LYCÉE LECONTE DE LISLE

Machine de Turing

Vincent Picard

Introduction

- On veut savoir quelles fonctions sont **calculables** par un ordinateur, il faut pour cela se donner un modèle général de ce qu'est une **machine** et un **calcul**. Plusieurs modèles ont été proposés :
  - 1933 : Kurt Gödel et Jacques Herbrand proposent les **fonctions μ-récursives**
  - 1936 : Alonzo Church propose le **λ-calcul**
  - 1936 : Alan Turing propose la **machine de Turing**
- Church, Turing et Stephen Kleene démontrent les résultats suivants :

  Une fonction est μ-récursive ssi elle est λ-calculable ssi elle Turing-calculable

- **Thèse de Church-Turing**

  Toute fonction calculable par machine l'est au sens de l'un des ces 3 modèles équivalents.

Machine de Turing : intuition

- Intuitivement une machine de Turing possède une **mémoire infinie** modélisée sous forme d'un **ruban bi-infini de cases mémoire**.

- Il existe une **tête de lecture** positionnée sur l'une des cases du ruban.

- La machine est une **machine à états** qui lorsqu'elle se situe dans un état q :

  - lit le caractère x situé sous la tête de lecture

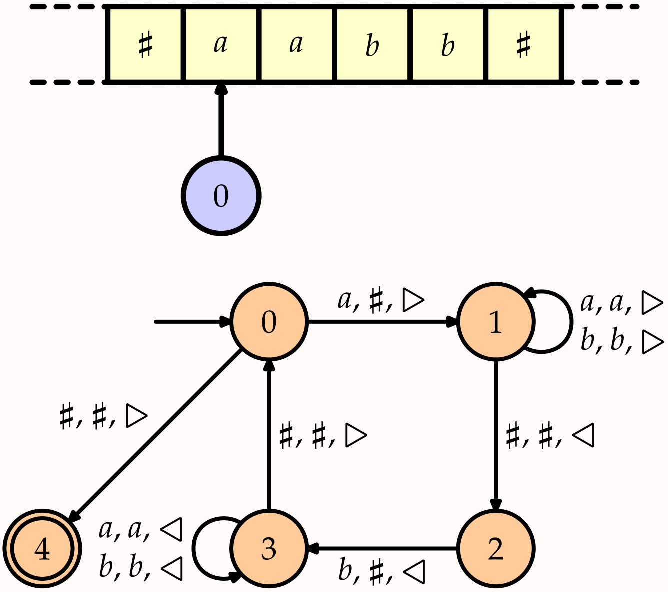
  - selon sa **fonction de transition** :

    1. remplace le symbole x par un symbole y (éventuellement $y = x$)

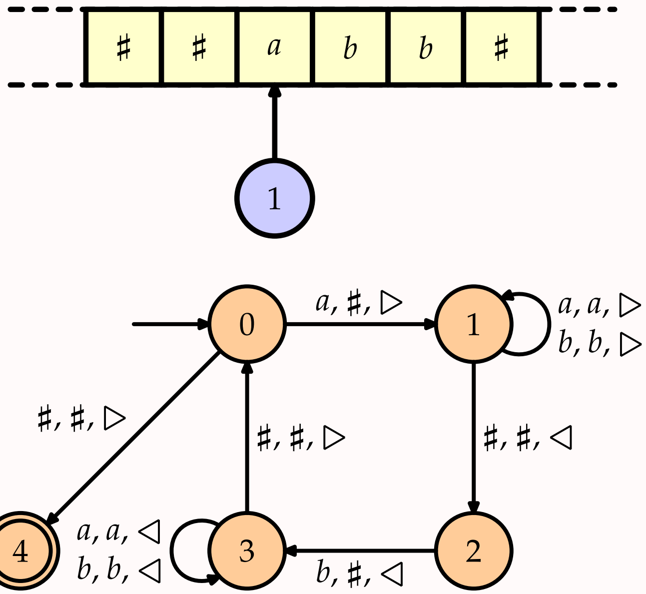
    2. déplace la tête de lecture à gauche ou à droite

    3. transite vers un état q' (éventuellement $q' = q$)

