{\mathbf{v}} = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ för $\mathbb{R}^n$ definierar vi ***koordinaterna*** för en vektor $\vec{u}$ (eller punkt) i basen $\underline{\mathbf{v}}$ till att vara $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ där

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_n\vec{v}_n = \vec{u}.$$

Igen skriver vi detta som $[\vec{u}]_{\underline{\mathbf{v}}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$.

Exempel 7.3.5

Om $\underline{\mathbf{v}} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ då är koordinaterna i basen $\underline{\mathbf{v}}$ de vanliga koordinater i $\mathbb{R}^3$:

$$\left[\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right]_{\underline{\mathbf{v}}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

eftersom

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1(1,0,0) + v_2(0,1,0) + v_3(0,0,1).$$

För att se att vi faktiskt har definierad något som ger mening måste vi bevisa följande sats:

Sats 7.9

Koordinater i en bas $\underline{\mathbf{v}}$ för $\mathbb{R}^n$ existera och är entydiga.

Bevis: Skriva basen som $\underline{\mathbf{v}} = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$, och skriv matrisen V som tidigare (denna är nu $n \times n$). Vi måste visa att där existera en entydig lösning till

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_n\vec{v}_n = \vec{u}$$

för en godtycklig vektor $\vec{u}$. Men på matris form är denna ekvationen:

$$V \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Då $\underline{\mathbf{v}}$ är en bas är rang$(V) = n$ och därför är V inverterbar och vi ser att vi har den entydiga lösningen:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = V^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

Observera att matrices V kallas basbytmatris (multiplikation med denna ger hur koordinater i basen $\underline{\mathbf{v}}$ ”tranformera” till vanliga koordinater).

Exempel 7.3.6

Vi så att inversen till V kan användes till att hitta koordinater i en basen $\underline{\mathbf{v}}$. Låt os försöka detta med exemplet ovan. Så låt $\underline{\mathbf{v}} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ med $\vec{v}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ och $\vec{v}_2 = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ då är

$$V = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och därför} \quad V^{-1} = \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Vi ser nu att alla de koordinater i denna bas vi beräknade ovan kan beräknas genom

$$V^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$V^{-1}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$V^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix} = \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix} = \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$V^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Anmärkning 7.3.7

Om man enbart ska hitta ett sätt koordinater i en bas är det ofta lättest att bara lösa ekvationssystemet och inte hitta inversen. Vi ser dock att det kan vara bra att hitta inversen om man ska hitta många olika punkters koordinaterna i basen.

Exempel 7.3.8

Uppgift: Avgör om $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}\right)$ är en bas för $\mathbb{R}^3$.

Lösning: Vi skriver in dessa vektorer som kolonner i en matris och hittar rang:

$$\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\2 & 5 & 8\\3 & 6 & 9\end{pmatrix} \begin{matrix}-2 & -3\\ & \\ & \end{matrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\0 & -3 & -6\\0 & -6 & -12\end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2 \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\0 & -3 & -6\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Efter ett par rad operationer får vi fram en nollrad och rangen är därför inte 3 och det vill säga att matrisen inte är inverterbar och det är därför *inte* en bas. (Alternativt ta determinanten)

7.4 Ortonormal baser

En bas $\underline{\mathbf{v}} = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ för $\mathbb{R}^n$ är *ortonormal* om alla vektorerna uppfyller

$$\vec{v}_i \bullet \vec{v}_j = \begin{cases} 1 & \text{om } i = j \\ 0 & \text{om } i \neq j \end{cases}$$

Det betyder: varje vektor har längd 1 och de är parvis ortogonala. Ofta forkortar man ”ortogonal bas” till ONB.

Exempel 7.4.1

Standard basen för $\mathbb{R}^n$ är $\underline{e} = \left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\right)$ är en ONB.

Om man ska använde koordinater i den verkliga världen väljer man ett origo O (det vill säga man väljer den punkten som ska ha koordinaterna $(0,0,0)$), och så väljer man en ortonormal bas (för att få x, y och z axlern) så att de uppfyller högerhandsregeln. Dessa kallas då vanligtvis $\vec{i}, \vec{j}$ och $\vec{k}$ eller $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ och $\vec{e}_3$. Därför står där ofta i gamla tentorna att man jobbar i ett ONB-system (då man har valt origo en och ortonormal bas), och det betyder egentligen bara att man får använda koordinater i $\mathbb{R}^3$ på vanligt sätt.

7.5 Baser och linjära avbildningar

Låt $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning. I Metod 6.5 såg vi formeln:

$$[T] = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ T(\vec{e}_1) & T(\vec{e}_2) & \cdots & T(\vec{e}_k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

Denna formel kan vara lite jobbig att använde. Eftersom det kan vara svårt någon gånger att beräkna

$$T(\vec{e}_1), T(\vec{e}_2), \ldots, T(\vec{e}_k)$$

I beviset för Sats 6.7 såg vi liknande att man kan beräkna $T(\vec{x})$ genom att veta vad $T(\vec{e}_i)$ för varje standard basvektor $\vec{e}_i$.

Detta kan generaliseras till en godtycklig bas $\underline{\mathbf{v}} = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k)$ för $\mathbb{R}^k$ där det i bland är enklare att beräkna. Detta ses genom att använda definitionen av en bas till att skriva

$$\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_k\vec{v}_k$$

och använda definitionen av linjärt (som i bevis för Sats 6.7) till att se att

$$T(\vec{x}) = c_1 T(\vec{v}_1) + c_2 T(\vec{v}_2) + \cdots + c_k T(\vec{v}_k)$$

Så det är tillräckligt att veta vad T är på varje basvektorerna för att kunna beräkna T. Det vi ska göra i detta avsnitt är att härleda en formel för standardmatrisen $[T]$ ifrån denna observation, och så ska vi se exempel på användning av denna formel.

Kom ihåg att matrisprodukten uppfyller: Om B skrives

$$B = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_k \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

där $\vec{b}_i$ är den i:te kolonnen i B. Då är

$$AB = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \cdots & A\vec{b}_k \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

Detta leder till följande formel för multiplikationen av $[T]$ med V (med basvektorerna som kolonner - som tidigare):

$$[T]\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_k \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ T(\vec{v}_1) & T(\vec{v}_2) & \cdots & T(\vec{v}_k) \\ | & | & & | \end{pmatrix} \tag{7.1}$$

Eftersom $\underline{\mathbf{v}}$ är en bas är

$$V = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_k \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

inverterbar, och vi får

$$[T] = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ T(\vec{v}_1) & T(\vec{v}_2) & \cdots & T(\vec{v}_k) \\ | & | & & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_k \\ | & | & & | \end{pmatrix}^{-1} \tag{7.2}$$

Exempel 7.5.1

Uppgift: Hitta den linjära avbilding $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ som uppfyller

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Lösning: Enligt formeln har vi

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Med denna formeln kan man även beräkna en mera general vridning i rummet $\mathbb{R}^3$.

Exempel 7.5.2

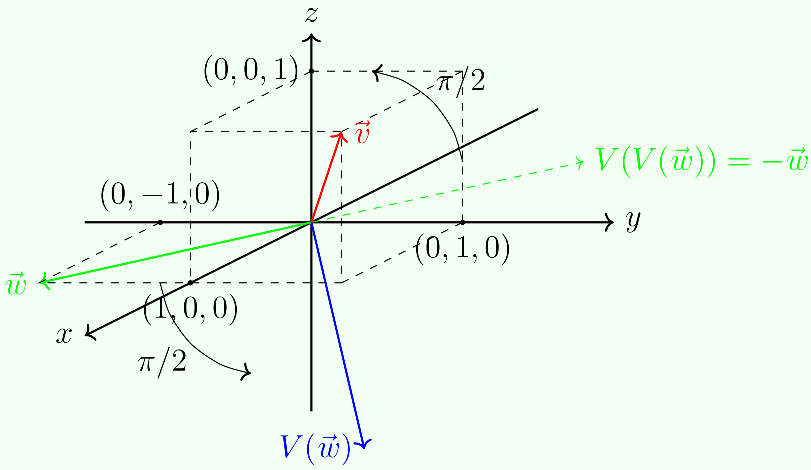
Låt $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara vridning med vinkel $\pi/2$ ($90°$) kring linjen genom origo parallellt med vektorn $\vec{v} = (1, 1, 1)$ (moturs sett från vektorns spets mot origo). Hitta $[V]$.

