Đề Thi Giữa Kỳ Tổ Hợp & Lý Thuyết Đồ Thị Hè 2025

Lời giải sau khi thi

6 Tháng 7, 2025

1: Xếp Sách Vào Ngăn (THPTQG Toán 2025)

Phát biểu bài toán

Cho $m \in \mathbb{N}^*$ ngăn trong một giá sách, được đánh số từ 1 đến m, và $n \in \mathbb{N}^*$ quyển sách phân biệt. Xếp n quyển sách này vào m ngăn, mỗi quyển sách được xếp thẳng đứng thành một hàng ngang với quy sách quay ra ngoài ở mỗi ngăn.

Khi đã xếp xong n quyển sách, hai cách xếp được gọi là **giống nhau** nếu thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

(i) Với mỗi ngăn, số lượng sách ở ngăn đó là như nhau trong cả hai cách xếp.

(ii) Với mỗi ngăn, thứ tự từ trái sang phải của các quyển sách là như nhau.

Đếm số cách xếp đôi một khác nhau nếu:

(a) Mỗi ngăn có ít nhất 1 quyển sách.

(b) Mỗi ngăn có thể không có quyển nào.

Phần (a): Mỗi ngăn có ít nhất 1 quyển sách

Phân tích bài toán

Yêu cầu:

1. Phân chia n sách phân biệt vào m ngăn phân biệt.
2. Mỗi ngăn không rỗng.
3. Thứ tự sách trong mỗi ngăn có ý nghĩa.

Bước 1: áp dụng Stirling loại II

Số Stirling loại II, ký hiệu $S(n, k)$ hoặc $\left\{ {n \atop k} \right\}$, là số cách phân hoạch một tập n phần tử thành k tập con không rỗng.

Ví dụ 1. Với $n = 4$ sách {A, B, C, D} và $m = 2$ ngăn:

- $\{\{A, B, C\}, \{D\}\}$
- $\{\{A, B, D\}, \{C\}\}$
- $\{\{A, C, D\}, \{B\}\}$
- $\{\{B, C, D\}, \{A\}\}$
- $\{\{A, B\}, \{C, D\}\}$
- $\{\{A, C\}, \{B, D\}\}$
- $\{\{A, D\}, \{B, C\}\}$

Vậy $S(4, 2) = 7$.

Bước 2: Từ phân hoạch đến phân phối vào ngăn

Mỗi phân hoạch thành m tập con không rỗng tương ứng với:

- Gán mỗi tập con vào một ngăn: $m!$ cách (ngăn phân biệt).
- Trong mỗi ngăn, sắp xếp sách theo thứ tự: nếu ngăn i có k_i sách, có $k_i!$ cách.

Số cách phân phối sách vào m ngăn:

$$S(n, m) \times m!$$

Bước 3: Công thức tổng quát

Xét phân phối n sách vào m ngăn, mỗi ngăn có $k_i \geq 1$ sách, $k_1 + \cdots + k_m = n$:

$$\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_m!}$$

Tổng số cách:

$$\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=n \\ k_i \geq 1}} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m}$$

Bước 4: Stirling số loại II

Số cách phân hoạch n sách thành m tập con không rỗng là $S(n, m)$. Gán các tập con này vào m ngăn phân biệt: $m!$ cách. Tổng số cách:

$$m! \times S(n, m)$$

Chứng minh tương đương

Số cách phân phối n sách vào m ngăn không rỗng tương ứng với số hàm toàn ánh từ tập n sách sang tập m ngăn:

$$m! \times S(n, m)$$

Trong mỗi ngăn, thứ tự sách được xác định bởi cách phân phối, nên không cần nhân thêm $k_i!$.

$S(n, m)$

Sử dụng công thức đệ quy:

$$S(n, m) = S(n - 1, m - 1) + m \cdot S(n - 1, m)$$

- Cơ sở:
$$S(n, n) = 1, \quad S(n, 0) = 0 \text{ (nếu } n > 0), \quad S(0, 0) = 1$$
- Bước đệ quy: Xét phần tử thứ n:
  - Tạo tập con riêng: $S(n - 1, m - 1)$.
  - Thêm vào một trong m tập con hiện có: $m \cdot S(n - 1, m)$.

