Bài Tập Toán Tổ hợp

Bài làm

1 TUẦN 1

1.1 Bài 2: Số Catalan

Tính C_4 theo công thức: $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$
:

$$C_4 = \frac{1}{5}\binom{8}{4} = \frac{1}{5} \cdot \frac{8!}{4! \cdot 4!} \tag{1}$$
$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{5} \cdot 70 = 14 \tag{2}$$

1.2 Problem 3: Dãy nhị phân

Đếm dãy nhị phân độ dài n có m số 0 và $n-m$ số 1, không có hai số 0 liền nhau.

: - Xếp $n-m$ số 1 tạo ra $n-m+1$ vị trí có thể đặt số 0 - Chọn m vị trí trong số đó để đặt m số 0 - –> : $\binom{n-m+1}{m}$ (nếu $m \leq n-m+1$)

1.3 Problem 4: Số tập con

Chứng minh $f(n) = 2^n$ là số tập con của $\{1, 2, ..., n\}$

: Quy nạp: - Cơ sở: $n = 1 \Rightarrow f(1) = 2$ (đúng vì có $\emptyset$ và $\{1\}$) - Giả sử đúng với k: $f(k) = 2^k$ - Với $k+1$: Mỗi tập con của $[k+1]$ hoặc không chứa $k+1$ (có $f(k)$ tập) hoặc chứa $k+1$ (có $f(k)$ tập) - Vậy $f(k+1) = 2f(k) = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$

1.4 Problem 5: Bài toán mũ

$f(n)$ là số hoán vị của n phần tử mà không phần tử nào giữ nguyên vị trí.

: a) Theo nguyên lý bù trừ: $f(n) = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$

b) Khi n lớn: $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

Nên $f(n) \approx \frac{n!}{e}$

1.5 Problem 6: Dãy Fibonacci suy rộng

$f(n) =$ số tập con của $\{1, 2, ..., n\}$ không chứa hai số liên tiếp.

: a) Tính trực tiếp: - $f(1) = 2$: $\{\emptyset, \{1\}\}$ - $f(2) = 3$: $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$ - $f(3) = 5$: $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,3\}\}$ - $f(4) = 8$: thêm $\{4\}, \{1,4\}, \{2,4\}$

b) Công thức truy hồi: - Tập không chứa n: có $f(n-1)$ cách - Tập chứa n: không được chứa $n-1$, nên chọn từ $[n-2]$: có $f(n-2)$ cách - Vậy: $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$

c) Đây là dãy Fibonacci với F_{n+2}

1.6 Problem 1: Chia mặt phẳng

n đường thẳng chia mặt phẳng thành bao nhiêu vùng?

: - $f(0) = 1$ (cả mặt phẳng) - Thêm đường thứ k: cắt tối đa $k-1$ đường trước, tạo thêm k vùng - $f(n) = 1 + 1 + 2 + ... + n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$

1.7 Problem 2: Bài toán logic

$C(n) \Rightarrow C(n+3)$ và $\neg C(55)$

: - $C(52) \Rightarrow C(55)$ (mâu thuẫn) $\Rightarrow \neg C(52)$ - Tương tự: $\neg C(49), \neg C(46), ...$ - Các cặp không chứa tiền: $\{n : n \equiv 1 \pmod 3, n \leq 55\}$

2 TUẦN 2

2.1 Bài 10.1.1

Đồ thị đơn 9 cạnh, mỗi đỉnh bậc ≥ 3. Tìm số đỉnh?

: - Tổng bậc $= 2 \times 9 = 18$ - Nếu mỗi đỉnh bậc ≥ 3: $3n \leq 18 \Rightarrow n \leq 6$ - Kiểm tra: $n = 5$ (OK), $n = 6$ (OK) - –> : $n \in \{5, 6\}$

2.2 Bài 10.1.2

Kiểm tra dãy $[7, 7, 6, 5, 4, 4, 4, 3, 2]$ bằng Havel-Hakimi.

: $[7, 7, 6, 5, 4, 4, 4, 3, 2] \rightarrow [6, 5, 4, 3, 3, 3, 2, 2] \rightarrow [4, 3, 2, 2, 2, 1] \rightarrow [2, 1, 1, 1, 1] \rightarrow [0, 0, 1, 1] \rightarrow [1, 0, 0] \rightarrow [0, 0]$

Kết luận: Là graphic sequence.

2.3 Bài 10.1.3

Tồn tại đồ thị đơn đều bậc 5 với 8 đỉnh?

: - Tổng bậc $= 5 \times 8 = 40$ (chẵn) - Bậc max trong đồ thị 8 đỉnh là 7, mà $5 < 7$ - Kết luận: Tồn tại

2.4 Bài 10.1.4

8 đỉnh: 4 đỉnh bậc 5, 4 đỉnh bậc 3?

: - Tổng bậc $= 4 \times 5 + 4 \times 3 = 32$ - Gọi nhóm A (bậc 5), nhóm B (bậc 3) - Mỗi B nối với 3 đỉnh trong A: tổng 12 cạnh B-A - Mỗi A nhận 3 cạnh từ B, cần thêm 2 cạnh - Cần 8 cạnh A-A, nhưng chỉ có $\binom{4}{2} = 6$ cặp - Kết luận: Không tồn tại

2.5 Bài 10.1.6

Kiểm tra $(3, 3, 3, 3, 2, 2)$

: Áp dụng Havel-Hakimi: $(3, 3, 3, 3, 2, 2) \rightarrow (2, 2, 2, 2, 2) \rightarrow (1, 1, 2, 2) \rightarrow (1, 1, 1, 1) \rightarrow (0, 1, 1) \rightarrow (0, 0)$

Kết luận: Graphic

2.6 Bài 10.1.7

D không graphic, $D' = (d_1, d_2, d_3, d_4 + 1, 1)$ có thể graphic?

: Ví dụ: $D = (3, 2, 1, 0)$ không graphic $D' = (3, 2, 1, 1, 1)$ có thể graphic –> : Có thể xảy ra

2.7 Bài 10.1.8

Dãy không graphic nhưng là dãy bậc multigraph?

: Ví dụ: $(4, 4, 2, 2, 2)$ - Không graphic (kiểm tra bằng Havel-Hakimi) - Nhưng có thể tạo multigraph với cạnh bội - –> : Có tồn tại

2.8 Bài 10.1.9

Dãy bậc general graph nhưng không phải multigraph?

: Dãy (2): - Không thể là multigraph (1 đỉnh không thể có bậc 2 mà không có khuyên) - Là general graph (1 khuyên cho bậc 2)

2.9 Bài 10.1.11

Vẽ 2 đồ thị đều bậc 3, 6 đỉnh, không đẳng cấu.