Lösning: Vi har inte pratad om någon generell formel för vridning i rummet (boken har en). Så vi måste hitta 3 vektorer där vi vet vad som händer med när vi vrider dem (och som är en bas för $\mathbb{R}^3$).

Vektor 1: vektorn $\vec{v} = (1, 1, 1)$ är vridnings axeln och därför bevaras den

$$V(1, 1, 1) = (1, 1, 1).$$

Vektor 2: vektorn $\vec{w} = (1, -1, 0)$ är ortogonal med $\vec{v}$ och kommer därför också att vara detta efter vridningen och den kommer att vara ortogonal med $\vec{w}$ själv (se figur). Från figuren



ser vi att denna $V(\vec{v})$ uppfyller högerhandsregeln precis som $\vec{v}\times\vec{w}$. Så den måste ha samma riktning som:

$$\vec{v} \times \vec{w} = (1, 1, 1) \times (1, -1, 0) = (1, 1, -2)$$

Eftersom att vrida inte ändrar längder måste normen av $V(\vec{w})$ vara $\|\vec{w}\| = \sqrt{2}$. Det vill säga:

$$V(1, -1, 0) = \tfrac{\sqrt{2}}{\|(1,1,-2)\|}(1, 1, -2) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}(1, 1, -2) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -2).$$

Vi ser också att sedan vinkeln är $\pi/2$ så får vi att $V(V(\vec{w})) = -\vec{w}$. Vi har alltså:

$$[V]\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & -1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ 1 & -\frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}$$

Vi invertera matrisen i mitten:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \boxed{-1} \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{3}{\sqrt{3}} & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -\frac{1}{2}\ \boxed{1} \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \boxed{-1} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right)$$

Så vi får att

$$[V] = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ 1 & -\frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

7.6 Injektiv/surjektiv/bijektiv och matrisavbildningar

Definition 7.10

För en funktion $f : A \to B$ definierar vi:

- Om ekvationenen $f(a) = b$ har *max* en lösning för alla b kallas den ***injektiv***
- Om ekvationenen $f(a) = b$ har *minst* en lösning för alla b kallas den ***surjektiv***
- Om ekvationenen $f(a) = b$ har *precis* en lösning för alla b kallas den ***bijektiv***

Notera att bijektiv betyder att man båda är injektiv och surjektiv.

Sats 7.11

Låt $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning/matrisavbildning. Följande är ekvivalenta

(a) T är injektiv.

(b) $T(\vec{x}) = \vec{0}$ enbart för $\vec{x} = \vec{0}$.

(c) $\operatorname{rang}[T] = k$.

(d) kolonnerna i $[T]$ är linjärt oberoende.

Bevis: Vi vet redan (tidigare sats för linjärt oberoende) att 3 och 4 är ekvivalenta. Vi såg i beviset för Sats 6.7 att

$$T(\vec{x}) = x_1T(\vec{e}_1) + x_2T(\vec{e}_2) + \cdots + x_kT(\vec{e}_k),$$

och detta använder bara räknereglerna för linjära avbildningar. Detta är en linjärkombination av kolonnerna i $[T]$. Så 2 är en omformulering av att kolonnerna är linjärt oberoende och därför ekvivalent med 4.

Vi är alltså klar om vi kan visa att 1 och 2 är ekvivalenta. Så detta är planen.

"1 $\Leftrightarrow$ 2": Vi ser att T injektiv ger att vi enbart har den triviala lösningen till $T(\vec{x}) = 0$. Anta å andra sidan att T inte är injektiv så har vi alltså två vektorer $\vec{x}_1 \neq \vec{x}_2$ så att $T(\vec{x}_1) = T(\vec{x}_2)$. Detta ger:

$$T(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = T(\vec{x}_1) - T(\vec{x}_2) = \vec{0}$$

och därför är $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 \neq \vec{0}$ en icke-trivial lösning i 2.

Exempel 7.6.1

Uppgift: Avgör om $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ med standardmatrisen

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

är injektiv.

Lösning: Vi kollar om rangen är 3 eller om den är mindre:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

har rang 3 och är därför är T injektiv (och därför är också kolonnorna i $[T]$ linjärt oberoende).

Exempel 7.6.2

En matrisavbildning $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ är aldrig injektiv. Detta ses genom att $\text{rang}([T]) \leq 3$ (det är aldrig mera en ett ledande element i varje rad) och detta är mindre än 4.

Exempel 7.6.3: icke-linjär

Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ där $f(x) = x^2$ träffar inga negative tal - så den är inte surjektiv. Observera att denna inte är en matrisavbildning.

Sats 7.12

Låt $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning. Följande är ekvivalenta

(a) T är surjektiv.

(b) $T(\vec{x}) = \vec{b}$ har minst en lösning för alla $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

(c) $\text{rang}[T] = n$.

(d) Spannet av kolonnerna i $[T]$ är hela $\mathbb{R}^n$.

Bevis: Igen är (c) och (d) ekvivalenta enligt en tidigare sats (om spann), och igen visar

$$T(\vec{x}) = x_1 T(\vec{e}_1) + x_2 T(\vec{e}_2) + \cdots + x_k T(\vec{e}_k)$$

att (b) bara är en omformulering av (d). I detta fall är (b) definitionen av (a).

Exempel 7.6.4

Uppgift: Låt $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ vara matrisavbildningen med standard matris

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Avgör om T är surjektiv

Lösning: Vi måste igen kolla om matrisen har rang 3 eller om rangen är mindre.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \boxed{-2}\; 1 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Vi ser att vi har rang=3 (=m) och därför är T surjektiv (och därför är spannet av kolonnvektorerna hela $\mathbb{R}^m$).

Exempel 7.6.5

En matrisavbildning $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ är aldrig surtiv. Detta ses genom att rang$([T]) \leq 3$ (det är aldrig mera en ett ledande element i varje kolonn) och detta är mindre än 4.

För en bijektiv funktion $f : A \to B$ kan vi definiera:

$$f^{-1} : B \to A$$

genom att $f^{-1}(b) = a$ där $a \in A$ är den entydiga lösningen till $f(a) = b$. Detta ger att $(f^{-1} \circ f)(a) = a$ och $(f \circ f^{-1})(b) = b$, och f^{-1} kallas den ***inversa*** funktionen till f.

Exempel 7.6.6: icke-linjärt

$f(x) = x^3$ har lösningarna $y = x^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}$ och därför är inverse funktionen $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$.

Obs: i bland skrivas inverse funktionen som beroende av *samma* variable i exemplet ovan $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, men detta är kanske mera för att man är van vid att funktioner beror på x

Från satserna oven ses att för en bijektiv matrisavbildning $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ är $k = n$.

Faktisk har vi för $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ en linjär avbildning följande tabel:

$[T]$	kolonnvektorerna i $[T]$	funktionen T
$\text{rang}([T]) = k$	linjärt oberoende	injektiv
$\text{rang}([T]) = n$	spannet är hela $\mathbb{R}^n$	surjektiv
$k = \text{rang}([T]) = n$	är en bas för $\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^n$	bijektiv

Här är sakarne som står i samma rad ekvivalenta. Den nedersta raden följer av de två övre raderna (och definitionerna av bas och bijektiv) och är en del av följande sats.

Observera att $\text{rang}([T])$ alltid är mindre än eller lik båda k och n så:

- för att T kan vara injektiv måste $k \leq n$.
- för att T kan vara surjektiv måste $k \geq n$.
- för att T kan vara bijektiv måste $k = n$.

Sats 7.13

För en matrisavbildning $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är följande ekvivalenta

- T är bijektiv.
- $[T]$ är inverterbar.
- $\text{rang}([T]) = n$.
- Kolonnerna i $[T]$ är en bas för $\mathbb{R}^n$.

Bevis: Detta följer av de två satser oven och Sats 4.7.

Exempel 7.6.7

Uppgift: Avgör om matrisavbildningen:

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4, x_4 + x_1)$$

är bijektiv.

