1. गुरुत्वाकर्षण

1. खालील तक्त्यातील तीनही स्तंभातील नोंदी मधील संबंध लक्षात घेऊन त्याप्रमाणे तक्ता परत लिहा.

I	II	III
वस्तुमान	m/s^2	केंद्राजवळ शून्य
वजन	kg	जडत्वाचे माप
गुरुत्व त्वरण	Nm^2/kg^2	संपूर्ण विश्वात सारखे
गुरुत्व स्थिरांक	N	उंचीवर अवलंबून आहे.

उत्तर :

I	II	III
वस्तुमान	kg	जडत्वाचे माप
वजन	N	उंचीवर अवलंबून आहे
गुरुत्व त्वरण	m/s^2	पृथ्वीच्या केंद्राजवळ शून्य
गुरुत्व स्थिरांक	Nm^2/kg^2	संपूर्ण विश्वात सारखा

2. खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.
अ. वजन व वस्तुमान यातील फरक काय आहे? एखाद्या वस्तूचे पृथ्वीवरील वस्तुमान व वजन मंगळावरही तेवढेच असतील का? का?
उत्तर : कोणत्याही वस्तूचे वस्तुमान म्हणजे त्यामध्ये असलेल्या द्रव्यसंचयाचे मापन होय. वस्तूचे वस्तुमान विश्वात सगळीकडे सारखे असते व ते कधीही शून्य नसते वस्तुमान ही अदिश राशी असून तिचे SI एकक kg आहे.

एखाद्या वस्तूला पृथ्वी ज्या गुरुत्वीय बलाने आकर्षित करते त्या बलाला वस्तूचे वजन म्हणतात. याची दिशा पृथ्वीच्या केंद्राकडे असते. वस्तूचे वजन त्याच्या पृथ्वीसापेक्ष स्थानानुसार बदलते. पृथ्वीच्या केंद्राशी ते शून्य असते. वजन ही सदिश राशी असून तिचे SI एकक न्यूटन (N) आहे. वजनाचे परिमाण = mg.

वस्तूचे वस्तुमान पृथ्वीवर व मंगळावर समान असेल, परंतु वजन मात्र समान नसेल, कारण g चे मंगळावरील मूल्य पृथ्वीवरील g च्या मूल्यापेक्षा वेगळे आहे.

आ. मुक्त पतन, गुरुत्व त्वरण, मुक्ति वेग व अभिकेंद्री बल म्हणजे काय ?
उत्तर : एखादी वस्तू केवळ गुरुत्वीय बलाच्या प्रभावाने गतिमान असल्यास त्या गतीला मुक्त पतन म्हणतात.

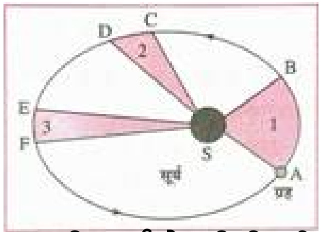
पृथ्वीच्या (अथवा इतर ग्रहाच्या/उपग्रहाच्या/ताऱ्याच्या) गुरुत्वीय बलामुळे वस्तूचे त्वरण होते. या त्वरण पृथ्वीचे (अथवा त्या ग्रहाचे/उपग्रहाचे/ताऱ्याचे) गुरुत्व त्वरण म्हणतात.

ज्या विशिष्ट आरंभ वेगामुळे पृथ्वीच्या (अथवा इतर ग्रहाच्या/उपग्रहाच्या/ताऱ्याच्या) पृष्ठभागापासून सरळ वर जाणारी वस्तू पृथ्वीच्या (अथवा त्या ग्रहाच्या/उपग्रहाच्या/ताऱ्याच्या) गुरुत्वाकर्षणापासून मुक्त होते त्यास मुक्तिवेग म्हणतात. या वेळी वस्तू पृथ्वीपासून (अथवा त्या ग्रहापासून/उपग्रहा पासून/साताऱ्यापासून) अनंत अंतरावर जाऊन स्थिर होईल.

