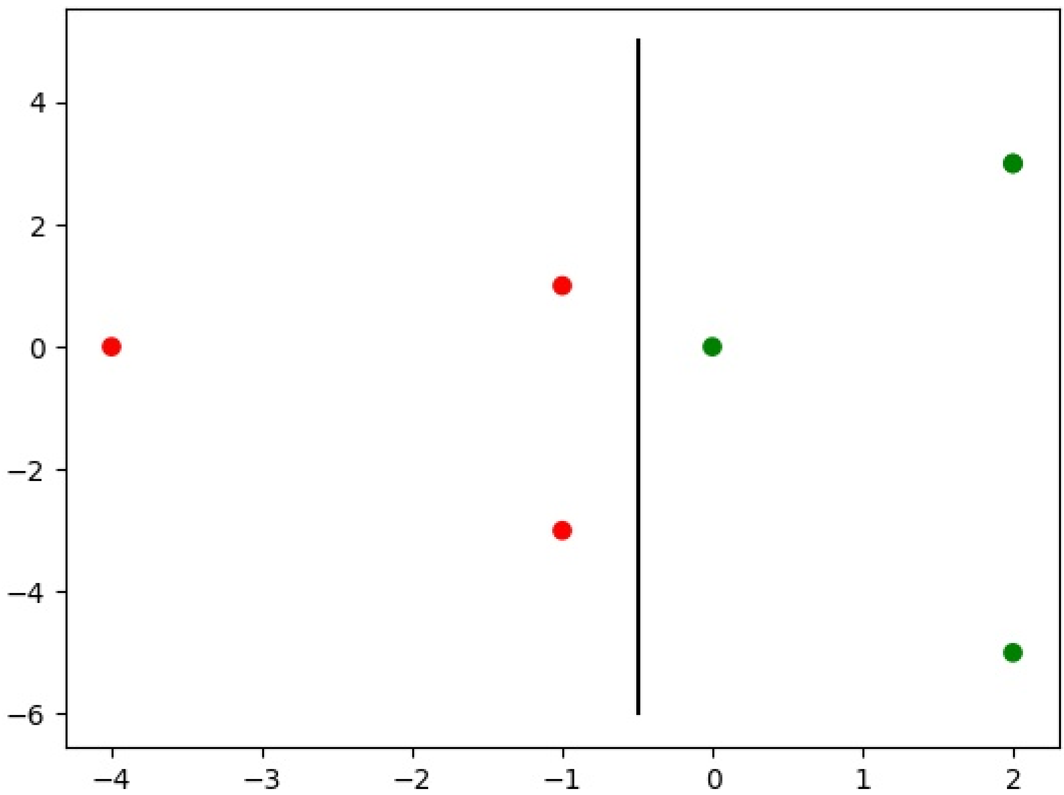
ML Techniques HW#1

b07902055 謝宗晅

Explicit versus Implicit

1.



上面的點點是在 $\mathcal{Z}$ 空間裡面的所有點，然後黑色的線代表的是：$z_1 = -0.5$ 這條線。其中紅色的點代表 $y = -1$，綠色的點代表 $y = +1$。該條黑色的線很直覺的就是將平面分割開來最好的線。
並且如果將該結果放回原本的 $\mathcal{X}$ 空間的話，會變成：

$$\phi_1(\mathbf{x}) = z_1 = -0.5 = x_2^2 - 2x_1 - 2$$

$$\Rightarrow x_2^2 - 2x_1 - 1.5 = 0$$

2.

我使用的是 sklearn 套件，將題目的座標輸入之後，設定 `kernel = 'poly', degree = 2, gamma = 1, coef0 = 1, C = 1e8, shrinking = False` 就可以開始做了 (`C = 1e8` ：將 C 設的很大，就可以視為是 hard margin SVM； `shrinking = False` ：避免為了增加效能而將某些 vector 排除在外的可能性)。使用 `dual_coef_` 就可以看到最佳的 coefficients 是：

$(0.64491963, 0.76220325, 0.88870349, 0.22988879, 0.2885306)$ (因為這個套件顯示的會是 $y_i \alpha_i$ 的乘積，因此要把它們的值取絕對值才會是上方的值)；使用 `support_` 就可以看到那些 support vectors 的 indices 各是多少：$1, 2, 3, 4, 5$
所以我們可以得到

$$\alpha = (0, 0.64491963, 0.76220325, 0.88870349, 0.22988879, 0.2885306, 0)$$

其中 support vectors 就是 $\alpha_i \neq 0$ 的那些，也就是

$$\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6$$

3.