: - Đồ thị 1: C_6 với 3 đường chéo xen kẽ - Đồ thị 2: Hai tam giác K_3 nối chéo

2.10 Bài 10.1.14

a) $d_1, ..., d_p$ graphic $\Leftrightarrow (p - d_p - 1, ..., p - d_1 - 1)$ graphic

: Sử dụng đồ thị bù: Nếu G có dãy bậc $d_1, ..., d_p$ thì $\bar{G}$ có dãy bậc $p - 1 - d_i$

b) Kiểm tra $(9, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8, 8, 8)$

Tổng $= 9 \times 7 + 8 \times 3 = 87$ (lẻ) Không thể là graphic

2.11 Bài 10.1.15

Đồ thị với tất cả bậc phân biệt?

: - Đồ thị đơn: Không (không thể có cả bậc 0 và $n - 1$) - Multigraph: Có thể

2.12 Bài 10.1.16

94 đỉnh, mọi bậc lẻ. CMR: ít nhất 3 đỉnh cùng bậc.

: - Các bậc lẻ: $1, 3, 5, ..., 93$ (có 47 giá trị) - 94 đỉnh, 47 giá trị $\Rightarrow$ ít nhất một giá trị xuất hiện ≥ 3 lần

2.13 Bài 10.1.17

Điều kiện Erdős-Gallai

: Đây là điều kiện cần để dãy graphic:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(a_i, k)$$

2.14 Bài 10.1.18

Nếu $(a_1, ..., a_p)$ graphic thì $(a_1, ..., a_{t-1}, a_t + 1, ..., a_p + 1)$ graphic

: Thêm cạnh nối các đỉnh từ t đến p để tăng bậc mỗi đỉnh lên 1.

3 TUẦN 4

3.1 Bài 1: Số Stirling loại 2

a) $\begin{Bmatrix} s \\ t \end{Bmatrix} = 0$ nếu $t > s$
: Không thể chia s phần tử thành $t > s$ tập không rỗng.
b) $\begin{Bmatrix} s \\ s \end{Bmatrix} = 1$
: Chỉ có 1 cách: mỗi phần tử một tập.
c) $\begin{Bmatrix} s \\ 1 \end{Bmatrix} = 1$
: Chỉ có 1 cách: tất cả vào một tập.
d) $\begin{Bmatrix} s \\ s-1 \end{Bmatrix} = \binom{s}{2}$
: Chọn 2 phần tử ghép chung, còn lại mỗi phần tử một tập.
e) $\begin{Bmatrix} s \\ 2 \end{Bmatrix} = 2^{s-1} - 1$
: - Mỗi phần tử chọn tập 1 hoặc 2: 2^s cách - Trừ 2 trường hợp tất cả vào 1 tập: $2^s - 2$ - Chia 2 (không phân biệt thứ tự): $(2^s - 2)/2 = 2^{s-1} - 1$

3.2 Bài 2

a) s bóng phân biệt vào t hộp giống nhau (có thể rỗng)
: $\sum_{k=0}^{t} \begin{Bmatrix} s \\ k \end{Bmatrix}$
b) Phân hoạch số s thành không quá t phần
: $p(s, t)$ - hàm phân hoạch với điều kiện

3.3 Bài 3

a) s bóng phân biệt vào t hộp phân biệt (có thể rỗng)
: t^s
b) Phân hoạch s thành không quá t phần (có thứ tự)
: $\binom{s+t-1}{t-1}$

4 TUẦN 5

4.1 Mệnh đề 1: Hàm sinh

Cho hàm sinh $G(x) = (1 + x + x^2 + \cdots)^n$

4.1.1 Câu a

Hệ số của x^r trong khai triển của $G(x)$ là $a_r = C^r_{r+n-1}$
: Ta có: $1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$ (chuỗi hình học)
Nên: $G(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n = (1 - x)^{-n}$
Sử dụng khai triển nhị thức tổng quát: $(1 - x)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r}(-x)^r = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} x^r$
Vậy hệ số của x^r là $\binom{n+r-1}{r} = C^r_{r+n-1}$

4.1.2 Câu b

$(1-x^m)^n = 1 - C_n^1 x^m + C_n^2 x^{2m} - \cdots + (-1)^n x^{mn}$

: Áp dụng khai triển nhị thức: $(1-x^m)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(1)^{n-k}(-x^m)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k x^{mk}$

Vậy ta có: $(1-x^m)^n = C_n^0 - C_n^1 x^m + C_n^2 x^{2m} - \cdots + (-1)^n C_n^n x^{mn}$

4.1.3 Câu c

$(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})^n = (1-x^m)^n(1+x+x^2+\cdots)^n$

: Ta có: $1+x+x^2+\cdots+x^{m-1} = \frac{1-x^m}{1-x}$

Do đó: $(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})^n = \left(\frac{1-x^m}{1-x}\right)^n = \frac{(1-x^m)^n}{(1-x)^n}$

Mà $(1-x)^{-n} = (1+x+x^2+\cdots)^n$

Vậy: $(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})^n = (1-x^m)^n(1+x+x^2+\cdots)^n$

4.2 Mệnh đề 2: Hệ số tích hàm sinh

Cho hai hàm sinh: - $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ - $B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots$

Đặt $G(x) = A(x)B(x)$. Hệ số của x^r trong $G(x)$ là: $c_r = a_0b_r + a_1b_{r-1} + a_2b_{r-2} + \cdots + a_{r-2}b_2 + a_{r-1}b_1 + a_rb_0$

: Khi nhân hai chuỗi lũy thừa: $G(x) = (\sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_jx^j\right)$

Hệ số của x^r được tạo từ tất cả các cặp (i,j) sao cho $i+j=r$: $c_r = \sum_{i+j=r} a_ib_j = \sum_{i=0}^{r} a_ib_{r-i}$

Điều này cho ta công thức: $c_r = a_0b_r + a_1b_{r-1} + \cdots + a_rb_0$

4.3 Bài tập về dãy số

Ta có dãy số với các hàm: - $T(x) = x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{x}{1-x}$ - $C(x) = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$ - $D(x) = x^2 + x^4 + x^6 + \cdots = \frac{x^2}{1-x^2}$

: 1) $T(x) = x(1+x+x^2+\cdots) = x \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{x}{1-x}$

2) $C(x) = \frac{1}{1-x}$ (chuỗi hình học)

3) $D(x) = x^2(1+x^2+x^4+\cdots) = x^2 \cdot \frac{1}{1-x^2} = \frac{x^2}{1-x^2}$

Phân tích hàm tạo: $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$

Điều này cho ta: $\sum_{n=0}^{\infty}(n - N_i + N_j + 3) = \sum_{n=0}^{\infty}(n - n_i + n_j + 1)$

4.4 Công thức Euler

có các quan hệ như sau: $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$ với điều kiện $x_i \le x_i \le M_i$ cho mọi $i \in [m]$

Hàm sinh: Số nghiệm được tính bằng hệ số của x^n trong: $\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=m_i}^{M_i} x^k\right) = \prod_{i=1}^{m} \frac{x^{m_i} - x^{M_i+1}}{1-x}$

5 TUẦN 5

5.1 Phần 1: Ký hiệu và Nguyên lý

5.1.1 1.1 Notations

Định nghĩa: $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ là tập hợp n số nguyên dương đầu tiên.