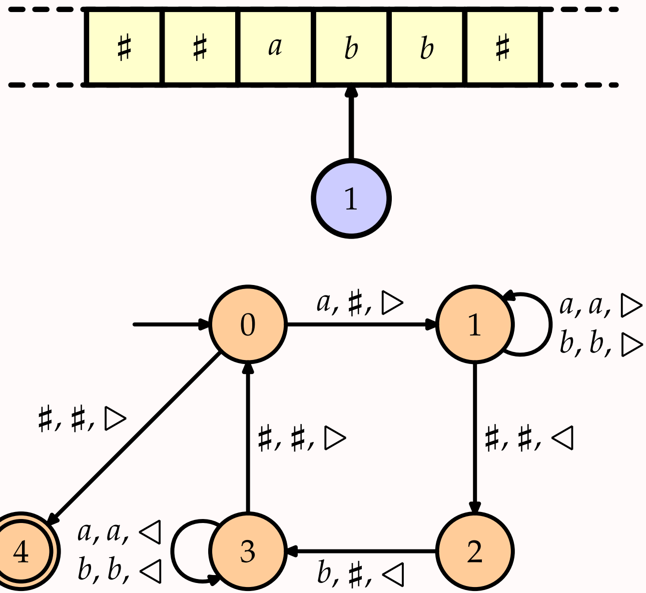
Machine de Turing : exemple



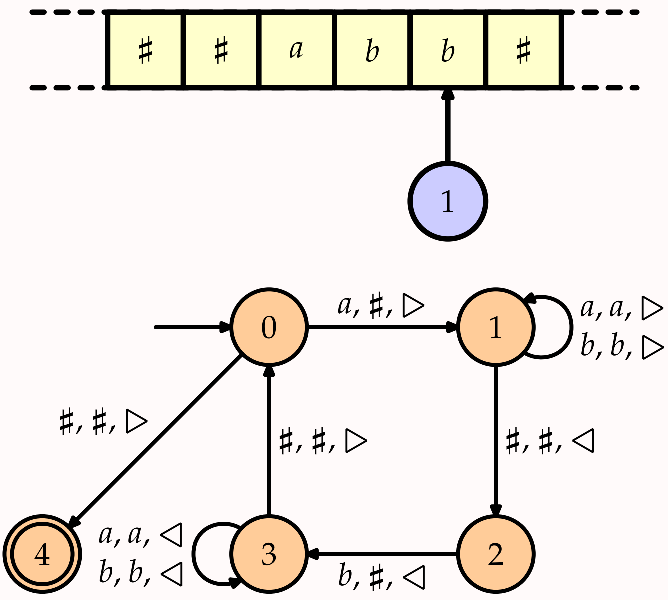
Machine de Turing : exemple



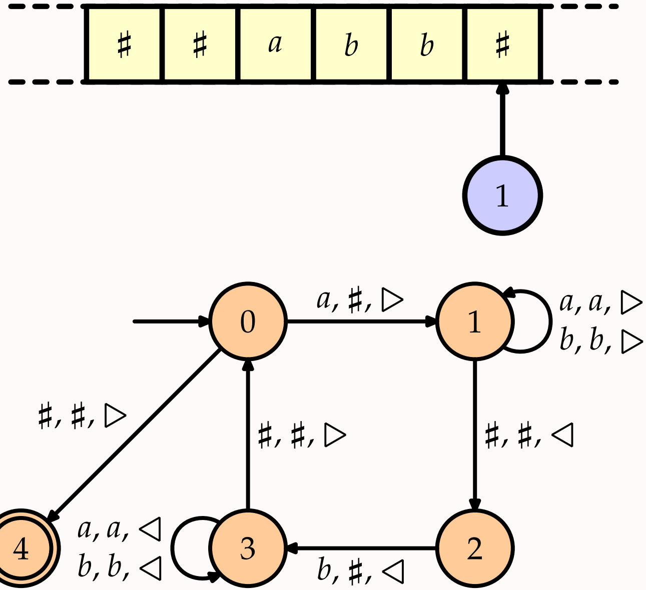
Machine de Turing : exemple



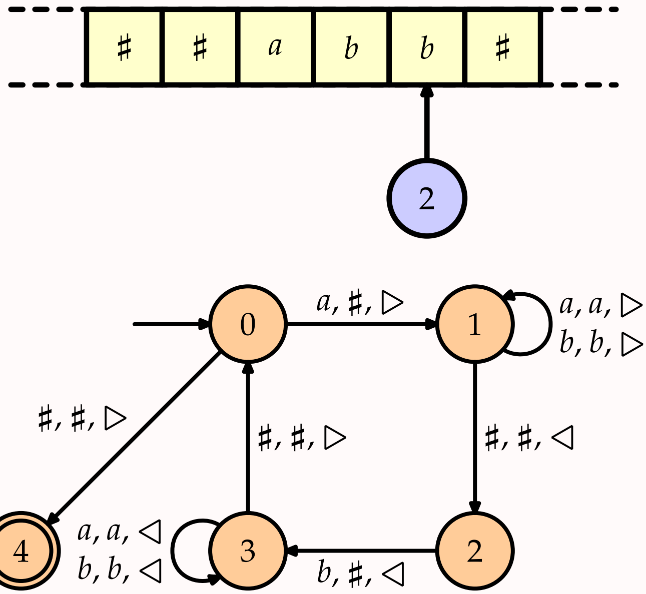
Machine de Turing : exemple



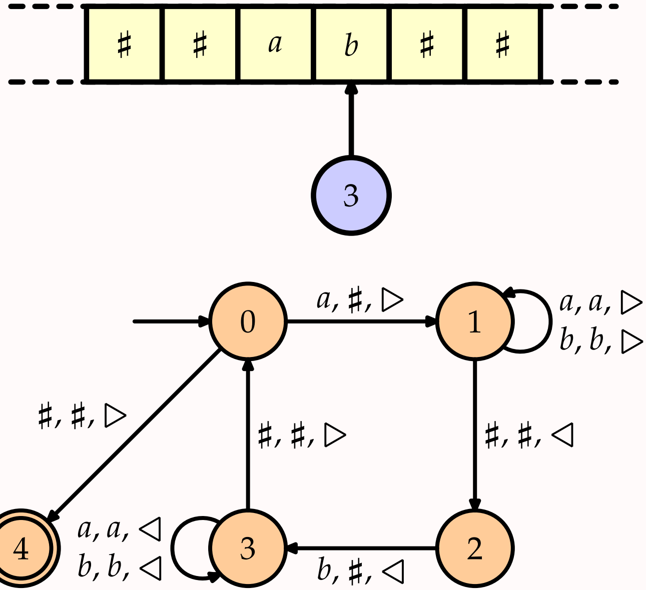
Machine de Turing : exemple



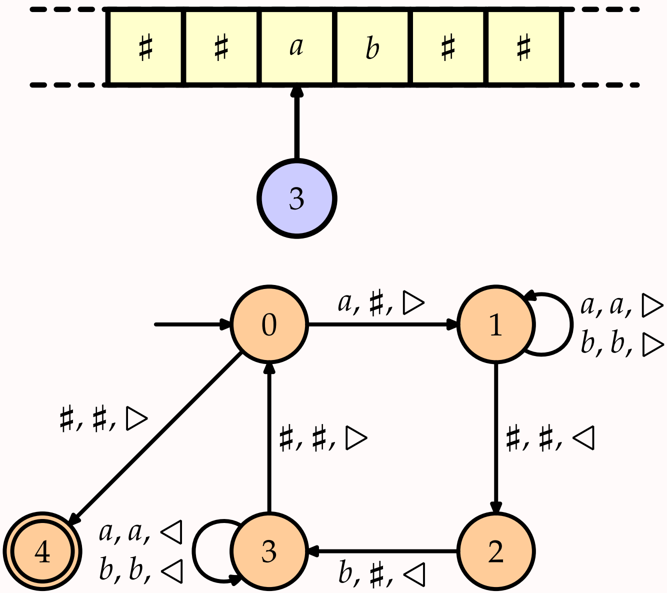
Machine de Turing : exemple



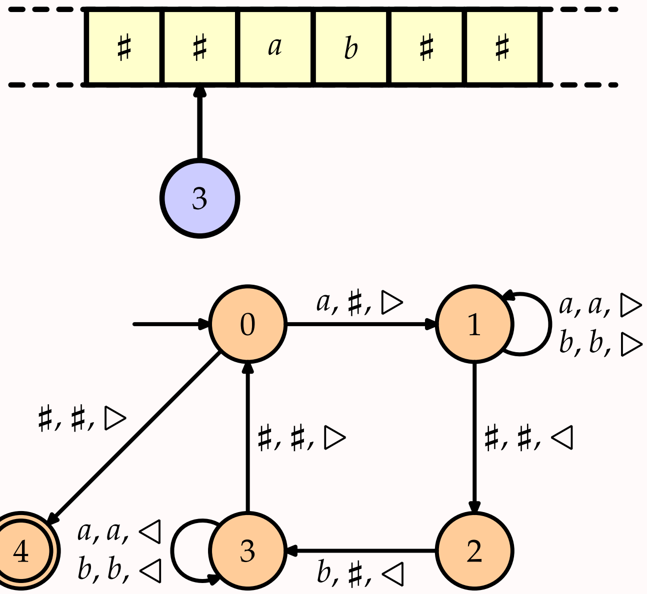
Machine de Turing : exemple



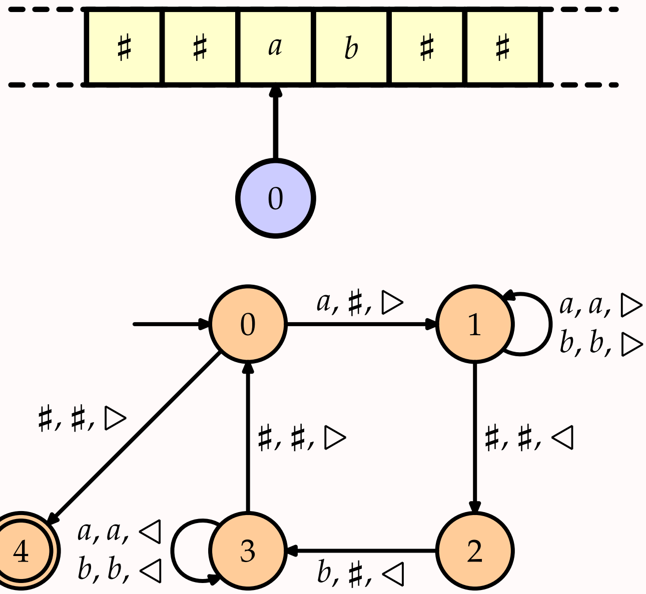
Machine de Turing : exemple



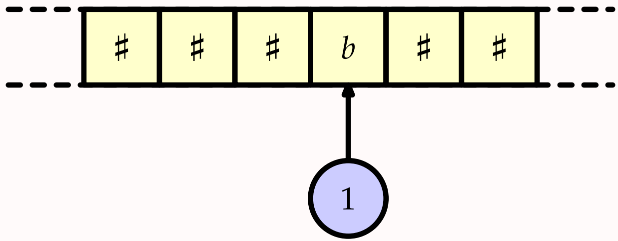
Machine de Turing : exemple

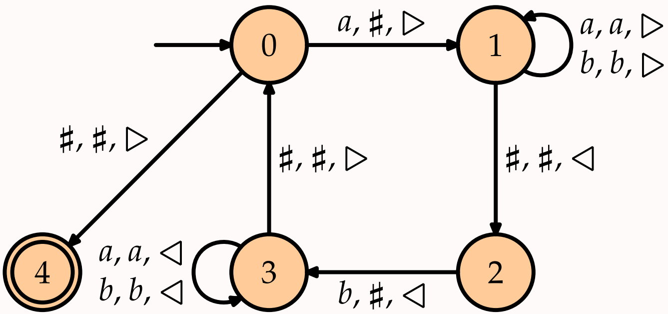


Machine de Turing : exemple

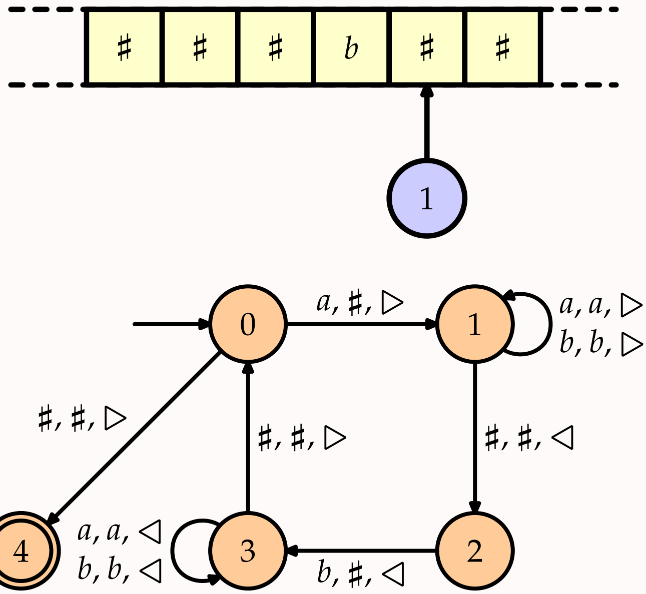


Machine de Turing : exemple

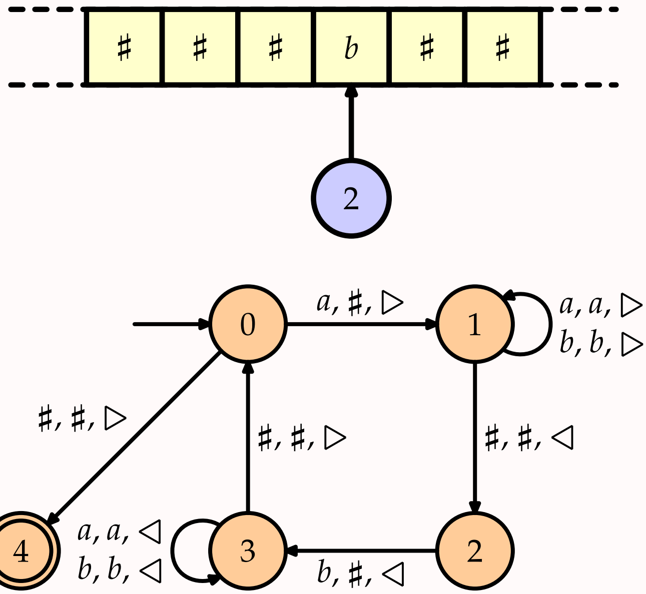




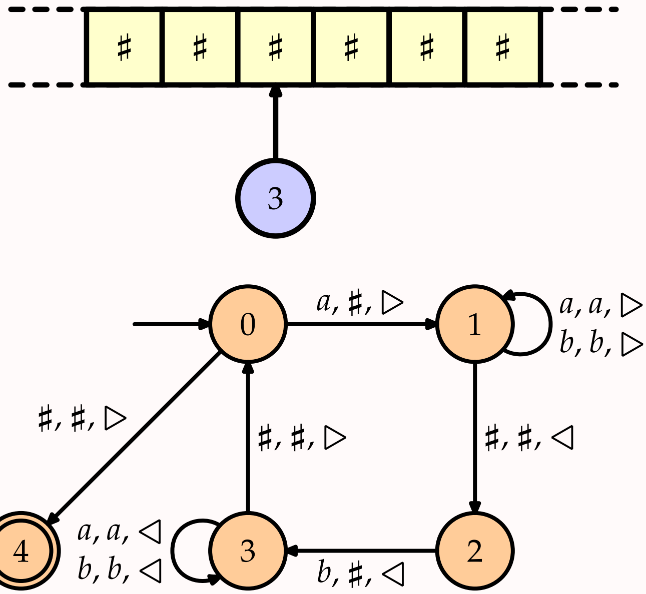
