Les vrais informaticiens confondent toujours Halloween et Noël car pour eux Oct 31 = Dec 25. (Andrew Rutherford)

Exercice 1 Montrer que la limite simple d'une suite de fonctions croissantes sur I est croissante sur I.

Exercice 2 Soit $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$. CVS,CVU sur $\mathbb{R}$? CVU sur $[a,+\infty[$ avec $a>0$?

Exercice 3 Soit $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \mathrm{e}^{-nx}\sin(nx)$. CVS,CVU sur $\mathbb{R}_+$? CVU sur $[a,+\infty[$ avec $a>0$?

Exercice 4 Soit $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$. Etudier la CVS de $(f_n)_n$ sur $\mathbb{R}$, déterminer $\lim\limits_n f_n(1/n)$, étudier la CVU de $(f_n)_n$ sur $\mathbb{R}$ puis montrer qu'il y a CVU sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 5 Pour $a \geqslant 0$ on note $f_n : x \in [0,1] \mapsto n^a x^n(1-x)$. Déterminer la limite simple de $(f_n)_n$ puis déterminer les valeurs de a pour lesquelles il y a CVU.

Exercice 6 Soit $(f_n),(g_n)$ deux suites de fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs réelles, convergeant uniformément vers f et g sur $[a,b]$. Montrez que f_ng_n converge uniformément vers fg sur $[a,b]$.Montrez que ce résultat est en défaut si on ne travaille pas sur un segment.

Exercice 7 Soit f_n convergeant uniformément vers f, montrez que $\dfrac{f_n}{1+f_n^2}$ CVU vers $\dfrac{f}{1+f^2}$.

Exercice 8 Soit f_n convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f, montrez que $\sin(f_n)$ CVU sur $\mathbb{R}$. (On pourra observer que sin est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.)

Exercice 9 Soit $f_n(x) = n\cos^n x \sin x$. Chercher la limite simple, f, des fonctions f_n, calculer $\lim\limits_{n\infty} \displaystyle\int_0^{\pi/2} f_n(t)dt$. Y-a-t'il CVU de $(f_n)n$ vers f sur $[0,\pi/2]$?

Exercice 10 Soit $(P_n)_n$ une suite de fonctions polynômiales convergeant uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geqslant n_0, |P_n(x) - f(x)| \leqslant 1$. En déduire que f est une fonction polynôme.

Exercice 11 Soit $P_n : x \mapsto \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$. Préciser la limite simple, y-a-t'il CVU sur $\mathbb{R}$?

Exercice 12 (difficile) On pose pour $x \geqslant 0$: $f_n(x) = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{-n}$. Montrer que $(f_n)_n$ CVU sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction à préciser.

Exercice 13 Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions convergeant uniformément sur un intervalle I vers une fonction f continue sur I, et soit $(x_n)_n$ suite de I de limite x dans I. Montrer que $f_n(x_n)$ tend vers $f(x)$ quand n tend vers l'infini.

Exercice 14 CVS et somme de $\displaystyle\sum_n f_n$ avec $f_n : x \mapsto \dfrac{\sin(nx)}{n2^n}$.

Exercice 15 Soit $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{n+n^2x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$. Préciser sa monotonie.
2. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Préciser sa limite en $+\infty$, donner un équivalent en $+\infty$ en observant que $\dfrac{1}{n^2+n^2x} \leqslant f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{n^2x}$.
4. A l'aide d'une comparaison série intégrale donner un équivalent en 0 de $S(x)$.

Exercice 16 Etudier CVS,CVU,CVN sur $\mathbb{R}$ de $\sum_n f_n$ avec :

1. $f_n(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^n}$ avec $n \in \mathbb{N}$.
2. $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{x}{(1+x^2)^n}$ avec $n \in \mathbb{N}$.
3. $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x^2}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 17 Etudier sur $\mathbb{R}_+$ la CVS,CVN,CVU de la série de fonctions $\sum_n f_n$ avec $f_n = \dfrac{1}{n+1}\mathbf{1}_{[n,n+1[}$.

Exercice 18 Notons pour $n > 0$ et $x \in \mathbb{R}$: $f_n(x) = \dfrac{x}{x^2+n^2}$.

1. Montrer que $\sum_n f_n$ CVU sur tout $[-a,a]$ avec $a > 0$. En déduire que $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$.
3. A l'aide d'une comparaison série-intégrale trouver un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
4. Y-a-t'il CVU sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 19 On considére la série de fonctions Σf_n avec $f_n(x) = \dfrac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln n}$ sur $\mathbb{R}_+$.