5.1.2 1.2 Nguyên lý bù trừ

Định lý 1 (Nguyên lý bù trừ/Nguyên lý bao hàm-loại trừ):

(i) Với 2 tập hợp hữu hạn A, B bất kỳ:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|, \quad |A \backslash B| = |A| - |A \cap B|$$

(ii) Với 3 tập hợp hữu hạn A, B, C bất kỳ:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$$

(iii) Với $n \in \mathbb{N}^*$, $A_i, i = 1, \ldots, n$ là n tập hợp hữu hạn bất kỳ:

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{T \subseteq \{1,\ldots,n\}, T \neq \emptyset} (-1)^{|T|+1} \left| \bigcap_{i \in T} A_i \right|$$

Từ đó suy ra:

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| \geq \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j|$$

Chứng minh:
Chứng minh bằng quy nạp theo n:
Cơ sở: $n = 1$: hiển nhiên đúng.
Giả thiết quy nạp: Giả sử công thức đúng với $n = k$.
Bước quy nạp: Xét $n = k + 1$. Ta có:

$$\begin{aligned}
\left| \bigcup_{i=1}^{k+1} A_i \right| &= \left| \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \right) \cup A_{k+1} \right| && (3) \\
&= \left| \bigcup_{i=1}^{k} A_i \right| + |A_{k+1}| - \left| \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \right) \cap A_{k+1} \right| && (4) \\
&= \left| \bigcup_{i=1}^{k} A_i \right| + |A_{k+1}| - \left| \bigcup_{i=1}^{k} (A_i \cap A_{k+1}) \right| && (5)
\end{aligned}$$

Áp dụng giả thiết quy nạp cho cả hai số hạng và sau khi khai triển, ta được công thức cần chứng minh.

5.1.3 1.3 Phương pháp quy nạp toán học và truy hồi

Nguyên lý quy nạp toán học: Cho dãy vô hạn các mệnh đề $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} = P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ Để chứng minh tất cả các mệnh đề đều đúng, ta chỉ cần chứng minh 2 điều:

- **Cơ sở:** P_1 đúng.
- **Bước quy nạp:** Với mọi $k \in \mathbb{N}^*$, nếu P_k đúng thì P_{k+1} cũng đúng.

5.1.4 Problem 1: Đếm số vùng được tạo bởi n đường thẳng

Đề bài: Trên một tờ giấy vuông lớn, vẽ $n \in \mathbb{N}^*$ đường thẳng bắt đầu từ 1 cạnh của hình vuông và kết thúc ở cạnh khác. Mỗi 2 đường thẳng cắt nhau nhưng không có 3 (hoặc nhiều hơn) đường thẳng đi qua cùng một điểm. Gọi $f(n)$ là số vùng mà các đường thẳng chia tờ giấy. Tính một số giá trị của $f(n)$ và dự đoán công thức chung của nó.

:

Tính trực tiếp:

- $f(0) = 1$ (không có đường thẳng, cả mặt phẳng là 1 vùng)
- $f(1) = 2$ (1 đường thẳng chia mặt phẳng thành 2 vùng)
- $f(2) = 4$ (2 đường thẳng cắt nhau tạo 4 vùng)
- $f(3) = 7$ (3 đường thẳng tạo 7 vùng)
- $f(4) = 11$ (4 đường thẳng tạo 11 vùng)

Nhận xét: Khi thêm đường thẳng thứ k, nó cắt tối đa $k-1$ đường thẳng đã có, tạo ra $k-1$ giao điểm. Những giao điểm này chia đường thẳng thứ k thành k đoạn, mỗi đoạn chia một vùng cũ thành 2 vùng mới. Vậy số vùng tăng thêm k.

Công thức truy hồi:

$$f(n) = f(n-1) + n, \quad f(0) = 1$$

Công thức tổng quát:

$$f(n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} i = 1 + \frac{n(n+1)}{2} \tag{6}$$

$$= \frac{n^2+n+2}{2} \tag{7}$$

Chứng minh bằng quy nạp:
Cơ sở: $n = 0$: $f(0) = \frac{0+0+2}{2} = 1$
Giả thiết: $f(k) = \frac{k^2+k+2}{2}$
Bước quy nạp:

$$f(k+1) = f(k) + (k+1) \tag{8}$$

$$= \frac{k^2+k+2}{2} + (k+1) \tag{9}$$

$$= \frac{k^2+k+2+2(k+1)}{2} \tag{10}$$

$$= \frac{k^2+3k+4}{2} \tag{11}$$

$$= \frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2} \quad \checkmark \tag{12}$$

5.1.5 Problem 2: Bài toán 100 cặp đựng tiền

Đề bài: Bạn có 100 cặp đựng tiền đánh số từ 1 đến 100. Đối với bất kỳ $n \in \mathbb{N}^*$ nào, nếu một cặp được đánh số n đựng tiền mặt, thì cặp được đánh số $n+3$ cũng vậy. Bạn mở cặp được đánh số 55 và bên trong có một con thú nhồi bông. Bạn có thể kết luận điều gì về bất kỳ cặp nào khác không?

:
Gọi $C(n)$ là mệnh đề "cặp số n có tiền".
Cho trước: $C(n) \Rightarrow C(n+3)$ và $\neg C(55)$ (cặp 55 không có tiền).
Phân tích: - Từ $C(n) \Rightarrow C(n+3)$, ta có: $\neg C(n+3) \Rightarrow \neg C(n)$ - Từ $\neg C(55)$: $\neg C(52), \neg C(49), \neg C(46), \ldots$
Tổng quát: $\neg C(k)$ với mọi $k \equiv 55 \pmod 3$, tức $k \equiv 1 \pmod 3$.
Kết luận: Tất cả các cặp có số hiệu dạng $3m+1$ (với $m \geq 0$ và $3m+1 \leq 100$) đều không chứa tiền.
Cụ thể: các cặp số $1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 46, 49, 52, 55, 58, 61, 64, 67, 70, 73, 76, 7$
không chứa tiền.

