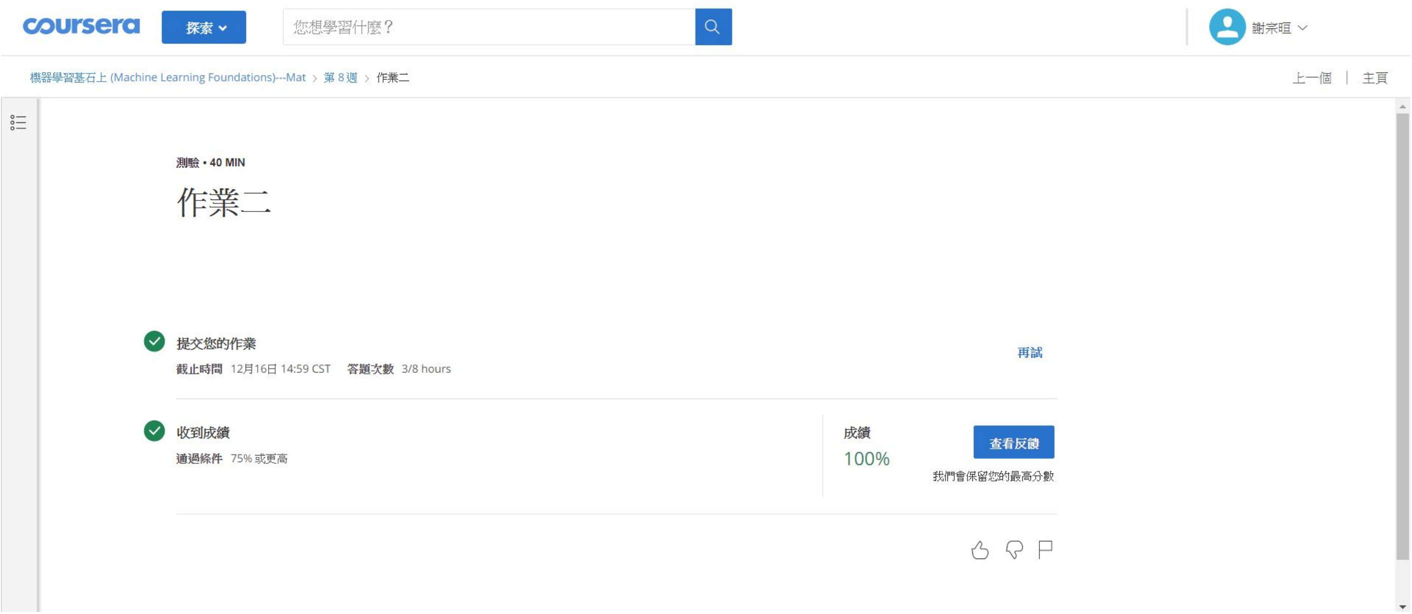
MLFoundation HW #2

B07902055 謝宗晅

1.