Lösning: Igen är det nog att skriva matrisen $[T]$ och avgöra om rangen faktisk är 4 eller om den är mindre.

Matrisen $[T]$ hittas så att

$$[T]\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 + x_4 \\ x_4 + x_1 \end{pmatrix}$$

Denna är:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 1 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -1 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rang=3 och $[T]$ är därför inte inverterbar. Därför är T inte bijektiv (och därför är kolonnorna i $[T]$ inte en bas).

Sats 7.14

Om $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är en bijektiv matrisavbildning då är inversen T^{-1} en matrisavbildning och

$$[T^{-1}] = [T]^{-1}.$$

Bevis: Anta $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Låt $\vec{x} = T^{-1}(\vec{y})$. Detta ger

$$T(\vec{x}) = \vec{y} \quad \Rightarrow \quad [T]\vec{x} = \vec{y} \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = [T]^{-1}\vec{y}$$

Så för varje $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ är $T^{-1}(\vec{y}) = [T]^{-1}(\vec{y})$ och därför är T^{-1} en matrisavbildning med standardmatris $[T]^{-1}$.

Exempel 7.6.8

Uppgift: Hitta den inversa matrisavbildningen till

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2).$$

Lösning:

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad [T]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Detta betyder att $T^{-1}(y_1, y_2) = (\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2, \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2)$.

Kontrollera att detta passar

$$\begin{aligned} T^{-1}(T(x_1, x_2)) &= T^{-1}(x_1 + x_2, x_1 - x_2) = \\ &= \left(\tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) + \tfrac{1}{2}(x_1 - x_2), \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) - \tfrac{1}{2}(x_1 - x_2)\right) = \\ &= (x_1, x_2). \end{aligned}$$

Det passar!

Exempel 7.6.9

vridningen F_α i $\mathbb{R}^2$ har invers

$$F_\alpha^{-1} = F_{-\alpha}.$$

Alltså inversen till att vrida α är att vrida $-\alpha$.

Det kan ytterligare kontrolleras genom att multiplicera standardmatriserna:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & 0 \\ 0 & \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \end{pmatrix} = I.$$

7.7 Extra: Reducera linjärt beroende sätt

I Exempel 7.2.1 ovan kunna vi fortsätta och lösa fullständigt, och hitta oändligt många lösningar. En av dessa villa vara

$$\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}.$$

Observera dock att det inte är nödvändigt att lösa fullständigt. Allt vi behöver för att lösa uppgiften är att veta att där finns *en* icke-trivial lösning.

Vi kan dock se följande konsekvens av den lösning vi skrev ovan. Låt

$$S_1 = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\} \quad \text{och} \quad S_2 = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

då visar ekvationen ovan faktisk att $S_1 = S_2$. Detta ser vi t.ex. genom

$$\begin{aligned} c_1\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} &= c_1\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + c_3\left(4\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right) = \\ &= (c_1 - c_3)\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + (c_2 + 4c_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

så $S_1 \subseteq S_2$. Den andra inklusionen $S_1 \supseteq S_2$ är mycket enklare:

$$c_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \in \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

och det gäller alltid att spannet blir mindre eller samma om man tar bort vektorer.

Anmärkning 7.7.1

- Tre vektorer i rymden är linjärt beroende om de är parallella med samma plan. Så alltså vi behöver bara två av vektorerna för att få samma spann.
- Om tre vektorer i rymden är parallella med samma linje - är spannet en linje och vi behöver bara en av vektorerna.

Ett exempel på det sista i anmärkningen är:

$$\operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}\right\} = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Följande metod generaliserar dessa observationer.

Metod 7.15: Ta bort vektorer utan att ändra ett spann

Anta att vi har en lösning:

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

som visar att vektorerna är linjärt beroende, och anta att $c_1 \neq 0$ (de andra fall är liknande).

Vi kan därför skriva $\vec{v}_1$ som en linjärkombination av de andra:

$$\vec{v}_1 = -\tfrac{c_2}{c_1}\vec{v}_2 - \cdot - \tfrac{c_k}{c_1}\vec{v}_k$$

och behöver den därför inte.

Mera precist ser vi att en godtycklig linjärkombination från spannet $\operatorname{Span}\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_k\}$ kan omskrivas

$$\begin{aligned} d_1\vec{v}_1 + d_2\vec{v}_2 + \cdots + d_k\vec{v}_k &= \\ &= (-\tfrac{d_1c_2}{c_1}\vec{v}_2 - \cdots - \tfrac{d_1c_k}{c_1}\vec{v}_k) + d_2\vec{v}_2 + \cdots d_k\vec{v}_k \\ &= (d_2 - \tfrac{d_1c_2}{c_1})\vec{v}_2 + \cdots + (d_k - \tfrac{d_1c_k}{c_1})\vec{v}_k \\ &\in \operatorname{Span}\{\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k\}. \end{aligned}$$

så vi drar slutsatsen att

$$\operatorname{Span}\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k\} = \operatorname{Span}\{\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_k\}.$$

Generellt om vi har en lösning där $c_i \neq 0$ kan vi ta bort vektoren $\vec{v}_i$ utan att spannet ändrar sig. Detta betyder att så länga vektorerna är linjärt beroende kan man ta bort vektorer utan att ändra på spannet.

Uppgifter till Kapitel 7

Avsnitt 7.1

7.1) Hitta

$$\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Det vill säga hitta villkor på $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ så att $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ ligger i detta span.

Länk till svar

7.2) Avgör om

$$\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)=\mathbb{R}^3.$$

Länk till svar

7.3) Låt

$$\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\4\\3\\1\end{pmatrix},\quad \vec{v}=\begin{pmatrix}1\\5\\a\\1\end{pmatrix}\quad \vec{w}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Avgör för vilka $a \in \mathbb{R}$ vektorn

$$\begin{pmatrix}0\\1\\3\\0\end{pmatrix}$$

ligger i $\mathrm{Span}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$.

Länk till svar

OBS: Flera uppgifter om span finns i uppgifterna till Avsnitt 7.3

Avsnitt 7.2

7.4) Avgör om vektorerna

$$\begin{pmatrix}1\\0\\6\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2\\1\\0\\7\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

är linjärt beroende eller linjärt oberoende.

Länk till svar

OBS: Flera uppgifter om linjärt (o)beroende finns i Avsnit 7.3

Avsnitt 7.3

7.5) Avgör för vilka $a \in \mathbb{R}$ uppsättningen av vektorer

$$\left(\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\\-2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

är en bas för $\mathbb{R}^4$.

Länk till svar

I följande uppgifter använder vi följande uppsättningar av vektorer:

(a) $\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\-1\\3\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}1\\-2\\0\\-2\end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix}-1\\-3\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\6\\-6\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-2\\-3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\3\\0\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

(c) $\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-3\\-1\\-1\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}-3\\-2\\-1\\-3\end{pmatrix}$.

(d) $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -5 \\ 11 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(e) $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

OBS: Man kan med fördel lösa flera av följande uppgifter samtidigt.

7.6) Avgör i varje fall ovan om uppsättningen av vektorer spänner upp hela $\mathbb{R}^4$.

Länk till svar

7.7) Avgör i varje fall ovan om uppsättningen av vektorer är linjärt beroende eller linjärt oberoende.

Länk till svar

7.8) Avgör i varje fall ovan om uppsättningen av vektorer är en bas för $\mathbb{R}^4$.

Länk till svar

7.9) Precis en av uppsättningarna visade sig vara en bas (om inte gjorde du fel). Hitta koordinaterna för den första vektorn i (a) i denna bas. Hitta också koordinaterna för den första vektorn i (c) i denna bas.

Länk till svar

Avsnitt 7.4

7.10) Avgör om $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ där

$$\big(u\big) = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \big(v\big) = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

är en ONB eller inte.

Länk till svar

Avsnitt 7.5

7.11) Bestäm standardmatrisen för avbildningen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ som uppfyller

$$T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\5\\1\end{pmatrix} \quad \text{och} \quad T\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\4\\3\\5\end{pmatrix}$$

Länk till svar

7.12) Bestäm standardmatrisen för avbildningen $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som uppfyller

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{och} \quad T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Länk till svar

Avsnitt 7.6

7.13) I varje av uppgifterna: 6.12, 6.6, 6.7, 6.8, 6.9, 6.15, 6.17 och 6.18 avgör om de linjära avbildning är

(i) Injektiva.