首先，

$$g(x) = \text{sign}\Big(\sum_{\text{support vector's } \alpha_i} y_i \alpha_i K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) + b \Big)$$

其中

$$K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) = (1 + \mathbf{x}_i^T \mathbf{x})^2$$

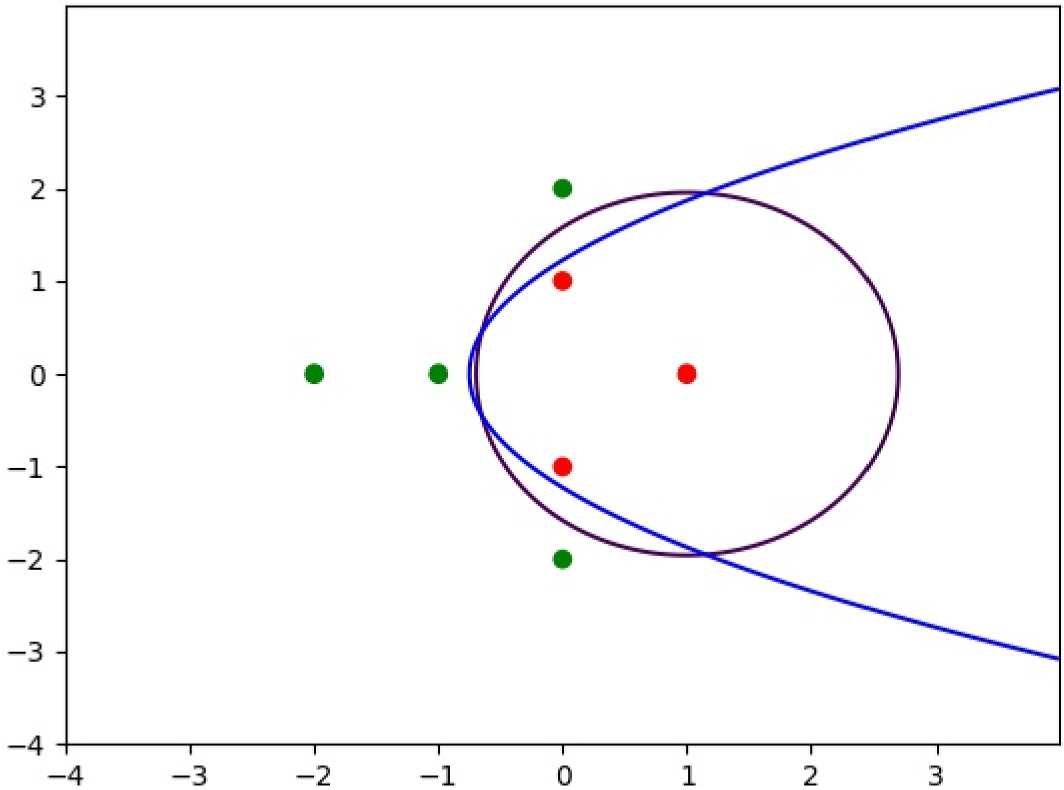
b 可以直接由 sklearn 的 `intercept_` 來知道，$y_i \alpha_i$ 已經在上一個題目獲得，但 $K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x})$ 沒辦法直接取得，因此把式子展開：(將 $\mathbf{x}_{i,1}$ 化簡為 a_1，將 $\mathbf{x}_{i,2}$ 化簡為 a_2)

$$\begin{aligned} K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) &= (1 + \mathbf{x}_i^T \mathbf{x})^2 \\ &= 1 + 2\mathbf{x}_i^T \mathbf{x} + (\mathbf{x}_i^T \mathbf{x})^2 \\ &= 1 + 2a_1 x_1 + 2a_2 x_2 + (a_1 x_1 + a_2 x_2)^2 \\ &= 1 + 2a_1 x_1 + 2a_2 x_2 + (a_1 x_1)^2 + 2a_1 a_2 x_1 x_2 + (a_2 x_2)^2 \end{aligned}$$

把每一項的係數總和都算出來之後就好了：

$$g(x) = \text{sign}\big(-1.666 + -1.777 x_1 + 0 x_2 + 0.8887 (x_1)^2 + 0 x_1 x_2 + 0.6665 (x_2)^2 \big)$$

4.



