Homework 1, exercice 4

September 20, 2018

1 Exercice 4 : Empirical experimentation

```
In [1]: import numpy as np
        import matplotlib.pyplot as plt
```

1.1 Question a

Nous allons stocker les 5 tirages dans une variable X

```
In [2]: n = 5
        sigma2_reel = 1
        X = np.random.normal(0, sigma2_reel, n)
        print(X)
```

```
[-0.56587226 -0.7565457  -0.08542758 -2.15178031 -1.23169739]
```

1.2 Question b

On sait que les estimateurs de maximum de vraissemblance pour μ et σ^2 sont:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ et } \hat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

```
In [3]: mu = 1/n * np.sum(X)
        sigma2 = 1/n * np.sum((X-mu)**2)
        print(mu, sigma2)
```

```
-0.9582646500473326 0.49115039513872
```

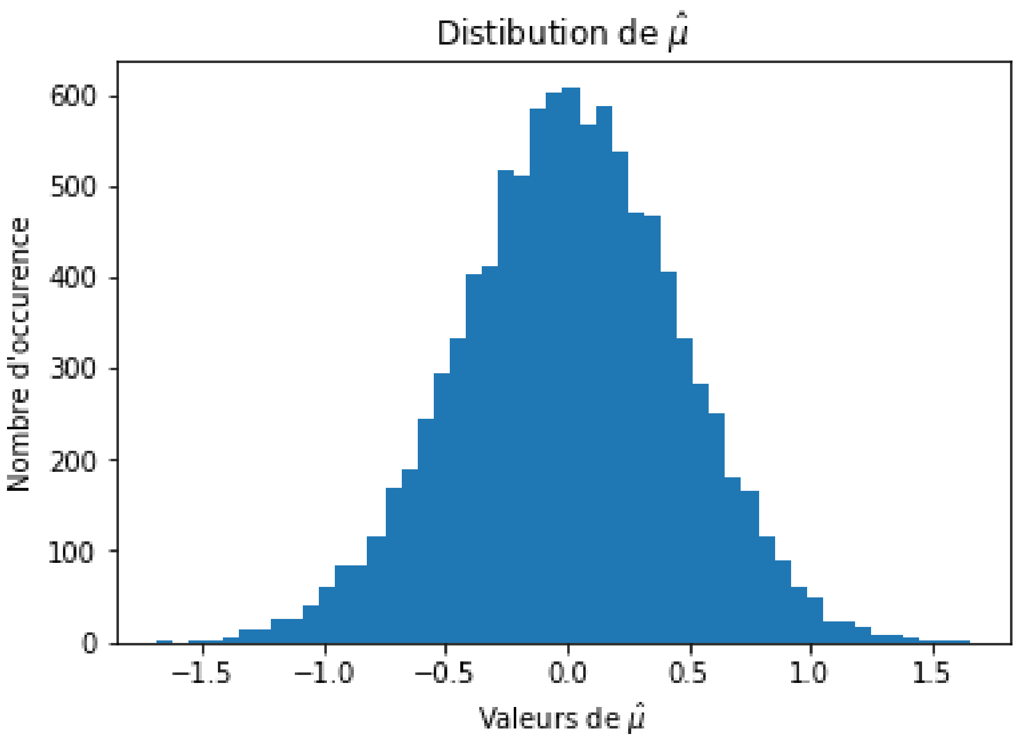
1.3 Question c

Nous allons stocker nos résultats dans 2 vecteurs de dimension 10 000 $Y_{\hat{\mu}}$ et $Y_{\hat{\sigma^2}}$

```
In [4]: m = 10000
        X = np.random.normal(0, sigma2_reel, [n, m])
        Y_mu = 1/n * np.sum(X, axis=0)
        Y_sigma2 = 1/n * np.sum((X-Y_mu)**2, axis=0)
```