(ii) Surjektiva.

(iii) Bijektiva.

I fall de är bijektiva hitta standardmatrisen för inversen. Notera att i 6.12 är det bara (a), (b), (g) och (h) som är linjära och (g) är rätt svår.

Länk till svar

8 Lösningar och svar

Avsnitt 1.1

1.1) Följande delar argumentet upp i de regler man vanligtvis använder i definitionen av en så-kallad kommutativ ring som de reella tal är ett exempel på.

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) \overset{\text{c)}}{=} (x+y)x + (x+y)y \overset{2\cdot\text{b)}}{=} x(x+y) + y(x+y)$$
$$\overset{2\cdot\text{c)}}{=} x^2 + xy + yx + y^2 \overset{\text{b)}}{=} x^2 + 2xy + y^2 \overset{\text{a)}}{=} x^2 + y^2 + 2xy.$$

Länk till uppgift

1.2) Av symmetri kan vi anta $a \geq b$. Vi bevisar i fyra täckande fall.

- Om $a \geq b \geq 0$ då är $|a+b| = a+b = |a| + |b|$.
- Om $0 \geq a \geq b$ då är $|a+b| = -a-b = |a| + |b|$.
- Om $a \geq 0 \geq b$ och $|a| \geq |b|$ Då är $a+b \geq 0$ och därför är $|a+b| = a+b = |a| - |b| \geq |a| + |b|$.
- Om $a \geq 0 \geq b$ och $|a| \leq |b|$: Då är $a+b \leq 0$ och därför är $|a+b| = -a-b = -|a| + |b| \geq |a| + |b|$.

Länk till uppgift

1.3) Per symmetri i a och b får vi anta att $|a| \geq |b|$. Från uppgiften ovan ses att

$$|a| = |a+b-b| \leq |a+b| + |b|$$

och därför att

$$||a| - |b|| = |a| - |b| \leq |a+b|.$$

Länk till uppgift

Avsnitt 1.2

1.4) $A = (3, 1)$, $B = (-2, 0)$, $C = (-2, 1)$,
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ och $\vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}$

Länk till uppgift

1.5) $\vec{0}$

Länk till uppgift

1.6) $4\overrightarrow{AC}$

Länk till uppgift

1.7) $\overrightarrow{AC}$

Länk till uppgift

1.8) $\overrightarrow{DC}$

Länk till uppgift

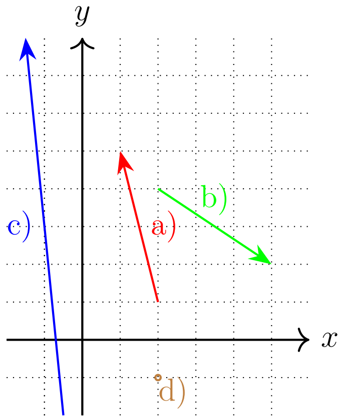
1.9) Svar:

(a) $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{0}$.



Länk till uppgift

1.10) Svar: $k = \pm 2$.

Länk till uppgift

1.11) Svar: $\vec{v} = \vec{0}$

Länk till uppgift

Avsnitt 1.3

1.12) svar: 5.

Länk till uppgift

1.13) svar: $5\sqrt{5}$.

Länk till uppgift

1.14) svar: $\hat{v} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Länk till uppgift

1.15) svar: $\hat{v} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Länk till uppgift

1.16) Då de är parallella är den ena en omskalning av den andra om det inte är så att $\vec{v} = k\vec{w}$ är vi färdiga. I detta fallet är $k \neq 0$ då $\vec{v} \neq \vec{0}$ (enligt Sats 1.2.(a)) så därför gäller

$$\vec{v} = k\vec{w} \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{k}\vec{v} = \tfrac{1}{k}(k\vec{w}) = \vec{w}.$$

Igen sista delan enligt Sats 1.2.

Länk till uppgift

1.17) Då båda är nollskilda (oberoende på a) ska vi enligt Uppgift 1.16 hitta de a där det finns k så att

$$k\begin{pmatrix} a \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ a \end{pmatrix}.$$

Detta är två ekvationer $ka = 2$ och $3k = a$ som måste gälla samtidigt. Substitueras den andra in i den förste fås $3k^2 = 2$ så $k = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. Vilket ger $a = 3k = \pm\sqrt{6}$. Vi kollar att vi faktiskt har hittat lösningar:

$$\sqrt{\tfrac{2}{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad -\sqrt{\tfrac{2}{3}}\begin{pmatrix} -\sqrt{6} \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Så alla lösningarna är $a = \pm\sqrt{6}$.

Länk till uppgift

1.18) Då den sista vektorn är nollskild (oberoende på a och b) ska vi enligt Uppgift 1.16 hitta de a och b så att det finns k så att

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} ab \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ser vi på andra koordinaten får vi direkt att $k = b$. Det är därför ekvivalent att $a = ab^2$ enligt förste koordinaten. Detta har lösningarna:

- $a = 0$ och $b \in \mathbb{R}$ godtycklig.
- $b = \pm 1$ och $a \in \mathbb{R}$ godtycklig.

Länk till uppgift

1.19) [a] och [b] Om $\vec{v} = k\vec{w} \Leftrightarrow \frac{1}{k}\vec{v} = \vec{w}$ där $k > 0$ blir deras normeringer:

$$\hat{w} = \frac{1}{\|w\|}\vec{w} = \frac{1}{\|w\|}\frac{1}{k}\vec{v} = \frac{1}{\|v\|}\vec{v} = \hat{v}$$

så de definierar samma punkt på enhetscirkeln - så vinkeln är 0. Om $\vec{v} = k\vec{w} \Leftrightarrow \frac{1}{k}\vec{v} = \vec{w}$ där $k < 0$ blir deras normeringar:

$$\hat{w} = \frac{1}{\|w\|}\vec{w} = \frac{1}{\|w\|}\tfrac{1}{k}\vec{v} = \frac{1}{-\|v\|}\vec{v} = -\hat{v}$$

så de definierat motsatt punkt på enhetscirkeln - så vinkeln är π. Å andra siden Om de definierar samma eller motsatt riktning så är

$$\frac{1}{\|v\|}\vec{v} = \hat{v} = \pm\hat{w} = \pm\frac{1}{\|w\|}\vec{w}$$

så $\vec{v} = \pm\frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{w}\|}\vec{w}$ vilket visar att $\vec{v}$ är en omskalningav av $\vec{w}$. Så vektorerna är parallella.

Länk till uppgift

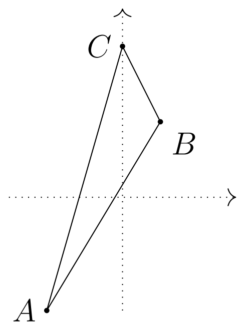
1.20) svar:(()a) 4. (b) 0, (c):-220

Länk till uppgift

1.21) Svar: (a) $\arccos(\frac{2}{\sqrt{5}})$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\arccos(-\frac{220}{221})$ (nästen π).

Länk till uppgift

1.22) Om man ritar en figur:



så ser man att kanske vinkel B är trubbig. Så vi hittar denna: $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}$ och $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ så

$$\angle B = \overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{BA} = -1 \cdot (-3) + 2 \cdot (-5) = -7 < 0$$

Så vinkel B och därför triangeln är trubbig enligt Anmärkning 1.3.6.

(I det spetsiga fallet måste man i princip visa spetsighet för alla tre vinklar.)