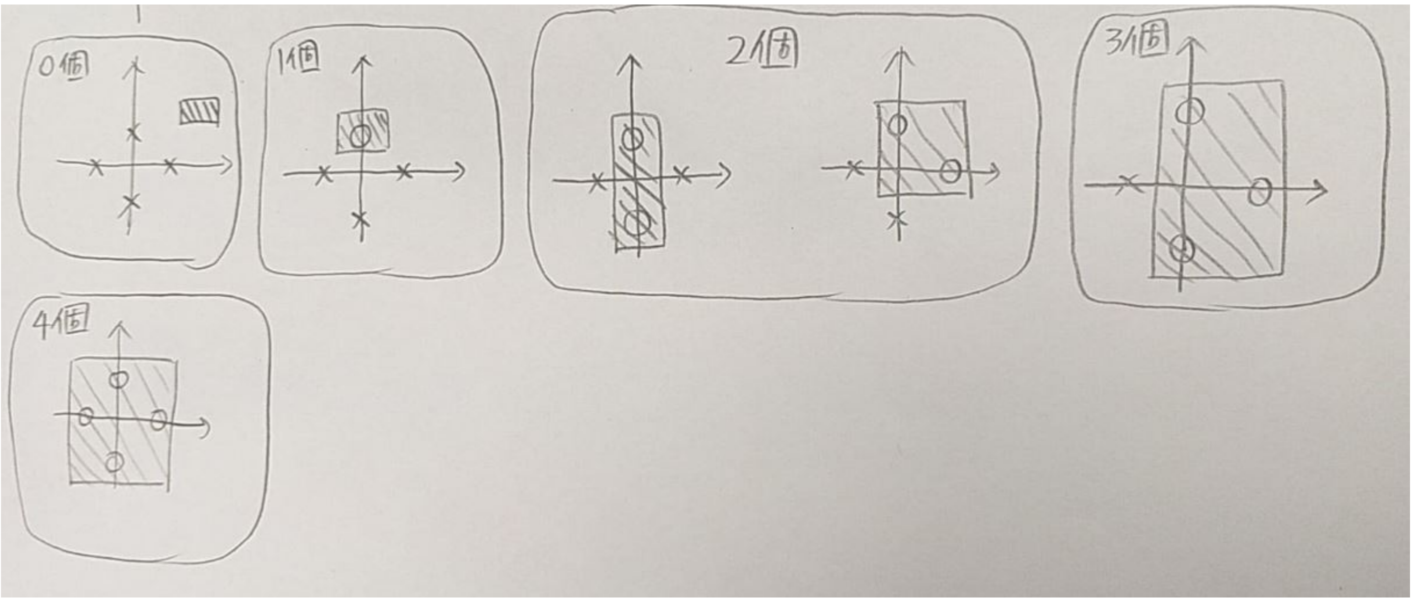


2.

在二維平面上面有四個點，那些點的位置分別是：
$\{(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)\}$
對於這筆輸入，我們可以 shatter 每一種可能性，因為任何一種 $+1$ 或 -1 的組合，都可以有方法來達成：

- 0 個 $+1$：把那個長方形畫在很遠的地方
- 1 個 $+1$：畫一個很小的長方形，只罩住需要罩住的點
- 2 個 $+1$：如果是對角的點的組合，就畫一個長長的長方形罩住他們；如果是相鄰的點的組合，就畫一個只罩住他們的長方形
- 3 個 $+1$：把 -1 的點排除在外的長方形就可以達成要求
- 4 個 $+1$：只要有足夠大的長方形就可以把所有點罩住

以下是對上方每個情況的舉例：



由於我們可以 shatter 其中一筆 input，因此我們就可以說該 hypothesis 的 D_{VC} 不小於 4。

3.

可以用 4 進位的方式來表示數字，如此的話，對於正數的 "$\mathrm{mod}\ 4$" 就可以視為只有第一個位數以及小數點後的數字：
Ex：ParseError: KaTeX parse error: \cr valid only within a tabular/array environment。

觀察 $h_\alpha(x)$ 的規律，可以發現如果 $\alpha x \in (3,4)$ 的話，$h_\alpha(x) = +1$；
如果 $\alpha x \in [2,3)$ 的話，$h_\alpha(x) = -1$。

而且如果對於 N 筆輸入，我們都可以找到一組 $X = \{x_i,\ 1 \le i \le N\}$，使得 $\mathcal{H}$ 可以 shatter 這組 X 的話，這個 $\mathcal{H}$ 的 d_{vc} 就是無限大：

$$X = \left\{ x_i \;\middle|\; x_i = 4^{-2^N} + \sum_{k=0}^{2^N-1} 4^{-k}(2 + [\![\lfloor (k \times 2^{-(i-1)}) \bmod 2 \rfloor = 1]\!]) \right\}$$