1. A l'aide d'une comparaison série intégrale, montrer que $\sum_n \dfrac{1}{n\ln n}$ diverge.
2. Montrer qu'il y a CVS sur $\mathbb{R}_+$, CVN sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$. Y-a-t'il CVN sur $\mathbb{R}_+$?
3. Montrer que la somme S de cette série est continue sur $\mathbb{R}_+$.
4. Montrer que S est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ mais non dérivable à droite en 0.
5. Montrer enfin que pour tout entier k on a $\lim_{\infty} x^k S(x) = 0$.

Exercice 20 Vérifier que l'on peut définir une fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant :

$$\forall x \geqslant 0, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$
2. Montrer que pour tout $x > 0$: $xf(x) - f(x+1) = \mathrm{e}^{-1}$, en déduire un équivalent de f en 0^+.

Exercice 21 Vérifier que l'on peut définir une fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant : $\forall x > 0, f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$. Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, préciser f' et en déduire f.

Exercice 22 (fonction zéta et zéta alternée de Riemann)

1. Montrer que l'on définit une fonction sur $]1,+\infty[$ en posant $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.
2. Montrer que ζ est de classe C^k sur $]1,+\infty$ pour tout entier naturel k et préciser ζ'.
3. A l'aide d'une comparaison série-intégrale démontrer que $\zeta(x) \underset{1}{\sim} \dfrac{1}{x-1}$.
4. Montrer que quand $x \to +\infty$ on a $\zeta(x) = 1 + 2^{-x} + \underset{+\infty}{o}\left(2^{-x}\right)$.
5. Montrer que pour tout $x > 0$ la série $\displaystyle\sum_{n>0} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge. On note $\eta(x)$ sa somme.
6. Montrer que η est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.
7. Montrer que pour tout $x > 1$: $\eta(x) = \left(1 - 2^{1-x}\right)\zeta(x)$.
8. à l'aide de l'équivalent de ζ en 1 trouvé en 3 retrouver la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.
9. Déterminer la limite en 0 de η.
10. A l'aide d'un DL en 1 de η donner la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$.

Exercice 23 on note pour $n \geqslant 0$: $f_n(x) = \begin{cases} (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln(x) \text{ si } x \in]0,1] \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$.

1. CVS de $\displaystyle\sum_n f_n$ et fonction somme ?
2. Montrer qu'il y a CVU sur $[0,1]$.
3. En déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$ et calculer sa valeur en admettant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 24 Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ et que $\displaystyle\int_0^1 t^t dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$. Valeur approchée ?

Exercice 25 Dans tout le probléme α désigne un réel. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par : $u_n(0) = 0$ et $u_n(x) = -n^\alpha x^n \ln x$ pour $x > 0$.

1. Etudier suivant les valeurs de α la convergence et la convergence uniforme de la suite (u_n) sur $[0,1]$. Pour quelles valeurs de α a-t'on $\displaystyle\lim_n \int_0^1 u_n(x)dx = \int_0^1 \lim_n u_n(x)dx$?
2. On étudie maintenant la série de fonctions Σu_n.
   (a) Vérifier que pour tout $x \in [0,1]$ $\Sigma u_n(x)$ converge. On note $S(x)$ la somme de cette série.
   (b) Pour quelle valeurs de α la série Σu_n est-elle normalement convergente sur $[0,1]$?
   (c) Pour $\alpha = 0$ calculer S et étudier sa continuité sur $[0,1]$.
   (d) Pour quelles valeurs de α S est-elle continue à gauche en 1 ?
   (e) La fonction S est-elle continue sur $[0,1[$?

Exercice 26 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$.
2. Soit $a \in]0,1[$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,1]$?
3. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?
4. Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 27 Pour tout entier naturel n, on définit sur l'intervalle $J = [1,+\infty[$, la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}.$$

1. Démontrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur J.

   On note alors pour tout x de J, $\varphi(x)$ sa somme.
2. Montrer que cette série de fonctions ne converge pas normalement sur J.
3. Étudier alors sa convergence uniforme sur J.
4. Déterminer $\ell = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

   5.1. Justifier la convergence de la série de terme général u_n. On note $a = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ sa somme.

   5.2. Montrer que l'on a au voisinage de l'infini : $\varphi(x) = \ell + \dfrac{a}{\sqrt{x}} + O\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$.