La guerre, c'est le massacre de gens qui ne se connaissent pas, au profit de gens qui se connaissent et ne se massacrent pas. (Paul Valéry)

1. Soient a, b continues sur $\mathbb{R}$ et impaires. Montrer que les solutions de $y' + ay = b$ sont paires.
2. Résoudre $3xy' - 4y = x$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$. Y-a-t'il des solutions définies sur $\mathbb{R}$?
3. Résoudre $y'' - y' - e^{2x}y = e^{3x}$ en effectuant le changement de variable $u = e^x$.
4. Déterminer la fonction f continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout x réel : $f(x) - \displaystyle\int_0^x tf(t)\,dt = 1$.
5. On se propose de résoudre $(E) : f''(-x) + f(x) = x + \cos x$.
   Soit $\phi : x \mapsto f(x) + f(-x)$ et $\psi : x \mapsto f(x) - f(-x)$. Trouver des ED simples vérifiées par ϕ et ψ. En déduire les solutions de (E).
6. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations $xy' + 2y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ et $xy' + y = e^x$.
7. Trouver les solutions polynômiales de :$(E) : x^2y''(x) - xy'(x) - 3y(x) = 0$ Résoudre ensuite sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. Dimension de l'espace des solutions sur $\mathbb{R}$?
8. **Etude qualitative** Soit q une fonction continue intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et soit $(E) : y'' + qy = 0$.
   (a) Montrer que si f a une limite en $+\infty$ et si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge alors cette limite est nulle.
   (b) Montrer que, si f est une solution bornée de l'équation alors $\lim\limits_{\infty} f' = 0$.
   (c) Soit f, g deux solutions bornées et $w = f'g - fg'$ leur wronskien. Calculer w' et en déduire que f et g sont liées.
   (d) En déduire que (E) admet nécessairement une solution non bornée sur $\mathbb{R}_+$.
9. (a) Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ via un système différentiel d'ordre 1.
   (b) Résoudre sur $\mathbb{R}$: $\begin{cases} x'' = y \\ y' = -2x + x' + 2y \end{cases}$
10. Chercher les solutions développables en séries entières de :
$$(E) : (1+x^2)y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = 0$$
   En déduire toutes les solutions de (E).
11. On considère le système différentiel (S) définie par
$$\begin{cases} x' = x + 2y - z \\ y' = 2x + 4y - 2z \\ z' = -x - 2y + z \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 0 \end{cases}$$
   Justifier que le système (S) admet une unique solution $f = (x, y, z)$ sur $\mathbb{R}$ puis montrer que $f(\mathbb{R})$ est inclus dans le plan d'équation $x + z = 1$.
12. **Réflechir avant de se lancer...** Résoudre $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
13. Résoudre $\begin{cases} x'' = 3x + y \\ y'' = 2x + 2y \end{cases}$

14. Trouver les solutions développables en série entière de $2xy' + y = \dfrac{2}{1-x}$.
15. Résoudre $y'' - 2y' + 5y = -4\,\mathrm{e}^{-x}\cos(x)$.
16. Résoudre $y'' - 2y' + y = x, y(0) = y'(0) = 0$. (chercher une solution particulière simple...)
17. On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $(t+1)^2 y'' - 2(t+1)y' + 2y = 0$
    (a) Déterminer les solutions polynomiales de (E)
    (b) En déduire les solutions de (E) sur les intervalles $]-\infty, -1[$ et $]-1, +\infty[$.
    (c) En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.
18. En posant $z = (1 + \mathrm{e}^x)\,y$, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(1 + \mathrm{e}^x)\,y'' + 2\mathrm{e}^x y' + (2\mathrm{e}^x + 1)\,y = x\mathrm{e}^x$$

19. En posant $z = xy$, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$.
20. En posant $z = y - y'$, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $xy'' - (1+x)y' + y = 1$.
21. Résoudre $X' = AX + B$ où $A(t) = \begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$.
22. Déterminer les fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x g(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

23. Résoudre les systèmes suivants.

    (a) $\begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{cases}$
    (b) $\begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = x + y \end{cases}$
    (c) $\begin{cases} x' = x - 4y \\ y' = x - 3y \end{cases}$
    (d) $\begin{cases} x' = -x + 3y \\ y' = -2x + 4y \end{cases}$

24. Résoudre $X' = AX$ avec : $(i) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(ii) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$.
25. Résoudre le systéme $\begin{cases} x' = \dfrac{x}{2} + \dfrac{e^t}{2} y \\ y' = \dfrac{e^{-t}}{2} x - \dfrac{y}{2} + e^t \end{cases}$ en remarquant que $\begin{pmatrix} e^t \\ 1 \end{pmatrix}$ est solution du systéme homogéne.
26. Montrer que les sevs propres de $M(t) = \begin{pmatrix} t-2 & 1 \\ -3 & 2+t \end{pmatrix}$ sont indépendants de t. Résoudre ensuite le système :

$$\begin{cases} x'(t) = (t-2)\,x(t) + y(t) \\ y'(t) = -3x(t) + (2+t)\,y(t) \end{cases}$$

27. On considère l'équation différentielle :$y'' + 6y' + 9y = d(x) \quad (E)$
    (a) Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
    (b) Trouver une solution particulière de (E) lorque, respectivement, on pose : $d(x) = \mathrm{e}^{-3x}$ et $d(x) = \cos x$.
    (c) Donner la forme générale des solutions de (E) lorsque : $d(x) = 2\,\mathrm{e}^{-3x} + 50\cos x$.