Machine de Turing : exemple



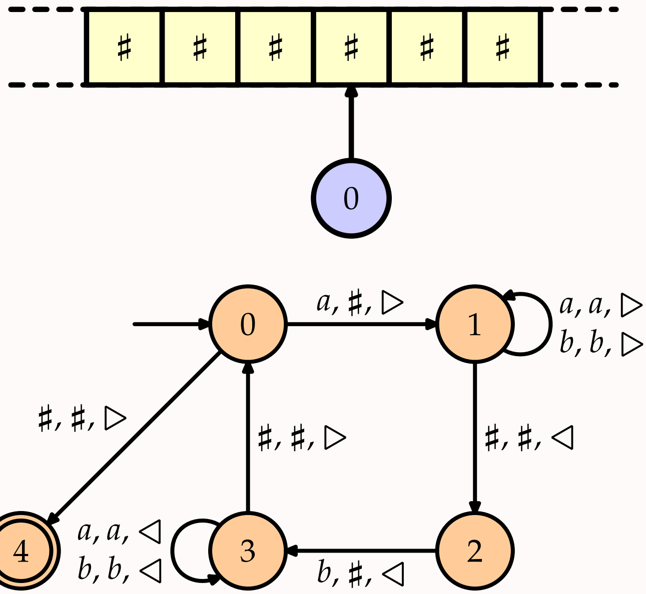
Machine de Turing : exemple



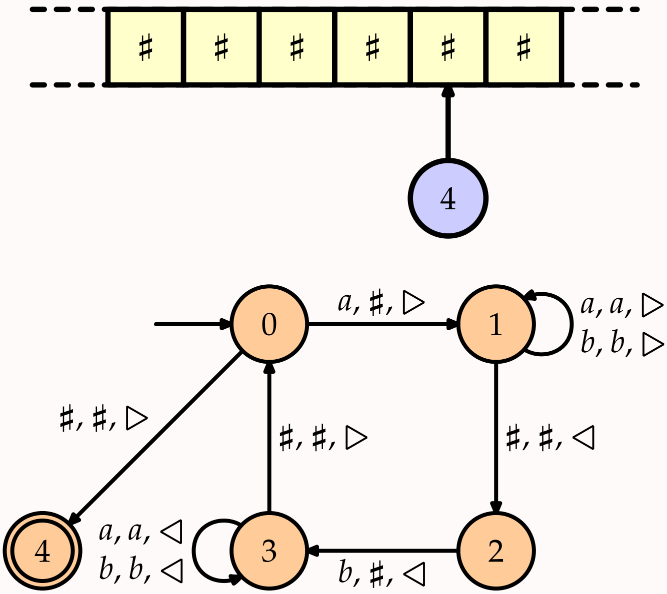
Machine de Turing : exemple



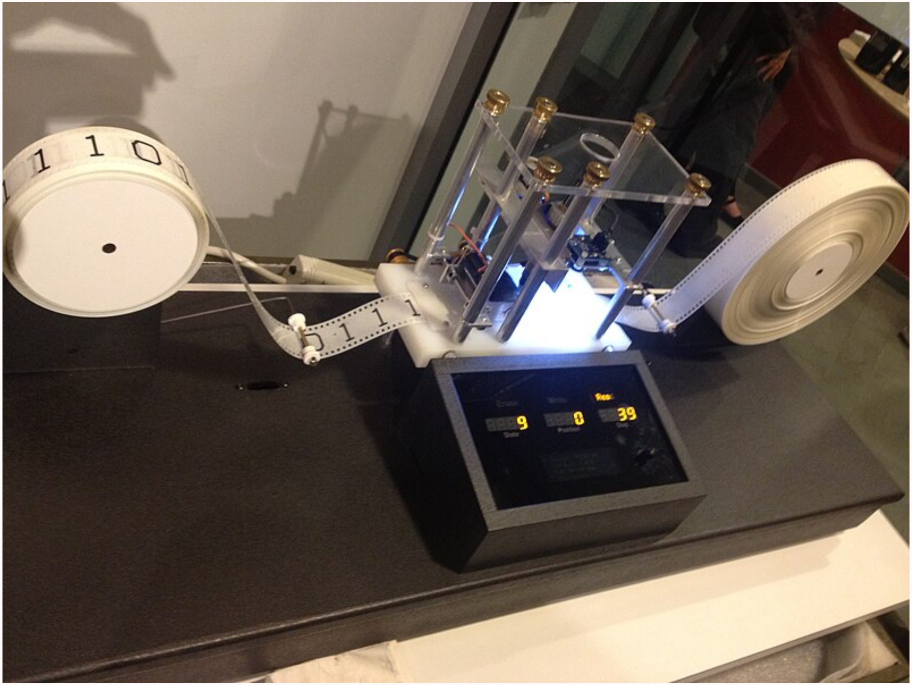
Machine de Turing : exemple



Machine de Turing : exemple

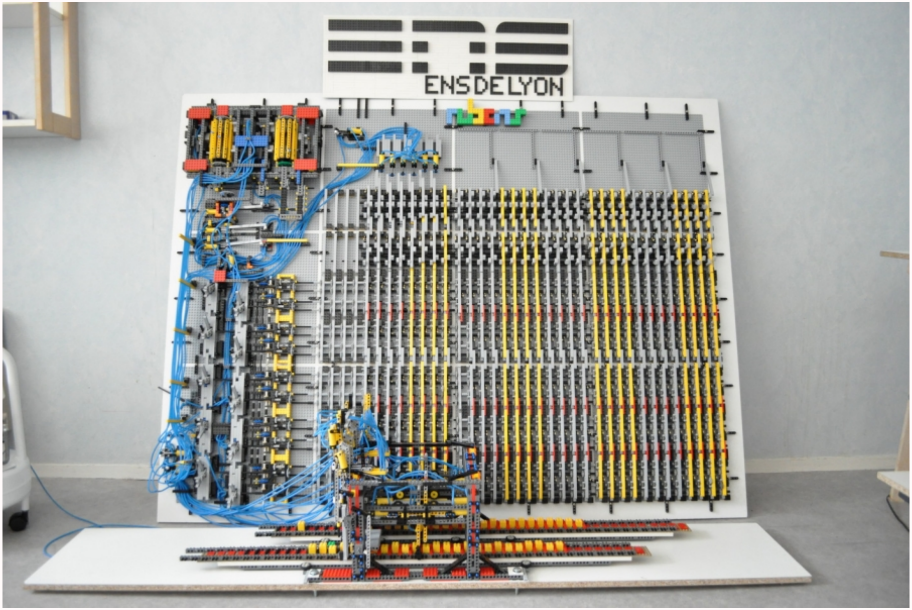


Machine de Turing réelles



Harvard Collection of Historical Scientific Instruments (Wiki commons)

Machine de Turing réelles



Machine de Turing en Lego de l'ENS Lyon (Wiki commons)

Machine de Turing

- Une **machine de Turing déterministe** est un 7-uplet $(Q, \Gamma, \#, \Sigma, \delta, q_0, F)$ où :
  - Q est un ensemble **fini** d'**états**
  - Γ est l'**alphabet de ruban**
  - $\# \in \Gamma$ est un symbole appelé **symbole blanc**
  - $\Sigma \subset \Gamma \setminus \{\#\}$ est l'**alphabet d'entrée**
