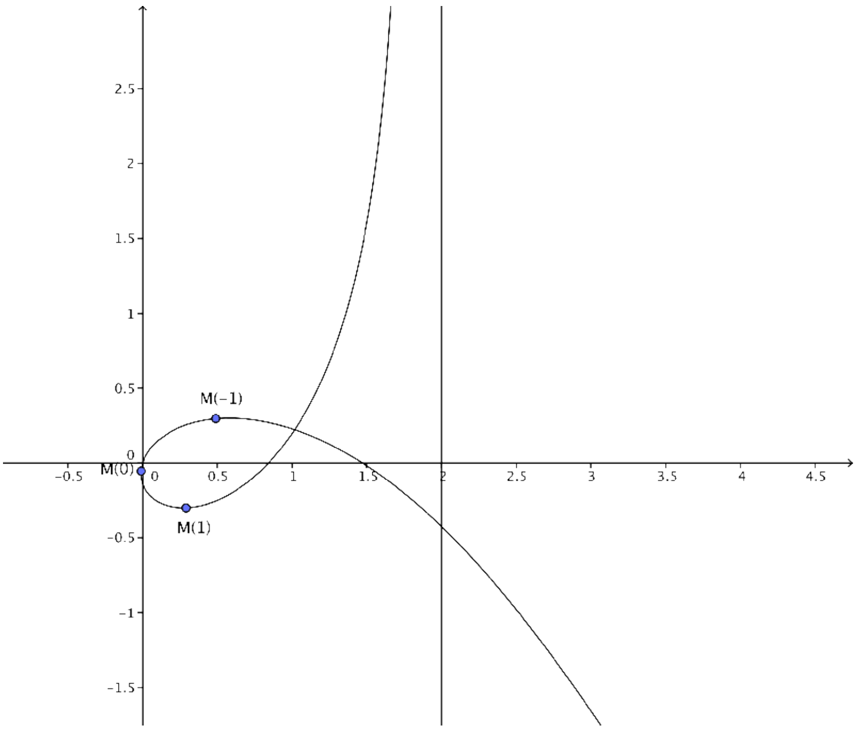
Exercice 1 Donner un arc paramétré (I, f) de support :

1. La droite du plan affine passant par $A = (a_1, a_2)$ et dirigée par le vecteur $u = (u_1, u_2)$,
2. La droite du plan affine passant par $A = (a_1, a_2)$ et $B = (b_1, b_2) \neq A$,
3. Le segment joignant A et B.

Exercice 2 Soit l'arc paramétrique $f(t) = \big((t-2)^3, t^2 - 4\big)$, déterminer les points d'inflexion ainsi que l'équation de la tangente en ces points.

Exercice 3 Soit l'arc paramétrique $f(t) = \big(\exp(t), t^2\big)$, déterminer les points d'inflexion ainsi que l'équation de la tangente en ces points.

Exercice 4 Donner le tableau de variation de x, y si la courbe ci-dessous est celle de l'arc $f = (x, y)$.



Exercice 5 Étudier et tracer la courbe de Lissajous $t \mapsto (\sin(2t), \cos(3t))$.

Exercice 6 (Folium de Descartes) On considère la courbe paramétrée

$$t \mapsto \left(\frac{t}{1+t^3}, \frac{t^2}{1+t^3}\right).$$

1. Que déduit-on du changement de variables $t \mapsto 1/t$? Sur quel intervalle peut-on réduire l'étude ?
2. Construire la courbe. On étudiera ses branches infinies, et on précisera la position de la courbe par rapport à sa ou ses asymptotes.

Exercice 7 Étudier la courbe paramétrée suivante : $t \mapsto \left(t + \frac{1}{t}, t + \frac{1}{2t^2}\right)$, $t \in \mathbb{R}^*$. On étudiera en particulier la position par rapport aux asymptotes, et la tangente aux points stationnaires. On pourra aussi chercher un point d'inflexion.

Exercice 8 Tracer l'arc $f(t) = \left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right)$.

Exercice 9 Démontrer que la courbe paramétrée $t \mapsto \left(2t - \dfrac{1}{t^2}, 2t + t^2\right)$ possède un point double dont on donnera les coordonnées.

Exercice 10 Étudier les branches infinies de la courbe paramétrée $t \mapsto \left(\frac{t^3}{t^2-9}, \frac{t(t-2)}{t-3}\right)$.

Exercice 11 Déterminer la longueur de la courbe représentative de $f : t \in [0,1] \mapsto t^{3/2}$.

Exercice 12 Montrer que l'arc paramétré défini par $M(t) = (e^{t-1} - t, t^3 - 3t)$ comporte un point de rebroussement de seconde espèce que l'on précisera ; on situera, au voisinage de ce point, les deux branches de la courbe de part et d'autre d'un arc de parabole.

Exercice 13 (Déltoïde) Tracer le support de l'arc défini par $M(t) = 2\cos t + \cos(2t), 2\sin t - \sin(2t))$ et $t \in [-\pi, \pi]$. On pourra comparer $M(-t)$ et $M(t)$ et étudier la nature de $M(2\pi/3)$. Préciser aussi la longueur de l'arc

Exercice 14 Etudier et tracer le support de $(\mathbb{R}, M)$ avec $M : t \mapsto ((1-t)^2 e^t, 2(1-t)e^t)$.

Exercice 15 Soit l'arc paramétré $(\mathbb{R}^*, M)$ avec pour $t \in \mathbb{R}^* : M(t) = (x(t), y(t))$:

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + \frac{2}{t} \\ y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2} \end{cases} .$$

1. Faire les tableaux de variation de x et y.
2. Préciser les branches infinies et les asymptotes éventuelles et la position de la courbe par rapport à celles-ci.
3. Déterminer le point double de cette courbe (ie chercher t, t' tels que $M(t) = M(t')$).
4. Déterminer le(s) point(s) singulier(s). Donner la nature et déterminer la tangente en ce(s) point(s).
5. Tracer avec soin cette courbe.