On ne meurt pas riche de ce qu'on a fait, on meurt pauvre de ce qu'on n'a pas fait. (Frédéric Dard)

Exercice 1 ☞ Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, comparer $X \circ P$, $P \circ X$ et P.

Réponse Ce sont les mêmes... $X \circ P$ s'obient en substituant P à X dans le polynôme X donc on a $X \circ P = P$. Ensuite si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ alors $P \circ X$ s'obient en substituant X à X !

Exercice 2 Déterminer les P, Q dans $\mathbb{K}[X]$ tels que $P^2 = XQ^2$.

Réponse $P = Q = 0$ conviennent. Supposons $P \neq 0$ (ie $Q \neq 0$ également). Si $P^2 = XQ^2$ alors $\deg(P^2) = \deg(XQ^2)$ ie $2\deg(P) = 1 + 2\deg(Q)$ ce qui impossible par $\deg(P)$ et $\deg(Q)$ sont dans $\mathbb{N}$ et qu'un entier ne peut pas être pair et impair ! En conclusion le seul couple solution est $(P, Q) = (0, 0)$.

Exercice 3 Soit P de racines $x_1, \ldots, x_n$, quelles sont les racines de $P(2X), P(1-X)$?

Réponse Attention ce n'est pas si bête comme exercice !

Notons $Q(X)$ le polynôme $P(2X)$. y racine de Q ssi $2y$ racine de P donc les racines de Q sont les $\frac{x_i}{2}$. De même ,notant $S(X) = P(1-X)$ on a y racine de S ssi $1-y$ racine de P donc de la forme $1-y = x_i$ pour un indice i. Ainsi les racines de S sont les $1 - x_i$.

Exercice 4 ☞ Degré et coefficient dominant de :

$$A = X^3 - X(X^2 + 2X - \mathrm{i}), B = \prod_{k=0}^{n}(2X - k)$$

$$C = \prod_{k=0}^{n}(X-k)^k, D = (X-1)^5 - (X+2)^5$$

Réponse

1. On développe $A = -2X^2 + \mathrm{i}X$ donc A est de degré 2 et de coefficient dominant -2.
2. B est le produit de $n+1$ polynômes de degré 1 donc $\deg(B) = n+1$. Son coefficient dominant est 2^{n+1}.
3. $\deg(C) = \sum_{k=0}^{n} \deg((X-k)^k) = \sum_{k=0}^{n} k = n(n+1)/2$. C est unitaire comme produit de polynômes unitaires.
4. $(X-1)^5 = X^5 - 5X^4 + \ldots$ et $(X+2)^5 = X^5 + 10X^4 + \ldots$ par le binôme de Newton donc $D = -15X^4 + \ldots$ est de degré 4 et de coefficient sominant -15.

Exercice 5 ☞ Que dire de $A, B \in \mathbb{K}[X]$ unitaires tels que $A \mid B$ et $B \mid A$?

Exercice 6 Existe-t-il $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) = n^2$? Idem avec $n^2 + (-1)^n$ et 2^n.

Réponse

1. Soit $Q = X^2$. Si pour tout n de $\mathbb{N}$ on a $P(n) = n^2$ alors $P - Q$ admet tout n de $\mathbb{N}$ comme racine donc a une infinité de racines donc est le polynôme nul, ie $P = Q$. Il y a donc un unique polynôme répondant à la question : $P = X^2$.
2. Soit P tel que pour tout n de $\mathbb{N}$: $P(n) = n^2 + (-1)^n$. On a alors $(P - X^2)(n) = (-1)^n$ donc $P - X^2$ prend une infinité de fois la valeur 1 et une infinité de fois la valeur -1. Ceci impliquerait que $P - X^2 = 1$ et $P - X^2 = -1$: absurde ! Ainsi P n'existe pas.
3. Supposons que P existe et notons $P = a_r X^r + \ldots + a_1 X + a_0$ avec $a_r \neq 0$. Quand $n \to +\infty$ on a $P(n) \sim a_r n^r$ donc on devrait avoir $2^n \sim a_r n^r$ d'où $\frac{2^n}{n^r} \to a_r$ mais $\frac{2^n}{n^r} \to +\infty$! Ainsi P n'existe pas.