वर्तुळाकार कक्षेत फिरणाऱ्या कोणत्याही वस्तूवर वर्तुळाच्या केंद्राच्या दिशेने बल प्रयुक्त होत असते. या बलास अभिकेंद्री बल म्हणतात.

इ. केप्लरचे तीन नियम लिहा. त्यामुळे न्यूटनला आपला गुरुत्व सिद्धांत मांडण्यात कशी मदत झाली?
उत्तर : केप्लरचा पहिला नियम : ग्रहाची कक्षा ही लंब- वर्तुळाकार असून, सूर्य त्या कक्षेच्या एका नाभीवर असतो.

पुढील आकृतीमध्ये एका ग्रहाची सूर्याभोवतीच्या परिभ्रमणाची लंबवर्तुळाकार कक्षा दाखवली आहे. सूर्याची स्थिती S ने दाखवली आहे.



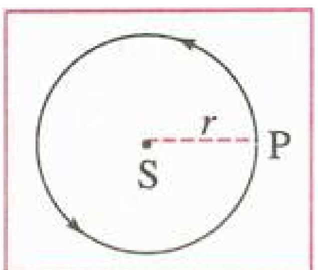
ग्रहाची सूर्याभोवतीची परिभ्रमण कक्षा (प्रारूप आकृती)

केप्लरचा दुसरा नियम : ग्रहाला सूर्याशी जोडणारी सरळ रेषा, ही समान कालावधीत समान क्षेत्रफळ व्यापन करते.

समान कालावधीत ग्रहाचे विस्थापन A →B, C→ D, E→ F असे होते. आकृतीमधील ASB, CSD व ESF ही क्षेत्रफळे समान आहेत.

केप्लरचा तिसरा नियम : सूर्याची परिक्रमा करणाऱ्या ग्रहाच्या आवर्तकालाचा वर्ग हा ग्रहाच्या सूर्यापासूनच्या सरासरी अंतराच्या घनाला समानुपाती असतो. म्हणजे ग्रहाचा आवर्तकाल T असेल व सूर्यापासून ग्रहाचे सरासरी अंतर r असेल, तर

$T^2 \propto r^3$, म्हणजेच ., $\frac{T^2}{r^3}$ स्थिर $= k$



ग्रहाची सूर्याभोवतीची वर्तुळाकार गती

सोयीसाठी आपण ग्रहाची कक्षा वर्तुळाकार घेऊ. येथे S (वर्तुळाचे केंद्र) हे सूर्याचे स्थान, P हे ठरावीक क्षणी ग्रहाचे स्थान व r म्हणजे वर्तुळाची त्रिज्या
(≡ सूर्य व ग्रह यामधील अंतर) होय.

येथे ग्रहाची चाल एकसमान असून ती

$v = \frac{\text{वर्तुळाचा परीघ}}{\text{ग्रहाचा सूर्याभोवती फिरण्याचा आवर्तकाल}} = \frac{2\pi r}{T}$ एवढी असते.

ग्रहाचे वस्तुमान m असल्यास ग्रहावर सूर्याने प्रयुक्त केलेले अभिकेंद्री बल

(≡ गुरुत्वाकर्षणाचे बल), $F = \frac{mv^2}{r}$

$$\therefore F = \frac{m\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r}$$

$$= \frac{4\pi^2 m r^2}{T^2 r}$$

$$= \frac{4\pi^2 m r}{T^2}$$

आता केप्लरच्या तिसऱ्या नियमानुसार,

$T^2 = Kr^2$

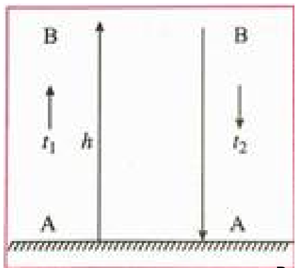
$\therefore\ F = \frac{4\pi^2 mr}{Kr^3} = \frac{4\pi^2 m}{K}\left(\frac{1}{r2}\right)$

येथे, $\frac{4\pi^2 m}{K}$ = स्थिरांक.

$\therefore F \propto \frac{1}{r^2}$.

