***"Ce n'est pas que je suis si intelligent, c'est que je reste plus longtemps avec les problèmes." Albert Einstein***

**Exercice 1** Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(0) = P(1) = 0\}$

1. Montrer que $E$ est un $\mathbb{R}$-ev, en donner une base et la dimension.
2. Montrer ensuite que $(P,Q) \mapsto -\int_0^1 (P''Q + PQ'')$ définit un produit scalaire sur $E$.

**Exercice 2** Montrer que $\langle f, g \rangle = f(1)g(1) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$ définit un produit scalaire sur $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. En déduire pour toute $f$ de $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ on a :

$$\left(f(1) + \int_0^1 f'(t)dt\right)^2 \leqslant 2\left(f(1)^2 + \int_0^1 f'(t)^2 dt\right)$$

**Exercice 3** Dans $\mathbb{R}^3$ une famille $(a,b,c,d)$ de 4 vecteurs non nuls peut-elle être orthogonale ?

**Exercice 4** Trouver trois vecteurs $u, v, w$ de $\mathbb{R}^2$ tels que $\|u+v+w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2$ sans que $(u,v,w)$ soit une famille orthogonale.

**Exercice 5** Déterminer dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni de $\langle P,Q \rangle = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$ l'orthogonal de $\mathbb{R}_1[X]$.

**Exercice 6 (CCP)**

1. Montrer que l'application $(A,B) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tAB)$ définit un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $E = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Trouver une base orthonormale de $E^\perp$.
4. Calculer la distance de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ à $E^\perp$.

**Exercice 7** On note pour $n \in \mathbb{N}$ : $P_n(X) = ((X^2-1)^n)^{(n)}$.

1. Calculer $P_n$ pour $0 \leqslant n \leqslant 3$.
2. Montrer que $P_n$ est un polynôme dont on précisera le degré et le coefficient dominant.
3. Justifier que $P_n$ admet $n$ racines distinctes dans $]-1,1[$.
4. Préciser la parité de $P_n$, sa valeur en 1 puis en $-1$.
5. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire : $\langle P,Q \rangle = \int_{-1}^1 PQ$, montrer que $(P_0, P_1, ..., P_n)$ en est une base orthogonale et préciser la norme de $P_n$.

**Exercice 8** Soit $E$ un espace euclidien et $a$ un vecteur unitaire de $E$. On note pour tout réel $\alpha$ :

$$\phi_\alpha : x \in E \mapsto x + \alpha \langle a, x \rangle a$$

1. Montrer que $\phi_\alpha$ est un endomorphisme.
2. Montrer que $\mathscr{A} = \{\phi_\alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$ est stable par composition, commutatif et contient $id_E$.
3. Déterminer $\ker \phi_\alpha$.
4. Montrer que si $\alpha \neq -1$ alors $\phi_\alpha$ est inversible **dans** $\mathscr{A}$.

**Exercice 9** Soit $x, y$ dans $E$ préhilbertien. Montrer qu'ils sont même norme ssi $x - y \perp x + y$.

**Exercice 10** Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien $E$. Montrer que :

$$F \subset (F^{\perp})^{\perp}, (F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp} \text{ et } F^{\perp} + G^{\perp} \subset (F \cap G)^{\perp}.$$

Que se passe-t-il en dimension finie ?

**Exercice 11** Si $F$ (donc $E$...) est de dimension infinie on n'a plus nécessairement $E = F \oplus F^{\perp}$. Considérer par exemple l'hyperplan des fonctions nulles en 0 dans $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel.

**Exercice 12** Soit $x, y$ non nuls dans $(E, \langle,\rangle)$ préhilbertien, redémontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le cas d'égalité en développant $\left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\|^2$ et $\left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\|^2$.

**Exercice 13** A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ usuel, montrer que :

$$\forall n \geqslant 1, \sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leqslant \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$$

**Exercice 14** On suppose $x_1, ..., x_n$ dans $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant $x_1 + ... + x_n = 1$. Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geq n^2$ et préciser le(s) cas d'égalité.

**Exercice 15** Rappeler l'énoncé de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Montrer que pour toute fonction continue d'un segment $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, on a

$$\left(\int_a^b f(t)dt\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b \left(f(t)\right)^2 dt$$

Pour quelle(s) fonction(s) a-t-on l'égalité ?

**Exercice 16** Soit $(E, \langle,\rangle)$ euclidien de BON $(e_1, ..., e_n)$ et $f \in L(E)$. Montrer que la trace de $f$ est égale à $\sum_{i=1}^{n} \langle f(e_i), e_i \rangle$.

