DEVOIR EN TEMPS LIBRE : SYSTÈME DE DÉDUCTION DE HILBERT

David Hilbert (1862-1943) est un grand mathématicien (et informaticien ?) allemand aux nombreuses contributions. Parmi celles-ci, Hilbert s'intéressa à la mécanisation de la démonsration mathématique. Il propose un système de déduction minimaliste similaire à la déduction naturelle mais constitué d'une seule règle de déduction.

Dans les systèmes[1] de Hilbert, on se concentre uniquement sur les formules de la logique propositionnelle et on se retreint à deux connecteurs logiques : l'implication $\to$ et la négation $\neg$. La syntaxe des formules étudiées est alors :

- une variable propositionnelle est une formule;
- si F est une formule alors $\neg F$ est une formule;
- si F et G sont des formules alors $(F \to G)$ est une formule.

Pour simplifier les écritures on adopte la convention habituelle que le connecteur $\to$ est associatif à droite, c'est-à-dire que la formule $p \to q \to r$ signifie $(p \to (q \to r))$.

Le système de Hilbert que l'on étudie est nommé SKC et repose sur 3 axiomes supplémentaires en plus de notre axiome habituel :

- Axiome habituel :

$$\frac{}{\Gamma, F \vdash_H F}\ \text{ax}$$

- Axiome K :

$$\frac{}{\Gamma \vdash A \to B \to A}\ \text{K}$$

- Axiome S :

$$\frac{}{\Gamma \vdash (A \to B \to C) \to (A \to B) \to (A \to C)}\ \text{S}$$

- Axiome C

$$\frac{}{\Gamma \vdash (\neg A \to \neg B) \to B \to A}\ \text{C}$$

Le système de déduction de Hilbert utilise une unique règle d'inférence appelée *Modus Ponens* (MP):

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash B}\ \text{MP}$$

On pourra également si on le souhaite utiliser la règle de *l'affaiblissement* vue en cours.

1. Vérifier que les 3 formules des axiomes S, K et C sont bien des tautologies en utilisant une table de vérité.

2. À quelle règle de la déduction naturelle correspond la règle *Modus Ponens* ? À quel raisonnement mathématique correspond la règle C ?

[1] Il existe en fait de nombreuses variantes

3. Démontrer les séquents suivants **en déduction naturelle** (règles du cours):

   a. $\vdash p \to p$

   b. $\vdash p \to q \to q$

   c. $\vdash (p \to q) \to (q \to r) \to p \to r$

   d. $a \vdash \neg b \to a$

   e. $a \vdash \neg a \to b$

4. Démontrer les séquents suivants **dans le système de déduction de Hilbert** :

   a. $\vdash p \to p$

   b. $\vdash p \to q \to q$

   c. $\vdash (p \to q) \to (q \to r) \to p \to r$

   d. $a \vdash \neg b \to a$

   e. $a \vdash \neg a \to b$ (Cette question est très difficile... à passer si on ne trouve pas.)

5. **Théorème de correction :** démontrer que s'il existe un arbre de preuve de Hilbert pour le séquent $\Gamma \vdash F$ alors $\Gamma \models F$.

6. Démontrer que le système de déduction de Hilbert ne peut pas prouver à la fois $\vdash F$ et $\vdash \neg F$ pour une formule F donnée.

Nous admettons le **théorème de complétude** suivant : *si* $\Gamma \models F$ *alors il existe un arbre de preuve de Hilbert pour le séquent* $\Gamma \vdash F$.

7. **Théorème de la déduction :** Soit F et G deux formules et Γ un ensemble de formules, démontrer que $\Gamma, F \vdash G$ est prouvable si et seulement si $\Gamma \vdash F \to G$ est prouvable.

Malgré les bonnes propriétés du système de déduction de Hilbert, les preuves sont extrêmement difficiles à écrire et à lire et on préfère d'autres systèmes comme la déduction naturelle.