TD : Complexité

Exercice 1

Pour chacun de ces problèmes, dire en justifiant s'il s'agit d'un problème de décision :

1. Mettre une formule logique sous forme normale conjonctive.
2. Déterminer la taille de la clique maximale d'un graphe.
3. Savoir si un graphe peut être coloré avec n couleurs.
4. Dans le problème du sac à dos, savoir s'il existe un sac à dos de valeur $\geq$ à une constante K donnée.
5. Savoir si un graphe est connexe.
6. Trier une liste.
7. Déterminer si un mot est palindrome.
8. Compter le nombre d'occurrences d'un motif dans un texte.

Exercice 2

Le problème CLIQUE est le suivant :

- Instance : un graphe G non orienté et un entier $k > 0$.
- Question : existe-t-il une clique de taille k dans G ?

Le problème INDEPENDENT-SET est le suivant :

- Instance : un graphe G non orienté et un entier $k > 0$.
- Question : existe-t-il un ensemble de sommets indépendants (sans aucune arête) de taille k dans G ?

1. Montrer que CLIQUE est décidable.
2. Montrer que CLIQUE $\leq$ INDEPENDENT-SET.
3. La réduction est-elle polynomiale ?
4. A-t-on INDEPENDENT-SET $\leq$ CLIQUE ?

Exercice 3

On introduit pour tout entier $k \geq 2$, le problème de décision k-COLOR est le suivant :

- Instance : un graphe G non orienté.
- Question : existe-t-il une coloration valide (aucune paire de sommets adjacents n'a la même couleur) des sommets du graphe utilisant au plus k couleurs ?

Attention ici k ne fait pas partie de l'instance... on a définit une famille de problèmes de décision.

1. Montrer que pour tout $k \geq 2$, k-COLOR est décidable.
2. Montrer que 3-COLOR $\leq$ 4-COLOR.
3. La réduction est-elle polynomiale ?
4. Généraliser, montrer que pour tout $k \geq 3$, 3-COLOR $\leq$ k-COLOR.

Exercice 4

Pour les problèmes de décision suivants, déterminer quand vous le pouvez, si le problème est dans P.

1. **Instance :** un entier $n \in \mathbb{N}$ codé sous forme d'un mot binaire. **Question :** l'entier est-il divisible par 2 ?
2. **Instance :** un entier $n \in \mathbb{N}$ codé sous forme d'un mot binaire. **Question :** l'entier est-il divisible par 7 ?
3. **Instance :** un mot sur $u \in \{a, b\}^*$ **Question :** le mot u est-il un mot de Dyck (mot bien parenthésé) ?
4. **Instance :** un graphe $G = (S, A)$, deux sommets $x, y \in S$. **Question :** Existe-t-il un chemin de x à y ?
5. **Instance :** une formule propositionnelle F sous forme normale disjonctive. **Question :** La formule est-elle satisfiable ?

Exercice 5

Reprendre l'exercice précédent mais déterminer si les problèmes proposés appartiennent à NP

Exercice 6

Soit A et B deux problèmes de décision tels que $A \leq_P B$ et $B \in NP$ montrer que $A \in NP$.

Exercice 7

On considère les deux problèmes de décision suivants :

- CNF-SAT

  Instance : Une formule propositionnelle F sous forme normale conjonctive

  Question : F est satisfiable ?
- 3-SAT

  Instance : Une formule propositionnelle F sous forme normale conjonctive où toutes les clauses comportent 3 littéraux exactement.

  Question : F est satisfiable ?

Dans l'exercice on **admet** que CNF-SAT est NP-complet.

1. Justifier que 3-SAT est dans NP.
2. Démontrer que 3-SAT $\leq_P$ CNF-SAT
3. Démontrer que CNF-SAT $\leq_P$ 3-SAT
4. Justifier que 3-SAT est NP-complet.

Exercice 8

On considère le problème de décision SUDOKU suivant :

Instance : Une grille $n \times n$ partiellement remplie par des entiers entre 1 et n.

Question : Peut-on compléter la grille entièrement selon les règles du jeu de Sudoku ?

1. On pose $x_{i,j,k}$ la variable booléenne indiquant si le chiffre k est situé dans la case (i, j). Combien y a-t-il de variables ?
2. Soit X un ensemble de n cases de la grille, justifier que l'on peut écrire une formule propositionnelle F_X qui est vraie si et seulement si X contient une et une seule occurrence de chaque entier entre 1 et n.
3. En déduire que les règles du Sudoku peuvent être codées à l'aide d'une formule propositionnelle.
4. Démontrer que SUDOKU se réduit polynomialement à SAT : SUDOKU $\leq_P$ SAT.
5. Démontrer de deux manières que SUDOKU est dans NP.
6. Proposer une résolution du jeu de SUDOKU basée sur un retour sur trace.

Exercice 9

La classe co-NP est l'ensemble des problèmes de décision dont on peut vérifier les instances négatives. Elle est définie de la même manière que NP mais cette fois les cerficats démontrent que l'instance est négative et la machine vérifie en temps polynomial si le certificat donné est bien un contre-exemple pour le problème posé.

1. Soit PREMIER le problème consistant à déterminer si un entier n est premier. Montrer que PREMIER est dans co-NP
2. Démontrer que $P \subset NP \cap$ co-NP.

CULTURE : aujourd'hui on ne sait pas si $P = NP \cap$ co-NP