**Exercice 17** Soit $(E, \langle,\rangle)$ euclidien et $u \in L(E)$ tel que pour tout $x$ de $E$ $u(x)$ soit orthogonal à $x$.

1. Montrer que pour tout $x, y$ de $E$ on a $\langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle$
2. En déduire que $\ker u$ et $\mathrm{Im} u$ sont orthogonaux puis supplémentaires.

**Exercice 18** Soit $E$ un espace préhilbertien, et $(e_1, ..., e_n)$ des vecteurs unitaires vérifiant : $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle^2$. Montrer que $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormale de $E$.

**Exercice 19** Soit $E$ euclidien de BON $(e_1, ..., e_n)$ et $f : E \to E$ vérifiant $f(0) = 0$ et $\forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.

1. Montrer que $f$ conserve la norme puis le produit scalaire. En déduire que $(f(e_1), ..., f(e_n))$ est une BON.
2. Montrer que $\forall x \in E, f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle f(e_i)$, en déduire que $f$ est linéaire. Que se passe t-il si on ne suppose plus $f(0) = 0$ ?

**Exercice 20** Soit $H$ un hyperplan de $E$ euclidien et $u \in H^{\perp}$. On note $p$ la projection orthogonale sur $H$ et $s$ la symétrie orthogonale par rapport à $H$. Vérifier que :

$$\forall x \in E : p(x) = x - \frac{\langle x, u\rangle}{||u||^2}u \text{ et } s(x) = x - 2\frac{\langle x, u\rangle}{||u||^2}u$$

**Exercice 21** Soit $(E, \langle,\rangle)$ préhilbertien, montrer qu'un projecteur $p$ est un projecteur orthogonal ssi

$$\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$$

**Exercice 22 (un projecteur est symétrique ssi il est orthogonal)** Soit $(E, \langle,\rangle)$ préhilbertien, montrer qu'un projecteur $p$ est un projecteur orthogonal ssi

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle$$

**Exercice 23** Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Schmidt la base suivante :

$$u = (1,0,1),\ v = (1,1,1),\ w = (-1,-1,0)$$

**Exercice 24** Construire une BON de $\mathbb{R}_3[X]$ muni de $\langle P,Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.

**Exercice 25** Soit $E$ un espace euclidien de dimension 4, $\mathscr{B} = (\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_4)$ une base orthonormée de $E$, et $F$ le sous-espace vectoriel d'équations dans $\mathscr{B}$ :

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+2y+3z+4t=0 \end{cases}$$

1. Trouver une base orthonormée de $F$.
2. Donner la matrice dans $\mathscr{B}$ de la projection orthogonale sur $F$.
3. Calculer $d(\vec{e}_1, F)$.

**Exercice 26** On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel. Soit $H = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tq } a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$ où $a_1,\dots,a_n$ sont des réels donnés non tous nuls. Chercher la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur $H$.

**Exercice 27** Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\langle P,Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$.

1. Montrer que $(E, \langle,\rangle)$, est un espace euclidien.
2. Soit $K = \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$ et $P \in K \setminus \{0\}$. Quel est le degré de $P$ ?
3. Soit $\Phi\ :\ x \mapsto \int_{t=0}^1 P(t)t^x\,dt$. Montrer que $\Phi$ est une fonction rationnelle.
4. Trouver $\Phi$ à une constante multiplicative près.
5. En déduire les coefficients de $P$ puis une base orthogonale de $E$.

**Exercice 28 (Représentation de Riesz)**

1. Montrer que pour toute forme linéaire $\phi$ sur $E$ euclidien il existe un unique vecteur $a$ de $E$ tel que $\phi : x \in E \mapsto \langle x, a\rangle$ Préciser son noyau.
2. Montrer qu'il existe un unique polynôme $A$ dans $R_n[X]$ tel que pour tout $P$ de $R_n[X]$ $P(0) = \int_0^1 A(t)M(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer aussi que $A$ est de degré $n$. Que se passe-t-il si on remplace $\mathbb{R}_n[X]$ par $R[X]$ ?

**Exercice 29 (Polynômes de Laguerre)**

1. Montrer que $\langle P,Q\rangle = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Calculer $\langle X^p, X^q\rangle$ avec $p,q$ dans $\mathbb{N}$.
3. Construire une BON du sev $\mathbb{R}_2[X]$, en déduire $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(t^3 - at - b)\,\mathrm{d}t$.