ई. एक दगड u वेगाने वर फेकल्यावर h उंची पर्यंत पोचतो व नंतर खाली येतो. सिद्ध करा की त्याला वर जाण्यास जितका वेळ लागतो तितकाच वेळ खाली येण्यास लागतो.

उत्तर : गतीविषयक समीकरणे:



A→B दगड वर जातो, B→A दगड खाली येतो.

$v = u + at \quad ...(1)$

व $s = ut + \frac{1}{2}at^2 \quad ...(2)$

(चिन्हांचा अर्थ नेहमीप्रमाणे)

$\therefore\ s = (v - at)\,t + \frac{1}{2}at^2$

$= vt - at^2 + \frac{1}{2}at^2 \quad ...(3)$

दगड वर जाताना

(A → B) [AB = h]

$s = h, t = t_1,$

$a = -g$ (ऋण त्वरण),

$u = u$ व $v = 0$

∴ समीकरण (3)वरून

$h = 0 - \frac{1}{2}(-g)t_1^2$

$\therefore h = \frac{1}{2}g\,t_1^2 \quad ...(4)$

दगड खाली पडताना (B→A)

$t = t_2, u = 0$

∴ समीकरण (2) वरून $h = \frac{1}{2}gt_2^2 \quad ...(5)$

समीकरणे (4) व (5) वरून,

$t_1^2 = t_2^2$

$\therefore t_1 = t_2$

($\because t_1, t_2$ दोन्ही धन आहेत.)

उ. समजा की gचे मूल्य अचानक दुप्पट झाले तर, एका जड वस्तूला जमिनीवरून ओढून नेणे दुपटीने अधिक कठीण होईल का? का?

उत्तर : होय.

वस्तू जमिनीवरून ओढून नेताना वस्तू व जमिनीचा पृष्ठभाग यांमधील घर्षणबलाविरुद्ध कार्य करावे लागते. हे

घर्षणबल वस्तूच्या वजनाशी समानुपाती असते. वस्तूचे वजन = *m*g.gचे मूल्य अचानक दुप्पट झाले, तर वस्तूचे वजनही दुप्पट होईल. परिणामी वस्तू व जमिनीचा पृष्ठभाग यांमधील घर्षणबल पण दुप्पट होईल. त्यामुळे ती जड वस्तू जमिनीवरून ओढून नेणे दुपटीने अधिक कठीण होईल.

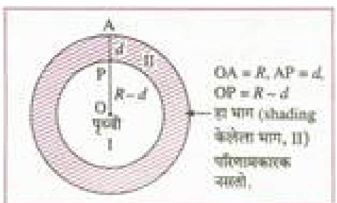
3. पृथ्वीच्या केंद्रावर 'g' चे मूल्य शून्य असते याविषयी स्पष्टीकरण लिहा.

उत्तर : पृथ्वीच्या पृष्ठभागापासून केंद्राकडे जात असताना g चेमूल्य बदलते; ते कमी होत जाते व पृथ्वीच्या केंद्राशी शून्य होते.

स्पष्टीकरण : पृथ्वी हा एकसमान घनतेचा व *M* वस्तुमान असलेला गोल आहे असे आपण मानू. आकृती मध्ये दाखवल्याप्रमाणे पृथ्वीच्या पृष्ठभागाखाली *d* या खोलीवरील *P* हा बिंदू विचारात घ्या. या जागी *m* वस्तुमानाचा द्रव्यकण ठेवल्यास त्यावरील पृथ्वीचे गुरुत्वीय बल,

$$F = \frac{GmM'}{(R-d)^2},$$

येथे *R* = पृथ्वीची त्रिज्या व *M'* = (*R*-*d*) त्रिज्या असलेल्या गोलाचे वस्तुमान, (*R*-*d*) = P चे पृथ्वीच्या केंद्रापासूनचे अंतर.