Exercice 7 Existe-t-il P dans $\mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \lfloor x \rfloor$? Et tel que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = e^x$? Et tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+, P(x) = \sqrt{x}$?

Exercice 8 ☞ Déterminer P unitaire de degré au plus 3, nul en 1 et divisible par $2X^2 + 3$.

Exercice 9 Résoudre les équations polynômiales suivantes dans $\mathbb{C}[X]$:

1. $P \circ P = P$
2. ☞ $P'^2 = 4P$
3. $P'P'' = 18P$
4. ☞ $(X^2+1)P'' = 6P$
5. $P(X) = P(X+1)$
6. $P(X^2) = XP(X+1)$

Exercice 10 On cherche tous les polynômes non constants vérifiant

$$P(X^2) = P(X)P(X+1)$$

1. Soit P solution et a une racine de P. Calculez $P\left(a^{2^n}\right)$ pour tout n. Que dire de $|a|$?
2. Soit P solution et a une racine de P. Montrez que $(a-1)^2$ est racine de P.
3. En déduire les racines possibles pour P puis la forme factorisée sur $\mathbb{C}$ de P solution.
4. Conclure proprement.
5. En vous inspirant de ce qui précède déterminer les P vérifiant $P(X^2) = P(X)^2$.

Exercice 11 ☞

1. Soit A, B dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $\deg A < \deg B$, donner la division euclidienne de A par B.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ avec $a \neq b$ dans $\mathbb{K}$.
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^2$ avec a dans $\mathbb{K}$.
4. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n+1 par X^2+1. Idem avec $X^{100}-X^4+X-1$ par $1+X+X^2+X^3$.
5. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que X^2-2 divise $X^4+X^3+aX^2+bX+2$.

Exercice 12

1. Déterminer un polynôme de degré 2 tel que $P(-1) = 1$, $P(0) = -1$ et $P(1) = -1$. Ce polynôme est -il unique ?
2. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(-1) = 1$, $P(0) = -1$ et $P(1) = -1$.

Exercice 13 ☞ Pour quelles valeurs de n entier le polynôme $\left(1+X^4\right)^n - X^n$ est-il divisible par $1+X+X^2$ dans $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 14 On se propose de déterminer les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant : $|z| = 1 \implies |P(z)| = 1$. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ solution. On note $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_{n-k}} X^k$. Montrer que $(PQ)\left(e^{i\theta}\right) = e^{in\theta}$. Conclure.

Exercice 15

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, montrez que $P(P(X)) - X$ est divisible par $P(X) - X$.
2. Résoudre ensuite dans $\mathbb{C}$: $\left(z^2+3z+1\right)^2 + 3z^2 + 8z + 4 = 0$.

Exercice 16 Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 100 = 0$.

Réponse

- On a pour z : dans $\mathbb{C}$: $z^4 + 6z^3 + 9z^2 + 100 = (z^2+3z)^2 - (10i)^2 = (z^2+3z-10i)(z^2+3z+10i)$.
- Résolvons dans $\mathbb{C}$: $z^2 + 3z - 10i = 0$: le discriminant est $9 + 40i$, on en cherche une racine carrée sous la forme $\delta = a + ib$ avec a, b réels comme vu en début d'année pour obtenir $\delta = 5 + 4i$ et les racines $z_1 = \dfrac{-3+5+4i}{2} = 1+2i$ et $z_2 = \dfrac{-3-5-4i}{2} = -4-2i$
- On observe ensuite que $z^2+3z+10i = 0 \iff \overline{z^2+3z+10i} = 0 \iff \bar{z}^2 + 3\bar{z} - 10i = 0$ donc les solutions de $z^2 + 3z + 10i = 0$ sont les conjuguées de z_1 et z_2 !
- En conclusion les solutions sont $\{1+2i, 1-2i, -4-2i, -4+2i\}$

Exercice 17 Factoriser sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$: $P(X) = X^8 - 2X^6 + 2X^4 - 2X^2 + 1$.

Exercice 18 Quels sont les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ surjectifs ? Et tels que $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$?

Exercice 19 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geqslant 0$. On pose $Q = P + P' + \ldots + P^{(n)}$. En étudiant, par exemple, la fonction $x \mapsto e^{-x}Q(x)$, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) \geqslant 0$.