5.1.6 1.4 Nguyên lý chuồng bồ câu và lý thuyết Ramsey

Nguyên lý chuồng bồ câu: Nếu đặt $n+1$ con chim bồ câu vào n chuồng thì ít nhất một chuồng chứa nhiều hơn một con.

Dạng tổng quát: Nếu đặt $kn+1$ đối tượng vào n hộp thì ít nhất một hộp chứa ít nhất $k+1$ đối tượng.

5.1.7 1.5 Quy tắc đếm và số Stirling loại 1 và loại 2

5.1.8 Problem 3: Đếm dãy nhị phân

Đề bài: Cho $m, n \in \mathbb{N}^*, m \leq n$. Đếm số dãy $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gồm m số 0 và $n-m$ số 1, sao cho không có 2 số 0 liên tiếp.

:

Ta cần đặt m số 0 vào dãy sao cho không có 2 số 0 liền nhau.

Phương pháp: Trước tiên xếp $n-m$ số 1. Điều này tạo ra $n-m+1$ vị trí có thể đặt số 0: - Trước số 1 đầu tiên - Giữa các cặp số 1 liên tiếp - Sau số 1 cuối cùng

Để không có 2 số 0 liền nhau, ta chọn m vị trí trong số $n-m+1$ vị trí này.

–> : $\binom{n-m+1}{m}$

Điều kiện tồn tại: $m \leq n-m+1 \Leftrightarrow 2m \leq n+1$

5.1.9 Problem 4: Số tập con của $[n]$

Đề bài: Gọi $f(n)$ là số tập con của $[n]$. Chứng minh $f(n) = 2^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh bằng quy nạp:

Cơ sở: $n=1$: $[1] = \{1\}$ có 2 tập con: $\emptyset$ và $\{1\}$. Vậy $f(1) = 2 = 2^1$

Giả thiết: $f(k) = 2^k$

Bước quy nạp: Xét $[k+1] = \{1, 2, \ldots, k, k+1\}$.

Mỗi tập con của $[k+1]$ thuộc một trong hai loại: - Không chứa $k+1$: đây là tập con của $[k]$, có $f(k) = 2^k$ tập - Chứa $k+1$: có dạng $S \cup \{k+1\}$ với S là tập con của $[k]$, có $f(k) = 2^k$ tập

Vậy: $f(k+1) = 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$

5.1.10 Problem 5: Bài toán trả mũ (Derangement)

Đề bài: Giả sử $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ người đưa n chiếc mũ cho người giữ mũ. Gọi $f(n)$ là số cách trả lại mũ sao cho mỗi người có 1 mũ nhưng không ai nhận được mũ của mình. Chứng minh: (a) $f(n) = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (b) $f(n)$ là số nguyên gần nhất với $\frac{n!}{e}$

:

(a) Sử dụng nguyên lý bù trừ:

Gọi A_i là tập các hoán vị mà người thứ i nhận đúng mũ của mình.

Ta cần tính: $f(n) = n! - |\bigcup_{i=1}^{n} A_i|$

Áp dụng nguyên lý bù trừ:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{|T|=k} \left|\bigcap_{i \in T} A_i\right| \tag{13}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)! \tag{14}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!} \tag{15}$$

Do đó:

$$f(n) = n! - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{n!}{k!} \tag{16}$$

$$= n!\left(1 - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k!}\right) \tag{17}$$

$$= n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} \tag{18}$$

(b) Ta có: $e^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}$
Với n lớn: $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} \approx e^{-1}$
Vậy: $f(n) \approx \frac{n!}{e}$
Độ sai lệch: $\left|f(n) - \frac{n!}{e}\right| < \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} < 0.5$ với $n \geq 2$

5.1.11 Problem 6: Tập con không chứa 2 số liên tiếp

Đề bài: Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Gọi $f(n)$ là số tập con của $[n]$ không chứa 2 số nguyên liên tiếp. (a) Tính $f(1), f(2), f(3), f(4)$ (b) Chứng minh: $f(n) = f(n-1) + f(n-2), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ (c) Chứng minh: $f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\tau^{n+2} - \bar{\tau}^{n+2}\right)$ với $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \bar{\tau} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$
:
(a) Tính trực tiếp: - $f(1) = 2$: $\{\emptyset, \{1\}\}$ - $f(2) = 3$: $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$ - $f(3) = 4$: $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,3\}\}$ (loại $\{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}$) - $f(4) = 5$: $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,4\}\}$
(b) Chứng minh công thức truy hồi:
Xét các tập con của $[n]$ không chứa 2 số liên tiếp: - Loại 1: Không chứa $n \to$ là tập con của $[n-1]$ thỏa mãn $\to$ có $f(n-1)$ tập - Loại 2: Chứa $n \to$ không chứa $n-1 \to$ phần còn lại là tập con của $[n-2]$ thỏa mãn $\to$ có $f(n-2)$ tập
Vậy: $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$
(c) Đây là dãy Fibonacci với $f(1) = 2 = F_3, f(2) = 3 = F_4$, nên $f(n) = F_{n+2}$.
Công thức Binet cho số Fibonacci: $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\tau^n - \bar{\tau}^n)$
Vậy: $f(n) = F_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\tau^{n+2} - \bar{\tau}^{n+2})$

5.1.12 1.6 Hoán vị và tổ hợp

5.1.13 Bài toán 6: Consecutive coin toss

Đề bài: Cho $n, k \in \mathbb{N}^*, k \leq n$. Tung 1 đồng xu đồng chất ngẫu nhiên (coin toss). (Mở rộng: tung đồng xu bất công bằng).
: Bài toán này yêu cầu phân tích xác suất khi tung đồng xu n lần.
Với đồng xu công bằng: - Xác suất mặt ngửa = xác suất mặt sấp = $\frac{1}{2}$ - Số cách có đúng k mặt ngửa trong n lần tung: $\binom{n}{k}$ - Xác suất có đúng k mặt ngửa: $\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^n}$
Với đồng xu bất công bằng (xác suất ngửa = p, sấp = $1-p$): - Xác suất có đúng k mặt ngửa: $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

5.1.14 Bài toán 3: Overflow

Đề bài: Viết chương trình C/C++, Pascal, Python để tính và cho biết giá trị nhỏ nhất của n gặp lỗi overflow: (a) $P_n = n!$ (b) A_n^k (c) C_n^k (d) Số Catalan thứ n

5.1.15 Problem: Pascal triangle & Newton binomial expansion

Đề bài: Cho $m, n \in \mathbb{N}^*$. Viết chương trình Pascal/Python/C/C++ để in $n+1$ dòng đầu của tam giác Pascal và khai triển nhị thức Newton của $(a+b)^n$, $(a+b+c)^n$, $(\sum_{i=1}^m a_i)^n, \forall a, b, c, a_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \ldots, m$.