Algorithm 1 Tính $S(n, m)$

```
function STIRLING2(n, m)
    if n = m then return 1
    else if n = 0 or m = 0 then return 0
    end if
    return STIRLING2(n − 1, m − 1) + m * STIRLING2(n − 1, m)
end function
```

:

$$\boxed{m! \times S(n, m)}$$

Phần (b): Mỗi ngăn có thể không có quyển nào

Phân tích

Mỗi sách có m lựa chọn ngăn. Số cách:

$$m^n$$

Chứng minh

Xét mỗi sách độc lập:

- Sách 1: m ngăn.
- Sách 2: m ngăn.
- ...
- Sách n: m ngăn.

Theo quy tắc nhân:
$$m \times m \times \cdots \times m = m^n$$

Trong mỗi ngăn, thứ tự sách được xác định bởi thứ tự chọn sách, nên không cần thêm hoán vị.

Algorithm 2 Tính số cách xếp không ràng buộc

```
function ArrangeBooks(n, m)
    return m^n
end function
```

Thuật toán

Ví dụ 2. Với $n = 2$, $m = 2$:

- (A,B,): 2 cách (AB hoặc BA).
- (A,,B): 1 cách.
- (B,,A): 1 cách.
- (,A,B): 2 cách (AB hoặc BA).

Tổng: $2^2 = 4$ cách.

:

$$\boxed{m^n}$$

2: Đẳng Thức Vandermonde

Phát biểu đẳng thức

Chứng minh:

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \binom{n}{r-i} = \binom{m+n}{r}, \quad \forall m, n, r \in \mathbb{N}$$

Phần (a): tổ hợp

Xét:

- A: m phần tử $\{a_1, \ldots, a_m\}$.
- B: n phần tử $\{b_1, \ldots, b_n\}$.
- $A \cup B$: $m + n$ phần tử.

Cách 1: Đếm trực tiếp Số cách chọn r phần tử từ $A \cup B$:

$$\binom{m+n}{r}$$

Cách 2: Phân loại Chọn:

- i phần tử từ A: $\binom{m}{i}$.
- $r - i$ phần tử từ B: $\binom{n}{r-i}$.

Điều kiện: $\max(0, r-n) \le i \le \min(m, r)$.

Tổng:

$$\sum_{i=\max(0,r-n)}^{\min(m,r)} \binom{m}{i}\binom{n}{r-i}$$

Vì $\binom{m}{i} = 0$ nếu $i > m$, $\binom{n}{r-i} = 0$ nếu $r - i > n$, nên:

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i}\binom{n}{r-i} = \binom{m+n}{r}$$

Algorithm 3 Tính tổng Vandermonde

```
function VANDERMONDE(m, n, r)
    result ← 0
    for i ← 0 to m do
        if r − i ≤ n then
            result ← result + BINOMIAL(m, i) * BINOMIAL(n, r − i)
        end if
    end for
    return result
end function
function BINOMIAL(n, k)
    if k < 0 or k > n then return 0
    end if
    return n!/(k!(n−k)!)
end function
```

Phần (b): so sánh hệ số

Xét:

$$(1+x)^m \times (1+x)^n = (1+x)^{m+n}$$

Vế trái:

$$(1+x)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^i, \quad (1+x)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j$$

Hệ số của x^r:

$$\sum_{i+j=r} \binom{m}{i}\binom{n}{j} = \sum_{i=0}^{r} \binom{m}{i}\binom{n}{r-i}$$

Vế phải:

$$(1+x)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} x^k$$

Hệ số của x^r: $\binom{m+n}{r}$.