(當 $\alpha = 4^i, i \in \{0, ..., 2^N - 1\}$，每個不同的 α 都會得到不同的 $h(x_i)$ 組合)

舉例來說，當 $N = 2$ 時，

$$X = \left\{(2.3231)_4, (2.2331)_4\right\}$$

則當 $\alpha = 4^i, i \in \{0,1,2,3\}$ 的話，$\mathcal{H}$ 就可以 shatter 這個 X：
$\alpha = 1,\ h_1(x_i) = \{-1,-1\}$
$\alpha = 4,\ h_4(x_i) = \{-1,+1\}$
$\alpha = 16,\ h_{16}(x_i) = \{+1,-1\}$
$\alpha = 64,\ h_{64}(x_i) = \{+1,+1\}$
因為對於每個有限的 N 我們都可以做出一組 X，因此這個 $\mathcal{H}$ 的 d_{vc} 是 ∞。

PS：關於 X 的說明，其實如果把所有 x_i 直的排列，由右往左寫下來的話，各個位數橫著看就會是代表從 0 到 2^N-1 的所有數字，因為如果 mod 之後是 2... 的話，那個位數就會做出 -1，如果是 3... 的話，那個位數就會做出 +1，以 $N=2$ 的例子來說的話，就會長的像是：
2 2 -> 0 (0 0 -> -1 -1)
---- (小數點)
2 3 -> 1 (0 1 -> -1 +1)
3 2 -> 2 (1 0 -> +1 -1)
3 3 -> 3 (1 1 -> +1 +1)
1 1 -> 這個位數是為了保證前面的東西計算之後不會出現 $\text{sign}(0)$ 的特殊情況。

4.

反證法：
如果說 $d_{vc}(\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2) > d_{vc}(\mathcal{H}_1)$ 的話，就代表有某個 $K \in \mathbb{N}$ 使得 $(\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2)$ 可以 shatter 某 K 筆輸入，而 $\mathcal{H}_1$ 沒辦法 shatter 任何 K 筆輸入，就得到了 $(\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2) \supset \mathcal{H}_1$。
但因為 $\mathcal{H}_1 \supseteq (\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2)$，因此我們的假設與事實不符。
得證 $d_{vc}(\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2) \leq d_{vc}(\mathcal{H}_1)$。

5.

因為

$$m_{\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2}(N) = m_{\mathcal{H}_1}(N) + m_{\mathcal{H}_2}(N) - m_{\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2}(N)$$

而且

$$m_{\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2}(N) = 2$$

(因為只有"全部都是 +1" 和 "全部都是 -1" 的 hypothesis 會是他們的交集。)

所以

$$m_{\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2}(N) = (N+1) + (N+1) - 2 = 2N$$

當 $N=1$ 時，$m_{\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2}(1) = 2 = 2^1$；
當 $N=2$ 時，$m_{\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2}(2) = 4 = 2^2$；
當 $N=3$ 時，$m_{\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2}(3) = 6 < 2^3$

因此 $d_{vc}(\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2) = 2$

6.

考慮以下的幾種情況：

- $s=1,\ \theta>0$
  - $h(x)$ 答錯的情況：$h(x)=-1,\ f(x)=+1$
    - 機率：$\frac{\theta}{2}$
  - $h(x)$ 答錯的情況：$h(x)=+1,\ f(x)=-1$
    - 機率：0 (這個情況不可能發生)
- $s=1,\ \theta<0$
  - $h(x)$ 答錯的情況：$h(x)=-1,\ f(x)=+1$
    - 機率：0 (這個情況不可能發生)
  - $h(x)$ 答錯的情況：$h(x)=+1,\ f(x)=-1$
    - 機率：$\frac{-\theta}{2}$

合併 $s=1$ 的情況，可以發現在 θ 外面加上絕對值就可以用一個式子表示：
$\frac{|\theta|}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{|\theta|}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{|\theta|}{2}$