Exercice 20 Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, les polynômes $1 + X + \ldots + \dfrac{X^n}{n!}, X^n + X + 1$ et $X^n - X + 1$ n'ont que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

Exercice 21 Pour quelles valeurs de a le polynôme $(X+1)^7 - X^7 - a$ admet-il une racine multiple réelle ?

Exercice 22 Trouver $a \in \mathbb{C}$ tel que $X^5 + aX^2 + 15X - 6i$ ait une racine triple dans $\mathbb{C}$ puis le factoriser.

Réponse On a $P' = 5X^4 + 2aX + 15$ et $P'' = 20X^3 + 2a$ donc si P a une racine triple α on a $a = -10\alpha^3$, puis on doit avoir $P'(\alpha) = 0$ ie $5\alpha^4 - 20\alpha^4 + 15 = 0$ d'où $\alpha^4 = 1$ et enfin $P(\alpha) = 0$ donc $\alpha^5 - 10\alpha^5 + 15\alpha - 6 = 0$ ie (comme $\alpha^4 = 1, \alpha^5 = \alpha$!) $\alpha = 1$. In fine si P a une racine triple alors c'est nécessairement -1. On a dans ce cas $P(1) = 0$ donc $a = -10$. La factorisation par $(X-1)^3$ ne pose pas de souci.

Exercice 23 Donner une condition sur λ pour que l'équation : $x^4 - 2x^3 + \lambda x^2 + 2x - 1 = 0$ ait une racine au moins triple.

Exercice 24 Soit $P \in \mathbb{R}[X], d°P = n \geq 1, a \in \mathbb{R}$. On suppose : $P(a) > 0$ et $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}, P^{(k)}(a) \geq 0$. Montrez que P n'a pas de racines dans $[a, +\infty[$.

Exercice 25 ☞ Trouver $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(2) = 1, P'(2) = 3, P''(2) = -4$ et $\forall n \geqslant 3, P^{(n)}(2) = 0$.

Exercice 26 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$. Montrez que P' est scindé sur $\mathbb{R}$. En déduire que pour tout a réel non nul, les racines dans $\mathbb{C}$ de $P^2 + a^2$ sont simples.

Réponse

Cet exercice mêle algébre et analyse via le théorème de Rolle. Il est trés instructif pour la notion de multiplicité d'une racine.

C'est assez lourd à écrire : notons $x_1 < x_2 < \ldots < x_s$ les racines multiples de P, de multiplicités respectives $m_1, m_2, \ldots, m_s$, de sorte que $m_1 + m_2 + \ldots + m_s = n$ où $n \in \mathbb{N}^*$ désigne le degré de P.

On a déjà $x_1, y_2, \ldots, x_s$ racines de P' de multiplicité $m_1 - 1, m_2 - 1, \ldots, m_s - 1$, ce qui donne déjà $m_1 + m_2 + m_s - s$ racines réelles **comptées avec multiplicité** pour P'. (Noter que si y_i est racine simple de P alors y_i est racine d'ordre 0 de P' ie n'est pas racine de P' !).

Comme fonction d'une variable réelle, P est dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme $P(x_1) = P(x_2)$ par le théorème de Rolle il existe $y_1 \in]x_1, x_2[$ tel que $P'(y_1) = 0$.

Le même raisonnement s'applique $[x_2, x_3], \ldots, [x_{r-1}, x_r]$ ce qui donne l'existence de $y_1 < y_2 < \ldots < y_{r-1}$ réels en lesquels P' s'annule. Ces réels, étant aussi distincts des $x_1, \ldots, x_s$, fournissent $s - 1$ racines réelles supplémentaires pour P'.

Au bilan : P' est de degré $n - 1$ et nous avons trouvé, avec mutliplicité, $m_1 + m_2 + m_s - s + s - 1 = n - 1$ racines réelles pour P'. Celui-ci a donc toutes ses racines dans $\mathbb{R}$ donc est scindé sur $\mathbb{R}$.

Enfin notons $Q = P^2 + a^2$ et supposons qu'il admette une racine double z dans $\mathbb{C}$ (forcément non réelle car $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) \geqslant a^2 > 0$). $Q' = 2PP'$ et $P(z) \neq 0$ car $P(z)^2 = -a^2$, il vient $P'(z) = 0$ ce qui est impossible car toutes les racines de P' sont réelles !