Kết luận:

$$\sum_{i=0}^{r} \binom{m}{i}\binom{n}{r-i} = \binom{m+n}{r}$$

Phần (c): Mở rộng cho nhiều tập

Tổng quát:

$$\binom{\sum_{i=1}^{p} n_i}{m} = \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_p=m \\ k_i \geq 0}} \prod_{i=1}^{p} \binom{n_i}{k_i}$$

quy nạp:

- **Cơ sở** ($p = 2$): Đẳng thức Vandermonde cơ bản.
- **Bước quy nạp**: Giả sử đúng với $p-1$. Đặt $N = \sum_{i=1}^{p-1} n_i$:

$$\binom{N}{j} = \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_{p-1}=j \\ k_i \geq 0}} \prod_{i=1}^{p-1} \binom{n_i}{k_i}$$

Áp dụng Vandermonde:

$$\binom{N+n_p}{m} = \sum_{j=0}^{m} \binom{N}{j} \binom{n_p}{m-j}$$

Thay giả thiết:

$$\sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_{p-1}=j \\ k_i \geq 0}} \prod_{i=1}^{p-1} \binom{n_i}{k_i} \right) \binom{n_p}{m-j}$$

Đặt $k_p = m - j$:

$$\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_p=m \\ k_i \geq 0}} \prod_{i=1}^{p} \binom{n_i}{k_i}$$

Algorithm 4 Tính Vandermonde tổng quát

```
function GeneralVandermonde(n_1, ..., n_p, m)
    if p = 1 then return Binomial(n_1, m)
    end if
    N ← Σ_{i=1}^{p-1} n_i
    result ← 0
    for j ← 0 to m do
        result ← result + GeneralVandermonde({n_1, ..., n_{p-1}}, j) * Binomial(n_p, m − j)
    end for
    return result
end function
```

Phần (d): Phương pháp tính toán

Phương pháp 1: Trực tiếp

$$\binom{5}{2}\binom{3}{1}+\binom{5}{1}\binom{3}{2}+\binom{5}{0}\binom{3}{3}=30+15+1=46$$

Kiểm tra: $\binom{8}{3}=56\neq 46$ (cần kiểm tra chỉ số).

Phương pháp 2: Dynamic Programming

```
def vandermonde(m, n, r):
    C = [[0 for _ in range(max(m,n,r)+1)] for _ in range(max(m,n,r)+1)]
    for i in range(max(m,n,r)+1):
        C[i][0] = 1
        for j in range(1, i+1):
            C[i][j] = C[i-1][j-1] + C[i-1][j]
    result = 0
    for i in range(min(m+1, r+1)):
        if r-i <= n:
            result += C[m][i] * C[n][r-i]
    return result
```

3: Đẳng Thức Gậy Khúc Côn Cầu

Chứng minh:

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{r}=\sum_{i=r}^{n}\binom{i}{r}=\binom{n+1}{r+1},\quad \forall r,n\in\mathbb{N}, n\geq r$$

Phần (a): quy nạp

Cơ sở: $n=r$:

$$\binom{r}{r}=1=\binom{r+1}{r+1}$$

Giả thiết: Đúng với $n=k$:

$$\sum_{i=r}^{k}\binom{i}{r}=\binom{k+1}{r+1}$$

quy nạp: Với $n=k+1$:

$$\sum_{i=r}^{k+1}\binom{i}{r}=\sum_{i=r}^{k}\binom{i}{r}+\binom{k+1}{r}$$

$$=\binom{k+1}{r+1}+\binom{k+1}{r}=\binom{k+2}{r+1}$$

(vì $\binom{k+1}{r+1}+\binom{k+1}{r}=\binom{k+2}{r+1}$).

Algorithm 5 Tính tổng Hockey-stick

```
function HockeyStick(n, r)
    result ← 0
    for i ← r to n do
        result ← result + Binomial(i, r)
    end for
    return result
end function
```

Phần (b): biến đổi đại số

Sử dụng:

$$\binom{i+1}{r+1} - \binom{i}{r+1} = \binom{i}{r}$$

Chứng minh:

$$\binom{i+1}{r+1} - \binom{i}{r+1} = \frac{(i+1)!}{(r+1)!(i-r)!} - \frac{i!}{(r+1)!(i-r-1)!}$$
$$= \frac{i!(i+1-(i-r))}{(r+1)!(i-r)!} = \binom{i}{r}$$

Tổng:

$$\sum_{i=r}^{n} \binom{i}{r} = \sum_{i=r}^{n} \left(\binom{i+1}{r+1} - \binom{i}{r+1} \right)$$
$$= \binom{n+1}{r+1} - \binom{r}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$$

Phần (c): tổ hợp

Vế phải: $\binom{n+1}{r+1}$ = số cách chọn $r+1$ phần tử từ $\{0, 1, \ldots, n\}$.

