Les espoirs des hommes instruits valent mieux que la richesse des ignorants. (Démocrite)

Exercice 1 (problème des rencontres) *n individus déposent leur portefeuille dans une urne. Puis ils piochent chacun leur tour un portefeuille. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'individus ayant récupéré leur portefeuille. Déterminer $\mathbb{E}(X)$.*

Exercice 2 *n personnes montent dans un ascenseur desservant p étages. Chaque personne choisit un étage, indépendamment des autres usagers, avec probabilité uniforme. Quel est l'espérance de X le nombre d'arrêts ? On pourra calculer la loi de la v.a X_i valant 1 si l'ascenseur s'arrête à l'étage i, 0 sinon.*

Exercice 3 (collectionneur de vignettes) *Chaque paquet de céréales contient une vignette à collectionner, que l'on ne découvre qu'à l'ouverture du paquet. On se demande combien il faut ouvrir de paquets pour posséder au moins un exemplaire de chacune des n vignettes. On décompose ce nombre en $N = N_1 + ... + N_n$ où N_k est le nombre de paquets supplémentaires nécessaires pour obtenir k vignettes différentes quand on en a déjà $k-1$ différentes. Déterminer la loi de N_k puis $\mathbb{E}(N)$.*

Exercice 4 *On suppose que le nombre N de clients allant en caisse dans une période de temps donnée suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Le magasin dispose de deux caisses, et chaque client se dirige au hasard et indépendamment des autres clients :*

- *vers la caisse 1 avec probabilité $p \in [0,1]$*
- *vers la caisse 2 avec probabilité $1-p$*

On note N_1 et N_2 le nombre de clients se présentant respectivement à la caisse 1 et à la caisse 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la loi conditionnelle de N_1 sachant l'événement $\{N = n\}$? En déduire la loi de N_1.

Exercice 5 *Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètre respectif p_1, p_2 dans $]0,1[$. Quelle est la loi de la variable aléatoire $X = \min(X_1, X_2)$? On pourra calculer $\mathbb{P}(X \geqslant n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.*

Exercice 6 *Calculer l'espérance de $\frac{1}{1+X}$ quand $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ puis quand $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$*

Exercice 7 *Soit $a \in \mathbb{R}$ et X v.a.d à valeurs dans N^* dont la loi est définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) = \frac{a}{n(n+1)}$$

Déterminer a puis, si elle existe, l'espérance de X.

Exercice 8 *On lance une pièce équilibrée jusqu'à ce que celle-ci ait produit pour la première fois la séquence «pile - face». On note T le nombre de lancer avant que le jeu s'arrête. Donner la loi de T, montrer que T est presque surement fini et calculer son espérance.*

Exercice 9 *Le nombre N de voitures passant devant une station essence suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque voiture décide de s'arrêter avec une probabilité $0 < p < 1$, indépendamment les unes des autres. Quelle est l'espérance de la v.a.d X donnant le nombre de voitures s'arrêtant à la station ?*

Exercice 10 *Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que X suit une loi sans mémoire, c'est à dire :*

$$\forall(n,m)\in\mathbb{N}^2, \mathbb{P}(X>m)>0, \mathbb{P}\left(X>m+n|X>m\right)=\mathbb{P}(X>n)$$

1. *Montrer qu'une loi géométrique est sans mémoire.*
   Dans la suite on suppose X sans mémoire et on note $p=\mathbb{P}(X=1)$.
2. *Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$ on a $\mathbb{P}(X>n+1)=\mathbb{P}(X>1)\mathbb{P}(X>n)$*
3. *En déduire que X suit une loi géométrique.*

Exercice 11 *Soit X une v.a.d sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ telle que $X(\Omega)=\mathbb{N}$. Montrer que :*

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X>k)-n\mathbb{P}(X>n)$$

En déduire que X admet une espérance ssi $\sum_n \mathbb{P}(X>n)$ converge et qu'alors

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X\geqslant k)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X>k)$$

Exercice 12 *Soient X,Y v.a.d indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $0<p<1$ et $M=\max(X,Y)$.*

1. *Calculer pour $n\in\mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}(X\leqslant n)$ puis $\mathbb{P}(M\leqslant n)$.*
2. *Déterminer la loi de M et l'espérance de M. On pourra utiliser l'exercice précédent.*

Exercice 13 *Soient X,Y v.a.d à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :*

$$\forall(i,j)\in\mathbb{N}^2, \mathbb{P}(X=i,Y=j)=\frac{i+j}{i!j!\mathrm{e}}\left(\frac{1}{2^{i+j}}\right)$$

1. *Déterminer la loi de X et de Y. X et Y sont-elles indépendantes ?*
2. *Montrer que 2^{X+Y} admet une espérance et calculer celle-ci.*

