

TD 6 - Tests statistiques

Exercice 1 *Pollution atmosphérique*

Dans l'atmosphère, le taux X d'un gaz nocif par unité de volume suit une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2 .

1. Nous savons que $\sigma^2 = 100$. Quatre prélèvements sont réalisés et conduisent aux observations suivantes :

$$x_1 = 35, x_2 = 44, x_3 = 36, x_4 = 65$$

La moyenne de ces observations est $\bar{x} = 45$. Au niveau $\alpha = 5\%$, pouvons-nous conclure que l'espérance μ est significativement plus petite que 50, qui est le seuil tolérable admis ?

2. Nous ne connaissons pas la variance σ^2 , mais nous avons effectué 25 prélèvements. Nous trouvons une moyenne égale à 46 et une variance empirique corrigée égale à 100. Pouvons-nous conclure au niveau $\alpha = 5\%$ que l'espérance μ est significativement plus petite que 50, qui est le seuil tolérable admis ?

Exercice 2 *Du glucose dans le sang*

Des études ont montré que le taux de glucose dans le sang est une variable X suivant une loi normale d'espérance $12g/l$ et de variance $20(g/l)^2$. Pour tester si un certain traitement augmente l'espérance du taux de glucose, on observe un échantillon de 5 individus et on considère que l'effet du traitement est significatif si la moyenne observée sur les 5 individus est supérieure au seuil $s = 15$.

1. Quelles sont les hypothèses nulles et alternatives testées ?
2. Sous l'hypothèse nulle, quelle est la loi de probabilité de la moyenne empirique $\bar{X} = \frac{\sum X_i}{5}$?
3. Quel est le risque α du test réalisé ?
4. On suppose que, sous l'hypothèse que le traitement a un effet sur le taux de glucose, l'espérance est $15g/l$. Calculer la puissance du test proposé (qui consiste à rejeter H_0 si \bar{X} est supérieur à 15).

Exercice 3 *Lésions parathyroïdiennes*

La calcémie moyenne (taux du Ca^{++} sanguin) pour des individus témoins (sans problème médical particulier) est égale à 100 mg/l avec un écart-type de $\sigma_0 = 7.7\text{ mg/l}$. On s'intéresse ici à la calcémie chez des individus atteints de lésions parathyroïdiennes. Chez $n = 50$ sujets malades, on dose la calcémie notée X_i , $i = 1, \dots, n$. On suppose que la variance de la calcémie chez un individu malade est la même que celle chez un individu sain.

1. On se demande si les sujets atteints ont une calcémie inférieure (en espérance) aux individus sains. Construire un test de niveau 5% permettant de répondre à cette question.
2. On observe $\sum_{i=1}^{50} X_i = 4650$. Conclure.
3. Quel est le degré de signification (la p-valeur) du test ci-dessus ?
4. Si en réalité $m^* = 95\text{ mg/l}$, quelle est la puissance du test ?

Exercice 4 *La mort programmée*

Un laboratoire de recherche étudie, sur une nouvelle espèce de vers (*C. marginalus*), les gènes pouvant être impliqués dans la mort programmée. La distribution de la durée de vie de ces vers est inconnue mais des études antérieures ont montré que l'espérance de vie de ces vers est $\mu = 250$ heures et que l'écart-type de leur durée de vie est $\sigma = 24$ heures. Après modification d'un gène supposé intervenir dans la mort programmée, on a relevé sur un échantillon de 80 vers une durée de vie moyenne de 256 heures.

1. Peut-on conclure que la modification de ce gène induit une augmentation significative (au niveau 5%) de l'espérance de vie des vers ?
2. Quel est le degré de signification (la p-valeur) du test réalisé ?
3. On suppose que la modification du gène induit une réelle augmentation de l'espérance de vie de 7 heures. Quelle est la puissance du test mis en oeuvre ?
4. Combien de vers faudrait-il inclure dans l'étude pour avoir une puissance de 90% ?