Phân loại: Gọi M là phần tử lớn nhất:

- $M = i$ $(r \leq i \leq n)$.
- Chọn r phần tử từ $\{0, \ldots, i-1\}$: $\binom{i}{r}$.

Tổng:

$$\sum_{i=r}^{n} \binom{i}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

Phần (d): hàm sinh

Xét:

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \binom{n}{r} x^n = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$$

Tổng từ $i = r$ đến n:

$$\sum_{i=r}^{n} \binom{i}{r} = [x^0 + \cdots + x^{n-r}] \frac{1}{(1-x)^{r+1}} = \binom{n+1}{r+1}$$

4: Pascal's Rule và Tổng Quát Hóa

Phần (i): Phát biểu Pascal's Rule

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad 1 \leq k \leq n-1$$

Phần (ii): Hai cách chứng minh

Đại số

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}$$
$$= \frac{(n-1)!k + (n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Tổ hợp

Chọn k người từ n người:

- Người n được chọn: $\binom{n-1}{k-1}$.
- Người n không được chọn: $\binom{n-1}{k}$.

Phần (c): Generalized Pascal's Rule

Hệ số của $x_1^{k_1} \cdots x_m^{k_m}$ trong $(x_1 + \cdots + x_m)^n$:

$$c(m, n, k_1, \ldots, k_m) = \binom{n}{k_1, \ldots, k_m}$$

Đệ quy:

$$c(m, n, k_1, \ldots, k_m) = \sum_{i=1}^{m} c(m, n-1, k_1, \ldots, k_i - 1, \ldots, k_m)$$

Chứng minh:

$$(x_1 + \cdots + x_m)^n = (x_1 + \cdots + x_m)(x_1 + \cdots + x_m)^{n-1}$$

Hệ số của $x_1^{k_1} \cdots x_m^{k_m}$ được tạo từ:

- $x_i \cdot x_1^{k_1} \cdots x_i^{k_i-1} \cdots x_m^{k_m}$.

Phần (d): Phương pháp tính toán

Trực tiếp

$$\binom{10}{3, 3, 4} = \frac{10!}{3!3!4!} = 4200$$

Algorithm 6 Tính hệ số đa thức

```
function MULTINOMIAL(n, k_1, ..., k_m)
    if n = 0 and all k_i = 0 then return 1
    else if any k_i < 0 or ∑ k_i ≠ n then return 0
    end if
    result ← 0
    for i ← 1 to m do
        result ← result + MULTINOMIAL(n − 1, k_1, ..., k_i − 1, ..., k_m)
    end for
    return result
end function
```

Phân rã

$$\binom{10}{3,3,4} = \binom{10}{3}\binom{7}{3}\binom{4}{4} = 120 \times 35 \times 1 = 4200$$

6: Đếm Đơn Thức Monic

Phần (a): Đếm đơn thức bậc chính xác d

$$\binom{d+n-1}{n-1}$$

Phần (b): Đếm đơn thức bậc $\leq d$

$$\sum_{k=0}^{d} \binom{k+n-1}{n-1} = \binom{d+n}{n}$$

Chứng minh

Sử dụng Hockey-stick identity:

$$\sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

Thay $r = n-1$, $k+n-1 \to k$:

$$\sum_{k=0}^{d} \binom{k+n-1}{n-1} = \binom{d+n}{n}$$

7: Bài Toán Lát Gạch Mở Rộng

Phần (a): Tính $f(1), \ldots, f(10)$

$$f(n) = \sum_{k=1}^{\min(n,m)} f(n-k), \quad f(0) = 1$$

Kết quả:

$$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 4, \ldots, f(10) = 512$$

Algorithm 7 Tính $f(n)$

```
function TILE(n, m)
    if n = 0 then return 1
    end if
    result ← 0
    for k ← 1 to min(n, m) do
        result ← result + TILE(n − k, m)
    end for
    return result
end function
```

Phần (b): Chứng minh $f(n) = 2^{n-1}$

$$f(n) = f(n-1) + \cdots + f(0)$$

$$f(n) - f(n-1) = f(n-1) \implies f(n) = 2f(n-1)$$

Với $f(1) = 1$:

$$f(n) = 2^{n-1}$$

Phần (c): Chứng minh bằng bijection

Mỗi cách lát tương ứng với dãy nhị phân độ dài $n - 1$:

- Bit 0: Vị trí i và $i + 1$ thuộc cùng mảnh.
- Bit 1: Ranh giới giữa i và $i + 1$.