如圖，這個是在 $\mathcal{X}$ 平面上面的所有點，其中，藍色的線代表的是第一題的曲線，紫色的線代表的是第三題的曲線，他們是不一樣的曲線。因為第三題的變換代表的是：

$$\phi(\mathbf{x}) = (1, \sqrt{2}x_1, \sqrt{2}x_2, x_1^2, x_2^2)$$

顯然和第一題的變換是完全不同的變換，因此他們做出來的結果不同。

Dual Problem of Soft-Margin Support Vector Machine with Per-Example Margin Goals

5.

根據投影片的推導，我們可以得到很類似的結果，只是把式子中的 1 換成 ρ_n：

$$\mathcal{L}((b, \mathbf{w}, \boldsymbol{\xi}), (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})) = \frac{1}{2}\mathbf{w}^T\mathbf{w} + C\sum_{n=1}^{N}\xi_n + \sum_{n=1}^{N}\alpha_n(\rho_n - \xi_n - y_n(\mathbf{w}^T\mathbf{x}_n + b)) + \sum_{n=1}^{N}\beta_n(-\xi_n)$$

6.

根據課本投影片，在求極值的過程中，有下列的偏微分式子：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi_n} = 0 = C - \alpha_n - \beta_n \implies \beta_n = C - \alpha_n$$

$$\implies \mathcal{L} = \frac{1}{2}\mathbf{w}^T\mathbf{w} + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n(\rho_n - y_n(\mathbf{w}^T\mathbf{x}_n + b)) \text{ , where } \beta_n = C - \alpha_n$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b} = 0 = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n(-y_n) = 0 \implies \sum_{n=1}^{N} \alpha_n y_n = 0$$

$$\implies \mathcal{L} = \frac{1}{2}\mathbf{w}^T\mathbf{w} + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n(\rho_n - y_n(\mathbf{w}^T\mathbf{x}_n))$$

$$\left(\text{where } \beta_n = C - \alpha_n \text{ , and } \sum_{n=1}^{N} \alpha_n y_n = 0\right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_i} = 0 = w_i - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n y_n \mathbf{x}_{n,i} \implies \mathbf{w} = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n y_n \mathbf{x}_n$$

$$\implies \mathcal{L} = \frac{1}{2}\mathbf{w}^T\mathbf{w} + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \rho_n - \mathbf{w}^T\mathbf{w} = -\frac{1}{2}\left\| \sum_{n=1}^{N} \alpha_n y_n \mathbf{x}_n \right\|^2 + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \rho_n$$

$$\left(\text{where } \beta_n = C - \alpha_n \text{ , } \sum_{n=1}^{N} \alpha_n y_n = 0 \text{ , and } \mathbf{w} = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n y_n \mathbf{x}_n\right)$$

KKT Conditions :

- primal feasible : $y_n(\mathbf{w}^T\mathbf{x}_n + b) \geq \rho_n - \xi_n$
- dual feasible : $\alpha_n \geq 0$
- dual-inner optimal : $\sum y_n \alpha_n = 0$; $\mathbf{w} = \sum \alpha_n y_n \mathbf{x}_n$
- primal-inner optimal : $\alpha_n(\rho_n - y_n(\mathbf{w}^T\mathbf{x}_n + b)) = 0$

7.

我們所得到的 P_1' 解答放到式子裡面就會是：

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w},b,\boldsymbol{\xi}} \ & \frac{1}{2}(\mathbf{w}_*')^T\mathbf{w}_*' + C'\sum_{n=1}^{N}\xi_n \\ \text{s.t. } & y_n((\mathbf{w}_*')^T\mathbf{x}_n + b_*') \geq 0.5 - \xi_n \\ & \xi_n \geq 0 \end{aligned}$$

如果將下方的不等式左右邊都同乘 2，就會變成：

$$
\begin{aligned}
&2y_n((\mathbf{w}'_*)^T\mathbf{x}_n + b'_*) \geq 1 - 2\xi_n \\
&\xi_n \geq 0 \\
\Longrightarrow\ &y_n((2\mathbf{w}'_*)^T\mathbf{x}_n + 2b'_*) \geq 1 - 2\xi_n \\
&\xi_n \geq 0
\end{aligned}
$$