:

Tam giác Pascal: Dòng thứ n của tam giác Pascal chứa các hệ số $\binom{n}{k}$ với $k = 0, 1, \ldots, n$.
Khai triển nhị thức: 1. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$
2. $(a+b+c)^n = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} a^i b^j c^k$ (công thức đa thức)
3. $(\sum_{i=1}^m a_i)^n = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n} \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_m^{k_m}$

5.1.16 Problem: Count number of lines formed by some points

Đề bài: Viết chương trình để đếm số đường thẳng tạo bởi $n \in \mathbb{N}^*$ điểm phân biệt trong mặt phẳng (2D).

:

Qua 2 điểm phân biệt xác định duy nhất 1 đường thẳng.
Nếu không có 3 điểm nào thẳng hàng: Số đường thẳng $= \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$
Nếu có điểm thẳng hàng: cần thuật toán kiểm tra và loại trừ các đường thẳng trùng nhau.

5.1.17 Problem: Count number of intersections formed by some lines

Đề bài: Viết chương trình để đếm số giao điểm của $n \in \mathbb{N}^*$ đường thẳng phân biệt trong mặt phẳng (2D).

:

Hai đường thẳng phân biệt có tối đa 1 giao điểm.
Nếu không có 2 đường nào song song và không có 3 đường nào đồng quy: Số giao điểm $= \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$
Trường hợp tổng quát: cần thuật toán kiểm tra song song và đồng quy.

5.2 Phần 5: Các công thức

5.2.1 Công thức

ta có các đẳng thức sau:
1. Với $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{i=1}^n \binom{2i-1}{i} = \sum_{i=1}^n (4i^2 - 4i + 1)$
2. Công thức tổng: $\sum_{i=1}^n (2i-1)^2 = 4\sum_{i=1}^n i^2 - 4\sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1$
Thay các công thức tổng cơ bản:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \tag{19}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{20}$$

Ta được: $\sum_{i=1}^n (2i-1)^2 = 4 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n$
Rút gọn: $= \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} - 2n(n+1) + n = \frac{2n(n+1)(2n+1) - 6n(n+1) + 3n}{3} = \frac{n(2n^2+3n+1-6n-6+3)}{3} = \frac{n(2n^2-3n-2)}{3} = \frac{2n(n+1)(2n-1)}{3}$

5.2.2 Khai triển nhị thức

ta có các khai triển sau:

1. **Khai triển $(a+b+c)^n$:** $(a+b+c)^n = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} a^i b^j c^k$
2. **Với $(a+b+c+d)^n$:** $(a+b+c+d)^n = \sum_{i+j+k+l=n} \frac{n!}{i!j!k!l!} a^i b^j c^k d^l$
3. **Tổng quát với m biến:** $\left(\sum_{i=1}^m a_i\right)^n = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n} \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!} \prod_{i=1}^m a_i^{k_i}$

5.2.3 Các hệ thức đặc biệt

1. **Hệ thức với tổ hợp:** $\sum_{i=1}^n \binom{2i}{i} = \sum_{i=1}^n \frac{(2i)!}{i!i!}$
2. **Công thức với bình phương:** $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. **Đẳng thức đặc biệt:** $\sum_{i=1}^n (2i)^2 = 4\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$
4. **Công thức truy hồi cho tổ hợp:** $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
5. **Tính chất đối xứng:** $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

5.3 Phần 6: Tổng kết và ứng dụng

5.3.1 Tổng kết các công thức quan trọng

1. **Nguyên lý bù trừ tổng quát:** $\left|\bigcup_{i=1}^n A_i\right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$

2. **Công thức số Catalan:** - Định nghĩa: $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ - Công thức truy hồi: $C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}$ - Công thức sinh: $C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$

3. **Số Derangement (hoán vị lộn xộn):** $D_n = n! \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} \approx \frac{n!}{e}$

4. **Dãy Fibonacci và biến thể:** - $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ với $F_1 = F_2 = 1$ - Công thức Binet: $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

5.3.2 Ứng dụng trong bài toán đếm

1. **Đếm đường đi trên lưới:** - Từ $(0,0)$ đến (m,n) chỉ đi phải hoặc lên: $\binom{m+n}{m}$ - Không vượt qua đường chéo: số Catalan

2. **Đếm cách chia tập hợp:** - Chia n phần tử thành k nhóm không rỗng: số Stirling loại 2 $S(n,k)$ - Chia n phần tử thành các nhóm: số Bell B_n

3. **Đếm hoán vị với điều kiện:** - Hoán vị có đúng k điểm cố định: $\binom{n}{k} D_{n-k}$ - Hoán vị vòng quanh: $(n-1)!$

5.3.3 Phương pháp bài toán đếm

1. **Nguyên tắc cơ bản:** - Quy tắc cộng: Đếm các trường hợp rời nhau - Quy tắc nhân: Đếm các bước độc lập - Nguyên lý bù trừ: Loại trừ trường hợp trùng lặp

2. **Kỹ thuật nâng cao:** - Phương pháp bijection: Thiết lập song ánh - Phương pháp hàm sinh: Chuyển về bài toán đại số - Phương pháp truy hồi: Quy về bài toán nhỏ hơn

3. **Kiểm tra kết quả:** - Kiểm tra với giá trị nhỏ - Kiểm tra tính đối xứng - Kiểm tra điều kiện biên

Tuần 6

6 TUẦN 6

6.1 Phần 1: Bài tập

6.1.1 Bài toán phân hoạch với hàm sinh

Đề bài: Cho hàm $f(x, y) = f(y, x) \in \mathbb{N}^n$ với điều kiện $\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i}$

:

Xét $dp[x] = 1$ hoặc $dp[x] = dp[n-1][k-1]$
Ta có: $dp[x] = \sum_{i=1}^{\min(x,k)} dp[i-1][i]$
Với $dp[x][i]$ là số cách chia x phần tử vào i hộp.
Công thức truy hồi:

$$dp[x][0] = \sum_{i=0}^{x} dp[x-i][i-1]$$

6.1.2 Bài toán về dãy số và phân hoạch

ta có các điều kiện: - $|P(n)| < \frac{e^n}{k!}$ - Với k chẵn - Số cách: 1 cách, 2 cách, 3 cách tương ứng với F_1, F_2, F_3

Phân tích: - Lớp bằng 1 đơn vị với gắng - Lớp bằng 2 đơn vị ngay $\rightarrow P_i$

Quan hệ hồi quy: Xét hàm $p_k(n)$ cho $n, k \in \mathbb{N}$:

$$p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$$

với điều kiện ban đầu: - $p_0(n) = 0$ với mọi $n > 0$ - $p_k(0) = 0$ với mọi $k > 0$ - $p_0(0) = 1$

6.2 Phần 2: Lý thuyết Đồ thị

6.2.1 Problem P 10.2.1

Đề bài: Let x and y be vertices of a general graph.