Länk till uppgift

Avsnitt 1.4

1.23) En riktningsvektor (vektor parallell med linjen) kan väljas som vektorn där pekar mellan de två punkterna:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix}2-(-3)\\1-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}.$$

En parameterform kan därför vara:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Länk till uppgift

1.24) Igen är en möjlig riktningsvektor:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2-(-3) \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

En vektor ortogonal mot denna är:

$$R\left(\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

därför blir (enligt förklaringen i avsnittet)

$$x + 5y = c$$

en ekvation för linjen om vi hittar rätt c. Detta c kan hittas genom att sätta in ett av punkterna:

$$c = 2 + 5 \cdot 1 = 7.$$

Svar: $x + 5y = 7$. Vi dubbelkolla att vi har rätt svar genom att sätta in den annan punkt och se att den uppfyller ekvationen:

$$-3 + 5 \cdot 2 = 7. \qquad \text{OK.}$$

Länk till uppgift

1.25) Vi sätter in parameterformen i ekvationen:

$$2(3+t) - 7(-7-3t) = 100 \quad \Rightarrow \quad 6 + 2t + 49 + 21t = 100 \quad \Rightarrow \quad 23t = 45.$$

Detta ger $t = \frac{45}{23}$ och därför är skärningspunkten:

$$(x, y) = (3 + \frac{45}{23}, -7 - 3\frac{45}{23}) = (4 + \frac{22}{23}, -13 + \frac{3}{23}).$$

Länk till uppgift

1.26) Vi löser båda samtidigt:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

om vi adderar dem ser vi att $x = 1$ och därför enligt förste ekvationen är $y = 2$ (som vi också dubbelkollar uppfyller andra ekvationen). Så skärningen är $(x, y) = (1, 2)$.

Länk till uppgift

1.27) Vi skriver en ekvation för linjen k genom Q ortogonal mot l: Denna har normalvektor givet av ls riktningsvektor:

$$\vec{n}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

så vi får en ekvation av typen $x + 7y = c$ och vi hittar c genom att sätta in Q: $c = 10 + 7 \cdot 10 = 80$. Så ekvationen är $x + 7y = 80$. Vi hittar skärningen genom att sätta in parameterformen för l i denna:

$$(2 + t) + 7(4 + 7t) = 80 \quad \Rightarrow \quad 50t = 50.$$

Så $t = 1$ och därför blir närmaste punkten

$$N = (2 + 1, 4 + 7t) = (3, 11)$$

avståndet blir

$$d(Q, N) = \|\overrightarrow{QN}\| = \left\| \begin{pmatrix} 10 - 3 \\ 10 - 11 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}.$$

Länk till uppgift

1.28) Vi har normalvektorn $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ till l (koefficienterna framför x och y). Så vi kan använda denna som en riktningsvektor för linjen genom Q ortogonal mot l:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ a \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

denna sätter vi in i ekvationen för att hitta det t som motsvara N:

$$1(-1 + 1t) - 2(a - 2t) = -1 \quad \Rightarrow \quad 5t = 2a$$

som ger $t = \frac{2a}{5}$ och detta sätts in för att hitta

$$N = (-1 + \tfrac{2a}{5}, a - 2\tfrac{2a}{5}) = (\tfrac{2a-5}{5}, \tfrac{a}{5}).$$

Som kontroll sättar vi in detta och ser att det uppfyller ekvationen för linjen (gör det själv).

Länk till uppgift

Avsnitt 1.5

1.29) svar: $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Länk till uppgift

1.30) svar: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Länk till uppgift

1.31) svar: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Länk till uppgift

1.32) Svar: vektorerna man ska projicera på är parallella med x och y axlarna (och speciellt ortogonala mot varandra). Dessutom är det entydiga sätt att skriva $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ som en vektorer parallell med den ena plus en vektor parallell med den andra:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Detta är ju i princip bara x koordinaten och y koordinaten separerat i två delar och det förklarar projektionerna.

Länk till uppgift

1.33) De är ortogonala mot $\vec{v}$

Länk till uppgift

Avsnitt 2.1

2.1) Om man håller upp sina två händer så att de två tummor är parallella och de två pekfinger är parallella då pekar de två långfinger åt olika håll. Så man får den motsatta konvention.

Länk till uppgift

2.2) Svar:

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -1002 \\ 1000 \\ 3997 \end{pmatrix}$

Länk till uppgift

2.3) Ritar man en figur (behöver inte vara verklighetstrogen) ser man att

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

då $A = (0, 0, 0)$ ger detta

$$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Länk till uppgift

Avsnitt 2.2

2.4) svar: $\sqrt{51}$

Länk till uppgift

2.5)

(a) $\sqrt{3}$ och $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) 3 och $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

(c) 13 och $\frac{1}{13} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$.

(d) $\sqrt{99}$ och $\frac{1}{\sqrt{99}}\begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Länk till uppgift

Avsnitt 2.3

2.6) Vi skriver ut de reella tal som de tre ”sidor” definierar:

$$\begin{aligned} a(\vec{v} \bullet \vec{w}) =& a(v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3) \\ (a\vec{v}) \bullet \vec{w} =& (av_1)w_1 + (av_2)w_2 + (av_3)w_3 \\ \vec{v} \bullet (a\vec{w}) =& v_1(aw_1) + v_2(aw_2) + v_3(aw_3) \end{aligned}$$

som enligt vanliga räkneregler för $\mathbb{R}$ är samma sak (sätt a utan för en parentes i de två sista).

Länk till uppgift

2.7) svar:(a) 0. (b) 14. (c) 122

Länk till uppgift

2.8) Svar: (a) $\frac{\pi}{2}$. (b) $\arccos(\frac{14}{\sqrt{12\cdot 19}})$. (c) $\arccos(\sqrt{\frac{122}{123}})$ (nästen 0).

Länk till uppgift

2.9) Det är lite svårt att rita figurer i 3D som visar situationen bra. Så vi beräknar skalärprodukten av vektorer som representerar riktningarna av sidorna: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}$ och $\overrightarrow{AC} = 2, 7, 0$ vilket har skalär produkt:

$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 6 + 25 + 0 = 41 > 0$$

Så vinkel A är spetsig. Liknande är $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$ och $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$ så

$$\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC} = 3 - 10 + 100 = 93 > 0$$

så vinkel B är också spetsig. Och $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -10 \end{pmatrix}$ så

$$\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC} = -2 + 14 + 0 = 12 > 0$$

Så alla tre vinklar är spetsiga och därför är triangeln spetsig (enligt Anmärkning 1.3.6).

Länk till uppgift

2.10) Vi gör som i Uppgift 2.9 men med a istället för 10:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -a \end{pmatrix}$ och $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ så

$$\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 6 + 25 + 0 = 41 > 0$$

Så vinkel A är alltid spetsig (dock beror denna vinkel på a även om skalärprodukten inte gör detta).

Liknande är $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -a \end{pmatrix}$ så

$$\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC} = -2 + 14 + 0 = 12 > 0$$

också alltid spetsig.

För vinkel B: $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ a \end{pmatrix}$ och $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$ så

$$\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC} = 3 - 10 + a^2 = a^2 - 7.$$

Så svaret blir

- ABC är Spetsig om $|a| > \sqrt{7}$.
- ABC är rätvinklat om $a = \pm\sqrt{7}$.
- ABC är trubbig när $a \in]-\sqrt{7}, \sqrt{7}[$.

Länk till uppgift

Avsnitt 2.4

2.11) svar: $\varnothing$ (den tomma mängd). De skär alltså inte. Det är för linjen och planet råkar vara parallella (och linjen ligger *inte* i planet).

Länk till uppgift

2.12) Vi sätter in och löser:

$$2(1-t)+2(1+2t)+1=1 \quad \Rightarrow \quad 2t=-4$$

Så vi har lösningen $t=-2$ som motsvarar punkten:

$$(x,y,z)=(1-(-2),1+2(-2),1)=(3,-3,1).$$

Länk till uppgift

Avsnitt 2.5

2.13)

(a) $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$ (koefficienter framför x, y och z i ekvationen).

(b)

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$$

(c) Vi sätter in

$$(1+t)-2(1-2t)-3(1-3t)=1 \quad \Rightarrow \quad 1+t-2+4t-3+9t=1$$

så $t=\frac{5}{14}$ och punkten N blir

$$N=(1+\tfrac{5}{14},1-2\tfrac{5}{14},1-3\tfrac{5}{14})=(\tfrac{19}{14},\tfrac{4}{14},\tfrac{-1}{14})$$

Sedan $t\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$ faktiskt är vektorn som pekar ifrån Q till N tar vi dennas längd:

$$d(Q,\pi)=d(Q,N)=\frac{5}{14}\left\|\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}\right\|=\frac{5}{14}\sqrt{14}=\frac{5}{\sqrt{14}}$$

Länk till uppgift

2.14) Svar (Metod: Uppgift 2.13 (a) till (a)): $(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{1}{3})$.