如果把這個新的 $\mathbf{w}$ 放到上方的 min 式子，就會變成：

$$
\min_{\mathbf{w},b,\boldsymbol{\xi}} \frac{1}{2}(4(\mathbf{w}'_*)^T\mathbf{w}'_*) + C\sum_{n=1}^{N}(2\xi_n)
$$

就可以發現，如果將上方式子的 C 令成 $2C'$，整個 P_1 的 min 式子就會變成 P'_1 的 min 式子的 4 倍：

$$
\begin{aligned}
&\text{if } C = 2C' \text{ , then } P_1\text{：} \\
&\min_{\mathbf{w},b,\boldsymbol{\xi}}\ \frac{1}{2}(4(\mathbf{w}'_*)^T\mathbf{w}'_*) + C\sum_{n=1}^{N}(2\xi_n) \\
=&\min_{\mathbf{w},b,\boldsymbol{\xi}}\ 4\Big(\frac{1}{2}(\mathbf{w}'_*)^T\mathbf{w}'_*\Big) + 4\Big(C'\sum_{n=1}^{N}\xi_n\Big) = \\
=&\min_{\mathbf{w},b,\boldsymbol{\xi}}\ 4\Big(\frac{1}{2}(\mathbf{w}'_*)^T\mathbf{w}'_* + C'\sum_{n=1}^{N}\xi_n\Big)
\end{aligned}
$$

進而得到了 P'_1 和 P_1 是兩個等價問題的結論，因為 一個函數的 minimizer 在該函數乘以一個常數倍數之後，minimizer 依然不會變。
從上方的式子就可以看出如果 $(\mathbf{w}'_*, b'_*)$ 是 P'_1 的最佳解，則 $(\mathbf{w}_*, b_*) = (2\mathbf{w}'_*, 2b'_*)$，並且若 P_1 的 $C = 2C'$ ($P'_1 : C'$)。

8.

因為題目假設該 data set 在 $\mathcal{Z}$ 空間裡面是可分的，那就代表 α^* 是以下式子的其中一個最佳解：

$$
\max_{\text{all } \alpha_n \geq 0, \sum y_n\alpha_n = 0} \Big(\min_{\mathbf{w}}\ \frac{1}{2}\mathbf{w}^T\mathbf{w} + \sum_{n=1}^{N}\alpha_n(1 - y_n(\mathbf{w}^T\mathbf{z}_n))\Big)
$$

其實也就等價於每一筆資料 $\mathbf{z}_n$ 對於 α^* 的 ξ_n 都會是 0 (如此一來 soft margin SVM 的式子中的 ξ_n 都會消失 $\Rightarrow$ 與上方 hard margin SVM 的式子相同)。那麼 C 的用途就只剩下限制 α_n 的大小了，因此若 C 不多做對於 α_n 大小的限制的話，hard margin 的最佳解就可以變成 soft margin 上的最佳解。
所以我們可以得到若

$$
C \geq \max_{1 \leq n \leq N} \alpha^*_n
$$

則 hard margin 的最佳解與 soft margin 的最佳解等價。

9.

[a] $K(\mathbf{x},\mathbf{x}')=(1-K_1(\mathbf{x},\mathbf{x}'))$: 不是 kernel function
反例：
假設 $M=\begin{bmatrix}0.4 & 0.6\\0.6 & 0.9\end{bmatrix}$ 代表的是 $K_1(\mathbf{x},\mathbf{x}')$ 的矩陣，先證明這個矩陣是否為符合規定的：

$$\begin{aligned}&M \text{ is symmetric, and}\\&\text{Let } \mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}, x_1,x_2\in\mathbb{R}\\&\mathbf{x}^TM\mathbf{x}=0.4x_1^2+1.2x_1x_2+0.9x_2^2=(0.2x_1+0.3x_2)^2\geq 0\\&\implies M \text{ is a positive semi-definite matrix}\end{aligned}$$