पृथ्वीच्या पृष्ठभागाखाली g चे मूल्य

$$M' = \frac{4}{3}\pi (R-d)^3 \times \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$= \frac{M(R-d)^3}{R^2}$$ येथे P च्या

बाहेरील भाग (आकृती मधील भाग II) परिणामकारक नसतो. P या स्थानी गुरुत्व त्वरण,

$$g = \frac{F}{m}$$

$$= \frac{G}{(R-d)^2} \times \frac{M(R-d)^3}{R^3}$$

$$= \frac{GM(R-d)}{R^3}$$.याचे मूल्य

पृथ्वीच्या पृष्ठभागावरील गुरुत्व त्वरणाच्या मूल्यापेक्षा

$\left(\frac{GM}{R^2}\right)$ कमी आहे.

d वाढल्यास g चे मूल्य कमी होते व पृथ्वीच्या केंद्राशी g= 0

$(\because d = R)$.

[टीप :

M'काढण्यासाठी घनता = $\frac{\text{वस्तुमान}}{\text{आकारमान}}$

या सूत्राचा उपयोग केला आहे.]

4. सिद्ध करा की, एका ताऱ्यापासून Rअंतरावर असलेल्या ग्रहाचा परिभ्रमण काळT आहे. जर तोच ग्रह 2R अंतरावर असल्यास त्याचा परिभ्रमण काल

$\sqrt{8}$T असेल.

उत्तर : $T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} r^{3/2}$.
येथे T = ग्रहाचा ताऱ्याभोवतीच्यापरिभ्रमणाचा आवर्तकाल, म्हणजेच परिभ्रमण काल, M= ताऱ्याचे वस्तुमान, G= गुरुत्व स्थिरांक व r = परिभ्रमण त्रिज्या, म्हणजेचग्रहाचे ताऱ्यापासूनचे अंतर (ग्रहाची परिभ्रमण कक्षा वर्तुळाकार मानून).

आता, $r = R$ असल्यास $T = T_1$

$$\therefore T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} R^{3/2}$$

तसेच, $r = 2R$ असल्यास $T = T_2$

$$\therefore T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} (2R)^{3/2}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} R^{3/2} \times 2^{3/2} = T_1 \times 2^{3/2}$$

$$\therefore T_2 = \sqrt{8\,T_1} = \sqrt{8}\,T.$$

5. उदाहरणे सोडवा.

अ. जर एका ग्रहावर एक वस्तू 5 m वरून खाली येण्यास 5 सेकंद घेत असेल तर त्या ग्रहावरील गुरुत्व त्वरण किती?

उत्तर: दिलेले : **u = 0m/s, s = 5m, t = 5s, g =?**

$$\therefore s = \frac{1}{2} gt^2$$

$$\therefore 5\text{m} = \frac{1}{2} g \times (5\text{s})^2$$

$$\therefore 5\text{m} = \frac{g}{2} \times (5\text{s})^2$$

$$\therefore g = \frac{2}{5} \text{m/s}^2 = 0.4 \text{ m/s}^2$$

त्या ग्रहावरील गुरुत्व त्वरण = 0.4 m/s^2.

आ. ग्रह 'क' ची त्रिज्या 'ख' ग्रहाच्या त्रिज्येच्या अर्धी आहे. 'क' चे वस्तुमान $\mathbf{M_A}$आहे.

जर 'ख' ग्रहावरील g चे मूल्य 'क' ग्रहावरील मूल्याच्या अर्धे असेल तर 'ख' ग्रहाचे वस्तुमान किती असेल?

उत्तर: दिलेले : R(क) =R(ख)/ 2,g(ख वर) =g(क वर)/ 2वस्तुमान (क) = M_A, वस्तुमान (ख) =?