Länk till uppgift

2.15) Svar (för metod se Exempel 2.5.1): $(1, 2, -1)$ (motsvarande $t = 0$ på linjen).

Länk till uppgift

2.16) Man kan t.ex. ta xy-planet (som är givet av ekvationen $z = 0$) och linjen parallell med x axlen genom $(0, 0, 1)$. Om man tar punkten till $(0, 0, 0)$ i planet blir avståndet 1 (visa själv detta). Om man istället tar $(0, 10, 0)$ blir avståndet $\sqrt{101}$ (vis också detta själv om du vill).

Länk till uppgift

2.17) Riktingsvektorn

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

för linjen (koefficienterna framför t) är ortogonal mot planet då

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0.$$

Här är den andra vektorn normalvektorn man får genom att se på koefficienterna framför x, y och z i ekvationen. För att hitta avståndet tar vi därför en godtycklig punkt på linjen t.ex. för $t = 0$ får vi $(-1, 0, 0)$. Formeln i Ekvation (2.5) ger nu avståndet

$$\frac{|10 - (-1)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{11}{\sqrt{6}}.$$

Länk till uppgift

Avsnitt 2.6

2.18) De är ortogonala mot $\vec{v}$.

Länk till uppgift

2.19) svar (för metod se Exempel 2.6.1: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Länk till uppgift

2.20) Då planet går genom origo kan vi använde ortogonal projektion direkt om vi använder ortsvektorer i stället för punkter:

$$\text{proj}_{\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}0\\0\\100\end{pmatrix}=\frac{2\cdot 0+(-1)\cdot 0+1\cdot 100}{2^2+(-1)^2+1^1}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\frac{50}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Detta är den del i Ekvation (2.7) som kallas $\vec{a}$, vi är efter den del som ligger i planet och detta är $\vec{b}$ i den formel:

$$\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\0\\100\end{pmatrix}-\frac{50}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-100\\50\\250\end{pmatrix}$$

Detta betyder är närmaste punkten är $(\frac{-100}{3},\frac{50}{3},\frac{250}{3})$.

Länk till uppgift

Avsnitt 3.2

3.1) a) $\left(\begin{array}{cc|c}1&2&3\\4&5&6\end{array}\right)$ b) $\left(\begin{array}{ccc|c}1&5&0&-1\\3&0&-1&2\\1&4&6&4\end{array}\right)$ c) $\left(\begin{array}{ccc|c}3&-1&7&0\\4&1&11&0\end{array}\right)$ d) $\left(\begin{array}{ccc|c}0&3&2&3\\1&0&-1&1\\0&4&0&4\end{array}\right)$

Länk till uppgift

3.2) a) $\begin{cases}x_1+3x_2-x_3=2\\ \qquad\qquad\; x_3=4\end{cases}$ b) $\begin{cases}x_1 \qquad\quad = -1\\ \qquad\quad x_2 = \;\;4\\ 3x_1+6x_2=\;\;5\end{cases}$

c) $\begin{cases}x_1 \qquad\quad = -2\\ \quad x_2 \quad = \;\;4\\ \qquad\quad 0 = \;\;0\end{cases}$ d) $\begin{cases}2x_2+\;\;x_3=4\\ \qquad -x_3=6\end{cases}$

Länk till uppgift

3.3) a) Entydig lösning $(x,y)=(2,-1)$.
b) Entydig lösning $(x,y,z)=(1,3,-4)$.
c) Ingen lösning.
d) Entydig lösning $(x,y)=(3,2)$.
e) Oändligt många lösningar $(x,y,z)=(3+2t,t,-1), t\in\mathbb{R}$.

Länk till uppgift

Avsnitt 3.4

3.4) a) Entydig lösning $(x, y, z) = (-2, 3, 0)$.
b) Ingen lösning.
c) Oändligt många lösningar $(x, y, z, w) = (1-2s+t, s, 2+3t, t), s, t \in \mathbb{R}$
d) Oändligt många lösningar
$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (-2s + t, 2s - 3u, -s - t - u, s, t, u), s, t, u \in \mathbb{R}$.
e) Oändligt många lösningar $(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, t), t \in \mathbb{R}$.

Länk till uppgift

3.5) a) Om $a = 2$ finns ingen lösning. Koefficientmatrisen har rang 1 och totalmatrisen har rang 2. Om $a = -2$ finns oändligt många lösningar $(x, y) = (-2 + t, t), t \in \mathbb{R}$. Både koefficientmatrisen och totalmatrisen har rang 1. För övriga a finns entydig lösning $(x, y) = (\frac{4}{a-2}, \frac{-4}{a-2})$. Både koefficientmatrisen och totalmatrisen har rang 2.
b) Om $a = -3$ finns oändligt många lösningar $(x, y, z) = (1+2t, -3t, t), t \in \mathbb{R}$. Både koefficientmatrisen och totalmatrisen har rang 2. För övriga a finns entydig lösning $(x, y, z) = (3, -3, 1)$. Både koefficientmatrisen och totalmatrisen har rang 3.
c) Om $a = 1$ finns ingen lösning. Koefficientmatrisen har rang 2 och totalmatrisen har rang 3. Om $a = -1$ finns oändligt många lösningar $(x, y, z) = (-1+t, 4-3t, t), t \in \mathbb{R}$. Både koefficientmatrisen och totalmatrisen har rang 2. För övriga a finns entydig lösning $(x, y, z) = (\frac{-1}{a-1}, \frac{1}{a-1}, \frac{a-2}{a-1})$. Både koefficientmatrisen och totalmatrisen har rang 3.

Länk till uppgift

Avsnitt 4.2

4.1) $\begin{pmatrix}1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$

Länk till uppgift

4.2) $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$

Länk till uppgift

4.3) a) $\begin{pmatrix}5 & 2 & 1\\ 1 & 6 & -1\end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix}-3 & -4 & 3\\ 5 & -2 & 11\end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix}2 & -2 & 4\\ 6 & 4 & 10\end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix}5 & 2 & 1\\ 1 & 6 & -1\end{pmatrix}$.

Länk till uppgift

4.4) a) Lösningar: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3t \\ -1+2t \\ t \end{pmatrix}$, $\quad t \in \mathbb{R}$. b) Inga lösningar.

Länk till uppgift

4.5) a) $\begin{pmatrix} -11 \\ 10 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 9 \\ -5 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} -20 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Länk till uppgift

4.6) a) $\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 10 \\ 4 & -4 & 8 \\ -7 & -1 & -10 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Länk till uppgift

4.7)

a) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 3 & 2 \\ 5 & 8 & -7 & 10 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$

b) $AB = \begin{pmatrix} -9 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad BA$ odefinierad.

c) $AB = \begin{pmatrix} 55 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \end{pmatrix}.$

d) AB odefinierad, $\quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$

Länk till uppgift

4.8) a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *d*) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Länk till uppgift

Avsnitt 4.3

4.9) $X = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Länk till uppgift

4.10) $AC = CA = I_3$.

Länk till uppgift

4.11) $X = \begin{pmatrix} 2 & -8 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Länk till uppgift

4.12) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Länk till uppgift

4.13) a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, c) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Länk till uppgift

4.14)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Länk till uppgift

4.15)

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

Länk till uppgift

4.16) Matrisen är inverterbar om och endast om $a \neq 1$ och $a \neq -1$.

Länk till uppgift

4.17) Eftersom $ABB^{-1}A^{-1} = AA^{-1} = I$, så är AB inverterbar med $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Länk till uppgift

4.18) Inverteringen av en rotation med vinkeln α är rotation med vinkeln $-\alpha$ så inversen är

$$\begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Länk till uppgift

Avsnitt 4.4

4.19) a) $\det A = -1$ och $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, b) $\det B = 0$ så B är inte inverterbar,
c) $\det C = -2$ och $C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, d) $\det D = 0$ så D är inte inverterbar.

Länk till uppgift

4.20) a) $\det A = 14$ så A är inverterbar, b) $\det B = 0$ så B är inte inverterbar. c) $\det C = 10$ så C är inverterbar.

