LYCÉE LECONTE DE LISLE

Logique : cours 1A + 2A

Vincent Picard

1
Logique propositionnelle

Syntaxe

Les formules propositionnelles sont définies par induction, une formule est soit :

- La formule toujours fausse $\bot$
- La formule toujours vraie $\top$
- Une variable propositionnelle : $x, y, z, a, b, x_1, x_2, \dots$
- La négation d'une formule : $\neg F$
- La conjonction de 2 formules : $(F \wedge G)$
- La disjonction de 2 formules : $(F \vee G)$
- Une implication de deux formules : $(F \rightarrow G)$
- Une équivalence de deux formules : $(F \leftrightarrow G)$.

Cette définition est inductive : à chaque formule correspond à un arbre où les feuilles sont les variables et les constantes $\top$ et $\bot$ et où les nœuds correspondent aux connecteurs logiques.

On peut donc parler de **taille** et **hauteur** d'une formule.

Simplifications d'écritures

Pour éviter les écritures trop chargées, on pourra omettre certaines parenthèses :

- En considérant que les opérateurs $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ sont associatifs à droite : $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$ signifie $(x_1 \vee (x_2 \vee x_3))$.
- En introduisant une priorité des connecteurs qui est, du plus priotaire au moins prioritaire : $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

En cas de doute ou de possibilité de lecture ambigue : mettez les parenthèses. En particulier, je préconise de les écrire lorsqu'on mélange des $\wedge$ et des $\vee$.

Valuation

On notera $\mathbb{B} = \{true, false\}$ l'ensemble des valeurs de vérité (booléens).

Une valuation φ est une attribution $true/false$ pour chacune des variables propositionnelles. Mathématiquement, il s'agit donc d'une application $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{B}$.

Quand l'ensemble des variables est fini, on peut représenter une valuation sous forme d'un tableau.

Sémantique

Une formule propositionnelle peut-être vraie ou fausse selon la valeur de vérité attribuée à chacune de ses variables. Ainsi, pour une valuation φ fixée, on définit la valeur de vérité d'une formule F, notée $[\![F]\!]_\varphi$ par :

- $[\![\bot]\!]_\varphi = \mathit{false}$
- $[\![\top]\!]_\varphi = \mathit{true}$
- Si x est une variable, $[\![x]\!]_\varphi = \varphi(x)$
- $[\![\neg F]\!]_\varphi = [\![\neg]\!]\left([\![F]\!]_\varphi\right)$.
- $[\![(F \wedge G)]\!]_\varphi = [\![\wedge]\!]\left([\![F]\!]_\varphi, [\![G]\!]_\varphi\right)$
- $[\![(F \vee G)]\!]_\varphi = [\![\vee]\!]\left([\![F]\!]_\varphi, [\![G]\!]_\varphi\right)$
- $[\![(F \rightarrow G)]\!]_\varphi = [\![\rightarrow]\!]\left([\![F]\!]_\varphi, [\![G]\!]_\varphi\right)$
- $[\![(F \leftrightarrow G)]\!]_\varphi = [\![\leftrightarrow]\!]\left([\![F]\!]_\varphi, [\![G]\!]_\varphi\right)$

où $[\![\neg]\!]$, $[\![\wedge]\!]$, $[\![\vee]\!]$, $[\![\rightarrow]\!]$, $[\![\leftrightarrow]\!]$ sont les fonctions booléennes usuelles associées à chaque connecteur.

Tautologies et satisfiabilité

- Une formule est une tautologie si elle est vraie quelque soit la valuation.

$$\text{pour toute valuation } \varphi, \quad [\![F]\!]_\varphi = true$$

- Une formule est une antilogie si elle est fausse quelque soit la valuation.

$$\text{pour toute valuation } \varphi, \quad [\![F]\!]_\varphi = false$$

- Une formule est une satisfiable s'il existe une valuation qui la rend vraie.

$$\text{il existe une valuation } \varphi, \quad [\![F]\!]_\varphi = true$$

- Prop : Une formule est une tautologie ssi sa négation n'est pas satisfiable.
- Prop : Une formule est satisfiable ssi sa négation n'est pas une tautologie.