**Exercice 30 (Polynômes de Tchebychev)**

1. Montrer que $\langle f,g\rangle = \int_0^\pi f(\cos\theta)\,g(\cos\theta)\,d\theta$ définit un ps sur $E = C([-1,1],\mathbb{R})$.
2. Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall\theta \in \mathbb{R}, \cos(n\theta) = T_n(\cos\theta)$. On pourra commencer par déterminer les 3 premiers termes puis exploiter les formules trigonométriques développant $\cos((n+1)\theta)$ et $\cos((n-1)\theta)$... Préciser le degré et le coefficient dominant de $T_n$, dit $n^e$ polynôme de Tchebychev.
3. Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale et calculer $\|T_n\|$.
4. En déduire $\inf_{(a_0,a_1,\dots,a_{n-1})\in\mathbb{R}^n} \int_0^\pi \left(\cos^n\theta + a_{n-1}\cos^{n-1}\theta + \dots + a_1\cos\theta + a_0\right)^2 d\theta$ ()On pourra exprimer : $\cos^n\theta + a_{n-1}\cos^{n-1}\theta + \dots + a_1\cos\theta + a_0$ avec les polynômes de Tchebychev et utiliser le théorème de Pythagore.)

**Exercice 31 (CCP PSI)** Soit $a_0, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts. On pose : $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2,\ (P|Q) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$.

1. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.

2. On pose : $F = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \ / \ \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0 \right\}$. Justifier rapidement que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$, calculer sa dimension ainsi que son orthogonal puis calculer la distance de $X^n$ à $F$.

**Exercice 32 (CCP PSI)** L'espace euclidien $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire canonique défini par $\forall (A,B) \in E \times E,\quad (A|B) = \mathrm{tr}\left({}^t AB\right)$. $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques réelles et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ celui des matrices antisymétriques réelles de $E$.

1. Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces supplémentaires orthogonaux dans $E$.

2. Exprimer en fonction de $M \in E$ la distance de $M$ à $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

3. Faire le calcul pour $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & \dots & n \end{pmatrix}$.

**Exercice 33 (CCP PC)** Soit $E$ un espace euclidien de dimension $n$.

Soit $f$ un endomorphisme de $E$ tel que : $\forall (x,y) \in E^2,\ \ (x|y) = 0 \Rightarrow (f(x)|f(y)) = 0$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $E$.

1. $\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}$, calculer $(f(e_i + e_j)|f(e_i - e_j))$.

2. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall i \in \{1, \dots, n\},\ \|f(e_i)\| = \alpha$.

**Exercice 34** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à 3 tel que $\int_{-1}^{1} P^2(t)\,dt = 1$.

Montrer que $\sup\{|P(x)|, x \in [-1,1]\} \leqslant 2\sqrt{2}$.

Indications : Pour $a \in \mathbb{R}$ montrer qu'il existe $P_a \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que : $\forall\ P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(a) = \int_{-1}^{1} P(t)P_a(t)\,dt$. Calculer explicitement $P_a$, et appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

**Exercice 35** Résoudre pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, ..., x_n$ dans $\mathbb{R}$ : $\begin{cases} x_1 + ... + x_n = n \\ x_1^2 + ... + x_n^2 = n \end{cases}$.

**Exercice 36 (famille obtusangle)** Soit $E$ de dimension $n$ et $(e_1, ..., e_p)$ tels que $\left\langle e_i, e_j \right\rangle < 0$ pour tout $i \neq j$.

1. Représenter une telle famille dans $\mathbb{R}^2$ usuel.

2. On suppose que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = 0$ avec les $\lambda_i$ réels, montrer que $\sum_{i=1}^{p} |\lambda_i| e_i = 0$ (notant $u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$ et $v = \sum_{i=1}^{p} |\lambda_i| e_i = 0$, calculer $\langle u - v, u + v \rangle$.)

3. Montrer alors que $(e_1, ..., e_{p-1})$ est libre. Quel est le cardinal maximal d'une telle famille ?

**Exercice 37** Soit $a, b$ deux vecteurs unitaires de $E$ euclidien et $f : x \in E \mapsto x - \langle a, x \rangle\, b$.

1. Montrer que $f$ est un endomorphisme de $E$.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\langle a, b \rangle$ pour que $f$ soit inversible.

3. Déterminer $\ker(f - id_E)$ et $f(b)$ puis donner une condition nécessaire et suffisante sur $\langle a, b \rangle$ pour que $f$ soit diagonalisable.

**Exercice 38** Soit $E$ un espace euclidien de dimension $n$, et $(e_1, ..., e_n)$ des vecteurs vérifiant : $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2$. Montrer que $(e_1, ..., e_n)$ est une base de $E$. Notant $A = \left(\left\langle e_i, e_j \right\rangle\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, montrer que $A$ est inversible égale à son carré, en déduire que $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormale de $E$.