Länk till uppgift

4.21) -12.

Länk till uppgift

4.22)

a) $A^\top = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -6 \\ 1 & 3 & -3 \\ 4 & 7 & 9 \\ -1 & -8 & 13 \\ 2 & 11 & 1 \end{pmatrix}$. Varken $\det A$ eller $\det A^\top$ är definierade.

b) $A^\top = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Observera att $\det A = \det A^\top$ gäller för varje kvadratisk matris A. I detta fall är $\det A = \det A^\top = 7$.

c) $A^\top = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 & 4 \\ 7 & 9 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Varken $\det A$ eller $\det A^\top$ är definierade.

Länk till uppgift

4.23) a) Om $a \neq 2$ har systemet entydig lösning. Om $a = 2$ har systemet oändligt många lösningar $(x_1, x_2) = (\frac{1}{2} - 2t, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

b) Om $a \neq 2$ och $a \neq 3$ har systemet entydig lösning. Om $a = 3$ har systemet ingen lösning. Om $a = 2$ har systemet oändligt många lösningar $(x_1, x_2, x_3) = (1 - t, -2 + t, t)$ $t \in R$.

c) Om $a \neq 0$, $a \neq 2$ eller $a \neq -2$, så har systemet entydig lösning. Om $a = 0$ eller $a = 2$ har systemet ingen lösning. Om $a = -2$ har systemet oändligt många lösningar $(x_1, x_2, x_3) = (-\frac{t}{2}, -1 - t, t)$ $t \in R$.

Länk till uppgift

4.24) Determinanten är 0 för $x \in \{-1, 0, 1, 2\}$.

Länk till uppgift

4.25) 24.

Länk till uppgift

4.26) Determinanten är 0 för $x \in \{0, 1, 2\}$.

Länk till uppgift

4.27) Matrisen är inverterbar för $x \notin \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

Länk till uppgift

Avsnitt 5.1

5.1) Svar: T.ex. $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Länk till uppgift

5.2) Svar: $-x + y + 2z = 0$.

Länk till uppgift

5.3) Svar: Arean av längden av vektorprodukten som vi hittade i Uppgift 5.1:

$$\text{Area} = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}.$$

Länk till uppgift

5.4) Vi hittar två av sidorna som vektorer:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ 7-(-2) \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 9-3 \\ 1-(-2) \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Deras vektorprodukt är

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 9\cdot 1 - 1\cdot 3 \\ -(-3\cdot 1 - 1\cdot 6) \\ -3\cdot 3 - 9\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -63 \end{pmatrix}$$

Arean är hälften av längden av denna (se Exempel 5.1.3):

$$\text{Area}(\triangle ABC) = \tfrac{1}{2}\left\| \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -63 \end{pmatrix} \right\| = \tfrac{3}{2}\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -21 \end{pmatrix} \right\| = \tfrac{3}{2}\sqrt{4+9+441} = \tfrac{3}{2}\sqrt{454}.$$

Länk till uppgift

5.5) Två vektorer i $\mathbb{R}^3$ är parallella om och endast deras vektorprodukt är $\vec{0}$. Vi tar därför vektorprodukten

$$\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2a \\ 2-2a \\ a^2-1 \end{pmatrix}$$

och ser att detta blir $\vec{0}$ om och endast om $a = 1$. Svar: $a = 1$.

Länk till uppgift

Avsnitt 5.2

5.6) Ledning: Skriv ut båda sidorna och beräkna

Länk till uppgift

5.7) Sats 5.3.(c) säger direkt att detta är $\vec{0}$.

Länk till uppgift

5.8) Vi har enligt Sats 5.3.(c) att

$$(\vec{v} \bullet \vec{w})^2 = \|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\|^2 - \|\vec{v} \times \vec{w}\|^2 = 3^2 \cdot 3^2 - 2^2 = 77.$$

Då vinkeln är trubbig vet vi att skalärprodukten är negativ så därför är

$$\vec{v} \bullet \vec{w} = -\sqrt{77}$$

så vinklen blir

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}\right) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{77}}{9}\right).$$

Länk till uppgift

5.9) Vi har enligt Sats 5.3.(c) att

$$\|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\|^2 = (\vec{v} \bullet \vec{w})^2 + \|\vec{v} \times \vec{w}\|^2 = 9 + 16 = 25.$$

Så vinklen blir

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}\right) = \arccos\left(\frac{3}{5}\right).$$

Länk till uppgift

5.10) Först hittar vi $\|\vec{w}\|$ genom

$$5^2 = \|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = (\vec{v} + \vec{w}) \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{v} \bullet \vec{w} + \|\vec{w}\|^2 = 4 + 8 + \|\vec{w}\|^2$$

som visar att $\|\vec{w}\|^2 = 13$. Så använder vi Sats 5.3.c)

$$\|\vec{v} \times \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\|^2 - (\vec{v} \bullet \vec{w})^2 = 4 \cdot 13 - 16 = 36.$$

så $\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \sqrt{36} = 6$.

Länk till uppgift

5.11) Vi använder reglerna från Sats 5.3:

$$\begin{aligned}
(a\vec{v} + b\vec{w}) \times (c\vec{v} + d\vec{w}) &\overset{\text{d)}}{=} (a\vec{v} + b\vec{w}) \times (c\vec{v}) + (a\vec{v} + b\vec{w}) \times (d\vec{w}) = \\
&\overset{\text{e)}}{=} -(c\vec{v}) \times (a\vec{v} + b\vec{w}) - (d\vec{w}) \times (a\vec{v} + b\vec{w}) = \\
&\overset{2\cdot\text{d)}}{=} -\Big((c\vec{v}) \times (a\vec{v}) + (c\vec{v}) \times b\vec{w}) + (d\vec{w}) \times (a\vec{v}) + (d\vec{w}) \times (b\vec{w})\Big) = \\
&\overset{8\cdot\text{f)}}{=} -\Big(ac(\vec{v} \times \vec{v}) + bc(\vec{v} \times \vec{w}) + ad(\vec{w} \times \vec{v}) + bd(\vec{w} \times \vec{w})\Big) = \\
&\overset{2\cdot\text{g)}}{=} -\Big(bc(\vec{v} \times \vec{w}) + ad(\vec{w} \times \vec{v})\Big) \overset{\text{e)}}{=} (ad - bc)\vec{v} \times \vec{w} = \\
&= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \vec{v} \times \vec{w}.
\end{aligned}$$

Det sista steg kanske inte är en förenkling och svaret direkt innan är bättre, men det ger lite insikt.

Länk till uppgift

Avsnitt 5.3

5.12) Enligt Sats 5.4 är detta absolut beloppet av

$$\begin{vmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 9 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -2 \; -2 \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & 13 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 13 \end{vmatrix} = -42$$

So volymen är 42.

Länk till uppgift

5.13) Detta händer om och endast om parallellepipeden som de definierar har volym 0. Så vi beräknar denna beroende på a:

$$\begin{vmatrix} a & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 9 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -2 \; -2 \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} a-4 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & 13 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a-4 & 1 \\ -3 & 13 \end{vmatrix} = 49 - 13a.$$

Så det händer om och endast om $a = \frac{49}{13}$.

Länk till uppgift

Avsnitt 6.1

6.1) svar: $\sqrt{78}$.

Länk till uppgift

6.2) Skalärprodukten är

$$\vec{v} \bullet \vec{w} = -1 \cdot 0 + 3 \cdot (-4) - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 7 = 2.$$

Längderna är

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1+9+4+1+4} = \sqrt{19}, \qquad \|\vec{w}\| = \sqrt{0+16+1+4+49} = \sqrt{70}.$$

så vinkeln blir

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{v} \bullet \vec{w}}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|}\right) = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{19}\sqrt{70}}\right)$$

vilket är väldigt nära en rättvinkel.

Länk till uppgift

6.3) Vi såg i uppgiften ovan att längden av denna är $\sqrt{70}$ så normeringen blir

$$\hat{w} = \frac{1}{\sqrt{70}} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Länk till uppgift

6.4) svar:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Länk till uppgift

Avsnitt 6.2

6.5) Svar: $T_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \sin(x_1) + x_2$ och $T_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \cos(x_1 x_2)$

Länk till uppgift

Avsnitt 6.3

6.6) Svar:

$$[s_3] = 3I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Länk till uppgift

6.7) Svar:

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(båda versioner accepteras).

