Sans musique la vie serait une erreur. (Nietzsche)

Pour mémoire

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière. On rappelle que :

$$I = \{r \geqslant 0, (a_n r^n)_n \text{ est bornée}\}$$

est un intervalle de $\mathbb{R}$ dont la borne supérieure R_a dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est appelé rayon de convergence de la série entière.

On a ainsi $I = [0, R_a]$ ou $I = [0, R_a[$. Il importe de bien comprendre alors que :

$$\forall r \geqslant 0, r < R_a \implies (a_n r^n)_n \text{ bornée et } (a_n r^n)_n \text{ bornée } \implies r \leqslant R_a$$

On montre alors que :

1. $|z| < R_a \implies \sum_n a_n z^n$ CVA.
2. $|z| > R_a \implies \sum_n a_n z^n$ DVG car $(a_n z^n)_n$ non bornée.

On appelle cercle d'incertitude le cercle de centre 0 et de rayon R_a. C'est le seul endroit ou on peut trouver z tel que $\sum_a a_n z^n$ soit finement divergente ou convergente sans l'être absolument !

Exercice 1 Soit a, b des réels positifs, montrer que : $(\forall r \in \mathbb{R}_+, r < a \implies r \leqslant b) \implies (a \leqslant b)$.

Exercice 2 Soit λ dans $\mathbb{C}^*$, montrer que $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n \lambda a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Exercice 3 Soit α un réel, montrer que $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Exercice 4

1. Donner un exemple de série entière qui diverge grossièrement en tout point du cercle d'incertitude.
2. Donner un exemple de série entière qui converge absolument en tout point du cercle d'incertitude.
3. Donner un exemple de série entière qui diverge finement en au moins un point du cercle d'incertitude et qui est semi-convergente en au moins un point du cercle d'incertitude.
4. Donner un exemple de série entière de rayon de convergence $R > 0$.

Exercice 5 Etudier la convergence des séries entieres $\sum a_n z^n$ dans les cas suivants :

1. $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha > 0)$
2. $a_n = \ln n$
3. $a_n = \frac{n^n}{n!}$
4. $a_n = \sin n$
5. a_n semi-convergente
6. $\lim_n a_n = \ell \neq 0$;
7. $a_n = \binom{2n}{n}$.
8. $a_n = \mathrm{e}^{-n^2}$.
9. $a_n = \frac{n^3+n^2\cos(n)-2n}{4n^4+n+1}$
10. $a_n = n^{(-1)^n}$
11. $a_n = \frac{1}{1+2+3+...+n}$
12. $a_n = \frac{n+1}{n+2}$

Exercice 6 Rayon de convergence des séries suivantes :

1. $\sum n! z^n$
2. $\sum 2^n z^{n!}$
3. $\sum (3 + (-1)^n)^n z^n$
4. $\sum\limits_{p \text{ premier}} z^p$

Exercice 7 On suppose que $\sum_n a_n z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$. Quel est le rayon de convergence de $\sum_n a_n z^{2n}$? De $\sum_n \frac{a_n}{n!} z^n$?

Exercice 8 On rappelle que l'on note pour $n \in \mathbb{N}^*$: $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Montrer que $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$ est définie sur $]-1, 1[$.
2. En simplifiant $(1-x)S(x)$ donner une expression de $S(x)$.

Exercice 9 Soit $\sum_n a_n z^n$ avec $R_a > 0$, on note $b_n = \frac{a_n}{1+|a_n|}$. Montrer que $R_b \geqslant \max(1, R_a)$ puis qu'il y a égalité.