Exercice 1 Soit I intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Montrer que f est lipschitzienne sur I ssi f' bornée sur I.

Exercice 2 Justifier que l'application qui à une matrice inversible associe son inverse est continue sur $GL_n(\mathbb{K})$.

Exercice 3 Continuité sur $\mathbb{R}^2$ de $f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \left(\frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}, \sqrt{|x|+|y|}\right) \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Exercice 4 Soit $(E, \|\|)$ un evn et $f : x \mapsto \frac{x}{\|x\|+1}$. Montrer que f est continue sur E, bijective de E sur $B(0,1)$, de réciproque continue.

Exercice 5 Soit $u \in L(E,F)$, on rappelle qu'en utilisant la définition quantifiée de la continuité en 0 on peut montrer que u est continue sur E ssi il existe $K > 0$ tel que :

$$\forall x \in E, \|u(x)\|_F \leqslant K \|x\|_E$$

1. Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{X^n}{n}\right)_n$ dans $(\mathbb{R}[X], \|\|_\infty)$. (Rappel : si $P = \sum_{k=0}^N a_k X^k$ alors $\|P\|_\infty = \sum_{k=0}^N |a_k|$). $D : P \mapsto P'$ est-elle continue sur $(\mathbb{R}[X], \|\|_\infty)$?
2. Pour $P = \sum_k a_k X^k : N(P) = \sum_k k!|a_k|$. (On admet que N est une norme sur $\mathbb{R}[X]$). Montrer que D est continue sur $(\mathbb{R}[X], N)$.
3. Ici $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et on note pour λ réel $e_\lambda : x \mapsto \exp(\lambda x)$. Soit N une norme sur E, comparer $N(e_\lambda)$ et $N(D(e_\lambda))$. Existe-t-il une norme sur E pour laquelle D soit continue ?
4. Soit $c \in \mathbb{R}$ et $n > 0$. Montrer que $u : P \mapsto P(c)$ est continue sur $\mathbb{R}_n[X]$.
5. On munit $\mathbb{R}[X]$ de sa norme ∞. On fixe $c \in]-1,1[$, montrer que $v : P \mapsto P(c)$ est continue sur $\mathbb{R}[X]$.
6. On note $w : P \mapsto P(1)$. Calculer $w(P_n)$ avec $P_n = \frac{1}{n+1}(1 + X + X^2 + ... + X^n)$. Quelle est la limite de $(P_n)_n$ pour $\|\|_\infty$? w est-elle continue sur $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme ∞ ?

Exercice 6 Soit A une partie fermée et bornée d'un evn $(E, \| \|)$ de dimension finie et f une application de A dans A vérifiant :

$$\forall x, y \in A, x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\| \quad (*)$$

1. A l'aide de l'application $h : x \mapsto \|x - f(x)\|$ montrer qu'il existe a dans A tel que pour tout x de $A : \|a - f(a)\| \leqslant \|x - f(x)\|$.
2. En déduire que f possède un unique point fixe qui est a.

Exercice 7 Soit A un fermé de $\mathbb{R}$ et $f : A \to A$ contractante, c'est à dire qu'il existe $k \in [0,1[$ tel que f soit k-lipschitzienne sur A.

1. Montrer que f admet au plus un point fixe dans A.

   Soit a dans A et $(x_n)_n$ définie par $x_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} = f(x_n)$.
2. Montrer que pour tout entier $n : |x_{n+1} - x_n| \leqslant k^n |x_1 - x_0|$.
3. En déduire que$\sum_n (x_{n+1} - x_n)$ converge absolument.
4. En déduire que $(x_n)_n$ converge et que f a un unique point fixe dans A.

Exercice 8

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue T périodique. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(\mathbb{R}) = f([c, c + T/2])$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue et C le cercle de centre 0 et de rayon $r > 0$. Montrer qu'il existe deux points de C diamétralement opposés en lesquels f coïncide.