Algorithme de Quine

Pour tester la satisfiabilité d'une formule propositionnelle on peut construire sa table de vérité ou utiliser l'algorithme de Quine.

Algorithme de Quine

- Soit F une formule contenant les variables $x_1, \ldots, x_n$.
- On se fixe $\varphi(x_1) = \mathit{false}$ et on teste récursivement la satisfiabilité de $F[\bot/x_1]$ qui contient une variable de moins.
- Si cela échoue, on se fixe $\varphi(x_1) = \mathit{true}$ et on teste récursivement la satisfiabilité de $F[\top/x_1]$ qui contient une variable de moins.
- Si cela échoue encore, la formule n'est pas satisfiable.

Cela revient donc à construire progressivement un arbre binaire pour toutes les possiblités de φ.

Exemple : $F = (a \vee b) \wedge (\neg b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee c) \wedge (a \vee c)$

Équivalence logique

Deux formules F et G sont logiquement équivalentes si

$$\text{pour toute valuation } \varphi, \quad [\![F]\!]_\varphi = [\![G]\!]_\varphi$$

On note alors $F \equiv G$. Attention à ne pas confondre avec le connecteur logique $\leftrightarrow$.

Les équivalences permettent de calculer sur les formules et de les simplifier.

Certaines équivalences sont à connaître, en particulier (non exhaustif) :

- $\neg\neg F \equiv F$
- $F \vee (G \wedge H) \equiv (F \vee G) \wedge (F \vee H)$
- $F \wedge (G \vee H) \equiv (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$
- $\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G$ (loi de De Morgan)
- $\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G$ (loi de De Morgan)
- $(F \rightarrow G) \equiv (\neg F \vee G) \equiv \neg(F \wedge \neg G)$
- …

Tables de vérité

La table de vérité d'une formule, ou d'un ensemble de formules, contenant n variables distinctes, consiste à présenter sous forme de tableau la valeur de vérité de ces formules pour chacune des 2^n valuations possibles.

Une formule est une tautologie (resp. une antilogie) si toutes les lignes valent $true$ (resp. $false$) dans sa table de vérité.

Une formule est satisfiable si au moins une des lignes de sa table de vérité vaut $true$.

Deux formules F et G sont équivalentes si et seulement si elles ont même table de vérité.

La table de vérité permet donc de démontrer beaucoup de choses mais sa construction a un coût exponentiel.

Conséquence logique

Elle ne doit pas être confondue avec l'implication $\rightarrow$ qui est un connecteur logique.

Une formule logique F est conséquence d'un ensemble de formules $\Gamma = \{G_1, G_2, \ldots\}$ si pour toute valuation φ qui rend vrai toutes les formules de Γ alors cette valuation rend aussi vrai F. On note :

$$\Gamma \models F$$

Une formule F est une tautologie ssi $\varnothing \models F$ ce que l'on note plus simplement $\models F$.

$F \equiv G$ si et seulement si $F \models G$ et $G \models F$.

Attention, ni $\models$, ni $\equiv$, ne sont des connecteurs logiques. Ces symboles n'apparaissent donc jamais à l'intérieur d'une formule.

Formes normales

- **Littéral** : un littéral est une formule qui est soit une variable x, soit sa négation $\neg x$.

- **Forme normale conjonctive** : c'est une formule qui est une conjonction de disjonctions de littéraux :

$$(l_{1,1} \vee l_{1,2} \vee \dots \vee l_{1,k_1}) \wedge \underbrace{(l_{2,1} \vee l_{2,2} \vee \dots \vee l_{2,k_2})}_{\text{une clause}} \wedge \dots \wedge (l_{m,1} \vee l_{m,2} \vee \dots \vee l_{m,k_m})$$

- **Forme normale disjonctive** : c'est une formule qui est une disjonction de conjonctions de littéraux :

$$(l_{1,1} \wedge l_{1,2} \wedge \dots \wedge l_{1,k_1}) \vee (l_{2,1} \wedge l_{2,2} \wedge \dots \wedge l_{2,k_2}) \vee \dots \vee (l_{m,1} \wedge l_{m,2} \wedge \dots \wedge l_{m,k_m})$$

Pour toute formule logique F, il existe une formule sous FNC G et une formule sous FND H telles que $F \equiv G \equiv H$. Une méthode consiste à utiliser la table de vérité.

