"La peur de l'effort est plus épuisante que l'effort même. " (Albert Brie)

Exercice 1 Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Montrer que si 0 est valeur propre de u alors u n'est pas inversible. La réciproque est-elle toujours vraie ?

Exercice 2 La somme de deux vecteurs propres est-elle encore un vecteur propre ?

Exercice 3 Soit $D = \text{diag}(x_1, x_2, ..., x_n)$ avec les x_i deux à deux distincts.

1. Montrer que $(I_n, D, D^2, ..., D^{n-1})$ est une base du sev $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ des matrices diagonales de $M_n(\mathbb{K})$.
2. Quel est le degré minimal d'un polynôme annulateur non nul de D ?

Exercice 4 Trouver un polynôme annulateur non nul de degré minimal pour $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

Exercice 5 Soit $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'espace des suites à coefficients complexes, et ϕ l'endomorphisme de E qui à une suite (u_n) associe la suite (v_n) définie par $v_0 = u_0$ et pour tout $n \geq 1$, $v_n = \frac{u_n + u_{n-1}}{2}$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de ϕ.

Exercice 6 Soit $(P, u, x, \lambda) \in \mathbb{K}[X] \times L(E) \times E^* \times \mathbb{K}$. On suppose que $u(x) = \lambda x$, montrer que $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$.

Exercice 7 Montrer qu'un vecteur propre de u associé à une valeur propre non nulle est dans $\text{Im}(u)$

Exercice 8 Déterminer les valeurs propres et les sevs propres de l'endomorphisme de dérivation D sur $\mathbb{K}_n[X]$ avec $n \geqslant 0$. Idem sur $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ev des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 Quels sont les sevs de $\mathbb{K}[X]$ stables par la dérivation ?

Exercice 10 (En dimension finie) Monter que si u admet un hyperplan stable alors il admet une valeur propre (raisonner matriciellement). Montrer aussi qu'un hyperplan est stable par u ssi il existe une valeur propre λ de u telle que $\text{Im}(u - \lambda id_E) \subset H$.

Exercice 11 Déterminer les sevs de $\mathbb{R}^3$ stables par $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et par $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On pourra raisonner sur la dimension d'un tel sev stable.

Exercice 12 Diagonaliser : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 13 Les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

Exercice 14 Montrer que les applications suivantes sont des endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$, préciser leurs éléments propres et dire s'ils sont diagonalisables :

1. $\phi(P) = P(X-1)$.
2. $\phi(P) = \left(X^2 - 1\right) P'(X) - 2nXP$
3. $\phi(P) = (nX+1)P + \left(1 - X^2\right) P'$
4. $\phi(P) = X(X+1)P' - 2nXP$.

Exercice 15 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisable telle que $A^{2022} = I_n$, montrer que $A^2 = I_n$.

Exercice 16 Montrer que $A \in M_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable ssi $A + I_n$ l'est.

Exercice 17 pour quelles valeurs des paramétres réels les matrices suivantes sont elles diagonalisables ?

$$a)\begin{pmatrix} 1-a & a & 0 \\ -a & 1 & a \\ -a & 1-b & a+b \end{pmatrix}, b)\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, c)\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & -1 & f \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, d)\begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 18 Expliquer sans calcul pourquoi $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

Exercice 19 Montrer de deux manières différentes que si A est diagonalisable alors sa transposée aussi.

Exercice 20 Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $A^4 = A^2$. Trouver un polynôme annulateur pour A. On suppose de plus que $\{-1, 1\} \subset sp(A)$. Montrer alors que A est diagonalisable.

Exercice 21 (Mines-Ponts) À quelle condition sur $z, M(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $\mathbb{C}$?

Exercice 22 Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.On veut résoudre dans $M_2(\mathbb{R})$ l'équation $M^2 + M = A$

1. Diagonaliser A avec matrice de passage.
2. Trouver un polynôme annulateur de M, en déduire les valeurs propres possibles pour M.
3. Montrer que M est diagonalisable et préciser les formes diagonales possibles. Conclure.

Exercice 23 Niaiserie : une matrice égale à son inverse est-elle diagonalisable ?

