TD : Déduction naturelle

Exercice 1

On suppose que :

- tout élève du lycée Leconte de Lisle est cultivé
- toute personne intelligente et cultivée réussira les concours
- Aurore est une élève du lycée Leconte de Lisle intelligente.

Formaliser ces énoncés en logique des prédicats. Puis donner une démonstration à l'aide de la déduction naturelle que "Aurore va réussir les concours".

Exercice 2

On considère la structure de donnée *pile* pour laquelle il existe une pile vide notée *nil* et une operation *empile* prenant un élément et une pile et construisant une nouvelle pile. On suppose que :

- la pile *nil* est vide
- empiler un élément sur une pile produit une pile non vide

Formaliser ces énoncés en logique des prédicats. Donner un terme représentant la pile $[1;2;3]$. Démontrer à l'aide de la déduction naturelle que cette pile est non vide.

Exercice 3

Règles équivalentes en déduction naturelle
Pour un système de règles de déduction donné, deux règles de déduction sont équivalentes lorsqu'il est possible de dériver l'une à partir des autres règles du système et réciproquement. Dans ce cas, ces deux règles sont redondantes et on peut décider de n'en conserver qu'une seule dans notre système de déduction.

1. Démontrer que les deux règles suivantes sont équivalentes en déduction naturelle :

   a.
   $$\frac{\Gamma \vdash (A \vee B) \qquad \Gamma \vdash (A \rightarrow C) \qquad \Gamma \vdash (B \rightarrow C)}{\Gamma \vdash C}\, e_\vee$$

   b.
   $$\frac{\Gamma \vdash (A \vee B) \qquad \Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\, e'_\vee$$

2. Dans le cours, on a introduit la règle de raisonnement par l'absurde RAA. En réalité il existe trois règles de la déduction naturelle qui sont équivalentes deux à deux et donc interchangeables :

a.

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A} RAA$$

(Attention à ne pas la confondre avec l'introduction de la négation)

b.

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A} e_{\neg\neg}$$

c.

$$\frac{}{\Gamma \vdash (A \vee \neg A)} \text{tiers-exclu}$$

On choisit donc en général, une de celles-ci. Démontrer que ces trois règles sont deux à deux équivalentes.

Exercice 4

Dériver les séquents suivants :

1.

$$\exists x \ (A \wedge B) \vdash (\exists x \ A \wedge \exists x \ B)$$

2.

$$\vdash \exists x \forall y \ P(x) \rightarrow P(y)$$

★Exercice 5

Loi de Peirce
Dériver le séquent suivant :

$$\vdash ((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$$

★Exercice 6

On suppose que l'on a programmé une fonction `min` de deux valeurs et on se propose de formaliser sa spécification en logique des prédicats :

- $(H_1) : \forall x \forall y \quad \min(x, y) \leq x$
- $(H_2) : \forall x \forall y \quad \min(x, y) \leq y$
- $(H_3) : \forall x \forall y \quad (x = \min(x, y) \vee y = \min(x, y))$

Ici, $=$ et $\leq$ sont des prédicats d'arité 2 désignant l'égalité et une relation d'ordre, que l'on notera exceptionnellement de manière infixe par souci de simplicité des écritures.

1. Dans la syntaxe de la logique des prédicats, quelle est la nature de min ?
2. Proposer 3 formules H_4, H_5, H_6 traduisant le fait que $=$ est une relation binaire réflexive, transitive et symétrique respectivement.
3. Proposer 3 formules H_7, H_8, H_9 traduisant le fait que $\leq$ est une relation binaire réflexive, transitive et anti-symétrique respectivement.
4. Proposer une formule H_{10} traduisant que si $u = v$ alors $u \leq v$.
5. On note $\Gamma = \{H_1, H_2, \dots, H_{10}\}$. Démontrer le séquent $\Gamma, a \leq b \vdash a = \min(a, b)$ en déduction naturelle.