Exercice 14 *On suppose qu'une colonie d'insectes produit N oeufs où $N\hookrightarrow\mathcal{P}(\lambda)$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, lorsque $N=n$, le nombre X d'oeufs qui éclosent suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Déterminer la loi de X.*

Exercice 15 *On dispose d'une pièce ayant la probabilité $0<p<1$ de donner pile. On réalise l'expérience suivante : on lance la pièce autant de fois que nécessaire pour obtenir pile. On note N le nombre de lancers effectués. Puis on relance à nouveau la pièce N fois et on compte le nombre X de piles obtenus. Déterminer la loi de N et de X, montrer que X admet une espérance et calculer celle-ci.*

Exercice 16 *Soient X, Y deux v.a.d indépendantes. À l'aide des fonctions génératrices, montrer que :*

1. *Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p)$ alors $X+Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m+n,p)$.*
2. *Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ alors $X+Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.*

Exercice 17 *On joue à pile ou face avec une pièce équilibrée. Déterminer un entier p tel que pour tout $n \geqslant p$ la probabilité d'avoir entre la moitié et trois quart de piles soit au moins $0,95$. (Utiliser Bienaymé-Tchebytchev)*

Exercice 18 *Montrer que l'on ne peut pas truquer deux dés de sorte que la somme de leur résultat suive une loi uniforme.*

Exercice 19 *Soit X v.a à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice $G : t \mapsto a\mathrm{e}^{1+t^2}$.*

1. *Déterminer a.*
2. *Déterminer la loi de X.*
3. *Justifier que X admet une espérance et une variance, les déterminer.*

Exercice 20 (banque CCP MP) *On admet, dans cet exercice, que : $\forall\, q \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k \geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge et $\forall\, x \in \,]-1,1[$, $\sum\limits_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \dfrac{1}{(1-x)^{q+1}}$. Soit $p \in \,]0,1[$, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.*
On suppose que la loi de probabilité du couple (X,Y) est donnée par :

$$\forall\, (k,n) \in \mathbb{N}^2 : P((X=k) \cap (Y=n)) = \begin{cases} \dbinom{n}{k} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n \ si \, k \leqslant n \\ 0 \ sinon \end{cases}$$

1. *Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.*
2. (a) *Déterminer la loi de Y.*
   (b) *Prouver que $1+Y$ suit une loi géométrique.*
   (c) *Déterminer l'espérance de Y.*
3. *Déterminer la loi de X.*

Exercice 21 (banque CCP MP) *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.*

1. *Soit X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.*
   On considère la série entière $\sum t^n P(X=n)$ de variable réelle t.
   On note R_X son rayon de convergence.

(a) *Prouver que* $R_X \geqslant 1$.

On pose $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X = n)$ *et on note* D_{G_X} *l'ensemble de définition de* G_X.

Justifier que $[-1, 1] \subset D_{G_X}$.

Pour tout réel t *fixé de* $[-1, 1]$, *exprimer* $G_X(t)$ *sous forme d'une espérance.*

(b) *Soit* $k \in \mathbb{N}$. *Exprimer, en justifiant la réponse,* $P(X = k)$ *en fonction de* $G_X^{(k)}(0)$.

2. (a) *On suppose que* X *suit une loi de Poisson de paramètre* λ.
Déterminer D_{G_X} *et, pour tout* $t \in D_{G_X}$, *calculer* $G_X(t)$.

(b) *Soit* X *et* Y *deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs* λ_1 *et* λ_2.
Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X + Y$.

Exercice 22 (banque CCP MP) *Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers* n *correspondants distincts.*
On admet que les n *appels constituent* n *expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est* p $(p \in]0, 1[)$.
Soit X *la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.*

1. *Donner la loi de* X. *Justifier.*
2. *La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des* $n - X$ *correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note* Y *la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.*

(a) *Soit* $i \in [\![0, n]\!]$. *Déterminer, pour* $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k | X = i)$.

(b) *Prouver que* $Z = X + Y$ *suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.*

Indication *: on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante :* $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.

(c) *Déterminer l'espérance et la variance de* Z.

Exercice 23 (banque CCP MP)

1. *Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.*
2. *Soit* (Y_n) *une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On pose* $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.

Prouver que : $\forall\, a \in]0, +\infty[$, $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{V(Y_1)}{na^2}$.

3. ***Application***

   On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
   À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ *et* $0,45$ *?*
   Indication *: considérer la suite* (Y_i) *de variables aléatoires de Bernoulli où* Y_i *mesure l'issue du* $i^{\text{ème}}$ *tirage.*

Exercice 24 (banque CCP MP) *Soit* $\lambda \in]0,+\infty[$ *et* X *une variable aléatoire discrète à valeurs dans* $\mathbb{N}^*$. *On suppose que* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X=n) = \dfrac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.

1. *Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle* R *définie par* $R(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.
2. *Calculer* λ.
3. *Prouver que* X *admet une espérance, puis la calculer.*
4. X *admet-elle une variance ? Justifier.*