Länk till uppgift

6.8) svar (för metod se Exempel 6.3.5):

$$[T] = \left(T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \pi & 1 & 1 \\ \pi^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Länk till uppgift

6.9) svar:

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Länk till uppgift

Avsnitt 6.4

6.10) Enligt Definition 6.6 är

$$T = (\vec{0}) = T(0\vec{0}) = 0T(\vec{0}) = \vec{0}.$$

Länk till uppgift

6.11) svar(se Exempel 6.4.3):

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Länk till uppgift

6.12) Svar: a) ja, b) ja, c) nej, d) nej, e) nej, f) nej, g) ja - enligt räkneregler för skalär produkten, h) ja.

Länk till uppgift

6.13) (a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, (g) om $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ och liknande för $\vec{b}$ och $\vec{c}$ då är standardmatrisen $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$, (h) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Länk till uppgift

6.14) Vi visar (i) och (ii) i Definition 6.6 genom att använda att vi vet dem för båda S och T:

$$\begin{aligned} (i) \quad (S+T)(\vec{v}+\vec{w}) &= S(\vec{v}+\vec{w}) + T(\vec{v}+\vec{w}) = \\ &= S(\vec{v}) + S(\vec{w}) + T(\vec{v}) + T(\vec{w}) = \\ &= S(\vec{v}) + T(\vec{v}) + S(\vec{w}) + T(\vec{w}) = (S+T)(\vec{v}) + (S+T)(\vec{w}). \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} (ii) \quad (S+T)(k\vec{v}) &= S(k\vec{v}) + T(k\vec{v}) = kS(\vec{v}) + kT(\vec{v}) = \\ &= k(S(\vec{v}) + T(\vec{v})) = k(S+T)(\vec{v}). \end{aligned}$$

Länk till uppgift

Avsnitt 6.5

6.15) Svar: linjen $(x, y) = (-1, 3t), t \in \mathbb{R}$.

Länk till uppgift

Avsnitt 6.6

6.16) Enligt Formeln för ortogonal projektion är

$$P\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} = \frac{1x+1y}{1^2+1^2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}x+y\\x+y\end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

Så standardmatrisen är:

$$[P] = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

Länk till uppgift

6.17) svar:(a) $[P] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\-1&1&2\end{pmatrix}$ (b) $k:\ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\5\\4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-4\\-5\end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$.

Länk till uppgift

6.18) svar: $[S] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\-2&2&1\end{pmatrix}$

Länk till uppgift

Avsnitt 6.7

6.19) Svar: Den ifrån (a) kan sammansättas med dem ifrån (b) och (g), men bara på den ena sidan, och multiplikation med 0 matris ger 0 matris (av storlek 3×2 i båda fallen). (h) kan också sammansättas med (b) och (g) men på den andra sidan och resultatet blir: $\begin{pmatrix}-3 & 1\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}a_1+b_1+2c_1 & a_2+b_2+2c_2\end{pmatrix}$. Här är bada 1×2 matriser.

Länk till uppgift

Avsnitt 7.1

7.1) Vi skriver upp matrisen för motsvarande ekvationsystem (se Exempel 7.1.2):

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&0&b_1\\0&0&b_2\\-1&1&3\end{array}\right)\begin{array}{c}1\\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c}1&0&b_1\\0&1&3\\0&0&b_2\end{array}\right)$$

så vi ser att vi har lösningar precis när $b_2 = 0$.

Länk till uppgift

7.2) Vi skriver upp motsvarande matris

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \; 1 \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

så vi ser att vi har rang 2 och därför är spannet *inte* hela $\mathbb{R}^3$.

Länk till uppgift

7.3) Vi ska hitta de $a \in \mathbb{R}$ där

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

har en lösning (c_1, c_2, c_3). Detta har totalmatris

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & a & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \; -4 \; -3 \; -1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \; 3-a \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4-a & 6-a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \; 4-a \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (6-a)(4-a) \end{array}\right)$$

Vi ser att vi har lösningar precis när $a \in \{4, 6\}$ (två lösningar).

Länk till uppgift

Avsnitt 7.2

7.4) Vi skriver upp relevanta matrisen och radopererar

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix} \; -6 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -12 & -5 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix} \; 12 \; -7 \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; 5 \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vi ser att vi har rang 3 och därför är vektorerna linjärt oberoende.

Länk till uppgift

Avsnitt 7.3

7.5) Vi skriver upp relevanta matrisen och tar determinant för att avgöra om den är inverterbar:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & a \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

Länk till uppgift

7.6)

(a) Spänner inte upp $\mathbb{R}^4$ (måste ha minst 4).

(b) Spänner upp $\mathbb{R}^4$.

(c) Spänner upp $\mathbb{R}^4$.

(d) Spänner inte upp $\mathbb{R}^4$.

(e) Spänner inte upp $\mathbb{R}^4$

Länk till uppgift

7.7)

(a) Är linjärt oberoende.

(b) Är linjärt beroende (för många vektorer).

(c) Är linjärt oberoende.

(d) Är linjärt beroende.

(e) Är linjärt beroende.

Länk till uppgift

7.8)

(a) Är ej en bas.

(b) Är ej en bas.

(c) Är en bas.

(d) Är ej en bas.

(e) Är ej en bas.

Länk till uppgift

7.9) Det var (c) som var en bas, och koordinaterna för den första vektor i en bas är alltid av typen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

För att hitta koordinaterna för första vektorn i (a) i denna bas måste vi lösa

$$c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Detta kan lösas (och ser man bort ifrån sista kolonnen är det också något man redan har gjord del av för att avgöra de andra grejar) genom att skriva upp totalmatrisen och lösa:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -3 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} 2 \; 2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -7 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & -7 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -7 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & -7 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 3 \; -2 \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -10 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 1 \end{array}\right) -1 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & -5 & 1 \end{array}\right) -3 \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \end{array}\right) 2 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 12 \end{array}\right) 1\;3 \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 28 & 21 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 12 \end{array}\right) \tfrac{1}{15} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 28 & 21 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \end{array}\right) -10\;-9\;-28 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{5} \end{array}\right)$$

Så koordinaterna för vektorn i basen är alltså:

$$\begin{pmatrix} -\frac{7}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ -1 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Länk till uppgift

Avsnitt 7.4

7.10) Vi beräknar de 6 olika skalärprodukterna:

$$\begin{aligned} \vec{u} \bullet \vec{u} &= \tfrac{1}{9}(1^2 + 2^2 + 2^2) = 1 \\ \vec{u} \bullet \vec{v} &= \tfrac{1}{9}(1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-2)) = 0 \\ \vec{u} \bullet \vec{w} &= \tfrac{1}{9}(1 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 1) = 0 \\ \vec{v} \bullet \vec{v} &= \tfrac{1}{9}(2^2 + 1^2 + (-2)^2) = 1 \\ \vec{v} \bullet \vec{w} &= \tfrac{1}{9}(2 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1) = 0 \\ \vec{v} \bullet \vec{v} &= \tfrac{1}{9}(2^2 + (-2)^2 + 1^2) = 1 \end{aligned}$$

och ser att det är en ONB.

Länk till uppgift

Avsnitt 7.5

7.11) Svar (För metod se Exempel 7.5.1):

$$[T] = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Länk till uppgift

7.12) Svar (För metod se Exempel 7.5.1):

$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Länk till uppgift

Avsnitt 7.6

7.13) Observera att då bijektiv betyder båda injektiv och surjektiv är det nog att svara i varje uppgift:

- -: inga av de tre är uppfyllt.
- I: Enbart injektiv.
- S: Enbart surjektiv.
- B: Bijektiv.

Svar: 6.12: (a) -. (b) I. (g) ”-” om $\vec{a}$, $\vec{b}$ och $\vec{c}$ är parallella med samma linje. Annars I. (h) S. 6.6: B. 6.7: B. 6.8: S. 6.9 S. 6.15 S. 6.17 -. 6.18 B.

Länk till uppgift

Sakregister