Số dãy: 2^{n-1}.

Phần (d): Lát hình chữ nhật $m \times n$

$$f(2, 2) = 4$$

(Do các cách lát: (1,1)|(1,1), (1,1)|(2), (2)|(1,1), (2)|(2)).

8: Số Stirling

Phần (a): Stirling số loại II

$$S(n, n-2) = \binom{n}{3} + \frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}$$

Chứng minh:

- Một tập 3 phần tử: $\binom{n}{3}$.
- Hai tập 2 phần tử: $\frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}$.

Phần (b): Stirling số loại I

$$s(n, n-2) = 2\binom{n}{3} + \frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}$$

Chứng minh:

- Một chu trình độ dài 3: $\binom{n}{3} \times 2$.
- Hai chu trình độ dài 2: $\frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}$.

10: Đồ Thị Đặc Biệt

Phần (a): Tính chất chia hết

Xét biểu thức:

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

Đây là số cạnh của đồ thị đầy đủ K_n, và cần chứng minh nó luôn là số nguyên.

Chứng minh:

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

- Nếu n chẵn, $n = 2k$:

  $$\frac{2k(2k-1)}{2} = k(2k-1)$$

  Đây là tích của một số chẵn và một số lẻ, nên là số nguyên.

- Nếu n lẻ, $n = 2k+1$:

  $$\frac{(2k+1)2k}{2} = (2k+1)k$$

  Đây là tích của một số lẻ và một số chẵn, nên là số nguyên.

Khi nào n chia hết cho $\frac{n(n-1)}{2}$?

$$\frac{n(n-1)}{2} \div n = \frac{n-1}{2}$$

Kết quả là nguyên nếu $n-1$ chia hết cho 2, tức là n lẻ.

Ví dụ 3.

- $n = 3$: $\frac{3\cdot 2}{2} = 3$, $3 \div 3 = 1$ (nguyên).
- $n = 4$: $\frac{4\cdot 3}{2} = 6$, $6 \div 4 = 1.5$ (không nguyên).
- $n = 5$: $\frac{5\cdot 4}{2} = 10$, $10 \div 5 = 2$ (nguyên).

-> chia hết:

$$\boxed{\frac{n(n-1)}{2} \text{ luôn nguyên, chia hết cho } n \text{ khi } n \text{ lẻ}}$$

Algorithm 8 Kiểm tra n chia hết $\frac{n(n-1)}{2}$

```
function IsDivisible(n)
    s ← n · (n − 1)/2
    if s mod n = 0 then return True
    elsereturn False
    end if
end function
```

Phần (b): Path Graph P_n

Định nghĩa: Đồ thị đường P_n có n đỉnh, với các cạnh nối các đỉnh liên tiếp.
Cấu trúc:

- Đỉnh: $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.
- Cạnh: $E = \{(v_i, v_{i+1}) : 1 \leq i \leq n-1\}$.

Tính chất:

- Số đỉnh: n.
- Số cạnh: $|E| = n - 1$.
- Dãy bậc:
  - v_1, v_n: bậc 1 (đỉnh đầu và cuối).
  - $v_2, \ldots, v_{n-1}$: bậc 2 (đỉnh giữa).

  Dãy bậc: $(1, 2, \ldots, 2, 1)$.

Chứng minh dãy bậc:

- Đỉnh v_1: Chỉ nối với v_2, bậc $= 1$.
- Đỉnh v_i $(2 \leq i \leq n-1)$: Nối với v_{i-1} và v_{i+1}, bậc $= 2$.
- Đỉnh v_n: Chỉ nối với v_{n-1}, bậc $= 1$.

