« Si nous sommes maîtres des mots que nous n'avons pas prononcés, nous devenons esclaves de ceux que nous avons laissé échapper. »(Churchill)

Exercice 1 (une norme sur $\mathbb{R}^2$) Montrer que $N((x, y)) = |x| + |x + 2y|$ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$ et représenter sa boule unité fermée.

Exercice 2 Montrer que dans l'evn $(E, \|\|)$ on a $\forall(x, y) \in E^2, \|x\| + \|y\| \leqslant 2 \max (\|x + y\|, \|x - y\|)$.

Exercice 3 (une norme sur les polynômes) On pose pour $P \in \mathbb{R}[X]$: $\|P\| = \sup_{[0,1]} |P - P'|$. Montrez que c'est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4 Notons $E = C([a, b], \mathbb{R})$ et pour f dans E : $N_1(f) = \int_a^b |f|$ et $N_\infty(f) = \sup_{[a,b]} |f|$. Montrer que ce sont deux normes sur E.

Exercice 5 (utilisation de l'homogénéité) Soit N_1 et N_2 deux normes sur un evn E telles que $S^1(0, 1) = S^2(0, 1)$. Montrer que $N_1 = N_2$.

Exercice 6 (de l'intérêt de dessiner...) Soit E un evn ; a et $b \in E$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et r et $s \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que :

1. $B_f(a, r) \cap B_f(b, s) \neq \varnothing \iff \|a - b\| \leqslant s + r$.
2. $B_f(a, r) \subset B_f(b, s) \iff \|a - b\| \leqslant s - r$.
3. $B_f(a, r) = B_f(b, s) \iff a = b$ et $s = r$.

Exercice 7 (Normes équivalentes) Soit deux normes N et N' sur E. On dit que N' est équivalente à N s'il existe deux réels $a, b > 0$ tels que : $aN \leqslant N' \leqslant bN$.

1. Montrer que ceci définit une relation d'équivalence. On dira par la suite N et N' sont équivalentes.
2. Montrer que sur $\mathbb{R}^2$, N_1 et N_∞ sont équivalentes.
3. Montrer que si deux normes N, N' sont équivalentes alors elles ont les mêmes parties bornées, les mêmes les suites convergentes et que la limite est la même pour N et pour N'.
4. On note pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$: $N_1(P) = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ et $N_\infty(P) = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} |a_k|$.
   (a) Montrer que l'on définit ainsi deux normes sur $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Soit pour tout n dans $\mathbb{N}$: $P_n = \sum_{k=0}^{n} Xk$. Préciser $N_1(P_n)$ et $N_\infty(P_n)$. Ces deux normes sont elles équivalentes sur $\mathbb{R}[X]$? Montrer qu'elles sont équivalentes sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 8 Notons $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ et pour f dans E : $N(f) = |f(0)| + \sup_{[0,1]} |f'|$ et $N_\infty(f) = \sup_{[0,1]} |f|$. Montrer que $B_f^N(0, 1) \subset B_f^{N_\infty}(0, 1)$. Déterminer f dans $B_f^{N_\infty}(0, 1)$.

Exercice 9 Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des suites bornées de nombres complexes. Montrer que l'on définit deux normes sur $\mathcal{B}$ en posant : $\forall u = (u_n)_n \in \mathcal{B}, N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|u_n|}{2^n}, N'(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|u_n|}{n!}$. Montrer aussi que $N' \leqslant 2N$ et qu'elles ne sont pas équivalentes.

Exercice 10 (parties bornées) Montrer que la réunion et la somme de deux parties bornées est encore bornée.

Exercice 11 Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}$ des matrices de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont entre 0 et 1 est fermé, borné et convexe.

Exercice 12 (en passant...) Existe-t-il une norme N sur $M_n(\mathbb{C})(n > 1)$ vérifiant $\forall(A, B) \in M_n(\mathbb{C}), N(AB) = N(A)N(B)$?

Exercice 13 (Deux limites ? ? ?) On munit $\mathbb{R}[X]$ des normes (?) définies par : si $P = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$, $N(P) = |a_0 - a_1 - a_2 - ... - a_n| + |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|$ et $N'(P) = \sup_{[0,1/2]} |P|$. Montrer que $X^n \overset{N}{\to} -1$ et $X^n \overset{N'}{\to} 0$.

