Chủ đề: Phép toán và cấu trúc đại số thông dụng

BÀI TẬP PHẦN 1

1) Tập A được trang bị phép toán hai ngôi có phần tử đơn vị trái là e_1 và phần tử đơn vị phải là e_2. Chứng minh $e_1 = e_2$.

2) Giả sử tập A được trang bị phép toán hai ngôi o có hai phần tử đơn vị trái e_1 và e_2 khác nhau (tức là $e_1 \neq e_2$). Chứng minh phép toán o không có phần tử đơn vị phải.

3) Tìm một ví dụ về nửa nhóm:

   a) Có nhiều (ít nhất hai) phần tử đơn vị bên trái (và do đó phải không có bất kỳ phần tử đơn vị phải nào).

   b) Có một phần tử đơn vị trái duy nhất nhưng không có phần tử đơn vị phải.

   c) Không có phần tử đơn vị.

4) Giả sử (M, •) là một nửa nhóm có phần tử đơn vị trái là e. Xét tập E được định nghĩa như sau:

$$E = \{\alpha \in M \ / \ \alpha \bullet e = e\}.$$

   a) Chứng minh $E \neq \varnothing$. Hơn nữa mọi phần tử đơn vị trái của nửa nhóm M đều thuộc về E.

   b) Chứng minh (E, •) cũng là nửa nhóm, tức là phép toán đang xét là phép toán đóng kín trong E.

   c) Mọi phần tử thuộc về E đều là đơn vị trái của nửa nhóm M.

   d) Liên hệ với bài tập 3a) để tìm tất cả các phần tử đơn vị bên trái của ví dụ đã đề xuất.

5) Giả sử (M, •) là một nửa nhóm có phần tử đơn vị trái là e. Xét tập U(e) được định nghĩa như sau:

$$U(e) = \{x \in M \ / \ \exists x' \in M\text{: } x \bullet x' = x' \bullet x = e\}.$$

   Hãy chứng minh các điều sau đây:

   a) $U(e) \neq \varnothing$ và phép toán đang xét đóng kín trong U(e).

   b) e là phần tử đơn vị (hai phía) trong U(e).

   c) Cấu trúc (U(e), •) là một nhóm.

   Liên hệ với bài tập 4d) để tìm nhóm (U(e), •) ứng với mỗi phần tử đơn vị trái e của nửa nhóm đã đề xuất trong bài tập 3a).

6) Giả sử (H, •) là một nửa nhóm. Với mỗi $y \in H$, tập hợp yHy được định nghĩa là $yHy = \{y \bullet h \bullet y \ / \ h \in H\}$. Giả sử tồn tại một phần tử $a \in H$ sao cho H = aHa. Chứng minh rằng H có một phần tử đơn vị đối với phép toán đang xét.

7) Giả sử (H, •) là một nửa nhóm hữu hạn có tính giản lược (hai bên), tức là với mọi a, x, y∈H ta luôn có:

- Tính giản lược trái $a \bullet x = a \bullet y \Rightarrow x=y$;
- Tính giản lược phải $x \bullet a = y \bullet a \Rightarrow x=y$.

a) Chứng minh (H, •) là một nhóm.

b) Cho ví dụ về một nửa nhóm vô hạn có tính giản lược mà không phải là một nhóm.

8) Giả sử H là một nửa nhóm thỏa mãn tính chất: aH=H và H=Ha với mọi a∈H. Chứng minh H là một nhóm.

9) Giả sử (H, •) là nửa nhóm có đơn vị trái là e và mọi phần tử thuộc về H đều khả đảo trái, nghĩa là:

(i) $\forall a \in H,\ e \bullet a = a$

(ii) $\forall a \in H,\ \exists a' \in H:\ a' \bullet a = e$

Chứng minh H là một nhóm.

10) Cho nhóm G có phần tử trung hòa là e. Giả sử phần tử a∈G, a có cấp n. Với k là số nguyên dương, ta cần xác định cấp của a^k.

a) Chứng minh nếu $a^m=e$ thì n là ước số của m.

b) Giả sử k là ước số của n và d=n/k. Chứng minh a^k có cấp d.

c) Gọi m = gcd (k, n) (tức là ước chung lớn nhất của k và n) và d=n/m. Chứng minh a^k có cấp d.

d) Suy ra nếu (k, n) = 1 (tức là k và n nguyên tố cùng nhau) thì a^k có cấp n.

11) Cho nhóm G và các phần tử a, b∈G thỏa mãn điều kiện ab = ba. Giả sử a, b có cấp tương ứng là m, n.

a) Giả sử (m, n)=1. Chứng minh ab có cấp là mn.

b) Giả sử (m, n)=d > 1. Tìm một ví dụ cụ thể để cho thấy cấp ab chưa chắc là bội số chung nhỏ nhất của m và n (tức là $\frac{mn}{d}$).

12) Cho nhóm G và các phần tử a, b∈G, a cấp n. Hãy tìm cấp của phần tử $c=b^{-1}ab$.

13) Cho nhóm G và các phần tử a, b∈G. Chứng minh ab và ba có cùng cấp.

14) Tìm một ví dụ về nhóm G có hai phần tử a, b có cấp hữu hạn nhưng ab có cấp vô hạn (đương nhiên lúc đó $ab \neq ba$).