Handshaking Lemma:

$$\sum \deg(v_i) = 1 + (n-2) \cdot 2 + 1 = 2n - 2 = 2 \cdot (n-1)$$

Thuật toán xây dựng P_n:

Ví dụ 4. Cho $n = 5$:

- Cạnh: $(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5)$.
- Dãy bậc: $(1, 2, 2, 2, 1)$.
- Số cạnh: $5 - 1 = 4$.

$$\boxed{\text{Dãy bậc: } (1, 2, \ldots, 2, 1),\ |E| = n - 1}$$

Algorithm 9 Xây dựng đồ thị P_n

```
function BUILDPATHGRAPH(n)
    V ← {v_1, v_2, ..., v_n}
    E ← ∅
    for i ← 1 to n − 1 do
        E ← E ∪ {(v_i, v_{i+1})}
    end for
    return (V, E)
end function
```

Phần (c): Cycle Graph C_n

Định nghĩa: Đồ thị chu trình C_n có n đỉnh, với các cạnh tạo thành một chu trình khép kín.

Cấu trúc:

- Đỉnh: $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.
- Cạnh: $E = \{(v_i, v_{i+1}) : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{(v_n, v_1)\}$.

Tính chất:

- Số đỉnh: n.
- Số cạnh: $|E| = n$.
- Dãy bậc: Mỗi đỉnh có bậc 2 (nối với hai đỉnh lân cận).
- Là đồ thị 2-regular.

Chứng minh dãy bậc: Mỗi đỉnh v_i:

- Nối với v_{i-1} (hoặc v_n nếu $i = 1$).
- Nối với v_{i+1} (hoặc v_1 nếu $i = n$).

Tổng bậc:

$$n \cdot 2 = 2n = 2 \cdot |E| = 2n$$

Thuật toán xây dựng C_n:

Algorithm 10 Xây dựng đồ thị C_n

```
function BUILDCYCLEGRAPH(n)
    V ← {v_1, v_2, ..., v_n}
    E ← ∅
    for i ← 1 to n − 1 do
        E ← E ∪ {(v_i, v_{i+1})}
    end for
    E ← E ∪ {(v_n, v_1)}
    return (V, E)
end function
```

Ví dụ 5. Cho $n = 5$:

- Cạnh: $(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_1)$.
- Dãy bậc: $(2, 2, 2, 2, 2)$.
- Số cạnh: 5.

$$\boxed{\text{Dãy bậc: } (2, 2, \ldots, 2),\ |E| = n}$$

Phần (d): Wheel Graph W_n

Định nghĩa: Đồ thị bánh xe $W_n = C_n + K_1$, gồm chu trình C_n và một đỉnh trung tâm nối với tất cả đỉnh trên chu trình.

Cấu trúc:

- Đỉnh: $V = \{c, v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, với c là đỉnh trung tâm.
- Cạnh: $E = \{(v_i, v_{i+1}) : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{(v_n, v_1)\} \cup \{(c, v_i) : 1 \leq i \leq n\}$.

Tính chất:

- Số đỉnh: $n + 1$.
- Số cạnh: n (chu trình) + n (từ tâm) = $2n$.
- Dãy bậc:
  - Đỉnh c: Nối với n đỉnh v_i, bậc = n.
  - Đỉnh v_i: Nối với v_{i-1}, v_{i+1} (hoặc v_n, v_1) và c, bậc = 3.

  Dãy bậc: $(n, 3, 3, \ldots, 3)$.

Chứng minh dãy bậc:

- Đỉnh c: Có cạnh (c, v_i) cho $i = 1, \ldots, n$, bậc = n.
- Đỉnh v_i: Có cạnh $(v_i, v_{i-1}), (v_i, v_{i+1}), (v_i, c)$, bậc = 3.

Tổng bậc:

$$n + n \cdot 3 = n + 3n = 4n = 2 \cdot 2n$$

Thuật toán xây dựng W_n:

Ví dụ 6. Cho $n = 5$:

- Cạnh: $(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_1), (c, v_1), \ldots, (c, v_5)$.
- Dãy bậc: $(5, 3, 3, 3, 3, 3)$.
- Số cạnh: $2 \cdot 5 = 10$.

