Exercice 1 Primitiver les fonctions f telles que $f(x) = ...$ (préciser l'intervalle où évolue x)

1. $\ln x$
2. $\dfrac{1}{x^2+a^2}$ avec $a \neq 0$
3. $\left(\dfrac{x}{e}\right)^x \ln x$
4. $\dfrac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}$
5. $\dfrac{x}{\sin^2 x}$
6. $\dfrac{1}{(1+x+x^2)^2}$
7. $\dfrac{\arctan x}{\sqrt{x}}$
8. $\dfrac{\arctan x}{x^2+1}$
9. $\dfrac{1}{\sin x + \cos x}$
10. $\dfrac{\cos x}{4+\sin^3 x}$
11. $\sin(\ln x)$
12. $\ln\left(1+x^2\right)$

Exercice 2 (merci L.Garcin...) CV et calcul éventuel de :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{4+t^2}\, dt$
2. $\displaystyle\int_0^{2} \frac{1}{4-t^2}\, dt$
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt{1-9t^2}}\, dt$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t) dt$
5. $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{dt}{t^2-3t+2}$
6. $\displaystyle\int_0^{1} \ln(t) dt$
7. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t\ln t}$
8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\, dt$

Exercice 3 Redémontrer rapidement $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$ et $\tanh' = \dfrac{1}{\cosh^2}$. Etablir l'existence et calculer

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}}$$

Exercice 4 Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ après avoir établi son existence. En déduire pour $a < b$: $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$.

Exercice 5 Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{t}{1-t}}\, dt$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$ (poser $x = \cos(2\theta)$).

Exercice 6 Notons pour $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt$. Justifier l'existence de I_n et trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}. En déduire I_n.

Exercice 7

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\, dt$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\, dt$ convergent et ont même valeur.
2. Calculer leur somme, en déduire leur valeur. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi} t\ln(\sin t)\, dt$

Exercice 8 Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^3}\, dt$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3}$. Montrer que I, J existent et sont égales, en déduire leur valeur.

Exercice 9 Montrer à l'aide d'une IPP que $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\, dt \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}$.

Exercice 10 Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\, dt\right) dx$.

Exercice 11 Nature de $\displaystyle\int_0^{\infty} \cos(t)\, dt$ et de $\displaystyle\int_0^1 \cos(\ln t)\, dt$.

Exercice 12 Calculer (après avoir prouvé leur existence)

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x^{\sin x}}{\cos x^{\sin x} + \sin x^{\cos x}}\, dx, J = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\, dt, K = \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt$$

Exercice 13 Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}\,(1-x)^{3/2}}dx$ en posant $x=\sin^2\phi$.

Exercice 14 Etudier l'existence des intégrales suivantes (discuter suivant α et β) :

$$\int_0^1 |1-x^\alpha|^\beta\,dx,\ \int_0^1 \frac{(\ln(1-x))^\alpha}{x^2}dx$$

Exercice 15 Convergence absolue, convergence de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{\mathbf{i}t}}{1+\mathbf{i}t}\,\mathrm{d}t$. Convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$.

Exercice 16 Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ continue et positive. On suppose que $\dfrac{f(x+1)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\to} \ell<1$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge.

Exercice 17 Soit $f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ admettant des limites finies en $\pm\infty$. Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(f(x+1)-f(x))\,dx$ converge et donner sa valeur.

Exercice 18 Pour quels polynômes P la fonction $\sqrt{P(t)}-t^2-t-1$ admet-elle une intégrale généralisée $\mathbb{R}_+$.

Exercice 19 Soit f la fonction nulle en 0 vérifiant pour $n>0$: $\begin{cases} f(n)=n \\ f\left(n-\dfrac{1}{2n^3}\right)=0 \\ f\left(n+\dfrac{1}{2n^3}\right)=0\end{cases}$ et affine entre les points $n-\dfrac{1}{2n^3}, n, n+\dfrac{1}{2n^3}$ etc. Tracer f et calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} f$.

Exercice 20 (Intégrale de Dirichlet) On souhaite établir la convergence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, en déduire via une IPP que $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge et que les intégrales généralisées ont même valeur.
2. Lemme (de Riemann-Lebesgue light) : montrer que si f est de classe C^1 sur $[a,b]$ alors :
$$\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$
3. Montrer que ϕ définie sur $[0,\pi/2]$ par $\phi(0)=0$ et $\phi(t)=\dfrac{1}{\sin t}-\dfrac{1}{t}$ si $t\in]0,\pi/2]$ est C^1 sur $[0,\pi/2]$.
4. On note pour $n\in\mathbb{N}$: $I_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que la suite $(I_n)_n$ est bien définie et est constante.
5. On note pour $n\in\mathbb{N}$: $J_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2n+1)t}{t}\,\mathrm{d}t$. Montrer à l'aide du lemme de Riemann-Lebesgue que la suite $(J_n)_n$ est bien définie et a même limite que $(I_n)_n$.
6. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ puis celle de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.