Exercice 27 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systémes : ☞

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = -1 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1 \end{cases}$$

en cherchant un polynôme de degré 3 dont x, y, z sont racines.

Exercice 28 Résoudre sur $\mathbb{C}$: $2z^3 - (7 + 2i)z^2 + (11 + i)z - 4 = 0$ sachant qu'il y a une solution réelle.

Exercice 29

1. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants :

$$a) X^3 - 3 \qquad b) X^{12} - 1 \qquad c) X^6 + 1 \qquad d) X^9 + X^6 + X^3 + 1$$

2. Factoriser les polynômes suivants :

$$a)X^2+(3\mathrm{i}-1)X-2-\mathrm{i} \qquad b)X^3+(4+\mathrm{i})X^2+(5-2\mathrm{i})X+2-3\mathrm{i}$$

Exercice 30 ☞ Décomposer sur $\mathbb{R}$: $P=16X^5-20X^3+5X-1$ (ind : montrer qu'une racine commune à Q et Q' est racine du reste de la division euclidienne de Q par Q'...)

Exercice 31 Décomposer sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$: $1+X^3+X^6+X^9$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} X^k$

Exercice 32 (polynômes de Legendre) On note pour n dans $\mathbb{N}$: $P_n=\left(\left(X^2-1\right)^n\right)^{(n)}$.

1. Préciser P_0, P_1, P_2, P_3.
2. Montrer que P_n est de degré n, préciser son coefficient dominant. (Penser au binôme de Newton).
3. En remarquant que 1 et -1 sont racines d'ordre n de $\left(X^2-1\right)^n$, montrer à l'aide du théorème de Rolle que P_n admet n racines distinctes dans $]-1,1[$.
4. Préciser $P_n(1)$ à l'aide de la formule de Leibniz.

Exercice 33 On se propose de déterminer les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant la propriété :

$$\boxed{(*) : \text{être scindé sur } \mathbb{R} \text{ et à coefficients dans } \{-1,0,1\}}$$

1. Montrer, que P est solution du problème, ssi, $\pm X^r P$ est solution du problème. En déduire qu'on peut limiter l'étude à la recherche des polynômes P solution du problème unitaire et de terme constant non nul.
   Soit désormais que $P=(X-x_1)\ldots..(x-x_n)$ unitaire et à terme constant non nul vérifiant $(*)$
2. Montrer que $x_1^2+\ldots+x_n^2 \leq 3$.
3. Montrer que le polynôme $Q=X^nP\left(\dfrac{1}{X}\right)$ vérifie $(*)$ et est à terme constant non nul. En déduire $x_1^2+\ldots+x_n^2+\dfrac{1}{x_1^2}+\ldots+\dfrac{1}{x_n^2}\leq 6$.
4. Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x^2+\dfrac{1}{x^2}\geq 2$. En déduire une majoration de n.
5. Montrer que les polynômes P vérifiant $(*)$ unitaire et à terme constant non nul de degré 3 ne peuvent admettre comme zéro que 1 et -1.
6. Lister les polynômes possibles et conclure proprement.

Exercice 34 Soit a,b,c trois complexes de module 1 de somme 1. Montrer que $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$ puis que $(X-a)(X-b)(X-c)$ est de la forme $X^3-X^2+\alpha X-\alpha$ pour un certain $\alpha\in\mathbb{C}^*$. Conclure que l'un des 3 nombres a,b,c vaut 1.

Réponse

Un peu de révision sur les complexes, cela ne peut pas faire de mal !

Rappelons que pour z complexe, $|z|=1 \iff |z|^2=1 \iff z\overline{z}=1 \iff \overline{z}=\dfrac{1}{z}$.

Ainsi $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=\overline{a+b+c}=1$ par hypothèse. Développant on a :

$$(X-a)(X-b)(X-c)=X^3-(a+b+c)X^2+(ab+ac+bc)X-abc$$

Or $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1 \iff \dfrac{bc+ac+ab}{abc}=1$ d'où $abc=ab+ac+bc$ noté $-\alpha$ dans la suite. Noter que a,b,c étant nuls il en est de même pour α.

Ainsi a,b,c sont les racines de $X^3-X^2+\alpha X-\alpha$ et ce dernier admet 1 comme racine (évidente) donc l'un des nombres a,b,c vaut 1.