2
Logique des prédicats

Les ingrédients d'une formule du 1er ordre

Les formules de la logique des prédicats, aussi appelée logique du 1er ordre, permettent d'écrire certains énoncés décrivant des faits (prédicats) sur des éléments et en permettant l'utilisation des quantificateurs.

Pour écrire une formule du 1er ordre on utilise les symboles suivants :

- un ensemble de symboles de constantes $\mathcal{C}$
- un ensemble de symboles de fonctions $\mathcal{F}$
- un ensemble de variables $\mathcal{V}$
- un ensemble de symboles de prédicats $\mathcal{P}$
- les symboles $\top$ et $\bot$
- les connecteurs de la logique propositionnelle $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- les quantificateurs $\forall$ et $\exists$.
- les parenthèses et les virgules

Voici un exemple de formule du 1er ordre

$$\forall x \quad \left(\underbrace{\text{REEL}}_{predicat} (\underbrace{x}_{variable}) \rightarrow \underbrace{\text{SUPERIEUR}}_{predicat} \left(\underbrace{\text{carre}}_{fonction} (\underbrace{x}_{variable}), \underbrace{0}_{constante} \right) \right)$$

signifiant : "le carré de tout réel est positif"

Syntaxe : les termes

Les termes servent à décrire les éléments sur lesquels ont va énoncer des faits. Ils se construisent à partir : des variables, des constantes et des fonctions.

Les termes sont définis inductivement ainsi :

- une constante est un terme
- une variable est un terme
- si $t_1, \ldots, t_k$ sont des termes et f est un symbole de fonction d'arité k alors $f(t_1, \ldots, t_k)$ est un terme.

Par exemple : x et carre(x) sont 2 termes (carre est alors une fonction d'arité 1).

Syntaxe : les formules de la logique des prédicats

Les formules de la logique des prédicats sont définies inductivement ainsi :

- si $t_1, \dots, t_k$ sont des termes et P est un prédicat d'arité k alors $P(t_1, \dots, t_k)$ est une formule dite formule atomique ou proposition atomique
- $\bot$ et $\top$ sont des formules.
- si F est une formule, $\neg F$ est une formule,
- si F et G sont des formules, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$ et $(F \leftrightarrow G)$ sont des formules,
- si F est une formule, et x une variable, $\forall x\ F$ et $\exists x\ F$ sont des formules.

Exemples : Écrire des formules de la logique des prédicats pour :

- Aurore a un ami qui aime les brocolis.
- Tous les amis d'Antoine sont amis avec Aurore.
- Les élèves de MPI sont amis avec au moins un élève de BCPST.
- Décrire la structure algébrique de groupe.
- Énoncer le grand théorème de Fermat.

Lien avec la logique propositionnelle

La logique des prédicats **contient** la logique propositionnelle.

Une formule propositionnelle peut être vue comme une formule de la logique des prédicats sans constante, sans fonction, sans variable et sans quantificateur.

La notion de variable propositionnelle correspond alors à celle de prédicat d'arité 0. Il n'y a pas de prédicat d'arité > 0.

Variables libres et liées

Lorsqu'on considère une formule de type $G = \forall x\ F$ ou $G = \exists x\ F$, on dit que F est la **portée** du quantificateur $\forall x$ ou $\exists x$.

Lorsqu'une occurrence d'une variable x est située dans la portée d'un quantificateur $\forall x$ ou $\exists x$, on dit que c'est une occurrence **liée** de la variable.

Une occurrence non liée est dite **libre**.

Une formule sans variable libre est appelée **formule close**.

Substitution de variables par des termes

Une **substitution** dans une formule F des variables $x_1, x_2, \dots, x_p$ par les termes $t_1, t_2, \dots, t_p$ consiste à remplacer toutes les **occurrences libres** des variables x_1, x_2, …, x_p par les termes t_1, t_2, …, t_p respectivement.