- $s=-1,\ \theta>0$
  - $h(x)$ 答錯的情況：$h(x)=-1,\ f(x)=+1$
    - 機率：$\frac{1}{2}(1-\theta)$
  - $h(x)$ 答錯的情況：$h(x)=+1,\ f(x)=-1$
    - 機率：$\frac{1}{2}$
- $s=-1,\ \theta<0$
  - $h(x)$ 答錯的情況：$h(x)=-1,\ f(x)=+1$
    - 機率：$\frac{1}{2}$
  - $h(x)$ 答錯的情況：$h(x)=+1,\ f(x)=-1$
    - 機率：$\frac{1}{2}(1-(-\theta))$

同樣的，我們可以在 θ 外面加上絕對值來合併 $s=-1$ 的結果：
$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(1-|\theta|)+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-|\theta|))=1-\frac{|\theta|}{2}$

如果要把 s 也加入式子的話，就用以下的表示方式：
$\frac{s+1}{2}[\text{ s = 1 的結果 }]-\frac{s-1}{2}[\text{ s = -1 的結果 }]$

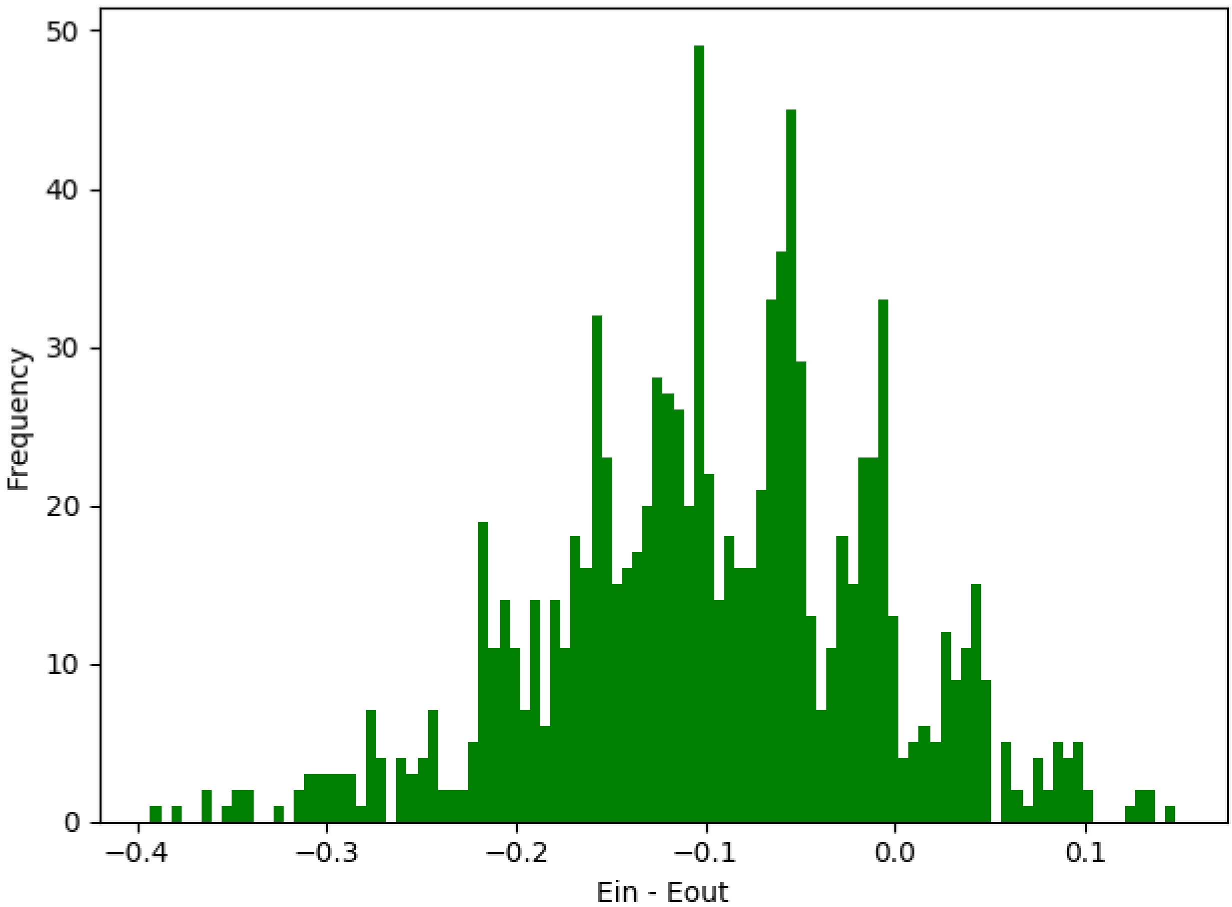
所以還沒算入 noise 的錯誤率就會是：
$\frac{s+1}{2}(\frac{|\theta|}{2})\ -\ \frac{s-1}{2}(1-\frac{|\theta|}{2})=\frac{s|\theta|}{2}-\frac{s}{2}+\frac{1}{2}$

