Des malheurs évités le bonheur se compose. (Alphonse Karr)

1. Que dire de $\mathbb{P}(A)$ si A est indépendant de lui même ?
2. On lance deux dés simultanément.
   (a) Décrire de façon ensembliste les événements suivants A :« On obtient deux fois le même résultat »et B :« La somme des deux chiffres est égale à 4 »
   (b) Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$. A et B sont-ils indépendants ?
3. Soit Ω un univers et soient A, B, C trois événements de Ω. Traduire en termes ensemblistes (en utilisant uniquement les symboles d'union, d'intersection et de passage au complémentaire, ainsi que A, B et C) les événements suivants :
   (a) Seul A se réalise ;
   (b) A et B se réalisent, mais pas C.
   (c) les trois événements se réalisent ;
   (d) au moins l'un des trois événements se réalise ;
   (e) au moins deux des trois événements se réalisent ;
   (f) aucun ne se réalise ;
   (g) au plus l'un des trois se réalise ;
   (h) exactement deux des trois se réalisent ;
4. Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements deux à deux incompatibles. Montrer que $\mathbb{P}(A_n) \underset{+\infty}{\to} 0$.
5. On suppose avoir un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ modélisant le jeu de pile ou face équilibré infini (ie $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}^*}$) tel que $\mathcal{A}$ contienne les événements P_n :« le lancer numéro n donne pile » et F_n :« le lancer numéro n donne face ».
   (a) Montrer que A :« on obtient au moins un pile », B :« on obtient que des faces » sont des événements.
   (b) On note pour $k \in \mathbb{N}^*, C_k$:« on n'obtient que des piles à partie du lancer n ». Montrer que C_k est un événement, puis que « on n'obtient que des piles à partir d'un certain rang » est aussi un événement.
6. On suppose avoir un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ modélisant le jeu de lancer de dé équilibré infini tel que $\mathcal{A}$ contienne les événements N_n :« le lancer numéro n donne 1 ».
   (a) Expliciter Ω.
   (b) Définir $\bigcap_{i=4}^{+\infty} N_i, (\bigcap_{i=1}^{3} \overline{N_i}) \cap (\bigcap_{i=4}^{+\infty} N_i), \bigcup_{i=4}^{+\infty} N_i$.
   (c) Décrire avec les N_i l'événement « parmi les lancers suivant le n^e lancer on obtient au moins une fois 1 ».
   (d) Montrer que $\left(\bigcup_{i=n+1}^{+\infty} N_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et décrire l'événement $\bigcap_{n=0}^{+\infty}\left(\bigcup_{i=n+1}^{+\infty} N_i\right)$.
7. Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ probabilisable et $(A_n)_n$ une famille d'événements. Soit B défini par « parmi les $(A_n)_n$ seul un nombre fini se réalisent ». Décrire B en compréhension, montrer que B est un événement.
8. Supposons qu'il existe une bijection f de $\mathbb{N}$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Que dire de l'antécédent par f de l'ensemble $E = \{n \in \mathbb{N}, n \notin f(n)\}$? Qu'en conclure ?

9. Montrer que si deux événements sont incompatibles et indépendants alors l'un au moins des deux est de probabilité nulle.
10. Soit $n \geq 1$. Déterminer une probabilité sur $\{1, \ldots, n\}$ telle que la probabilité de $\{1, \ldots, k\}$ soit proportionnelle à k^2.
11. On lance deux dés à 6 faces, un rouge et un bleu. Calculer les probabilités que la somme vaille i pour $2 \leqslant i \leqslant 12$.
12. Montrer qu'il est impossible de truquer un dé à 6 faces pour que les probabilités de l'exercice précédent soient toutes égales. On pourra noter $p_i = \mathbb{P}(\{i\})$ et introduire le polynôme $p_1 + p_2X + ... + p_6X^5$.
13. Soit $n \geq 1$. On lance n fois un dé parfaitement équilibré. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois le chiffre 6 ? Au moins deux fois le chiffre 6 ? Au moins k fois le chiffre 6 ?
14. **Tirages successifs avec remise**
    — Une urne contient r boules rouges et b boules bleues. On note $N = r + b$ et les boules sont discernables.
    — On tire une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne.
    — On répète cette opération n fois.
    — Soit $k \in [\![0, n]\!]$, quelle est la probabilité d'obtenir k boules rouges ?
15. **Tirages successifs sans remise**
    — Une urne contient r boules rouges et b boules bleues. On note $N = r + b$ et les boules sont discernables.
    — On tire une boule, on note sa couleur et **on ne la remet pas** dans l'urne.
    — On répète cette opération n fois (avec $n \leq N$...)
    — Soit $k \in [\![0, n]\!]$, quelle est la probabilité d'obtenir k boules rouges ?
    — Cette expérience est appelée tirage successif sans remise.
16. On lance un dé équilibré jusqu'à obtenir 6. Déterminer la probabilité que tous les nombres obtenus soient pairs.
17. On lance une pièce ayant pour laquelle la probabilité de faire pile vaut $p \in]0, 1[$. Soit A_n l'événement « on obtient pour la première fois deux piles consécutifs au lancer numéro n ». On note a_n sa probabilité.
    (a) Déterminer a_1, a_2, a_3.
    (b) Exprimer pour $n > 0, a_{n+2}$ en fonction de a_{n+1} et a_n.
    (c) En déduire que l'évènement « on obtient deux piles consécutifs » est presque-sûr.
18. On pose pour $n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(n) = \frac{1}{2^{n+1}}$. Montrer que l'on définit ainsi une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ et calculer $\mathbb{P}(\{n \in \mathbb{N}, n \geqslant 10\})$.
19. Pierre et Paul jouent au jeu suivant : ils lancent (chacun leur tour par exemple) une pièce équilibrée, Pierre gagne si la suite pile-pile-face sort avant la suite face-pile-pile, dans le cas contraire c'est Paul qui gagne.

