

Les espoirs des hommes instruits valent mieux que la richesse des ignorants. (Démocrate)

Exercice 1 (problème des rencontres) n individus déposent leur portefeuille dans une urne. Puis ils piochent chacun leur tour un portefeuille. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'individus ayant récupéré leur portefeuille. Déterminer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 2 n personnes montent dans un ascenseur desservant p étages. Chaque personne choisit un étage, indépendamment des autres usagers, avec probabilité uniforme. Quel est l'espérance de X le nombre d'arrêts ? On pourra calculer la loi de la v.a X_i valant 1 si l'ascenseur s'arrête à l'étage i , 0 sinon.

Exercice 3 (collectionneur de vignettes) Chaque paquet de céréales contient une vignette à collectionner, que l'on ne découvre qu'à l'ouverture du paquet. On se demande combien il faut ouvrir de paquets pour posséder au moins un exemplaire de chacune des n vignettes. On décompose ce nombre en $N = N_1 + \dots + N_n$ où N_k est le nombre de paquets supplémentaires nécessaires pour obtenir k vignettes différentes quand on en a déjà $k - 1$ différentes. Déterminer la loi de N_k puis $\mathbb{E}(N)$.

Exercice 4 On suppose que le nombre N de clients allant en caisse dans une période de temps donnée suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Le magasin dispose de deux caisses, et chaque client se dirige au hasard et indépendamment des autres clients :

- vers la caisse 1 avec probabilité $p \in [0, 1]$
- vers la caisse 2 avec probabilité $1 - p$

On note N_1 et N_2 le nombre de clients se présentant respectivement à la caisse 1 et à la caisse 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la loi conditionnelle de N_1 sachant l'événement $\{N = n\}$? En déduire la loi de N_1 .

Exercice 5 Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètre respectif p_1, p_2 dans $]0, 1[$. Quelle est la loi de la variable aléatoire $X = \min(X_1, X_2)$? On pourra calculer $\mathbb{P}(X \geq n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 6 Calculer l'espérance de $\frac{1}{1+X}$ quand $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ puis quand $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$

Exercice 7 Soit $a \in \mathbb{R}$ et X v.a.d à valeurs dans \mathbb{N}^* dont la loi est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = n) = \frac{a}{n(n+1)}$$

Déterminer a puis, si elle existe, l'espérance de X .

Exercice 8 On lance une pièce équilibrée jusqu'à ce que celle-ci ait produit pour la première fois la séquence «pile - face». On note T le nombre de lancer avant que le jeu s'arrête. Donner la loi de T , montrer que T est presque sûrement fini et calculer son espérance.

Exercice 9 Le nombre N de voitures passant devant une station essence suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque voiture décide de s'arrêter avec une probabilité $0 < p < 1$, indépendamment les unes des autres. Quelle est l'espérance de la v.a.d X donnant le nombre de voitures s'arrêtant à la station ?

Exercice 10 Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans \mathbb{N} . On suppose que X suit une loi sans mémoire, c'est à dire :

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}(X > m) > 0, \mathbb{P}(X > m + n | X > m) = \mathbb{P}(X > n)$$

1. Montrer qu'une loi géométrique est sans mémoire.

Dans la suite on suppose X sans mémoire et on note $p = \mathbb{P}(X = 1)$.

2. Montrer que pour tout n dans \mathbb{N} on a $\mathbb{P}(X > n + 1) = \mathbb{P}(X > 1)\mathbb{P}(X > n)$

3. En déduire que X suit une loi géométrique.

Exercice 11 Soit X une v.a.d sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n)$$

En déduire que X admet une espérance ssi $\sum_n \mathbb{P}(X > n)$ converge et qu'alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > k)$$

Exercice 12 Soient X, Y v.a.d indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $0 < p < 1$ et $M = \max(X, Y)$.

1. Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}(X \leq n)$ puis $\mathbb{P}(M \leq n)$.

2. Déterminer la loi de M et l'espérance de M . On pourra utiliser l'exercice précédent.

Exercice 13 Soient X, Y v.a.d à valeurs dans \mathbb{N} telles que :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{i+j}{i!j!e} \left(\frac{1}{2^{i+j}} \right)$$

1. Déterminer la loi de X et de Y . X et Y sont-elles indépendantes ?

2. Montrer que 2^{X+Y} admet une espérance et calculer celle-ci.

Exercice 14 On suppose qu'une colonie d'insectes produit N oeufs où $N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, lorsque $N = n$, le nombre X d'oeufs qui éclosent suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Déterminer la loi de X .