  - $\delta : (Q \setminus F) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\triangleleft, \triangleright\}$ est la **fonction de transition**
  - $q_0 \in Q$ est l'**état initial**
  - $F \subset Q$ est l'ensemble des **états finaux**
- La notion de **blocage** existe lorsque δ n'est pas définie. Il y a toujours blocage sur un état final[1].

[1] ce n'est pas indispensable mais ça ne change rien à la théorie de le supposer

Définitions alternatives

- On trouve dans la littérature de nombreuses définitions alternatives qui ne changent en rien la puissance de calcul de la machine.
- On peut par exemple :
  - Considérer que le ruban n'est infini que d'un côté.
  - Ajouter l'action $\triangledown$ qui correspond à ne pas déplacer la tête de lecture.
  - Avoir une machine avec plusieurs rubans ayant chacun sa tête de lecture.
- Ces définitions alternatives peuvent faciliter la conception de machines de Turing réalisant une tache donnée.

Configurations

- La **configuration** d'une machine de Turing désigne l'ensemble de tous ses paramètres courants :
  - Le contenu du ruban
  - La position de la tête de lecture
  - L'état actuel
- Formellement une configuration est un triplet (u, q, v) dans :

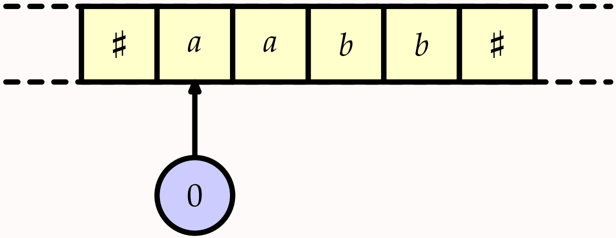
$$\{\varepsilon\} \cup (\Gamma \setminus \{\sharp\})\Gamma^* \quad \times \quad Q \quad \times \quad \{\varepsilon\} \cup \Gamma^*(\Gamma \setminus \{\sharp\})$$

  - u est le mot strictement à gauche de la tête de lecture
  - v est le mot à droite de la tête de lecture
  - la tête de lecture est placée sur la première lettre de v (si $v \neq \varepsilon$)
- Initialement on place le mot d'entrée non vide $w \in \Sigma^*$ sur le ruban et la tête de lecture sur le premier symbole de ce mot la configuration initiale est donc $t_w = (\varepsilon, q_0, w)$.