(a) Suppose that there is a closed walk containing both x and y. Must there be a closed trail containing both x and y?

(b) Suppose that there is a closed trail containing both x and y. Must there be a cycle containing both x and y?

:

(a) **Có.** - Giả sử W là closed walk chứa cả x và y. - Nếu W lặp lại cạnh, ta có thể loại bỏ phần giữa hai lần xuất hiện của cạnh đó. - Lặp lại quá trình cho đến khi không còn cạnh lặp. - Kết quả là closed trail chứa cả x và y.

(b) **Không nhất thiết.** - Phản ví dụ: Xét đồ thị với các đỉnh $\{a, b, x, y\}$ và cạnh $\{ax, xy, yb, ba, ax\}$. - Closed trail: $x \rightarrow y \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow x \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow y \rightarrow x$ chứa cả x và y. - Nhưng không có cycle nào chứa cả x và y (vì để tạo cycle cần đi qua a hoặc b nhiều lần).

6.2.2 Problem P 10.2.2

Đề bài: If a vertex x of a graph is on a circuit, then is x also on a cycle?

: Có.

- Circuit là closed trail (không lặp cạnh). - Nếu circuit không lặp đỉnh (trừ đỉnh đầu/cuối) thì nó là cycle. - Nếu circuit lặp đỉnh, giả sử đỉnh v xuất hiện tại vị trí i và j (với $i < j$). - Phần từ vị trí i đến j tạo thành closed trail đi qua v. - Lặp lại việc tách cho đến khi có cycle. - Vì x nằm trên circuit ban đầu nên x sẽ nằm trên ít nhất một trong các cycle được tách ra.

6.2.3 Problem P 10.2.3

Đề bài: Let $G = (V, E)$ be a general graph and let $x, y \in V$ with $x \neq y$. Assume that x and y are joined by a walk. In Lemma 10.16, we proved that x and y must be joined by a path. A friend objects to the proof given in the text...Put your friend at ease by rewriting the proof using induction on the number of edges on the walk.

bằng quy nạp:

Cơ sở: Nếu walk có 1 cạnh thì nó là path.

Bước quy nạp: Giả sử mọi walk độ dài $\leq k$ đều có path tương ứng.

Xét walk $W : x = v_0, v_1, \ldots, v_{k+1} = y$ độ dài $k + 1$. - Nếu W không lặp đỉnh thì W là path. - Nếu W lặp đỉnh, giả sử $v_i = v_j$ với $i < j$. - Xét walk mới $W' : v_0, v_1, \ldots, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_{k+1}$. - W' có độ dài $< k + 1$. - Theo giả thiết quy nạp, tồn tại path từ x đến y.

6.2.4 Problem P 10.2.4

Đề bài: What is the maximum length of a cycle in the graph of Figure 10.1?

: phương pháp: - Đếm số đỉnh n của đồ thị. - Độ dài tối đa của cycle là n (Hamiltonian cycle). - Kiểm tra xem có tồn tại Hamiltonian cycle không. - Nếu không, tìm cycle dài nhất bằng cách thử.

6.2.5 Problem P 10.2.5

Đề bài: Consider the Petersen graph of Figure 2.1. What are the possible lengths of cycles in this graph? Make a conjecture. You don't have to prove your conjecture.

: Đồ thị Petersen có các tính chất: - 10 đỉnh, 15 cạnh - 3-regular (mỗi đỉnh có bậc 3) - Girth (chu trình ngắn nhất) = 5

Các độ dài chu trình có thể: 5, 6, 8, 9

6.2.6 Problem P 10.2.6

Đề bài: We defined a tree as a connected graph with no cycles (Definition 10.22). Could we have just as well defined a tree as a connected graph with no circuits? What about a connected graph with no closed walks?

:

1. **Connected graph with no circuits: Có**, định nghĩa tương đương. - Nếu không có cycle thì không có circuit (vì cycle là circuit đặc biệt). - Nếu không có circuit thì không có cycle (theo P 10.2.2).

2. **Connected graph with no closed walks: Không**. - Nếu đồ thị liên thông và có ít nhất 2 đỉnh thì luôn có closed walk. - Ví dụ: $u \to v \to u$ là closed walk. - Chỉ có đồ thị 1 đỉnh mới không có closed walk.

6.2.7 Problem P 10.2.7

Đề bài: I have a simple graph with five vertices and four edges. Could it be a tree? Does it have to be a tree?

:

1. **Could it be a tree? Có**. - Cây với n đỉnh có $n - 1$ cạnh. - Với 5 đỉnh, cây có 4 cạnh.

2. **Does it have to be a tree? Không**. - Có thể là forest (rừng) với nhiều thành phần liên thông. - Ví dụ: 1 cây 3 đỉnh (2 cạnh) + 1 cây 2 đỉnh (1 cạnh) + 1 đỉnh cô lập = 5 đỉnh, 3 cạnh. - Hoặc: 1 cây 4 đỉnh (3 cạnh) + 1 đỉnh cô lập = 5 đỉnh, 3 cạnh.

6.2.8 Problem P 10.2.8

Đề bài: Let G be a forest consisting of t trees. Assume G has n vertices. How many edges does G have?

:

Gọi n_i là số đỉnh của cây thứ i (với $i = 1, 2, \ldots, t$).

Ta có: $\sum_{i=1}^{t} n_i = n$

Mỗi cây với n_i đỉnh có $n_i - 1$ cạnh.

Tổng số cạnh:

$$\sum_{i=1}^{t}(n_i - 1) = \sum_{i=1}^{t} n_i - \sum_{i=1}^{t} 1 = n - t$$

−> **:** Forest với n đỉnh và t cây có $n - t$ cạnh.

6.2.9 Problem P 10.2.9

Đề bài: Let G be a tree. Recall that a vertex v of G of degree 1 is called a leaf. Show that every finite tree with at least two vertices has at least two leaves.