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

$$\therefore g\,(\text{क वर}) = \frac{GM\,(\text{क})}{R^2\,(\text{क})} \text{ व}$$

$$g\,(\text{ख वर}) = \frac{GM\,(\text{ख})}{R^2(\text{ख})}$$

$$\therefore \frac{g\,(\text{ख वर})}{g\,(\text{क वर})} = \left(\frac{R\,(\text{क})}{R\,(\text{ख})}\right)^2 \times \frac{M\,(\text{ख})}{M\,(\text{क})}$$

$$\therefore \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{M\,(\text{ख})}{M\,(\text{क})}$$

$$\therefore \frac{M\,(\text{ख})}{M\,(\text{क})} = \frac{4}{2} = 2$$

$\therefore M$ (ख) $= 2M$(क)

$\therefore$ ख ग्रहाचे वस्तुमान $= \mathbf{2M_A}$

इ. एका वस्तूचे वस्तुमान व पृथ्वीवरील वजन अनुक्रमे 5 *kg* व 49 *N* आहेत. जर चंद्रावर *g* चे मूल्य पृथ्वीच्या एक षष्ठांश असेल तर त्या वस्तूचे वस्तुमान व वजन चंद्रावर किती असेल?

उत्तर : दिलेले :*m* = 5 *kg*, *W*= 49 *N*, *g* (चंद्रावर)= *g* (पृथ्वीवर)/6, *m* (चंद्रावर) = ?, *W* (चंद्रावर) = ?

(i)वस्तूचे चंद्रावर वस्तुमान = वस्तूचे पृथ्वीवर वस्तुमान : ***5 kg.***

(ii)*W=mg*

$\therefore \frac{W\ (\text{चंद्रावर})}{W\ (\text{पृथ्वीवर})}$

$= \frac{mg\ (\text{चंद्रावर})}{mg\ (\text{पृथ्वीवर})}$

$= \frac{\mathrm{g}\ (\text{चंद्रावर})}{\mathrm{g}\ (\text{पृथ्वीवर})}$

$\therefore W$ (चंद्रावर)

$= W\ (\text{पृथ्वीवर}) \times \frac{\mathrm{g}\ (\text{चंद्रावर})}{\mathrm{g}\ (\text{पृथ्वीवर})}$

$= 49\ \mathrm{N} \times \frac{1}{6} = \mathbf{8.167\ N.}$

ई. एक वर फेकलेली वस्तू 500 मी उंचीपर्यंत जाते. तिचा आरंभीचा वेग किती असेल? त्या वस्तूस वर जाऊन परत खाली येण्यास किती वेळ लागेल?

$\mathrm{g} = 10\ \mathrm{m/s^2}$

उत्तर:

दिलेले : $h = 500\ m, g = 10\ m/s^2,$

$v = 0\ m/s, \quad u = ?,$

t (वस्तू वर जाण्यास) + *t* (वस्तू खाली येण्यास) = ?

वस्तू वर जाताना :

$v^2 = u^2 + 2as = u^2 + 2(-\mathrm{g})\ h$

$(\because\ \mathrm{a} = -\mathrm{g})$ आता,

$v = 0\ \mathrm{m/s} \therefore\ u^2 = 2\mathrm{g}h$

$\therefore\ u^2 = 2 \times 10\ m/s^2 \times 500\ \mathrm{m}$

$= (100 \times 100)(m/s)^2$

$\therefore \mathrm{u} = 100\ \mathrm{m/s}$

वस्तूचा आरंभीचा वेग = 100 m/s

v=u+at=u-gt ($\because$ a=-g)

आता, v = 0 m/s $\therefore$ u=gt

$\therefore 100\ \mathrm{m}/s = 10\ m/s^2 \times t$

$\therefore$ वस्तू वर जाण्यास लागणारा वेळ, t = 10s

आता, t (वस्तू खाली येण्यास) = t (वस्तू वर जाण्यास) = 10s

[संदर्भासाठी वरील उदाहरण प्र.क्र.2 मधील (ई) पाहा.]

$\therefore$ t (वस्तू वर जाण्यास) + t (वस्तू खाली येण्यास)

= 10s + 10s = 20s

वस्तूस वर जाऊन परत खाली येण्यास 20s लागतील.

उ. एक चेंडू टेबलावरून खाली पडतो व 1 सेकंदात जमिनीवर पडतो.

$\mathbf{g} = \mathbf{10\ m/s^2}$ असेल तर टेबलाची उंची व चेंडूचा जमिनीवर पोहोचतानाचा वेग किती असेल?