Calcul d'une machine de Turing

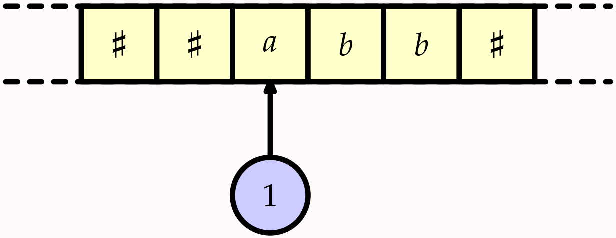
- Une **étape de calcul** d'une machine de Turing est une paire de configurations (C, C') notée $C \to C'$ telle que
  - $C = (u, q, av)$ et $C' = (ub, q', v)$ si $\delta(q, a) = (q', b, \rhd)$
  - $C = (uc, q, av)$ et $C' = (u, q, cbv)$ si $\delta(q, a) = (q', b, \lhd)$
- On ajoute aussi les cas limites :
  - $C = (u, q, \varepsilon)$ et $C' = (ub, q', \varepsilon)$ si $\delta(q, \#) = (q', b, \rhd)$
  - $C = (uc, q, \varepsilon)$ et $C' = (u, q', cb)$ si $\delta(q, \#) = (q', b, \lhd)$
  - $C = (\varepsilon, q, \varepsilon)$ et $C' = (\varepsilon, q, b)$ si $\delta(q, \#) = (q', b, \lhd)$
- Remarque : si dans la configuration $C' = (s, q', t)$ d'arrivée s commence par des # on les supprime, de même si t termine par des #.

Calcul : exemple



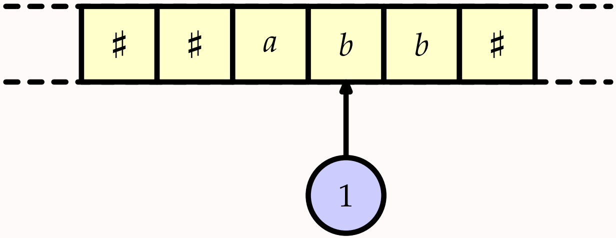
$$(\varepsilon, 0, aabb)$$

Calcul : exemple



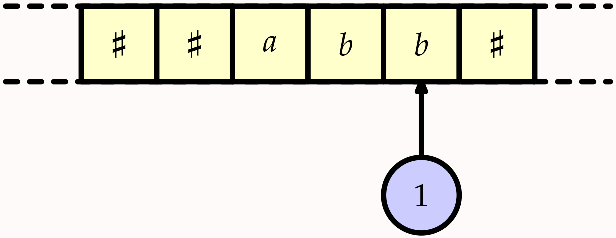
$$(\varepsilon, 0, aabb) \rightarrow (\varepsilon, 1, aab)$$

Calcul : exemple



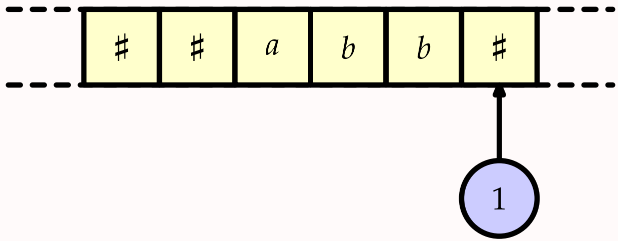
$$(\varepsilon, 0, aabb) \to (\varepsilon, 1, aab) \to (a, 1, ab)$$

Calcul : exemple



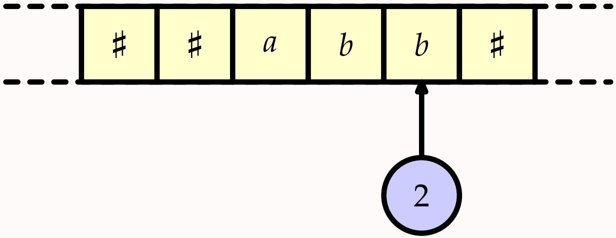
$$(\varepsilon, 0, aabb) \rightarrow (\varepsilon, 1, aab) \rightarrow (a, 1, ab) \rightarrow (ab, 1, b)$$

Calcul : exemple



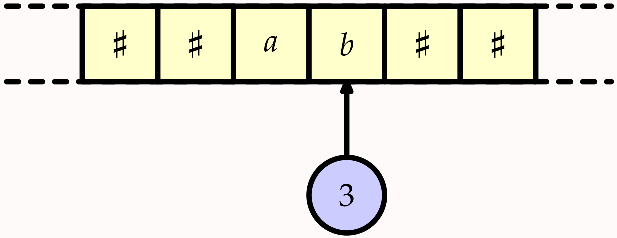
$$(\varepsilon, 0, aabb) \rightarrow (\varepsilon, 1, aab) \rightarrow (a, 1, ab) \rightarrow (ab, 1, b) \rightarrow (abb, 1, \varepsilon)$$

Calcul : exemple



$$(\varepsilon, 0, aabb) \to (\varepsilon, 1, aab) \to (a, 1, ab) \to (ab, 1, b) \to (abb, 1, \varepsilon)$$
$$\to (ab, 2, b)$$