Exercice 35 Soit n dans $\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.

1. Simplifier $(X-1)(1+X+X^2+\ldots+X^{n-1})$
2. Rappeler les racines de X^n-1. En déduire la forme développée de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(X-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n}\right)$.
3. Simplifier $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi/n}\right)$.
4. À l'aide des formules d'Euler montrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin(k\pi/n)=\frac{1}{2^{n-1}}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n}\right)$.
5. En déduire la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin(k\pi/n)$.

Exercice 36 Trouvez les polynômes $P\in\mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P. On pourra commencer par montrer que si un tel polynôme est de degré $n\geq 1$ alors il existe $a\in\mathbb{C}$ tel que $nP=(X-a)P'$.

Réponse Notons $P = a_nX^n + ... + a_1X + a_0$ de degré n et supposons $P'|P$. On a donc $P = (\lambda X + \beta)P'$ et comme $P' = na_nX^{n-1} + ...$ on a $a_n = \lambda na_n$ en identifiant les coefficients dominants de P et $(\lambda X + \beta)P'$. Ainsi $\lambda = 1/n$ puis $P = \frac{1}{\lambda}(X + \lambda\beta)P'$ ie $nP = (X - a)P'$ en notant $a = -\lambda\beta$.

On tire de cette relation que $P(a) = 0$. Par la formule de Leibniz on a pour $k \in \mathbb{N}$: $nP^{(k)} = (X - a)P^{(k+1)} + kP^{(k)}$, ce qui montre que $nP^{(k)}(a) = kP^{(k)}(a)$ et ainsi pour $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$: $P^{(k)}(a) = 0$, ce qui montre par la formule deTaylor que $P(X) = \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X - a)^n$. Ainsi si P de degré n est divisible par sa dérivée alors il est de la forme $\alpha(X - a)^n$ avec a dans $\mathbb{C}$ et α dans $\mathbb{C}^*$. Réciproquement tous les polynômes de cette forme sont divisibles par leur dérivée.

Exercice 37 (Un peu de calcul !) Effectuer les divisions euclidiennes suivantes :

1. $3X^5 + 4X^2 + 1$ par $X^2 + 2X + 3$
2. $3X^5 + 2X^4 - X^2 + 1$ par $X^3 + X + 2$
3. $X^4 - X^3 + X - 2$ par $X^2 - 2X + 4$
4. $X^5 - 7X^4 - X^2 - 9X + 9$ par $X^2 - 5X + 4$

Réponse (aux erreurs de calcul près !)

1. $Q = 3X^3 - 6X^2 + 3X + 16$, $R = -41X - 47$
2. $Q = 3X^2 + 2X - 3$, $R = -9X^2 - 7X + 7$
3. $Q = X^2 + X - 2$, $R = -7X + 6$
4. $Q = X^3 - 2X^2 - 14X - 63$, $R = -260X + 261$

Exercice 38 Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que le polynôme $(X - 1)^{n+2} + X^{2n+1}$ est divisible par $X^2 - X + 1$. Trouver le quotient si $n = 2$.

Réponse A et B sont à coefficients réels. Supposons que A divise B dans $\mathbb{C}[X]$, ie il existe $C \in \mathbb{C}[X]$ tel que $B = AC$. L'algorithme de la division euclidienne montre que dans ce cas B est réel, ie que A divise B dans $\mathbb{R}[X]$. Nous allons donc montrer ici que $X^2 - X + 1$ divise $(X - 1)^{n+2} + X^{2n+1}$ dans $\mathbb{C}[X]$ via les racines de $X^2 - X + 1$:

Les racines de X^2+X+1 sont $\mathrm{j}, \bar{J}$ donc celles de X^2-X+1 sont leurs opposées $-\mathrm{j}, -\bar{\mathrm{j}}$, ainsi $X^2-X+1 = (X+\mathrm{j})(X+\bar{J})$ divise $(X-1)^{n+2}+X^{2n+1}$ ssi $-\mathrm{j}$ et $-\bar{\mathrm{j}}$ sont racines de ce dernier. Cerise sur le gateau, $(X-1)^{n+2}+X^{2n+1}$ est à coefficients réels donc si $-\mathrm{j}$ est racine il en est de même pour son conjugué ! Enfin (comme $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$ et $\mathrm{j}^3 = 1$) on a :

$$(-\mathrm{j} - 1)^{n+2} + (-\mathrm{j})^{2n+1} = (\mathrm{j}^2)^{n+2} - \mathrm{j}^{2n+1} = \mathrm{j}^{2n+4} - \mathrm{j}^{2n+1} = \mathrm{j}^{2n+1}\left(J^3 - 1\right) = 0$$

