Exercice 0

1. Soit $f : x \mapsto x^x$. Préciser son ensemble de définition, et son ensemble de dérivabilité obtenus par opérations. f admet-elle un prolongement à $\mathbb{R}_+$ par continuité ? La fonction ainsi prolongée est-elle dérivable sur $\mathbb{R}_+$?
2. Enoncer le théorème de Rolle pour une fonction f sur $[a, b]$. Montrer ensuite **sans étudier ses variations !** que la fonction $f : x \mapsto 3x + \cos x - 2$ s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}$ (supposer qu'elle s'annule deux fois et observer f'...)

Exercice 1

1. Soit $P = X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 3X + 1$, chercher une racine double évidente, en déduire ses racines.
2. Trouver les $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $(X - 1)^2$ divise $aX^{n+1} + bX^n + 1$.

Exercice 2

Equivalents et limite éventuelle en le point indiqué des expressions suivantes :

1. $\dfrac{x \sin x}{2x^2 + 3x^3}$ en 0
2. $\dfrac{x \sin x}{2x^2 + 3x^3}$ en $+\infty$
3. $x \ln x$ en 1
4. $\dfrac{(e^x - 1)^2}{\cos x - 1}$ en 0

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $H = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ et $A = 2I_n - H$

1. La matrice A est-elle inversible lorsque $n = 1$ ou $n = 2$? Si oui préciser A^{-1}.
2. Dans cette question on suppose $n = 3$. Montrer, par exemple en résolvant un système, que A est inversible et déterminer A^{-1}.
3. On revient au cas général.
   (a) Établir une relation entre H et H^2.
   (b) Montrer que $A^2 = \alpha I_n + \beta A$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ que l'on exprimera en fonction de n.
   (c) En déduire que A est inversible pour tout $n \geqslant 3$ et déterminer A^{-1}

Exercice 4

On souhaite résoudre dans $\mathbb{R}$ le système : $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ xyz = -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

1. Soit (x, y, z) solution. Préciser $xy + xz + yz$.
2. En déduire la forme développée de $P = (X - x)(X - y)(X - z)$.
3. Donner les (x, y, z) solutions.

Exercice 5

On cherche à déterminer les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

$$P(0) = 0 \text{ et } P(X^2 + 1) = P(X)^2 + 1$$

On définit par récurrence une suite u par :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + 1$$

1. Montrer par récurrence que u est strictement croissante.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : P(u_n) = u_n$.
3. En déduire P.