Calcul : exemple

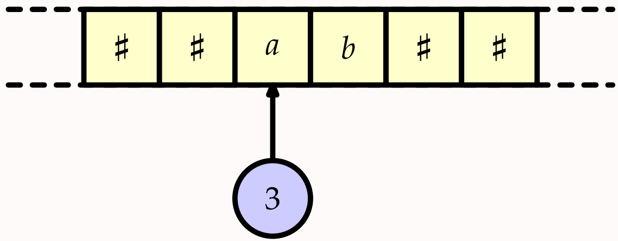


$$(\varepsilon, 0, aabb) \to (\varepsilon, 1, aab) \to (a, 1, ab) \to (ab, 1, b) \to (abb, 1, \varepsilon)$$

$$\to (ab, 2, b)$$

$$\to (a, 3, b)$$

Calcul : exemple

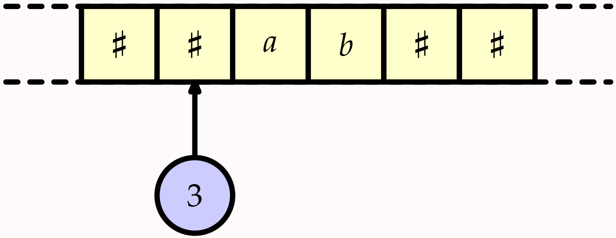


$$(\varepsilon, 0, aabb) \to (\varepsilon, 1, aab) \to (a, 1, ab) \to (ab, 1, b) \to (abb, 1, \varepsilon)$$

$$\to (ab, 2, b)$$

$$\to (a, 3, b) \to (\varepsilon, 3, ab)$$

Calcul : exemple

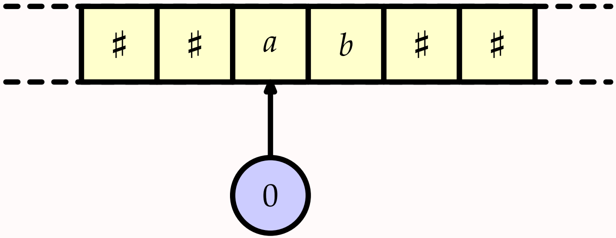


$$(\varepsilon, 0, aabb) \to (\varepsilon, 1, aab) \to (a, 1, ab) \to (ab, 1, b) \to (abb, 1, \varepsilon)$$

$$\to (ab, 2, b)$$

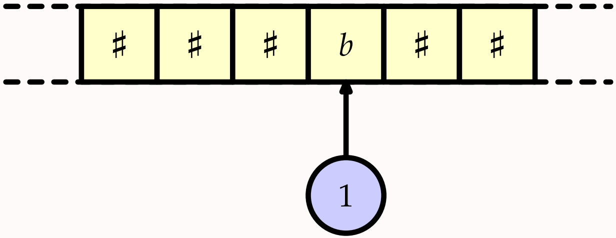
$$\to (a, 3, b) \to (\varepsilon, 3, ab) \to (\varepsilon, 3, \sharp ab)$$

Calcul : exemple



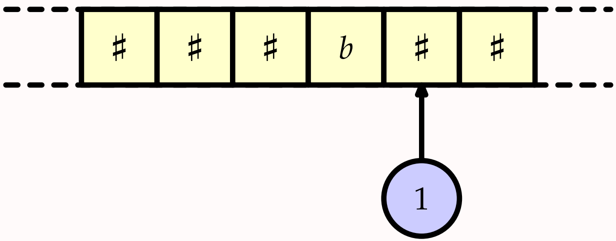
$$(\varepsilon, 0, aabb) \to (\varepsilon, 1, aab) \to (a, 1, ab) \to (ab, 1, b) \to (abb, 1, \varepsilon)$$
$$\to (ab, 2, b)$$
$$\to (a, 3, b) \to (\varepsilon, 3, ab) \to (\varepsilon, 3, \sharp ab)$$
$$\to (\varepsilon, 0, ab)$$

Calcul : exemple



$$
\begin{aligned}
(\varepsilon, 0, aabb) &\to (\varepsilon, 1, aab) \to (a, 1, ab) \to (ab, 1, b) \to (abb, 1, \varepsilon) \\
&\to (ab, 2, b) \\
&\to (a, 3, b) \to (\varepsilon, 3, ab) \to (\varepsilon, 3, \sharp ab) \\
&\to (\varepsilon, 0, ab) \\
&\to (\varepsilon, 1, b)
\end{aligned}
$$

Calcul : exemple



$$(\varepsilon, 0, aabb) \to (\varepsilon, 1, aab) \to (a, 1, ab) \to (ab, 1, b) \to (abb, 1, \varepsilon)$$

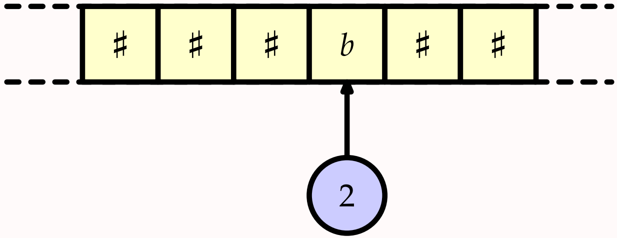
$$\to (ab, 2, b)$$

$$\to (a, 3, b) \to (\varepsilon, 3, ab) \to (\varepsilon, 3, \sharp ab)$$

$$\to (\varepsilon, 0, ab)$$

$$\to (\varepsilon, 1, b) \to (b, 1, \varepsilon)$$

Calcul : exemple



$$(\varepsilon, 0, aabb) \to (\varepsilon, 1, aab) \to (a, 1, ab) \to (ab, 1, b) \to (abb, 1, \varepsilon)$$

$$\to (ab, 2, b)$$

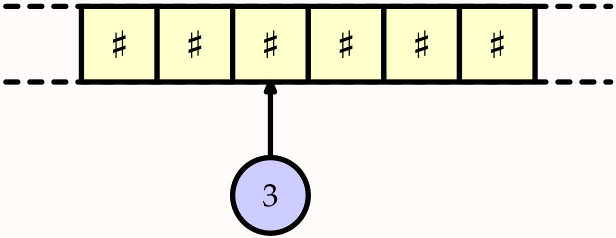
$$\to (a, 3, b) \to (\varepsilon, 3, ab) \to (\varepsilon, 3, \sharp ab)$$