Ainsi $-\mathrm{j}$ est racine de $(X - 1)^{n+2} + X^{2n+1}$ donc $-\bar{\mathrm{j}}$ aussi et $X^2 + X + 1$ divise $(X - 1)^{n+2} + X^{2n+1}$.

Exercice 39 Trouvez le reste de la division euclidienne de $(X + 1)^n - X^n - 1$ par $X^2 + X + 1$.

Exercice 40 Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que P prenne la valeur 7 en au moins 4 entiers distincts $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

1. Quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)(X - \delta)$?
2. En déduire que pour n entier $P(n)$ ne vaut jamais 14. Peut-on remplacer 14 par un autre nombre ?

Exercice 41 ☞ Le reste de la division euclidienne de P par $X - 2$ est 5, par $X - 3$ est 7, quel est celui obtenu par division par $(X - 2)(X - 3)$?

Réponse On pousse le stylo : nous avons les divisions euclidiennes suivantes :

$$P = (X - 2)Q_1 + 5 = (X - 3)Q_2 + 7, P = (X - 2)(X - 3)Q_3 + aX + b$$

On a $P(2) = 2a + b = 5$ et $P(3) = 3a + b = 7$ d'où $a = 2$ et $b = 1$ et le reste cherché est $2X + 1$.

Exercice 42 ☞ Le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - 1$ est 1, quel est le reste de la division euclidienne de P par $X - 1$? $X + 1$?

Réponse On a $P = (X^2 - 1)Q + 1 = (X - 1)(X + 1)Q + 1$ et les divisions euclidiennes de P par $X - 1$ et $x + 1$ s'écrivent respectivement $P = (X - 1)Q_1 + a$, $P = (X + 1)Q + b$. Comme $P(1) = 1$ on a $a = 1$ et comme $P(-1) = 1$ on a $b = 1$!

Exercice 43 Calculer le pgcd des polynômes A et B ci-dessous, établir une relation de Bezout.

1. $A = X^3 - X^2 - X - 2$ et $B = X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2$
2. $A = X^4 + X^3 - 2X + 1$ et $B = X^3 + X + 1$
3. $A = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 2$ et $B = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6$
4. $A = X^6 - 2X^5 + 2X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 2X$ et $B = X^4 - 2X^3 + X^2 - X + 1$

Exercice 44 (Polynômes de Tchebytchev)

1. Montrer de deux façons différentes que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.
2. Préciser le degré/le coefficient dominant de T_n, montrer qu'il admet n racines distinctes entre -1 et 1.

Exercice 45 (Polynômes réciproques)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n, on dit que P est **réciproque** si : $X^n P\left(\frac{1}{X}\right) = P(X)$

1. Interprétation sur les coefficients de P ?
2. Montrer que $\forall n \geq 1$, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{K}[X]$ tel que :
$$\forall x \in \mathbb{K}, x^n + \frac{1}{x^n} = P_n\left(x + \frac{1}{x}\right)$$
De plus P_n est de degré n et unitaire.
3. Verifier que le produit de deux polynômes réciproques est encore réciproque et que si on factorise un polynôme réciproque par un polynôme réciproque on fait apparaître un nouveau polynôme réciproque.
4. Soit P un polynôme réciproque de degré pair $2n$, montrer qu'alors il existe un polynôme Q de degré n tel que :
$$\forall x \in \mathbb{K} : P(x) = 0 \Leftrightarrow Q\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$$
5. Factoriser sur $\mathbb{R}$: $X^6 + 3X^5 + 4X^4 + X^3 + 4X^2 + 3X + 1$.

Exercice 46 Trouver un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que 1 soit racine de $P+1$ de multiplicité au moins 2 et 2 soit racine de $P-1$ de multiplicité au moins 2.