把 noise 算入的話，錯誤的就只有以下的情況：

- 正確的 × noise 機率：
  - $(\frac{1}{2}-\frac{s|\theta|}{2}+\frac{s}{2})\times(0.2)$
- 錯誤的 × (1 - noise 機率)：
  - $(\frac{s|\theta|}{2}-\frac{s}{2}+\frac{1}{2})\times(0.8)$

將以上結果加總的話，就能算出結果：
ParseError: KaTeX parse error: \cr valid only within a tabular/array environment

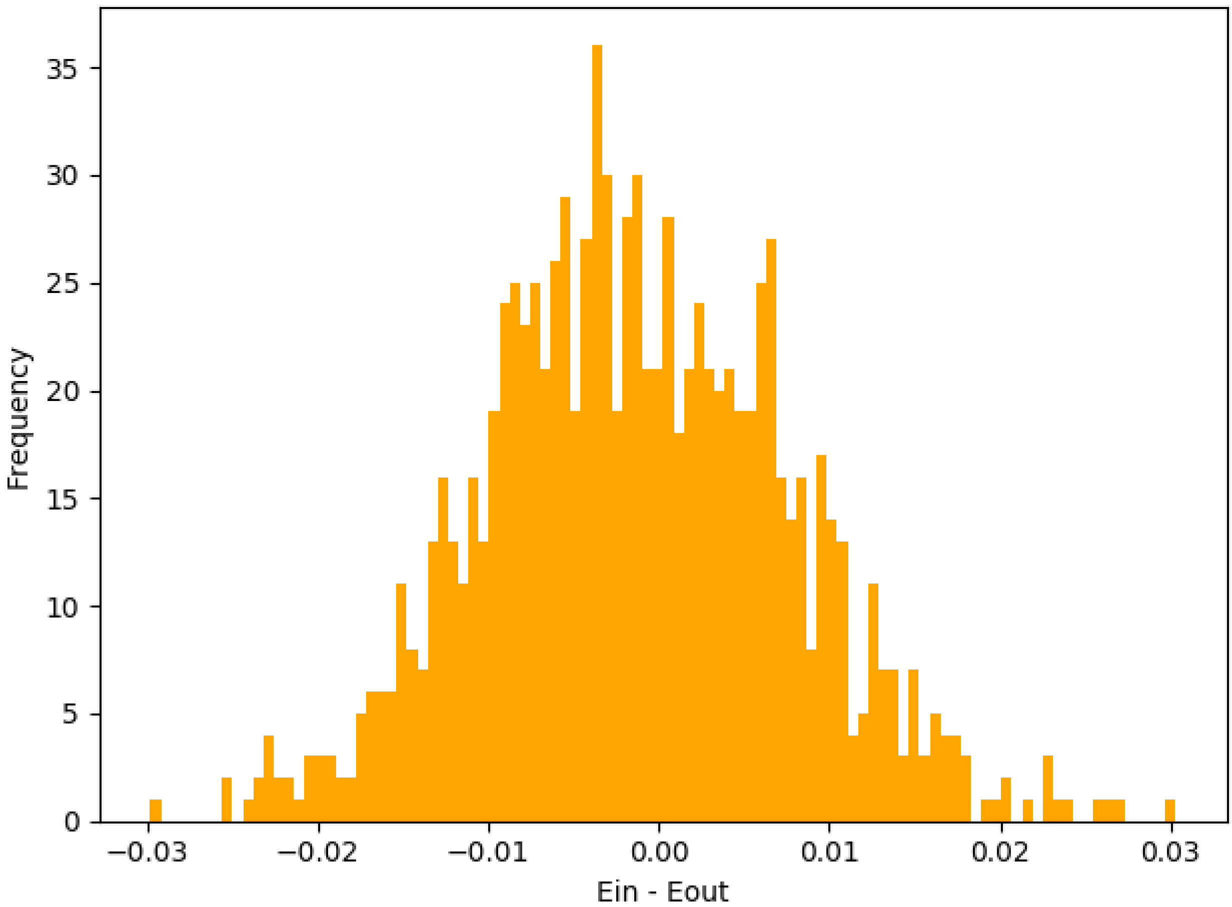
7.