Chứng minh:

Giả sử cây T có $n \geq 2$ đỉnh.

Số cạnh của T là $n - 1$.

Tổng bậc: $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E| = 2(n-1) = 2n - 2$

Giả sử có k lá (đỉnh bậc 1).

Các đỉnh không phải lá có bậc ≥ 2.

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = k \cdot 1 + \sum_{v \text{ không phải lá}} \deg(v) \geq k + 2(n-k) = 2n - k$$

Do đó: $2n - 2 \geq 2n - k$

Suy ra: $k \geq 2$

Kết luận: Mọi cây hữu hạn với ít nhất 2 đỉnh có ít nhất 2 lá.

6.2.10 Problem P 10.2.10

Đề bài: Let G be a tree, and assume that G has one vertex of degree 4. What is the minimum number of leaves possible for G?

:

Gọi n là số đỉnh, k là số lá.

Tổng bậc $= 2(n-1) = 2n - 2$

Có 1 đỉnh bậc 4, k đỉnh bậc 1, còn lại $n - k - 1$ đỉnh bậc ≥ 2.

$$4 + k + 2(n - k - 1) \leq 2n - 2$$

$$4 + k + 2n - 2k - 2 \leq 2n - 2$$

$$2 - k \leq -2$$

$$k \geq 4$$

−> **:** Số lá tối thiểu là 4.

6.2.11 Problem P 10.2.11

Đề bài: A mystery simple graph G has the degree sequence 3,3,3,2,1. Prove that G has a cycle.

Chứng minh:

Tổng bậc $= 3 + 3 + 3 + 2 + 1 = 12$
Số cạnh $= 12/2 = 6$
Số đỉnh $= 5$
Nếu G không có cycle thì G là forest.
Forest với 5 đỉnh có tối đa 4 cạnh (khi là cây).
Nhưng G có 6 cạnh > 4.
Kết luận: G phải có cycle.

6.2.12 Problem P 10.2.12

Đề bài: Assume that T is a tree with exactly two leaves. Prove that T is a path.

Chứng minh:

Gọi u, v là hai lá của T.
Mọi đỉnh khác có bậc ≥ 2.
Vì T là cây nên tồn tại đường đi duy nhất từ u đến v.
Giả sử đường đi này là: $u = v_0, v_1, \ldots, v_k = v$

Nếu tồn tại đỉnh $w \notin \{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$: - w phải nối với ít nhất một v_i (do T liên thông). - Nếu $\deg(w) = 1$ thì w là lá thứ 3 (mâu thuẫn). - Nếu $\deg(w) \geq 2$ thì w nối với ít nhất 2 đỉnh. - Điều này tạo cycle hoặc tạo thêm lá (mâu thuẫn).

Vậy T chỉ gồm các đỉnh trên đường từ u đến v.
Kết luận: T là đường đi (path).

6.2.13 Problem P 10.2.13

Đề bài: Assume that G is a tree with vertices $\{v_1, \ldots, v_{20}\}$. We know that there is not an edge between v_4 and v_{18}. The graph H is the same as the graph G except with one extra edge: $\{v_4, v_{18}\}$. What can you say about the number of cycles in H?

:

G là cây với 20 đỉnh nên không có cycle.
$H = G \cup \{v_4, v_{18}\}$
Trong G, có đường đi duy nhất từ v_4 đến v_{18}.

Khi thêm cạnh $\{v_4, v_{18}\}$, ta tạo đúng 1 cycle mới: - Đường đi từ v_4 đến v_{18} trong G + cạnh $\{v_{18}, v_4\}$ trong H.

−> : H có đúng 1 cycle.

6.2.14 Problem P 10.2.14

Đề bài: Let G be a connected simple graph with 47 vertices and 47 edges. What can you say about the number of cycles in G?

:

Đồ thị liên thông với n đỉnh cần ít nhất $n - 1$ cạnh.
G có 47 đỉnh và 47 cạnh $= (47 - 1) + 1$ cạnh.
G có đúng 1 cạnh "thừa"so với cây.
Mỗi cạnh thừa tạo đúng 1 cycle độc lập.
−> : G có đúng 1 cycle.

6.2.15 Problem P 10.2.15

Đề bài: Let n be an integer greater than or equal to 2. Show that a simple graph (connected or not) with n vertices and at least n edges must have a cycle. What about general graphs?

Chứng minh cho simple graph:

Giả sử G không có cycle $\Rightarrow$ G là forest.

Forest với n đỉnh có tối đa $n-1$ cạnh (khi có 1 thành phần liên thông).

Nhưng G có $\geq n$ cạnh.

Mâu thuẫn.

Với general graph: Không đúng. Phản ví dụ: 2 đỉnh với 2 cạnh song song không tạo cycle.

6.2.16 Problem P 10.2.16

Đề bài: We have a mystery simple graph $G = (V, E)$. We know that $|V| = 10$ and that the two largest degrees of the vertices of G are 5 and 4...

:

(a) Nếu G là cây: - Có 10 đỉnh nên có 9 cạnh. - Tổng bậc = 18. - Có 1 đỉnh bậc 5, gọi k là số đỉnh bậc 4. - $5 + 4k + \sum$ bậc còn lại $= 18$ - Các khả năng: $(5, 4, 4, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0)$, $(5, 4, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 0, 0)$, v.v.

(b) G có thể là forest 2 thành phần: - Tổng cạnh = 8 (= 10 - 2). - Tổng bậc = 16. - Có thể: 1 cây có đỉnh bậc 5, cây kia có đỉnh bậc 4.

(c) Nếu G có 2 thành phần và $|E| = 9$: - Số cycle = $|E| - |V| +$ số thành phần $= 9 - 10 + 2 = 1$.

6.2.17 Problem P 10.2.17

Đề bài: Let $n \geq 2$, and let $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ be a sequence of positive integers. Prove that this sequence is the degree sequence of a tree if and only if $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$.

Chứng minh:

$(\Rightarrow)$ Nếu là dãy bậc của cây: - Cây n đỉnh có $n-1$ cạnh. - Tổng bậc $= 2(n-1) = 2n-2$.

$(\Leftarrow)$ Nếu $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$:

Dùng quy nạp theo n.

Cơ sở: $n = 2$, $d_1 + d_2 = 2$. Vì $d_i \geq 1$ nên $d_1 = d_2 = 1$. Đây là cây 2 đỉnh.

Bước quy nạp: Giả sử đúng với $n-1$.