令 $M_{[a]}=\begin{bmatrix}1-0.4 & 1-0.6\\1-0.6 & 1-0.9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.6 & 0.4\\0.4 & 0.1\end{bmatrix}$ 是代表 $(1-K_1\mathbf{x},\mathbf{x}')$ 的矩陣，則

$$\begin{aligned}&\text{Let } \mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}, x_1,x_2\in\mathbb{R}\\&\mathbf{x}^TM_{[a]}\mathbf{x}=0.6x_1^2+0.8x_1x_2+0.1x_2^2\\&\text{if } (x_1,x_2)=(1,-1),\text{then } \mathbf{x}^TM_{[a]}\mathbf{x}=-0.1\end{aligned}$$

因此這題的 kernel function 不是一個 valid 的 kernel function。

[b] $K(\mathbf{x},\mathbf{x}')=(1-K_1(\mathbf{x},\mathbf{x}'))^0=1$: 是 kernel function
證明：
因為

$$K(\mathbf{x},\mathbf{x}')=1$$

因此用來代表 K 的矩陣會是

$$M_{[b]}=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\1 & 1 & \cdots & 1\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

它是個對稱矩陣，並且對所有 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ 都會有

$$\begin{gathered}\mathbf{x}^TM_{[b]}\mathbf{x}=(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2\geq 0\\\implies M_{[b]} \text{ is a positive semi-definite matrix}\end{gathered}$$

所以這是一個 valid 的 kernel function。

[c] $K(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \frac{1}{1-K_1(\mathbf{x},\mathbf{x}')}$: 是 kernel function
證明：
將 $\frac{1}{1-K_1(\mathbf{x},\mathbf{x}')}$ 用泰勒展開表示的話：

$$\frac{1}{1-K_1(\mathbf{x},\mathbf{x}')} = \sum_{n=0}^{\infty}(K_1(\mathbf{x},\mathbf{x}'))^n$$

也是一個合規定的 kernel function，理由如下：

Let $K_1(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \phi_1(\mathbf{x})^T\phi_1(\mathbf{x})$ and $K_2(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \phi_2(\mathbf{x})^T\phi_2(\mathbf{x})$ be two valid kernels,
and M_1, M_2 be their Gram matrix respectively,
then $M_1 = A^TA,\ \ M_2 = B^TB$
where $A = \left[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n\right],\ \ B = \left[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_n\right], \mathbf{a}_i = \phi_1(\mathbf{x}_i), \mathbf{b}_i = \phi_2(\mathbf{x}_i)$
Let $K(\mathbf{x},\mathbf{x}') = K_1(\mathbf{x},\mathbf{x}')K_2(\mathbf{x},\mathbf{x}')$
then we can yield that the Gram matrix of $K(\mathbf{x},\mathbf{x}')$ is $M = \left[m_{ij}\right]$
with $m_{ij} = \mathbf{a}_i^T\mathbf{a}_j\mathbf{b}_i^T\mathbf{b}_j$
M is symmetric (trivial)
Let $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^TM\mathbf{x} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_ix_j\mathbf{a}_i^T\mathbf{a}_j\mathbf{b}_i^T\mathbf{b}_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_ix_j\left(\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}a_{j,k}\right)\left(\sum_{l=1}^{n}b_{i,l}b_{j,l}\right) \\
&= \sum_{k,l}\sum_{i,j}x_ix_ja_{i,k}a_{j,k}b_{i,l}b_{j,l} \\
&= \sum_{k,l}\sum_{i=1}^{n}x_ia_{i,k}b_{i,l}\sum_{j=1}^{n}x_ja_{j,k}b_{j,l} \\
&= \sum_{k,l}\left(\sum_{i=1}^{n}x_ia_ib_i\right)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

因此我們可以得到結論：任何 valid kernel 相乘還會是 valid kernel，至於 valid kernel 的相加以及大於0的常數倍數都還是 valid kernel，證明如下：

$$
\begin{aligned}
&\text{Let } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \text{ and } K_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), K_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \text{ be two valid kernels} \\
&\text{and } M_1, M_2 \text{ are their Gram matrix respectively} \\
&\implies \mathbf{x}^T M_1 \mathbf{x} \geq 0, \;\; \mathbf{x}^T M_2 \mathbf{x} \geq 0 \\
&\implies \mathbf{x}^T (kM_1) \mathbf{x} \geq 0, \;\; \mathbf{x}^T (M_1 + M_2) \mathbf{x} \geq 0, \;\; \text{where } k > 0 \\
&\text{and } kM_1, (M_1 + M_2) \text{ are symmetric} \\
&\implies kK_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \text{ and } (K_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + K_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}')) \text{ are valid kernels for } k > 0
\end{aligned}
$$

[d] $K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{(1 - K_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}'))^2}$: 是 kernel function

證明：

同樣是把它用泰勒展開寫出來，就會變成：

$$
K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{(1 - K_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}'))^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n \Big(K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \Big)^{n-1}
$$

根據 [c] 選項的證明，就可以發現到這也是一個 valid kernel。

10.