Réponse Notant abusivement $\widetilde{P}$ P : $P(1)+1=0$ donc $P(1)=-1$ et $(P+1)'(1)=0$ ie $P'(1)=0$. De même $P(2)=1$ et $P'(2)=0$. On peut chercher P sous la forme $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$.

$$\begin{cases} P(1) = -1 & \iff a+b+c+d = -1 \\ P'(1) = 0 & \iff 3a+2b+c = 0 \\ P(2) = 1 & \iff 8a+4b+2c+d = 1 \\ P'(2) = 0 & \iff 12a+4b+c = 0 \end{cases}$$

En résolvant ce système, on trouve les coefficients :

$$a = -4, \quad b = 18, \quad c = -24, \quad d = 9$$

Le polynôme est donc :

$$P(X) = -4X^3 + 18X^2 - 24X + 9$$

Exercice 47 ☞ Soit $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$, montrer que j est racine de P, préciser sa multiplicité, exploiter la parité de P et le fait que $P \in \mathbb{R}[X]$ pour trouver toutes ses racines dans $\mathbb{C}$.

Réponse On rappelle que $\mathrm{j} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ vérifie $\mathrm{j}^3 = 1$ et $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$. On évalue P en j :

$$\mathrm{j}^8 + 2\mathrm{j}^6 + 3\mathrm{j}^4 + 2\mathrm{j}^2 + 1 = \mathrm{j}^2 + 2 + 3\mathrm{j} + 2\mathrm{j}^2 + 1 = 3(\mathrm{j}^2 + \mathrm{j} + 1) = 0$$

De même P' admet j pour racine qui est donc racine d'ordre au moins 2 de P. Celui-ci étant à coefficients réels on sait que $\bar{\mathrm{j}}$ est encore racine d'ordre au moins 2. Enfin P étant pair (donc P' étant impair) les opposés de ses racines sont encore racine donc au final $\mathrm{j}, -\mathrm{j}, \bar{\mathrm{j}}, -\bar{\mathrm{j}}$ (tous distincts !) sont racines d'ordre au moins 2 de P. Celui-ci étant de degré 8 et unitaire s'écrit donc $P = (X-\mathrm{j})^2(X-\bar{\mathrm{j}})^2(X+\mathrm{j})^2(X+\bar{\mathrm{j}})^2$ (dans $\mathbb{R}[X]$ on obtient en regroupant les facteurs conjugués $P = (X^2+X+1)^2(X^2-X+1)^2$)

Exercice 48 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On suppose P scindé sur $\mathbb{R}$, montrer en utilisant la forme factorisée de P que pour tout z de $\mathbb{C}$ on a $|P(z)| \geqslant |\mathrm{Im}(z)|^n$.
2. On suppose réciproquement que $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geqslant |\mathrm{Im}(z)|^n$, soit z une racine de P dans $\mathbb{C}$, montrer que z est réel. En déduire que P est scindé sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $P = X^3 + 1$. Déterminer z dans $\mathbb{C}$ tel que $|P(z)| < |\mathrm{Im}(z)|^3$. (Pourquoi êtes-vous certain qu'un tel z existe ?)

Réponse

1. P s'écrit $P = (X - a_1)^{n_1}(X - a_2)^{n_2}...(X - a_r)^{n_r}$ avec les a_i réel et $n_1 + n_2 + ... + n_r = n$. Pour tout $z = x + \mathrm{i}y$ dans $\mathbb{C}$ avec x, y réels on a, en utilisant :

   $$|P(z)| = |(x - a_1) + \mathrm{i}y|^{n_1}|(x - a_2) + \mathrm{i}y|^{n_2}...|(x - a_r) + \mathrm{i}y|^{n_r} \geqslant |y|^{n_1}|y|^{n_2}...|y|^{n_r} = |y|^{n_1+n_2+...+n_r} = |y|^n = |\mathcal{I}m(z)|^n$$

   (On a utilisé le fait que le module majore la valeur absolue des parties réelle et imaginaire)
2. Si z est racine de P alors $P(z) = 0$ donc $\mathcal{I}m(z) = 0$ soit z réel.
3. $X^3 + 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc le résultat de la question précédente assure l'existence d'un tel z. Il existe donc une racine complexe non réelle, par exemple $-\mathrm{j}$ de partie imaginaire $-\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $|P(-\mathrm{j}) = 0 < |\mathcal{I}m(-J)|^3$

Exercice 49 Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ non constant.