उत्तर : दिलेले : $t = 1\ s, g = 10\ m/s^2$,

$u = 0 m/s, s = ?, v = ?$

(i) $s = ut + \frac{1}{2}gt^2$

येथे, $u = 0 m/s \therefore s = \frac{1}{2}gt^2$

$\therefore s = \frac{1}{2} \times 10\ m/s^2 \times (1s)^2$

=5m

∴ टेबलाची उंची =5m

(ii) v=u+at=u+gt

$= 0\ m/s + 10\ m/s^2 \times 1\ s$

=10m/s

चेंडूचा जमिनीवर पोहोचतानाचा वेग = 10 m/s

ऊ. पृथ्वी व चंद्र यांची वस्तुमाने अनुक्रमे $\mathbf{6 \times 10^{24} kg}$ व $\mathbf{7.4 \times 10^{22} kg}$ आहेत व त्या दोन्हीमधील अंतर $\mathbf{3.84 \times 10^5 km}$ आहे.त्या दोन्हीमधील गुरुत्व बल किती असेल ?

दिलेले $\boldsymbol{G} = \mathbf{6.7 \times 10^{-11}\ N.m^2/kg^2}$.

उत्तर : दिलेले : $m_1 = 6 \times 10^{24} kg, m_2 = 7.4 \times 10^{22} kg$,

$r = 3.84 \times 10^5 km = 3.84 \times 10^8\ m$,

$G = 6.7 \times 10^{-11}\ N.m^2/kg^2, F = ?$

$F = \frac{Gm_1Gm_2}{r^2} =$

(Rotate your phone)

$$\frac{6.7 \times 10^{-11}\ \mathrm{N.m^2/kg^2} \times 6 \times 10^{24}\mathrm{kg} \times 7.4 \times 10^{22}\mathrm{kg}}{(3.84 \times 10^{8}\ \mathrm{m})^2}$$

$$\frac{6.7 \times 10^{-11}\ \mathrm{N.m^2/kg^2} \times 6 \times 10^{24}\mathrm{kg} \times 7.4 \times 10^{22}\mathrm{kg}}{(3.84 \times 10^{8}\ \mathrm{m})^2}$$

$$= \frac{6.7 \times 6 \times 7.4 \times\ 10^{35}}{3.84 \times 3.84 \times\ 10^{16}}\ \mathrm{N}$$

$$= \mathbf{2.017 \times 10^{20}N}$$

हे पृथ्वी व चंद्र यांमधील गुरुत्व बल (परिमाण) होय.

ए. पृथ्वीचे वजन **$6\ \mathrm{x}10^{24}$kg**

आहे व तिचे सूर्यापासूनचे

अंतर **$1.5\ \mathrm{x}\ 10^{11}$ m** आहे.

जर त्या दोन्हीमधील गुरुत्व बल

$3.5\ \mathrm{x}10^{22}$N

असेल तर सूर्याचे वस्तुमान किती?

उत्तर :

दिलेले : $m_1 = 6\,\mathrm{x}10^{24}\mathrm{kg}$,

$\mathrm{r} =\ 1.5\,\mathrm{x}\,10^{11}\ \mathrm{m}$,

$F =\ 3.5\ \mathrm{x}10^{22}\mathrm{N}$,

$G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N}.\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{kg}^2}$,

$m_2 = ?$

$$F = \frac{Gm_1m_2}{\mathrm{r}^2}$$

$$\therefore m_2 = \frac{F\mathrm{r}^2}{Gm_1}$$

$$= \frac{3.5 \times\ 10^{22}\,\mathrm{N} \times (1.5 \times 10^{11}\,\mathrm{m})^2}{6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N.m^2}/kg^2 \times 6\ \times 10^{24}\,\mathrm{kg}}$$

$$= \frac{3.5 \times 1.5 \times 1.5 \times 10^{44}}{6.67 \times 6 \times 10^{13}} \text{kg}$$

$$= \mathbf{1.968 \times 10^{30} kg}$$

(सूर्याचे वस्तुमान).