若有個 soft margin SVM 解出的 g_{SVM} 如下：

$$
g_{\text{SVM}}(\mathbf{x}) = \text{sign}\Big(\sum_{\text{SV indices } n} \alpha_n y_n K(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) + b \Big)
$$

那麼如果將式子中的 $K(\mathbf{x}_n, \mathbf{x})$ 替換成 $\tilde{K}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) = pK(\mathbf{x}_n, \mathbf{x})$，那麼 α_n 就會變成 $\tilde{\alpha}_n = \frac{\alpha_n}{p}$ ：

$$
g_{\text{SVM}}(\mathbf{x}) = \text{sign}\Big(\sum_{\text{SV indices } n} \tilde{\alpha}_n y_n \tilde{K}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) + b \Big)
$$

接著來檢查看看改變 $K(\mathbf{x}_n, \mathbf{x})$ 之後，我們所計算的 b 會不會和原本有所不同：

$$
\begin{aligned}
&\text{for a free SV } (\mathbf{x}_s, y_s) \text{ (free : } \tilde{\alpha}_s < \tilde{C}) \\
&b = y_s - \sum_{\text{SV indices } n} \tilde{\alpha}_n y_n \tilde{K}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_s)
\end{aligned}
$$

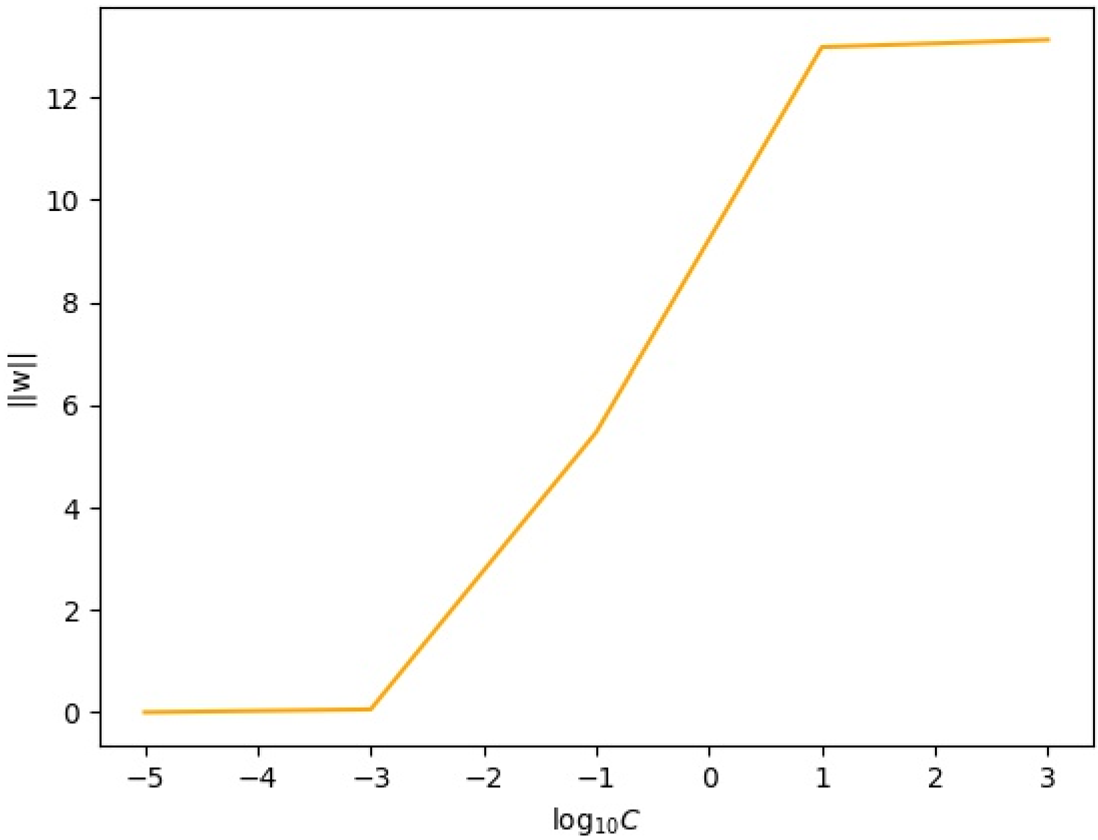
可以觀察到對於 "free support vector" 的定義，也和原先的 " $\alpha_s < C$ " 是相吻合的：