Exercice 14 (norme confortable sur les matrices) Soit $n > 1$.

1. Montrer que si on note pour $A \in M_n(\mathbb{C})$: $N(A) = n \max\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|$ on définit une norme N sur $M_n(\mathbb{C})$ qui vérifie $\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{C})^2, N(AB) \leqslant N(A)N(B)$.
2. Montrer alors que si $A_k \to A$ et $B_k \to B$ alors $A_kB_k \to AB$ dans $M_n(\mathbb{K})$.*
3. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $A^k \underset{k\infty}{\to} P$. Montrer que P est une matrice de projection (ie $P^2 = P$).
4. Soit $(A_k)_k$ une suite de matrices inversibles convergeant vers A, telle que $(A_k^{-1})_k$ converge vers B. Montrer que A est inversible d'inverse B. Si $A_k = \frac{1}{2^k} I_n$, la suite $(A_k^{-1})_k$ est-elle convergente ?
5. Etudier la convergence de la suite $(A^n)_n$ avec $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 15 On munit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ des normes $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|$ et $\|f\|_\infty (f) = \sup_{[0,1]} |f|$. Enfin on note $A = \{f_n : x \mapsto nx^n, n \in \mathbb{N}\}$. A est-elle bornée pour $\| \|_1$? Pour $\| \|_\infty$?

Exercice 16 Montrer que $A = \{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p, \forall i \neq j, x_i \neq x_j\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

Exercice 17 (amusant) Soit A dans $M_n(\mathbb{Z})$, on suppose que la suite $(A^k)_k$ converge vers la matrice nulle. Montrer que A est nilpotente. Ce résultat subsiste-t-il si A n'est plus supposée à coefficients entiers relatifs ?

Exercice 18 Soit pour n dans $\mathbb{N}^*$: $A_n = \begin{pmatrix} 1/n & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B_n = \begin{pmatrix} 1/n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, montrer que A_n et B_n sont semblables, qu'elles convergent respectivement vers A et B à préciser. A et B sont-elles semblables ?

Exercice 19 Soit $\mathcal{P} = \{M \in M_n(\mathbb{R}), M^2 = M\}$. Montrer que $\mathcal{P}$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$. En étudiant les matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ montrer que $\mathcal{P}$ n'est pas borné.

Exercice 20 (encore du dessin...) On note pour n dans $\mathbb{N}^*$ et λ dans $\mathbb{R}_+^*$:

$$B_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{n}\right)^2 \leqslant \frac{\lambda}{n^2} \right\}$$

1. Déterminer une condition nécessaire sur λ pour avoir : $\forall n > 0, B_{n+1} \subset B_n$
2. Déterminer pour quelles valeurs de λ l'ensemble $B = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$ est fermé.

Exercice 21 Soit F un sev de E :

1. Montrer que si F admet un point intérieur alors $F = E$.
2. Montrer que $\overline{F}$ est encore un sev de E.

Exercice 22 Soit deux parties A et B d'un evn, montrer que :

1. Si A est ouvert, $A + B$ est ouvert.
2. On se place dans $\mathbb{R}^2$. Soit $A = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 1\}$. Déterminez $A + B$. La somme de deux fermés est-elle fermée ?

∗. On peut aussi le faire à la main, faites-le !

Exercice 23 (classique matriciel non trivial...)

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $x \in \mathbb{R} \mapsto \det(A - xI_n)$ est une fonction polynômiale dont on précisera le degré.

2. En déduire qu'il existe une suite de matrices inversibles qui converge vers A. On dit que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.

3. $GL_n(\mathbb{R})$ est-il un ouvert ? Un fermé de $M_n(\mathbb{R})$?

Exercice 24 (polynôme à deux variables) Soit P une fonction polynôme à deux variables. On suppose qu'il existe un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ sur lequel P s'annule.

1. Montrer que Ω contient un sous-ensemble de la forme $I \times J$ avec I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ non réduits à un point. En déduire que P est identiquement nulle.

2. Donner un exemple de polynôme à deux variables non nul ayant une infinité de racines.