Findings

有超過半數的 $E_{in} - E_{out}$ 結果是負的。因為資料的數量太少了，所以才會造成 $E_{in} - E_{out}$ 的值這麼不均勻。

8.



Findings

這題的結果，$E_{in} - E_{out}$ 的分布相較於第七題的結果比較均勻，但總體來看，負的還是稍微比正的多一些，應該是因為資料的數量變多了之後，那麼多的 x_i 會使得 E_{in} 更接近我們以 "資料分布完全均勻" 的假設去估計所得的 E_{out} 。

9. Bonus

首先，先證明那個 $\mathcal{H}$ 的 $d_{vc} \geq 2^d$：
當 $N = 2^d$ 時，我們一定可以找到一種 $\mathbf{t}$ 使得每一個點 (每一個 $\mathbf{x}$) 都分布在不同的區域裡面，這樣的話只要做出 2^{2^d} 種 $\mathbf{S}$，就可以 shatter 了 (如果做出 2^{2^d} 種 output，就可以 shatter 那筆輸入，所以可以 shatter)

再來，再證明那個 $\mathcal{H}$ 的 $d_{vc} < 2^d + 1$：
考慮 $N = 2^d + 1$ 時，我的想法是先從 $N = 2^d$ 的情況開始想，因為被分割的區域最多只有 2^d 個，因此必定會有兩個點位於同一個被分割的區域裡面。所以將新增的點放到"跟恰好一個點一組"的話，一樣可以做出 2^{2^d} 種 output。但是問題來了，如果要將被新增的那個點放在一個固定的位置，使得它有辦法透過改變切法來跟每個點同一組的話，則那個點的位置就必須是在"最中心"的附近。"最中心"的意思是，如果我們將本來的 2^d 個點擺放的整整齊齊，使得某個 $t_1 = t_2 = ... = t_d$ 的這個分割可以把全部的點分到不同的區域的話，那麼"最中心的位置"就是位於 $(t_1, ..., t_d)$ 這附近的位置。因為如果新增的點位於那附近的話，就可以讓 $\mathbf{t}$ 裡面的某個 t_i 微調一下就可以把新增的點

分配到不同的區域。但是如果是位於那附近的話，就有至少一種 output 是那種擺放方法絕對沒辦法 shatter 的：就是新增的點是 $+1$，而其他 2^d 個點都是 -1，因此沒辦法 shatter $2^d + 1$ 筆輸入。