Với dãy $d_1 \geq \cdots \geq d_n$ thỏa mãn $\sum d_i = 2n-2$: - Phải có $d_n = 1$ (nếu không, $\sum d_i \geq 2n$). - Tồn tại $d_i > 1$. - Xét dãy mới: giảm d_i đi 1 và bỏ d_n. - Dãy mới có tổng $= 2n - 2 - 1 - 1 = 2(n-1) - 2$. - Theo giả thiết quy nạp, dãy mới là dãy bậc của cây T'. - Thêm đỉnh mới nối với đỉnh có bậc bị giảm trong T' ta được cây T.

6.3 Phần 3: Bài tập Hàm sinh

6.3.1 Hàm sinh cho dãy hoán vị

Cho $n-k$ ký tự giống nhau, phân loại: - $n = k+1$ ký tự - Hàm sinh: $G(x) = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)^k$

Khai triển:

$$G(x) = \sum_{s=0}^{nk} a_s x^s$$

Với hệ số:

$$a_s = \sum_{(n_1,\ldots,n_k)} \frac{s!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

trong đó tổng lấy trên tất cả bộ $(n_1, \ldots, n_k)$ thỏa mãn: - $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = s$ - $0 \leq n_i \leq n$ với mọi i

6.3.2 Hàm sinh cho bài toán chia kẹo

Có 4 loại kẹo: Tab, Chẵn, Cam, Đào với điều kiện: - Tab: số lẻ - Chẵn: số chẵn - Cam: từ n_0 đến n_k - Đào: từ n_1 đến n_t

Hàm sinh:

$$T(x) = x + x^3 + x^5 + \cdots = \frac{x}{1-x^2}$$

$$Ch(x) = 1 + x^2 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1-x^2}$$

$$C(x) = x^{n_0} + x^{n_0+1} + \cdots + x^{n_k} = x^{n_0}\frac{1-x^{n_k-n_0+1}}{1-x}$$

$$D(x) = x^{n_1} + x^{n_1+1} + \cdots + x^{n_t} = x^{n_1}\frac{1-x^{n_t-n_1+1}}{1-x}$$

Hàm sinh tổng:

$$G(x) = T(x) \cdot Ch(x) \cdot C(x) \cdot D(x)$$

Hệ số của x^n trong $G(x)$ cho biết số cách chia n viên kẹo.

6.3.3 Công thức đệ quy từ hàm sinh

Từ quan hệ:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{i=0}^{\infty}(i+1)x^i$$

Ta có:

$$\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)^k = \sum_{s=0}^{nk} C_s x^s$$

Với:

$$C_s = \binom{s+k-1}{k-1} - \binom{s-n-1+k-1}{k-1} - \cdots$$

theo nguyên lý bao hàm - loại trừ.

7 TUẦN 7

7.1 Bài 1: Phân hoạch tập hợp với kiến trúc Forrester

Đề bài: Cho $RT : CM$ và $(5, 1, 1, 4)$, S, $\#$ và $\in \mathbb{N}$ $(C \vdash khi\ 1 \to N)$ fill $s - DN$ kiến trúc Forrester.

:

Bài toán: Nhóm $n, k \in \mathbb{N}$. Ta có $p_k(n)$ biểu diễn Forrester $\leftarrow$ a Forrester chuyển vị F.

Ma trận Forrester được định nghĩa:

$$F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Phân hoạch của $5 = 3 + 1 + 1$ có các hoán vị:

$$5 = 3 + 1 + 1 = 1 + 3 + 1 = 1 + 1 + 3 \quad (21)$$
$$= 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 2 = 1 + 2 + 2 \quad (22)$$

Biểu đồ phân hoạch:

1	1	5
3	5	1
5	3	1

7.2 Bài 2: Phân hoạch vào K chẵng với điều kiện

Đề bài: Đếm số phân hoạch của n vào k phần không nhất là k.

:

Định nghĩa: $DN : n_i \in \mathbb{N}^*$, số phân hoạch n thành k phần là duy nhất.
Ký hiệu: $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \in (\mathbb{N}^*)^k$ với:

- $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n$
- $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$
- $\lambda \vdash n$ (đọc là "λ là một phân hoạch của n")

Ký hiệu $p_k(n)$: Số phân hoạch của n với đúng k phần.
Các tính chất:

$$p(n) = \text{tổng số phân hoạch của } n \quad (23)$$
$$p(n) = \sum_{k=1}^{n} p_k(n) \quad (24)$$
$$p_1(n) = 1 \quad \forall n \geq 1 \quad (25)$$
$$p_n(n) = 1 \quad \forall n \geq 1 \quad (26)$$

7.3 Bài 3: Thuật toán tính $p_k(n)$ với điều kiện $p_k(n) < \frac{n!}{k!}$

7.4 Bài 4: Công thức truy hồi cho phân hoạch

Định lý: Công thức truy hồi cho $p_k(n)$:

$$p_k(n) = p_k(n - k) + p_{k-1}(n - 1)$$

Chứng minh:

- Trường hợp 1: Phân hoạch có phần nhỏ nhất ≥ 2
  - Trừ 1 từ mỗi phần, ta được phân hoạch của $n - k$ thành k phần
  - Số cách: $p_k(n - k)$
- Trường hợp 2: Phân hoạch có ít nhất một phần bằng 1

- Bỏ phần bằng 1, ta được phân hoạch của $n-1$ thành $k-1$ phần
- Số cách: $p_{k-1}(n-1)$

Điều kiện biên:

$$p_0(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \tag{27}$$
$$p_k(0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \tag{28}$$
$$p_0(0) = 1 \tag{29}$$
$$p_k(n) = 0 \quad \text{nếu } k > n \tag{30}$$

7.5 Bài 5: Phân hoạch với điều kiện đặc biệt

Bài toán: Chứng minh rằng $p_k(n) < \frac{e^n}{k!}$

:

Xét phân hoạch của n vào k hộp giống:

- Nếu mỗi chẵng có ≥ 1 cây $\Rightarrow$ mỗi chẵng có nhiều nhất $n-k+1$ cây
- Số cách phân hoạch: $p_k(n) = \sum_{i=0}^{n-k} p_{k-1}(n-i-1)$

Ví dụ với $n = 5, k = 3$:

$$5 = 3+1+1 \quad \text{(hoán vị: } \binom{3}{1,1,1} = 3) \tag{31}$$
$$5 = 2+2+1 \quad \text{(hoán vị: } \binom{3}{1,2} = 3) \tag{32}$$

Tổng số phân hoạch: $p_3(5) = 2$

Kết luận:

1. $p_k(n)$ tăng theo n với k cố định
2. $p_k(n)$ đạt max tại $k \approx \sqrt{n}$
3. Công thức truy hồi hiệu quả để tính $p_k(n)$