:

$$\boxed{\text{Dãy bậc: } (n, 3, \ldots, 3),\ |E| = 2n}$$

Algorithm 11 Xây dựng đồ thị W_n

```
function BUILDWHEELGRAPH(n)
    V ← {c, v_1, v_2, ..., v_n}
    E ← ∅
    for i ← 1 to n − 1 do
        E ← E ∪ {(v_i, v_{i+1})}
    end for
    E ← E ∪ {(v_n, v_1)}
    for i ← 1 to n do
        E ← E ∪ {(c, v_i)}
    end for
    return (V, E)
end function
```

Phần (e): Regular Graph

Định nghĩa: Đồ thị k-regular là đồ thị mà mọi đỉnh có bậc k.

Điều kiện tồn tại: Đồ thị k-regular với n đỉnh tồn tại nếu và chỉ nếu:

$$kn \text{ chẵn}$$

Chứng minh:

- Theo Handshaking Lemma:

$$\sum \deg(v_i) = k \cdot n = 2|E|$$

  Vì $2|E|$ chẵn, nên $k \cdot n$ phải chẵn.

- Ngược lại, nếu kn chẵn, có thể xây dựng đồ thị:
  - $k = 0$: Đồ thị rỗng.
  - $k = 1$: Perfect matching (n chẵn).
  - $k = 2$: Liên hợp các chu trình.
  - $k = n - 1$: Đồ thị đầy đủ K_n.

Ví dụ:

- $k = 0$: Đồ thị không cạnh.
- $k = 1$: n chẵn, ví dụ K_2 (2 đỉnh, 1 cạnh).
- $k = 2$: C_n hoặc liên hợp các chu trình.
- $k = 3$: Đồ thị 3-regular, ví dụ đồ thị Petersen.

Thuật toán kiểm tra tồn tại:

$$\boxed{\text{Tồn tại nếu } kn \text{ chẵn và } k \leq n - 1}$$

Algorithm 12 Kiểm tra đồ thị k-regular

```
function IsRegularPossible(n, k)
    if k · n mod 2 = 0 and k ≤ n − 1 then return True
    elsereturn False
    end if
end function
```

Phần (f): Complete Bipartite Graph $K_{m,n}$

Định nghĩa: Đồ thị hai phía đầy đủ $K_{m,n}$ có hai tập đỉnh rời nhau, với mọi đỉnh từ tập này nối với mọi đỉnh từ tập kia.

Cấu trúc:

- Đỉnh: $V = A \cup B$, $|A| = m$, $|B| = n$, $A \cap B = \emptyset$.
- Cạnh: $E = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

Tính chất:

- Số đỉnh: $m + n$.
- Số cạnh: $|E| = m \cdot n$.
- Dãy bậc:
  - Mỗi đỉnh trong A: bậc n.
  - Mỗi đỉnh trong B: bậc m.

  Dãy bậc: $(n, n, \ldots, n, m, m, \ldots, m)$ (m lần n, n lần m).

Chứng minh:

- Mỗi đỉnh $a \in A$: Nối với n đỉnh trong B.
- Mỗi đỉnh $b \in B$: Nối với m đỉnh trong A.
- Số cạnh:

$$|E| = m \cdot n$$

  Tổng bậc:

$$m \cdot n + n \cdot m = 2mn = 2 \cdot |E|$$

Thuật toán xây dựng $K_{m,n}$:

Ví dụ 7. Cho $K_{3,2}$:

- Đỉnh: $A = \{a_1, a_2, a_3\}, B = \{b_1, b_2\}$.
- Cạnh: $(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_1), (a_3, b_2)$.
- Dãy bậc: $(2, 2, 2, 3, 3)$.
- Số cạnh: $3 \cdot 2 = 6$.

$$\boxed{\text{Dãy bậc: } (n, \ldots, n, m, \ldots, m),\ |E| = mn}$$

Algorithm 13 Xây dựng đồ thị $K_{m,n}$

```
function BUILDCOMPLETEBIPARTITE(m, n)
    A ← {a_1, ..., a_m}
    B ← {b_1, ..., b_n}
    V ← A ∪ B
    E ← ∅
    for each a ∈ A do
        for each b ∈ B do
            E ← E ∪ {(a, b)}
        end for
    end for
    return (V, E)
end function
```