Exercice 15 On dispose d'une pièce ayant la probabilité $0 < p < 1$ de donner pile. On réalise l'expérience suivante : on lance la pièce autant de fois que nécessaire pour obtenir pile. On note N le nombre de lancers effectués. Puis on relance à nouveau la pièce N fois et on compte le nombre X de piles obtenus. Déterminer la loi de N et de X , montrer que X admet une espérance et calculer celle-ci.

Exercice 16 Soient X, Y deux v.a.d indépendantes. À l'aide des fonctions génératrices, montrer que :

1. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$ alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m + n, p)$.

2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

Exercice 17 On joue à pile ou face avec une pièce équilibrée. Déterminer un entier p tel que pour tout $n \geq p$ la probabilité d'avoir entre la moitié et trois quart de piles soit au moins 0,95. (Utiliser Bienaymé-Tchebychev)

Exercice 18 Montrer que l'on ne peut pas truquer deux dés de sorte que la somme de leur résultat suive une loi uniforme.

Exercice 19 Soit X v.a à valeurs dans \mathbb{N} de fonction génératrice $G : t \mapsto ae^{1+t^2}$.

1. Déterminer a .
2. Déterminer la loi de X .
3. Justifier que X admet une espérance et une variance, les déterminer.

Exercice 20 (banque CCP MP) On admet, dans cet exercice, que : $\forall q \in \mathbb{N}, \sum_{k \geq q} \binom{k}{q} x^{k-q}$

converge et $\forall x \in]-1, 1[, \sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}$. Soit $p \in]0, 1[, (\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X et Y deux variables aléatoires définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) et à valeurs dans \mathbb{N} . On suppose que la loi de probabilité du couple (X, Y) est donnée par :

$$\forall (k, n) \in \mathbb{N}^2 : P((X = k) \cap (Y = n)) = \begin{cases} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. (a) Déterminer la loi de Y .
(b) Prouver que $1 + Y$ suit une loi géométrique.
(c) Déterminer l'espérance de Y .
3. Déterminer la loi de X .

Exercice 21 (banque CCP MP) Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé.

1. Soit X une variable aléatoire définie sur (Ω, \mathcal{A}, P) et à valeurs dans \mathbb{N} .
On considère la série entière $\sum t^n P(X = n)$ de variable réelle t .
On note R_X son rayon de convergence.

- (a) Prouver que $R_X \geq 1$.

On pose $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P(X = n)$ et on note D_{G_X} l'ensemble de définition de G_X .
Justifier que $[-1, 1] \subset D_{G_X}$.

Pour tout réel t fixé de $[-1, 1]$, exprimer $G_X(t)$ sous forme d'une espérance.

- (b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer, en justifiant la réponse, $P(X = k)$ en fonction de $G_X^{(k)}(0)$.
2. (a) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ .
Déterminer D_{G_X} et, pour tout $t \in D_{G_X}$, calculer $G_X(t)$.

- (b) Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2 . Déterminer, en utilisant les questions précédentes, la loi de $X + Y$.

Exercice 22 (banque CCP MP) Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.

On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0, 1[$).

Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X . Justifier.
2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
- (a) Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k | X = i)$.
- (b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.

Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i} \binom{n}{i} = \binom{k}{i} \binom{n}{k}$.

- (c) Déterminer l'espérance et la variance de Z .

Exercice 23 (banque CCP MP)

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$.

Prouver que : $\forall a \in]0, +\infty[, P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geq a\right) \leq \frac{V(Y_1)}{na^2}$.

3. **Application**

On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.

À partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre 0,35 et 0,45 ?

Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ème}}$ tirage.

Exercice 24 (banque CCP MP) Soit $\lambda \in]0, +\infty[$ et X une variable aléatoire discrète à valeurs dans \mathbb{N}^* . On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = \frac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R définie par $R(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$.
2. Calculer λ .
3. Prouver que X admet une espérance, puis la calculer.
4. X admet-elle une variance ? Justifier.