

## Bài Toán 2: Đếm số phân hoạch $p(n, k)$

### Đồ Án Phân Hoạch Số Nguyên

### Phát biểu bài toán

Cho hai số nguyên dương  $n, k \in \mathbb{N}$ . Đếm số phân hoạch của  $n$  sao cho phần tử lớn nhất trong mỗi phân hoạch không vượt quá  $k$ . Ký hiệu hàm đếm là  $p(n, k)$ .

**Ví dụ:**  $p(5, 3) = 5$ , gồm các phân hoạch:

$$(3, 2), (3, 1, 1), (2, 2, 1), (2, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1)$$

### Công thức đệ quy

Công thức đệ quy:

$$p(n, k) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ 0 & \text{if } n < 0 \text{ or } k = 0 \\ p(n - k, k) + p(n, k - 1) & \text{otherwise} \end{cases}$$

**Giải thích:**

- $p(n - k, k)$  là số phân hoạch của  $n$  có ít nhất một phần tử bằng  $k$
- $p(n, k - 1)$  là số phân hoạch của  $n$  có tất cả phần tử nhỏ hơn  $k$

### Thuật toán (Quy hoạch động)

Khởi tạo mảng hai chiều  $dp[n + 1][k + 1]$ , với:

- $dp[i][j]$  lưu giá trị  $p(i, j)$

- Gán  $dp[0][j] = 1$  với mọi  $j \geq 0$
- Duyệt  $i$  từ 1 đến  $n$ ,  $j$  từ 1 đến  $k$ , cập nhật:

$$dp[i][j] = dp[i-j][j] + dp[i][j-1] \quad \text{nếu } i \geq j$$

ngược lại thì:

$$dp[i][j] = dp[i][j-1]$$

## Chú thích các biến

- $n, k$  – đầu vào bài toán
- $dp[i][j]$  – số phân hoạch của  $i$  với phần tử lớn nhất  $\leq j$

## So sánh

Có thể so sánh  $p(n)$  (tổng phân hoạch của  $n$ ) với:

$$p(n) = \sum_{k=1}^n p(n, k)$$