Exercice 24 Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de rang 1 soit diagonalisable.

Exercice 25 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I$, montrer que $\det A > 0$.

Exercice 26 Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $A^3 - 5A^2 + 4A = 0$. Montre que $tr(A) \in \mathbb{N}$.

Exercice 27 Soit $A \in M_{2n+1}(\mathbb{R})$ non nulle telle que $A^3 + 4A = 0$. Montrer que A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$. L'est-elle sur $\mathbb{C}$? Montrer aussi que A n'est pas inversible.

Exercice 28 Déterminer la limite de la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 29 Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $Tr(A) \neq 0$. On définit $\phi : \begin{cases} M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K}) \\ M \mapsto Tr(A)\, M - Tr(M)\, A \end{cases}$. Vérifier (rapidement) que ϕ est linéaire, déterminez $\ker \phi$ et $\operatorname{Im} \phi$, montrer que ϕ est diagonalisable.

Exercice 30 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisable telle que $\forall (\lambda, \mu) \in sp(A), \lambda + \mu \neq 0$. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $AM + MA = 0$, montrer que $M = 0$.

Exercice 31 Soit $u \in L(E)$ vérifiant $u^3 = u$.

1. Calculer $u^2(x)$ pour $x \in \operatorname{Im}(u)$.
2. Montrer que l'endomorphisme induit par u sur F est inversible.
3. En déduire que u est de rang pair.

Exercice 32 Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Diagonaliser A. En déduire toutes les matrices M qui commutent avec A.

Exercice 33 Soit A une matrice nilpotente, montrer qu'elle admet une seule valeur propre à préciser. Que dire d'une matrice nilpotente ET diagonalisable ?

Exercice 34 Montrer qu'en dimension $n > 0$ un endomorphisme admet une droite ou un plan stable. On pourra raisonner matriciellement et ce n'est pas facile !!!

Exercice 35 Donner un plan d'étude pour trigonaliser les matrices de taille 2 et 3. Trigonaliser :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 36 Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $Tr(A^k) = 0$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$. Montrer que A est nilpotente.

Exercice 37 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(A)$ triangulaire supérieure à termes diagonaux tous distincts. Montrer que A est diagonalisable puis triangulaire supérieure.

Exercice 38 (Un exemple de chaîne de Markov, paresseusement copié sur un TD de Mr Zwolska !)
Soit $a \in]0; 1[$. Une puce se déplace entre trois points A, B et C selon la règle suivante :

1. Si elle est en A, la probabilité qu'elle se déplace en B est égale à a, et celle qu'elle se déplace en C est $1 - a$;
2. Si elle est en B, la probabilité qu'elle se déplace en A est égale à a, et celle qu'elle se déplace en C est $1 - a$;
3. Si elle est en C, la probabilité qu'elle se déplace en A est égale à a, et celle qu'elle se déplace en B est $1 - a$; On suppose qu'au départ la puce est en A.

Pour tout n de N, on note A_n (resp. B_n et C_n) l'événement : "la puce est en A (resp. B et C) après le n^e déplacement" et X_n la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix}$

1. Montrer que $\forall n \in \text{N}, \quad X_{n+1} = MX_n$, où $M = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & 1-a \\ 1-a & 1-a & 0 \end{pmatrix}$
   (a) Montrer que 1 est valeur propre de ${}^tM$ et préciser le vecteur propre associée.
   (b) Donner les autres valeurs propres de ${}^tM$ et sous-espaces propres associés.
   (c) ${}^tM$ est elle diagonalisable ?

Dans toute la suite de l'exercice, on fixe $a = \frac{1}{4}$.

1. Diagonaliser alors la matrice ${}^tM$ et en déduire, pour tout n de N, $\left({}^tM\right)^n$ puis M^n.
2. Préciser la matrice X_0 et déterminer, pour tout n de N, X_n en fonction de n.
3. En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$, les probabilités $P(A_n), P(B_n)$ et $P(C_n)$.
4. Déterminer les limites de ces suites lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 39 Soient X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes, suivant la même loi binomiale $\text{B}\mathcal{B}(n, p)$.
Pour tout $\omega \in \Omega$ on pose $A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) & Z(\omega) \\ X(\omega) & Y(\omega) & Z(\omega) \\ X(\omega) & Y(\omega) & Z(\omega) \end{pmatrix}$

1. Quelle est la probabilité qu'elle soit diagonalisable ?
2. Quelle est la probabilité qu'elle soit une matrice de projecteur ?