    Notons P_n l'événement « Pierre gagne au lancer numéro n »et p_n la probabilité de cet événement.
    (a) Calculer g_3, g_4, g_n pour $n \geqslant 4$. En déduire la probabilité que Pierre gagne. Peut-on en déduire la probabilité que Paul gagne ?
    (b) Notons d_n la probabilité qu'au cours des n premiers lancers il n'y ait jamais deux piles consécutifs. Préciser d_1, d_2 et montrer que pour $n > 0$ on a $d_{n+2} = \frac{1}{2}d_{n+1} + \frac{1}{4}d_n$. En déduire que d_n tend vers 0.

(c) Montrer alors que pour $n \geqslant 2$ la probabilité qu'aucun des deux joueurs n'ait gagné au lancer numéro n est $d_n + \frac{1}{2^n}$

(d) Quelle est la probabilité que Paul gagne ?

20. On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes.

    (a) Quelle est la probabilité d'obtenir les quatre as ?

    (b) Un joueur dévoile deux cartes de son jeu qui sont des as. Quelle est maintenant la probabilité qu'il détienne quatre as ?

21. On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. Dans l'urne noméro k se trouvent k boules blanches et $n-k$ boules rouges. On choisit au hasard une urne puis on tire 2 boules dans cette urne.

    (a) Quelle est la probabilité d'avoir 2 boules rouges ?

    (b) Même question si on tire les 2 boules avec remise.

    (c) Quelles sont les limites de ces probabilités quand $n \to +\infty$?

22. Vous êtes ministre de la santé et on veut vous vendre un test de dépistage d'une maladie touchant une personne sur 10000 en vantant son efficacité : si une personne est malade, le test est positif à 99%. Si une personne n'est pas malade, le test est positif à 0,1%.

    Quelle est la probabilité qu'une personne dépistée positive soit effectivement malade ?

    Quelle est la probabilité qu'une personne dépistée négative soit effectivement malade ?

23. Dans un certain pays, le temps est soit sec (S) soit humide (H). Son évolution obéit à la règle immuable suivante : si le temps est sec aujourd'hui, il sera sec demain avec la probabilité 4/5 (et donc humide avec la probabilité 1/5). Si le temps est humide aujourd'hui, il sera humide demain avec la probabilité 3/5. Appelons S_n (resp. H_n) l'événement « le temps est sec (resp. humide) le n eme jour ». On note s_n et h_n les probabilités de ces événements. On note également X_n le vecteur colonne $\begin{pmatrix} s_n \\ h_n \end{pmatrix}$

    (a) En utilisant la règle d'évolution, exprimer s_{n+1}, h_{n+1} en fonction de s_n et h_n.

    (b) En déduire que l'on a $X_{n+1} = AX_n$, où A est une matrice à déterminer.

    (c) Nous sommes dimanche et il fait sec. Quelle est la probabilité que le temps soit sec mardi ? soit humide mercredi ?

24. Une compagnie aérienne étudie l'évolution des réservations sur l'un de ses vols. Elle constate que l'état d'une place donnée évolue ainsi : elle est libre au jour 0 (jour d'ouverture des réservations). Si elle est libre au jour n, il y a une probabilité $\frac{4}{10}$ que quelqu'un la réserve au jour $n+1$. Par contre si elle est réservée au jour n, elle reste réservée au jour $n+1$ avec une probabilité $\frac{9}{10}$. Soit p_n la probabilité que la place soit réservée au jour n.

    (a) Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n

    (b) En déduire p_n et $\lim p_n$.

25. Une guêpe entre au temps $n = 0$ dans un appartement composé de deux pièces A et B. Elle évolue ainsi :

    — Si elle est en A à l'instant n, elle reste en A avec probabilité $\frac{1}{3}$ ou passe en B avec une probabilité $\frac{2}{3}$ à l'instant $n+1$

    — Si elle est en B à l'instant n, elle retourne en A avec probabilité $\frac{1}{4}$, reste en B avec une probabilité $\frac{1}{2}$, et sort de l'appartement avec une probabilité $\frac{1}{4}$ à l'instant $n+1$

    — Si elle est dehors, elle y reste.

On note A_n l'événement « la guêpe est en A à l'instant n ». On définit de même B_n et C_n.
Soit $X_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

(a) Calculer X_0, X_1, X_2.

(b) Montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}\ X_{n+1} = MX_n$

(c) Montrer que $(M - \lambda I_3)$ est inversible sauf pour 3 valeurs à préciser $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

(d) Pour $i \in \{1, 2, 3\}$ déterminer $Y_i \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $MY_i = \lambda_i Y_i$

(e) Soit $P = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que P est inversible. Calculer P^{-1} et $P^{-1}MP$

(f) En déduire M^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis l'expression de X_n en fonction de n.

(g) Que vaut $\lim X_n$? Interpréter.

26. Une marque vend des montres de bonne qualité avec une probabilité de tomber en panne de $0,01$. Des contrefaçons sont aussi vendues, représentant 20% du marché, avec une probabilité de panne de $0,1$.

(a) Si on achète une montre quelle est la probabilité qu'elle tombe en panne ?

(b) Si on achète une montre et qu'elle tombe en panne, quelle est la probabilité que ce soit une contrefaçon ?

27. Un avion quadri-réacteur a besoin de deux moteurs pour pouvoir voler. Un avion bi-réacteur a besoin d'un moteur pour voler. La probabilité de panne d'un réacteur lors d'un vol transatlantique est p. On suppose que les pannes des réacteurs sont indépendantes les unes des autres. Quel avion vous semble le plus sûr ?