***« Le travail est un trésor. »(Jean de La Fontaine)***

**Exercice 1** Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, comparer ${}^t(A^{-1})$ et $({}^tA)^{-1}$. Que dire de l'inverse d'une matrice symétrique ?

**Exercice 2** Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, montrer que ${}^tAA$ est diagonalisable. On suppose que $A{}^tAA = I_n$, que vaut $A$ ?

**Exercice 3** Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R})$ de valeurs propres $\lambda \leqslant \mu$. Montrer que $\lambda \leqslant a \leqslant \mu$.

**Exercice 4** Soit $a$ unitaire dans $E$ euclidien, et $k$ réel. CNS sur $k$ pour que $f : x \in E \mapsto x + k\langle x, a\rangle a$ soit un automorphisme orthogonal.

**Exercice 5** Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, CNS sur $a, b$ réels pour que $A$ soit orthogonale. Etudier dans chaque cas la nature de l'endomorphisme de matrice $A$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

**Exercice 6** Quelles sont les matrices orthogonales triangulaires supérieures ?

**Exercice 7** Montrer que si $u$ est un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien $E$ alors $\ker(u)$ et $\operatorname{Im}(u)$ sont supplémentaires orthogonaux.

**Exercice 8** Quelles sont les matrices symétriques réelles nilpotentes ?

**Exercice 9** Soit $u, v$ deux vecteurs libres de $E$ euclidien et $f : x \in E \mapsto \langle x, u\rangle v + \langle v, x\rangle u$. Montrer que $\phi$ est diagonalisable et préciser ses éléments propres.

**Exercice 10** Soit $A = \left(a_{i,j}\right)_{i,j} \in O_n$, montrer que $\left|\sum_{i,j} a_{ij}\right| \leqslant n \leqslant \sum_{i,j}|a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}$.

**Exercice 11** Soit $E$ euclidien et $f \in O(E)$, montrez que :

$$f^2 = -id_E \Longleftrightarrow (\forall x \in E, f(x) \perp x) \Longleftrightarrow \left(\forall (x,y) \in E^2, \langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle\right)$$

**Exercice 12** Trouvez les sev de $\mathbb{R}^3$ stables par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Exercice 13** Diagonaliser avec matrice de passage orthogonale $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

**Exercice 14** Diagonaliser en moins d'une minute la matrice : $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

**Exercice 15** Décrire les isométries de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices sont :

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & -1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

**Exercice 16** Une matrice $M \in S_n$ est dite positive (resp. strictement positive) ssi ${}^tMXM \geq 0$ (resp. $> 0$) pour tout $X$ de $\mathbb{R}^n$. On note alors $M \in S_n^+$ (resp. $S_n^{++}$).

1. Montrez que $A \in S_n^+ \iff Sp(A) \subset \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow \exists M \in M_n(\mathbb{R}); A = {}^tMM$. Proposez et démontrez un résultat analogue pour $S_n^{++}$.

2. Montrez que $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_n^{++}$.

3. Montrez que si $A \in S_n^+$ il existe une unique matrice $M \in S_n^+$ telle que $A = M^2$. On note $M = \sqrt{A}$. Calculer $M$ si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

4. Pensez vous que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ admette une racine carrée ? Et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ?

**Exercice 17** Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, montrer que $\det\left(I_n + {}^t AA\right) > 0$.

**Exercice 18** Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$, montrer que $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$. En déduire les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$

**Exercice 19** On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 PQ$ et on note $u \in L(E)$ :

$$u : P \longmapsto 2XP' + \left(X^2 - 1\right) P''$$

Montrer que $u$ est diagonalisable et que des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux. Préciser ses éléments de réductions dans le cas $n = 3$.

**Exercice 20** Soit $u_1, ..., u_p$ des endomorphismes symétriques de $E$ euclidien, vérifiant $\sum_{i=1}^p rg(u_i) = \dim E$ et $\forall x \in E, \left\langle \sum_{i=1}^p u_i(x), x \right\rangle = 0$.

1. Montrer que $\sum_{i=1}^p u_i = id_E$ (observer que cet endomorphisme est symétrique...)

2. Montrer que $E = \bigoplus_{i=1}^p \mathrm{Im}(u_i)$.

3. Montrer que $u_i$ est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(u_i)$.

**Exercice 21** Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $A^3 + 9A = 0$.

1. Etudier la diagonalisabilité de $A$ sur $\mathbb{R}$ puis sur $\mathbb{C}$.

2. Montrer que si $n$ est impair alors $A$ n'est pas inversible.

3. Montrer que $A$ ne peut pas être symétrique.

**Exercice 22** Déterminer les $A$ dans $S_n(\mathbb{R})$ telles que $A^3 + 2A^2 + 6A + 5I_n = 0_n$.

**Exercice 23** Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n > 0$ et $a$ un vecteur de norme 1. On pose pour $x$ dans $E$ :

$$f(x) = x + \langle a, x \rangle a$$

1. Montrer que $f$ est un endomorphisme symétrique de $E$.
2. Déterminer $\ker(f - id_E)$et sa dimension ? En déduire une première valeur propre de $f$ et sa multiplicité.
3. Calculer $f(a)$, en déduire un second sev propre de $f$.
4. Donner le polynôme caractéristique puis la trace de $f$.

**Exercice 24** Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tBB$.

**Exercice 25** Soit $u \in S(E)$ de valeurs propres $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$. Montrer que pour tout $x$ de $E$ on a :

$$\lambda_1 \|x\|^2 \leqslant \langle x, u(x) \rangle \leqslant \lambda_n \|x\|^2$$

**Exercice 26** Ecrire la matrice dans la base canonique $(i, j, k)$ de :

1. La symétrie orthogonale d'axe le plan d'équation $x - 2y + z = 0$.
2. La rotation d'axe dirigé par $i - j + k$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

**Exercice 27** Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $M = {}^tAA$.

1. Montrer que $M$ est symétrique de spectre inclus dans $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que $A$ et $M$ ont même noyau, puis qu'elles ont même rang.
3. Montrer enfin que $\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Im}({}^tA) = (\ker(A))^\perp$.