On note alors $\sigma = [t_1/x_1, \dots, t_p/x_p]$ cette substitution et on note $F\sigma = F[t_1/x_1, \dots, t_p/x_p]$ le résultat de la substitution.

Une certaine vigilance est nécessaire lors de l'utilisation des substitutions : si on substitue par un terme t contenant une variable x à l'intérieur de la portée d'un quantificateur $\forall x$ ou $\exists x$, alors cette occurrence sera **capturée** par le quantificateur. Il faut donc renommer si nécessaire les variables pour éviter les captures.

Sémantique de la logique des prédicats

La sémantique des formules de la logique des prédicats est hors programme.

On peut définir la valeur de vérité $[\![F]\!]_{M,\varphi}$ d'une formule F du premier ordre en fonction d'un modèle M et d'une fonction d'assignation φ.

Un modèle M correspond à l'ensemble sur lequel on interprète la formule ainsi que les significations associées aux constantes, fonctions et prédicats.

Par exemple

$$\forall x \forall y (INFSTRICT(x, y) \rightarrow \exists z (INFSTRICT(x, z) \wedge INFSTRICT(z, y))$$

est une formule qui est vraie pour le modèle des nombres réels $M = \mathbb{R}$ mais qui est fausse pour le modèle des nombres entiers $M = \mathbb{Z}$.

Dans le cas où la formule contient des variables libres il faut également **assigner** chaque variable libre à un élément du modèle d'interprétation M, c'est rôle de la fonction φ.

3
Déduction naturelle

Déterminer la conséquence logique

Dans cette partie on ne considérera que des théories finies : $\Gamma = G_1, G_2, \ldots G_n$ et on se pose la question de savoir si

$$\Gamma \models F$$

c'est-à-dire si F est conséquence sémantique de la théorie Γ.

Dans le cadre de la **logique propositionnelle** : on montre facilement que la réponse à cette question est équivalente à déterminer si

$$(G_1 \wedge G_2 \wedge \ldots \wedge G_n) \to F \qquad \text{est une tautologie}$$

Pour cela on dispose déjà de deux méthodes

- Construire une table de vérité
- Trouver une valuation à l'aide de l'algorithme de Quine pour $\neg(G_1 \wedge G_2 \wedge \ldots \wedge G_n) \to F)$

Mais, ces méthodes ont un **coût exponentiel** et sont **éloignées des méthodes de démonstration mathématiques** avec lesquelles nous sommes habitués à raisonner. Elles ne peuvent pas non plus être utilisées en **logique des prédicats**.

Écrire des preuves

Le but de cette partie est donc de définir le concept de **démonstration** d'une relation $G_1, \ldots, G_n \models F$.

Pour pour commencer on considérar uniquement les formules de la logique propositionnelle.

On notera $G_1, \ldots, G_n \vdash F$ lorsqu'il existe une démonstration de F à partir des hypothèses $G_1, \ldots, G_n$. On appelle cette notation un **séquent**.

Les démonstrations seront définies par induction :

- Un ensemble d'**axiomes** qui sont des séquents qu'on admet vrais.
- Un ensemble de **règles d'inférences** aussi appelées règles de déduction : elles permettent de dériver de nouveaux séquents à partir de séquents déjà établis.

Ainsi une démonstration d'un séquent prend la forme d'un **arbre de preuve** dans lequel la racine est le séquent à démontrer, les feuilles sont les axiomes et les nœuds correspondent à l'application des règles de démonstration.

Présentation sous forme d'arbre

Un arbre de preuve est souvent présenté sous forme d'un arbre contenant des nœuds ayant pour forme :

$$\frac{\text{Prémisses}}{\text{Conclusion}}$$

Voici vaguement à quoi ressemble un arbre de preuve démontrant que le sol est verglacé à partir du fait qu'il pleuve, que la température est négative et de quelques règles admises :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{il pleut} \qquad \text{il pleut} \rightarrow \text{sol mouillé}}{\text{sol mouillé}} \qquad T < 0}{\text{sol mouillé ET } T < 0} \qquad (\text{sol mouillé ET } T < 0) \rightarrow \text{sol verglacé}}{\text{sol verglacé}}$$

Nous allons maintenant donner un cadre plus formel pour l'écriture de ces arbres.

