DEVOIR EN TEMPS LIBRE : AUTOMATE RACINE

Soit Σ un alphabet fini. Soit L un langage sur l'alphabet Σ. On note

$$\sqrt{L} = \{u \in \Sigma^* \mid u.u \in L\}.$$

Par exemple, si $U = \{a, abab, abba, babbab, bb\}$ alors $\sqrt{U} = \{ab, bab, b\}$

Le but du problème est de démontrer le résultat suivant : *Si un langage L est reconnaissable par automate fini alors $\sqrt{L}$ l'est aussi.*

1 Racine carrée d'un langage

1. Soit L un langage. Comparer les langages $\sqrt{L}^2$ et L. On cherchera un contre-exemple simple pour chaque inclusion fausse.

2. Soit L un langage. Comparer les langages $\sqrt{L^2}$ et L. On cherchera un contre-exemple simple pour chaque inclusion fausse.

3. Pour cette question on prend $\Sigma = \{a, b\}$. Soit L_1 le langage constitué des mots u contenant 2 lettres a consécutives (aa est un facteur du mot).

   a. Démontrer que L_1 est reconnaissable par automate fini, en donnant un automate fini déterministe complet A_1 à 3 états.

   b. Déterminer $\sqrt{L_1}$ à l'aide d'une propriété exprimée en langage naturel. Justifier.

   c. Donner une expression régulière e_1 dénotant $\sqrt{L_1}$.

   d. Démontrer que $\sqrt{L_1}$ est reconnaissable par automate fini, en donnant un automate.

On souhaite généraliser ce résultat à tout langage reconnaissable.

2 Automate racine

Soit $A = (Q, q_0, F, \delta)$ un automate fini déterministe **complet** à n états. Pour simplifier les notations on supposera que les états de A sont des entiers : $Q = \{0, \ldots, n-1\}$ et que 0 est l'état initial ($q_0 = 0$); quitte à renommer les états.

On appelle **automate racine** de A et on note A^R l'automate fini déterministe défini par $A^R = (Q^R, q_0^R, F^R, \delta^R)$ avec :

- L'ensemble d'états est $Q^R = Q^n = \{0, \ldots, n-1\}^n$
- L'état initial est $q_0^R = (0, 1, 2, \cdots, n-1)$
- un état $(u_0, \cdots, u_{n-1})$ est final si u_{u_0} est final dans A, autrement dit

$$F^R = \left\{(u_0, \cdots, u_{n-1}) \text{ tels que } u_{u_0} \in F\right\}$$

- les transitions sont définies par

$$\forall (u_0, \cdots, u_{n-1}) \in Q^R,\ \forall x \in \Sigma,\ \delta^R((u_0, \cdots, u_{n-1}), x) = (\delta(u_0, x), \cdots, \delta(u_{n-1}, x))$$

Par sa définition, on remarque que A^R est donc une sorte d'automate produit de n automates, qui sont formés à partir de A en considérant chaque état initial possible. Ainsi cet automate sert à simuler la lecture d'un mot dans A à partir de n'importe quel état : chaque composante du n-uplet correspond à la lecture depuis un état initial particulier. Autrement dit, les états de l'automate racine contiennent des n-uplets dont la composante i correspond à l'état dans lequel on arrive en lisant un mot depuis l'état i dans l'automate A.

4. Justifier que cet automate est bien fini, déterministe et complet. Combien comporte-t-il d'états ?

5. Construire l'automate racine de l'automate A_1 de la question 3. On ne construira que les états accessibles. Décrire le langage reconnu par l'automate construit.

6. Démontrer

$$\forall w \in \Sigma^*,\ \forall (u_0, \cdots, u_{n-1}) \in Q^R,\ \delta^{R*}((u_0, \cdots, u_{n-1}), w) = (\delta^*(u_0, w), \cdots \delta^*(u_{n-1}, w))$$

7. En déduire que pour tout mot $w \in \Sigma^*$, $w \in L(A^R)$ si et seulement si $w.w \in L(A)$.

8. Quelle est la relation entre $L(A)$ et $L(A^R)$? Justifier.

9. Conclure.

10. (Bonus*) Donner une définition pour la racine cubique $\sqrt[3]{L}$ d'un langage L. Montrer que si L est reconnaissable alors $\sqrt[3]{L}$ l'est aussi en donnant une construction d'automate *racine cubique*.

Remarque : ce principe de construction est bon à retenir et intervient dans la résolution d'autres problèmes.