L'absence diminue les médiocres passions et augmente les grandes, comme le vent éteint les bougies et allume le feu. (La Rochefoucauld)

Exercice 1 Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^n}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 (trick d'écriture) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $x \in [0, n]$, $\left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n \leqslant e^{-x}$. En déduire la limite de $I_n = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{d}x$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3 Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue. Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 nf(t)e^{-nt}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 4 On pose, pour $n \geq 1$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^n}$.

1. Déterminer $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
2. Déterminer un équivalent de $\ell - I_n$.

Exercice 5

1. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n\geq1} \frac{1}{n^2}$.
2. Démontrer que, pour tout réel a, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}\sin(at)}{1 - \mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{a^2 + n^2}$.

Exercice 6 (Subtilité...)

1. Montrer que pour tout $x > 0$: $\dfrac{\cos(x)}{1 + \mathrm{e}^x} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ avec $u_n(x) = (-1)^n \cos(x)\mathrm{e}^{-nx}$.
2. Le théorème d'intégration terme à terme s'applique-t-il ?
3. Intégrer terme à terme en appliquant le théorème de convergence dominée à la suite des sommes partielles.

Exercice 7 On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}$ et étudier sa parité.
2. Justifier que F est $\mathcal{C}^1$ et donner une expression de $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Calculer $F'(x)$.
4. En déduire une expression simplifiée de $F(x)$.

Exercice 8 Montrer que $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1 + xt)}{t}\,\mathrm{d}t$ définit une fonction sur $]-1, 1[$ au moins. Montrer que g est développable en série entière sur $]-1, 1[$ et en déduire g' sur $]-1, 1[$.

Exercice 9 (technique !)

1. Soit $a \in \mathbb{C}$. Redémontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge absolument ssi $\mathcal{R}e(a) > 0$ et préciser sa valeur.

2. Déterminer l'ensemble de définition de $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{xt}}{t}\mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t$, expliciter sa dérivée et déterminer g.

Exercice 10 On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f vérifie $2f'(x) + xf(x) = 0$ pour tout réel x.
3. En déduire f (on pourra noter $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$).

Exercice 11 (Après un développement en série entière)

Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(\sqrt{x})e^{-x}dx = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n!}{(2n)!}$.

Exercice 12 (fonction Γ d'Euler) On note $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.

1. Vérifier que Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x > 0$: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que Γ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et préciser sa dérivée.
3. Donner un équivalent de Γ en 0.
4. Montrer qu'en fait Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. Préciser la limite de Γ en $+\infty$ et esquisser son graphe. On pourra préciser $\Gamma(1/2)$ en posant $t = u^2$.

Exercice 13 On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de F et démontrer que F est continue sur ce domaine de définition.
2. Démontrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$ et démontrer que, pour tout $x > 1$,
$$F'(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^x\ln(t)}{(1+t^x)^2}\left(\frac{1}{t^2}-1\right)dt.$$
En déduire le sens de variation de F.
3. Déterminer la limite de F en $+\infty$.
4. On suppose que F admet une limite ℓ en 1^+. Démontrer que pour tout $A > 0$ et tout $x > 1$, on a $\ell \geqslant \displaystyle\int_1^{A} \frac{dt}{1+t^x}$. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} F(x) = +\infty$.

Exercice 14 (transformée de Fourier)

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ intégrable sur $\mathbb{R}$, montrer que sa transformée de Fourier $\widehat{f} : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose de plus f de classe C^1 et telle que f' soit intégrable sur $\mathbb{R}$. Exprimer $\widehat{f'}(x)$ en fonction de $\widehat{f}(x)$ pour x réel.
3. On suppose ici que f et $g : x \mapsto xf(x)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\widehat{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée à l'aide de $\widehat{g}$.