Déduction naturelle : premières règles

- L'**Axiome** : il consiste à utiliser directement une hypothèse

$$\frac{}{A \vdash A}\,\mathrm{ax}$$

Remarque : c'est le seul cas de base des séquents démontrables. Ce seront donc les feuilles des arbres de preuves.

- L'**Affaiblissement** : il consiste à négliger certaines hypothèses

$$\frac{A \vdash F}{\Gamma, A \vdash F}\,\mathrm{aff}$$

où Γ est un ensemble fini de formules, A et F des formules.

Déduction naturelle : règles pour $\wedge$

- L'**introduction de la conjonction**

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A \qquad \Gamma_2 \vdash B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash (A \wedge B)}\, i_\wedge$$

- L'**élimination gauche de la conjonction**

$$\frac{\Gamma \vdash (A \wedge B)}{\Gamma \vdash A}\, e_{\wedge,g}$$

- L'**élimination droite de la conjonction**

$$\frac{\Gamma \vdash (A \wedge B)}{\Gamma \vdash B}\, e_{\wedge,d}$$

Encore une fois, les notations Γ correspondent à des ensembles finis de formules.

Déduction naturelle : règles pour $\vee$

- L'**introduction gauche de la disjonction**

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash (A \vee B)}\, i_{\vee,g}$$

- L'**introduction droite de la disjonction**

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash (A \vee B)}\, i_{\vee,d}$$

- L'**élimination de la disjonction**

$$\frac{\Gamma \vdash (A \vee B) \qquad \Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\, e_{\vee}$$

Cette règle est importante car elle permet d'utiliser un raisonnement par **disjonction de cas**

Déduction naturelle : règles pour $\neg$

- L'**introduction de la négation**

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\, i_\neg$$

- L'**élimination de la négation**

$$\frac{\Gamma \vdash \neg A \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot}\, e_\neg$$

- Le **raisonnement par l'absurde (RAA)**

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\, \mathrm{RAA}$$

Déduction naturelle : règles pour →

- L'**introduction de l'implication**

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash (A \to B)}\, i_{\to}$$

- L'**élimination de l'implication**

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash (A \to B)}{\Gamma \vdash B}\, e_{\to}$$

Cette règle est très importante car elle permet d'**utiliser un "théorème" de type $p \to q$** dans une démonstration.

Déduction naturelle : *ex falso quodlibet*

Cette règle stipule que si on a réussi à démontrer le "faux" à partir d'un ensemble fini de formules Γ, alors on peut tout démontrer à partir de Γ.

- **Principe d'explosion** (*ex falso quodlibet*)

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\,\mathrm{efql}$$

pour toute formule A.

Exemple de preuve

Récrire formellement la preuve :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{il pleut} \qquad \text{il pleut} \to \text{sol mouillé}}{\text{sol mouillé}} \qquad T < 0}{\text{sol mouillé ET } T < 0} \qquad (\text{sol mouillé ET } T < 0) \to \text{sol verglacé}}{\text{sol verglacé}}$$

à l'aide de séquents et en précisant les règles d'inférence utilisées.

On cherchera à construire un arbre de preuve pour le séquent $\Gamma \vdash$ sol verglacé où Γ est la théorie :

- il pleut
- $T < 0$
- (sol mouillé $\wedge$ $T < 0$) $\to$ sol verglacé
- il pleut $\to$ sol mouillé

Exercices

Écrire des arbres de preuve pour :

1. $p, (p \to q) \vdash q$
2. $(p \to q), (q \to r) \vdash (p \to r)$
3. $\vdash p \to (q \to p)$
4. $\vdash (p \to q) \to \neg(p \wedge \neg q)$
5. Montrer qu'à partir du séquent $\Gamma \vdash \bot$ on montre $\Gamma \vdash A$ pour une formule A quelconque. Autrement dit la règle *ex falso quodlibet* n'est pas indispensable dans notre système de règles.
6. $\vdash (A \vee \neg A)$ (tiers-exclus), attention malgré sa simplicité l'arbre de preuve n'est pas évident...
7. $\vdash (\neg p \vee q) \to (p \to q)$