Exercice 40 Soient X, Y indépendantes suivant la même loi $\mathcal{G}(p)$ avec $0 < p < 1$. quelle est la probabilité que $A = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$ soit inversible ? Diagonalisable ?

Banque CCP

Exercice 41 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

1. Déterminer le rang de A.
2. Pour quelles valeurs de a, la matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 42 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?
2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $B = a\mathrm{I}_3 + bA + cA^2$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.
   Déduire de la question **1.** les éléments propres de B.

Exercice 43 Soit u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

1. Soit λ un réel non nul. Prouver que si λ est valeur propre de $u \circ v$, alors λ est valeur propre de $v \circ u$.
2. On considère, sur $E = \mathbb{R}[X]$ les endomorphismes u et v définis par $u : P \longmapsto \displaystyle\int_1^X P$ et $v : P \longmapsto P'$.
   Déterminer $\mathrm{Ker}(u \circ v)$ et $\mathrm{Ker}(v \circ u)$. Le résultat de la question 1. reste-t-il vrai pour $\lambda = 0$?
3. Si E est de dimension finie, démontrer que le résultat de la première question reste vrai pour $\lambda = 0$.
   Indication : penser à utiliser le déterminant.

Exercice 44 Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels.

M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

Exercice 45 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A n'est pas diagonalisable.
2. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.
   Trouver une base (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.
   On donnera explicitement les valeurs de a, b et c.
3. En déduire la résolution du système différentiel $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

Exercice 46 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrer que A est diagonalisable de trois manières :

1. En calculant directement le déterminant $\det(\lambda\mathrm{I}_3 - A)$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,
2. En utilisant le rang de la matrice,
3. En calculant A^2.

Bonus

Exercice 47 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Quelle est la dimension de Ker A ?
2. Trouver les valeurs propres non nulles de A. (Indication : résoudre directement l'équation $AX = \lambda X$. On peut aussi calculer le polynôme caractéristique mais les calculs sont plus fastidieux.)
3. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 48

1. Donner un exemple de matrice de $M_2(\mathbb{R})$ dont le spectre est vide.
2. Donner un exemple de matrice diagonalisable de $M_2(\mathbb{R})$ dont le spectre est réduit à $\{1\}$. Que peut-on dire d'une telle matrice ?
3. Donner un exemple de matrice non diagonalisable de $M_2(\mathbb{R})$ dont le spectre est réduit à $\{1\}$.
4. Donner un exemple de matrice non diagonale de $M_2(\mathbb{R})$ dont le spectre est $\{-1, 1\}$. Une telle matrice est-elle toujours diagonalisable ?
5. Donner un exemple de matrice non nulle de $M_2(\mathbb{R})$ dont le spectre est réduit à $\{0\}$. Une telle matrice peut-elle être diagonalisable ?
6. Donner un exemple de couple $(A, B) \in M_2(\mathbb{R})^2$ telle que $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(A) = \mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(B) = \{1\}$ et telle que A et B ne soient pas semblables.
7. Peut-on trouver une paire $(A, B) \in M_2(\mathbb{R})^2$ telle que $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(A) = \mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(B) = \{-1, 1\}$ et telle que A et B ne soient pas semblables ?

Exercice 49 Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit l'endomorphisme $\varphi : \mathbb{C}_n[X] \to \mathbb{C}_n[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \quad \varphi(P) = \left(X^2 - 1\right) P'' + (2X + 1)P'.$$

1. Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme φ.
2. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Exercice 50 Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit l'endomorphisme $\varphi : \mathbb{C}_n[X] \to \mathbb{C}_n[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \quad \varphi(P) = \left(X^2 - 1\right) P' - nXP.$$

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme φ.
2. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?