1. Montrer que l'on a $P(X) \neq P(X + P(X))$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)|P(n + P(n))$.
3. On suppose que pour tout n dans $\mathbb{N}$ on a $P(n)$ premier. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$ on a $P(n+P(n)) = P(n)$.
4. Existe-t-il $P \in \mathbb{Z}[X]$ non constant ne prenant que des valeurs premières sur $\mathbb{N}$?

Exercice 50 Montrer qu'il est impossible de truquer un dé à 6 faces pour que les probabilités de l'exercice précédent soient toutes égales. On pourra noter $p_i = \Pr(\{i\})$ et introduire le polynôme $Q = p_1X + p_2X^2 + ... + p_6X^6$.

À savoir faire, non exhaustif ! Remarques diverses

1. Manipuler les degrés, d'une somme, d'un produit, d'une composée. Le seul polynôme de degré non positif ou nul est le polynôme nul.
2. Penser au coefficient dominant.
3. P de degré 0 signifie P constant **non nul** !
4. Quand on cherche à résoudre une équation dont l'inconnue est un polynôme on pourra chercher des renseignements sur le degré de celui-ci. Ex 6,9
5. Connaître la formule de Taylor. Pour les plus adroits, savoir l'écrire pour faire apparaître le quotient et le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)^m$. Ex 24,25
6. Bien avoir compris les racines multiples : a racine d'ordre m de P permet d'écrire $P=(X-a)^mQ$, mais se vérifie en pratique par la nullité de dérivées successives en a. Ex 47
7. Se souvenir qu'une racine de P d'ordre m est racine d'ordre $m-1$ de P'. Ex 47
8. Si $P\in\mathbb{R}[X]$ alors a racine d'ordre m de P ssi $\bar{a}$ racine d'ordre m de P.Ex 47
9. Bien avoir compris la forme d'un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$. Ex 26,48
10. Si $\deg(P)=n\geqslant 0$ alors P admet n racines dans $\mathbb{C}$ comptées avec multiplicité, mais au plus n dans $\mathbb{R}$. Il est donc toujours scindé sur $\mathbb{C}$.
11. Savoir écrire la division euclidienne de A par B avec la forme du reste, calculer celui-ci par les méthodes vues en cours. Ex 11,39,41,42
12. $A|B$ ssi le reste de la division euclidienne de A par B est nul.
13. Si A est scindé alors $A|B$ ssi les racines de A sont racines de B avec multiplicité au moins égales. exo 13,38
14. Pour résoudre un système du type $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=-1 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1 \end{cases}$ on observe que x,y,z sont racines de

   $$P=(X-x)(X-y)(X-z)=X^3-(x+y+z)X+(xy+xz+yz)X-xyz$$

   et on utilise : $(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)=2xy+2xz+2yz$ pour déterminer les coefficients de P afin de le résoudre.
15. Pour montrer que $P=Q$ on montre que $P-Q$=0. Ex 14,44
   (a) Soit on sait que P,Q sont de degré au plus n et on montre qu'ils coïncident en $n+1$ points au moins, ce qui équivaut à $P-Q$ s'annule $n+1$ fois donc est nul.
   (b) Soit on a la chance d'avoir une infinité de x dans $\mathbb{K}$ tels que $\widetilde{P}(x)=\widetilde{Q}(x)$ et alors $P-Q$ a une infinité de racines donc est le polynôme nul.

   La clé est ici le théorème de d'Alembert : si P n'est pas le polynôme nul alors son nombre de racines comptées avec multiplicité ne peut excéder son degré !
16. Savoir expliciter les polynômes de Lagrange associés à $x_0,x_1,\dots,x_n$ distincts dans $\mathbb{K}$ et donner la formule d'interpolation :

   $$\forall P\in\mathbb{K}[X],\, P=\sum_{k=0}^{n}\widetilde{P}(x_k)L_k \text{ avec } L_k=\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{i=n}\frac{X-x_i}{x_k-x_i}$$

   Un polynôme de degré au plus n est déterminé par ses valeurs en $n+1$ points distincts (ce que l'on savait déjà !), et on sait le reconstruire à partir de ces valeurs.