Remarque sur la démonstration des séquents

De manière générale :

- Les régles d'introduction sont les règles faciles : elles s'appliquent quasiment de manière automatique (sauf pour $i_\vee$ où il faut choisir quel morceau démontrer).
- Les règles d'élimination sont difficiles : elles demandent de faire des choix et de comprendre quels arguments on va utiliser pour démontrer le séquent.

Correction et complétude

On a le théorème suivant :

Pour toute théorie finie Γ et toute formule F.

$$\Gamma \vdash F \qquad \text{si et seulement si} \qquad \Gamma \models F$$

Ce théorème est valide dans la logique propositionnelle mais le sera aussi pour la logique des prédicats. **Seule la preuve de correction dans le cadre de la logique propositionnelle est exigible**

- L'implication directe ($\Rightarrow$) s'appelle la **correction** du système de déduction. Elle signifie que notre système de preuve est valide.
- L'implication réciproque ($\Leftarrow$) s'appelle la **complétude** du système de déduction. Elle signifie que tout énoncé de conséquence logique vrai admet une démonstration avec notre système de règles.

Attention, même si le système de déduction est complet, il existe une infinité d'arbres que l'on peut construire à partir d'un séquent à démontrer. On ne dispose donc pas d'un algorithme qui termine toujours et qui décide si $\Gamma \models F$ (ce problème est indécidable pour le 1er ordre).

Déduction naturelle : règles pour ∀

Voyons maintenant les règles de démonstration à ajouter pour appliquer la déduction naturelle à la logique des prédicats :

- L'**introduction du pour tout**

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x A}\, i_\forall$$

lorsque x n'est pas une variable libre dans les formules de Γ

- L'**élimination du pour tout**

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x A}{\Gamma \vdash A[t/x]}\, e_\forall$$

lorsque la subsitution ne provoque pas de capture

Déduction naturelle : règles pour ∃

- L'**introduction du il existe**

$$\frac{\Gamma \vdash A[t/x]}{\Gamma \vdash \exists x A}\, i_\exists$$

- L'**élimination du il existe**

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x A \qquad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B}\, e_\exists$$

lorsque *x* n'est pas une variable libre ni dans *B* ni dans Γ

Exercices

Écrire des arbres de preuve pour :

1. $HOMME(socrate), \forall x(HOMME(x) \rightarrow MORTEL(x)) \vdash MORTEL(socrate)$
2. $\vdash \forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$
3. $PLANTE(ginko), \forall x(PLANTE(x) \rightarrow VIVANT(x)) \vdash \exists x VIVANT(x)$
4. $\exists a P(a), \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash Q(a)$
5. $\exists a \exists b P(a,b), \forall x \forall y(P(x,y) \rightarrow Q(y,x)) \vdash \exists u \exists v Q(u,v)$
6. $\forall x P(x) \vdash \neg \exists x \neg P(x)$
7. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x(Q(x) \rightarrow R(x)) \vdash \forall x(P(x) \rightarrow R(x))$
8. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \vdash \forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$
9. $\exists x \forall y P(x,y) \vdash \forall y \exists x P(x,y)$

Autres systèmes de preuves

Attention, il existe d'autres systèmes de preuve.

- Par exemple, certains fusionnent l'axiome et l'affaiblissement :

$$\frac{}{A, \Gamma \vdash A}\,\text{ax}$$

  ce qui conduit à des arbres de preuves un peu moins verbeux

- La règle de raisonnement à l'absurde peut être remplacée de manière équivalente (voir TD) par :
  - La règle du tiers-exclus
  - La règle de l'élimination de la double négation

Le programme officiel ne précise pas quel système adopter donc :

- soyez vigilent lors de la lecture de l'énoncé
- toujours adapter ses preuves aux règles de démonstration imposées.