$$\to (\varepsilon, 0, ab)$$

$$\to (\varepsilon, 1, b) \to (b, 1, \varepsilon)$$

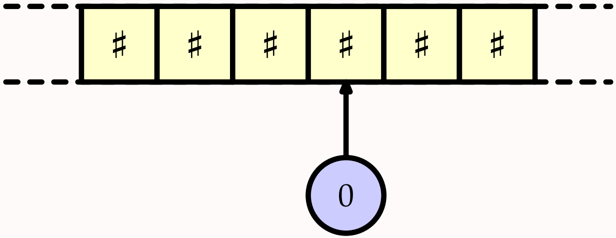
$$\to (\varepsilon, 2, b)$$

Calcul : exemple



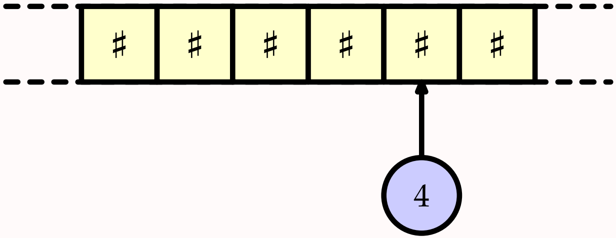
$$
\begin{aligned}
(\varepsilon, 0, aabb) &\to (\varepsilon, 1, aab) \to (a, 1, ab) \to (ab, 1, b) \to (abb, 1, \varepsilon) \\
&\to (ab, 2, b) \\
&\to (a, 3, b) \to (\varepsilon, 3, ab) \to (\varepsilon, 3, \sharp ab) \\
&\to (\varepsilon, 0, ab) \\
&\to (\varepsilon, 1, b) \to (b, 1, \varepsilon) \\
&\to (\varepsilon, 2, b) \\
&\to (\varepsilon, 3, \varepsilon)
\end{aligned}
$$

Calcul : exemple



$$(\varepsilon, 0, aabb) \to (\varepsilon, 1, aab) \to (a, 1, ab) \to (ab, 1, b) \to (abb, 1, \varepsilon)$$
$$\to (ab, 2, b)$$
$$\to (a, 3, b) \to (\varepsilon, 3, ab) \to (\varepsilon, 3, \sharp ab)$$
$$\to (\varepsilon, 0, ab)$$
$$\to (\varepsilon, 1, b) \to (b, 1, \varepsilon)$$
$$\to (\varepsilon, 2, b)$$
$$\to (\varepsilon, 3, \varepsilon) \to (\varepsilon, 0, \varepsilon)$$

Calcul : exemple



$$(\varepsilon, 0, aabb) \to (\varepsilon, 1, aab) \to (a, 1, ab) \to (ab, 1, b) \to (abb, 1, \varepsilon)$$

$$\to (ab, 2, b)$$

$$\to (a, 3, b) \to (\varepsilon, 3, ab) \to (\varepsilon, 3, \sharp ab)$$

$$\to (\varepsilon, 0, ab)$$

$$\to (\varepsilon, 1, b) \to (b, 1, \varepsilon)$$

$$\to (\varepsilon, 2, b)$$

$$\to (\varepsilon, 3, \varepsilon) \to (\varepsilon, 4, \varepsilon)$$

Langage accepté par une machine de Turing

- Un mot $u \in \Sigma^*$ est **accepté** par une machine de Turing si $(\varepsilon, q_0, u) \rightarrow^* (s, q_F, t)$ avec $q_F \in F$, c'est-à-dire :
  - Le calcul de la machine **termine** sur l'entrée u.
  - L'état de la configuration finale est un état final.
- Ainsi, un mot est rejeté lorsque :
  - Le calcul termine et aboutit dans un état non final.
  - Le calcul est infini.
- Le **langage accepté** par une machine de Turing M est l'ensemble des mots sur $u \in \Sigma^*$ tels que M accepte u.
- La classe des langages acceptés par machine de Turing est appelée classse des langages **récursivement énumérables**

Langage décidé par une machine de Turing

- On dit qu'une machine de Turing M **décide** un langage L sur Σ s'il existe une machine de Turing M qui
  - **termine** sur toute entrée $u \in \Sigma^*$
  - **accepte** L
- **Prop :** un langage décidable est récursivement énumérable.
- La classe des langages décidés par machine de Turing est appelée classe des langages **décidables** ou encore **récursifs**.

Lien avec le cours MPI

- Les problèmes de décision **décidables** sont ceux dont le langage des instances positives est décidable par machine de Turing.
- Le langage des instances positives du problème de correspondance de Post n'est pas décidable, par contre il est récursivement énumérable, on dit alors que le problème est **semi-décidable**.
- Les problèmes de décision de la **classe P** sont ceux dont le langage des instances positives est **décidable** par une machine de Turing **déterministe** et qui vérifie de plus que le nombre d'étapes de calcul de la machine est un $O(n^k)$ pour un certain $k \geq 0$ avec n la taille de l'instance.
- Les problèmes de décision de la **classe NP** sont ceux dont le langage des instances positives est **décidable** par une machine de Turing **non-déterministe** et dont le nombre d'étapes d'un calcul acceptant est un $O(n^k)$. Nous n'avons pas défini cette machine, mais on imagine aisément à quoi elle peut ressembler par analogie avec les automates finis.

Exercices

1. **Exemple historique de Turing** : donner une machine de Turing prenant en entrée une suite de `1` et qui construit une suite de `1` deux fois plus longue en intercalant un symbole blanc ♯. Le format est le suivant : si l'entrée est `111` la sortie sera `111♯111`.

2. Donner une machine de Turing qui calcule $n+1$ lorsque $n \in \mathbb{N}$ est placée sur son ruban d'entrée sous format binaire $\Sigma = \{0, 1\}$ avec le bit de poids faible à droite.

3. Démontrer que le langage des mots sur $\Sigma = \{a, b\}$ qui contiennent un nombre pair de a est décidable en temps polynomial.

4. Démontrer que tout langage régulier est décidable en temps polynomial.

5. Démontrer que le langage des mots sur $\Sigma = \{a, b\}$ qui contiennent autant de a que de b est décidable en temps polynomial. *Indication :* on pourra utiliser l'alphabet $\Gamma = \{a, b, A, B, \sharp\}$ pour marquer les lettres.

6. Démontrer que le langage des mots sur $\Sigma = \{a\}$ de longueur une puissance de 2 est décidable.