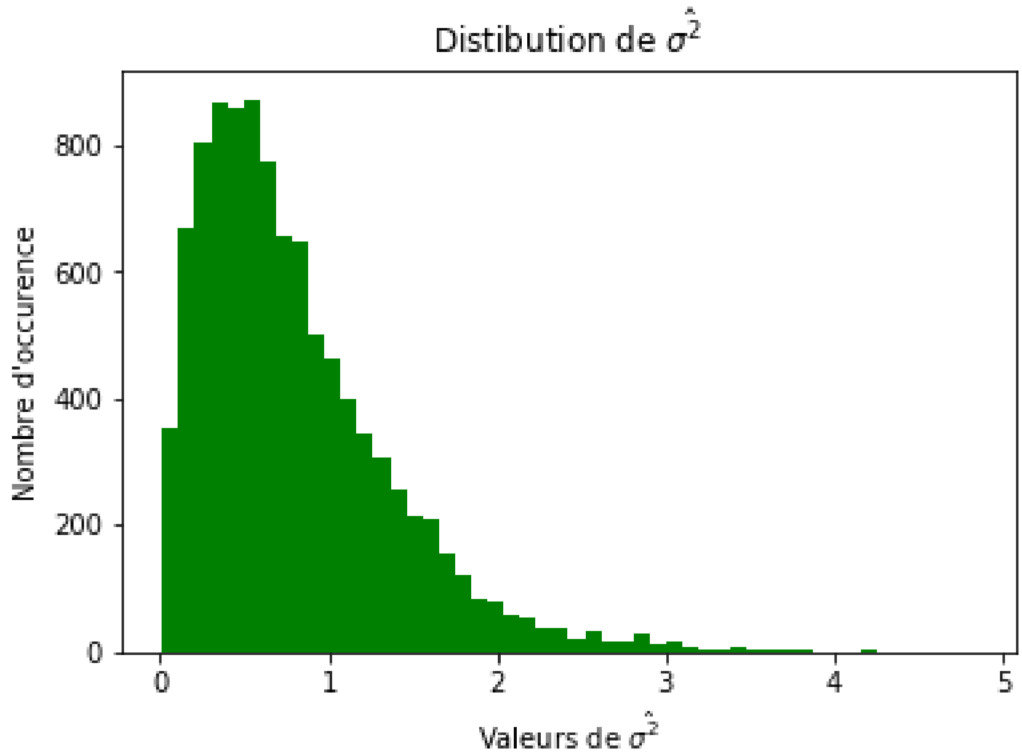
Traçons l'histogramme de $Y_{\hat{\mu}}$

```
In [5]: p, bins, patches = plt.hist(Y_mu, 50)

        plt.xlabel('Valeurs de $\hat{\mu}$')
        plt.ylabel("Nombre d'occurence")
        plt.title('Distibution de $\hat{\mu}$')
        plt.show()
```



Et l'histogramme de $Y_{\hat{\sigma^2}}$

```
In [6]: p, bins, patches = plt.hist(Y_sigma2, 50, facecolor='g')

        plt.xlabel('Valeurs de $\hat{\sigma^2}$')
        plt.ylabel("Nombre d'occurence")
        plt.title('Distibution de $\hat{\sigma^2}$')
        plt.show()
```



Nous reconnaissons ce qui semble être une *loi normale* $\mathcal{N}(0, \frac{1}{5})$ pour la distribution de $\hat{\mu}$ et une *loi de* χ^2_4 pour $\hat{\sigma^2}$ (à un facteur de normalisation près)

1.4 Question d

Nous savons que le biais et la variance se calculent de la manière suivante:
$b(\theta^*) = \mathbb{E}_{\theta^*}(\hat{\theta}) - \theta^*$, $V(\hat{\theta}) = \mathbb{E}(\hat{\theta}^2) - \mathbb{E}(\hat{\theta})^2$

Pour estimer numériquement le biais, nous allons donc devoir utiliser la formule de la moyenne empirique:
$\hat{m}_1 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\hat{\theta}_i$

Pour estimer numériquement la variance, nous allons devoir utiliser la formule du moment empirique d'ordre 2:
$\hat{m}_2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\hat{\theta}_i^2$

```
In [7]: # le paramètre theta que nous considérons est sigma2

        m1_hat = 1/m * np.sum(Y_sigma2)
        m2_hat = 1/m * np.sum(Y_sigma2**2)

        b_empirique = m1_hat - sigma2_reel
        V_empirique = m2_hat - m1_hat**2
```

```
print(b_empirique, V_empirique)
```

```
-0.20285739530023494 0.32689305101834243
```

1.5 Question e

Nous avions trouvé dans l'exercice 3 que:

$$b_n(\sigma^2) = -\frac{\sigma^2}{n} \text{ et } V(\hat{\sigma^2}) = \frac{2\sigma^4}{n^2}(n-1)$$

```
In [8]: b_reel = -sigma2_reel / n
        V_reel = (2*sigma2_reel**2 *(n-1)) / n**2

        print(b_reel, V_reel)
        print(b_reel/b_empirique , V_reel/V_empirique)
```

```
-0.2 0.32
0.9859142660487881 0.9789134366825202
```

Ainsi, notre estimation empirique est très proche de l'estimation théorique que nous avons trouvé à l'exercice 3