$$
\frac{\alpha_s}{p} = \tilde{\alpha}_s < \tilde{C} = \frac{C}{p}
$$

而且對於每一個 α_n，本來的限制 ($0 \leq \alpha_n \leq C$) 也可以推到新的限制 ($0 \leq \tilde{\alpha}_n \leq \tilde{C}$)

因此就算將 $K(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ 變成 $\tilde{K}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$，所得到的 g_{SVM} classifier 依然會是一樣的。

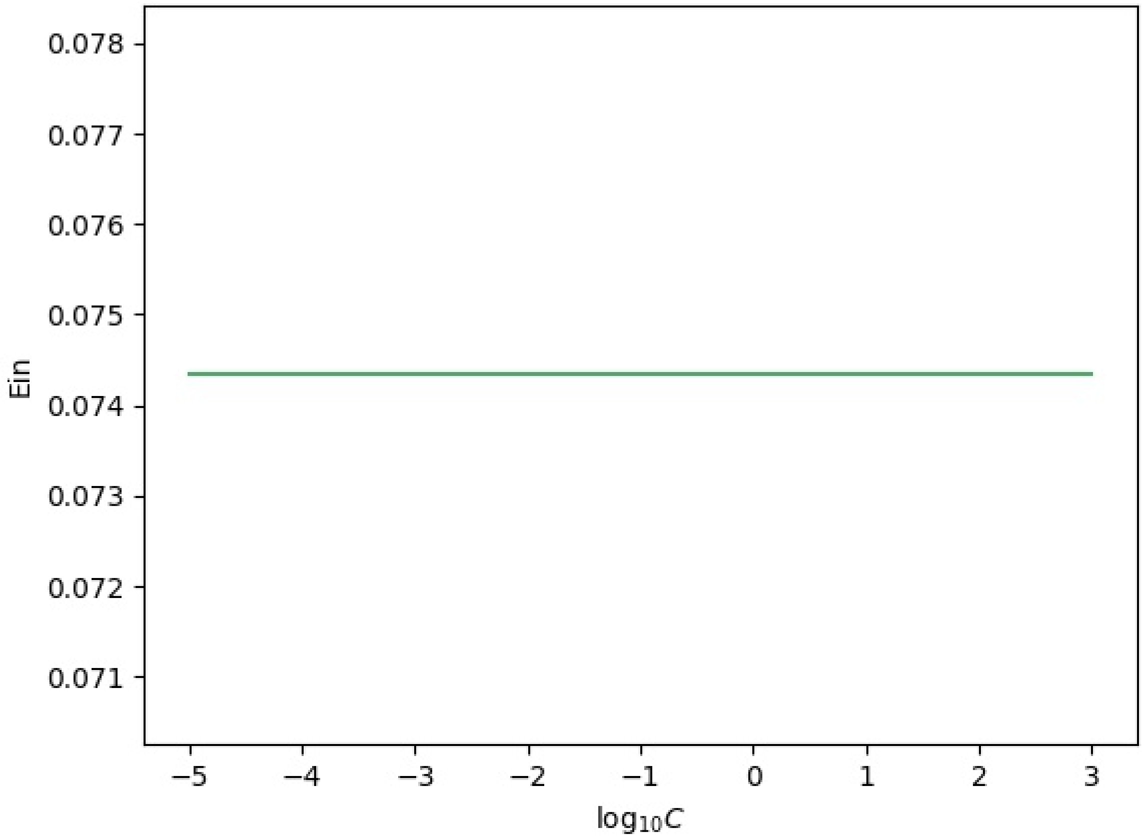
11.



Findings :

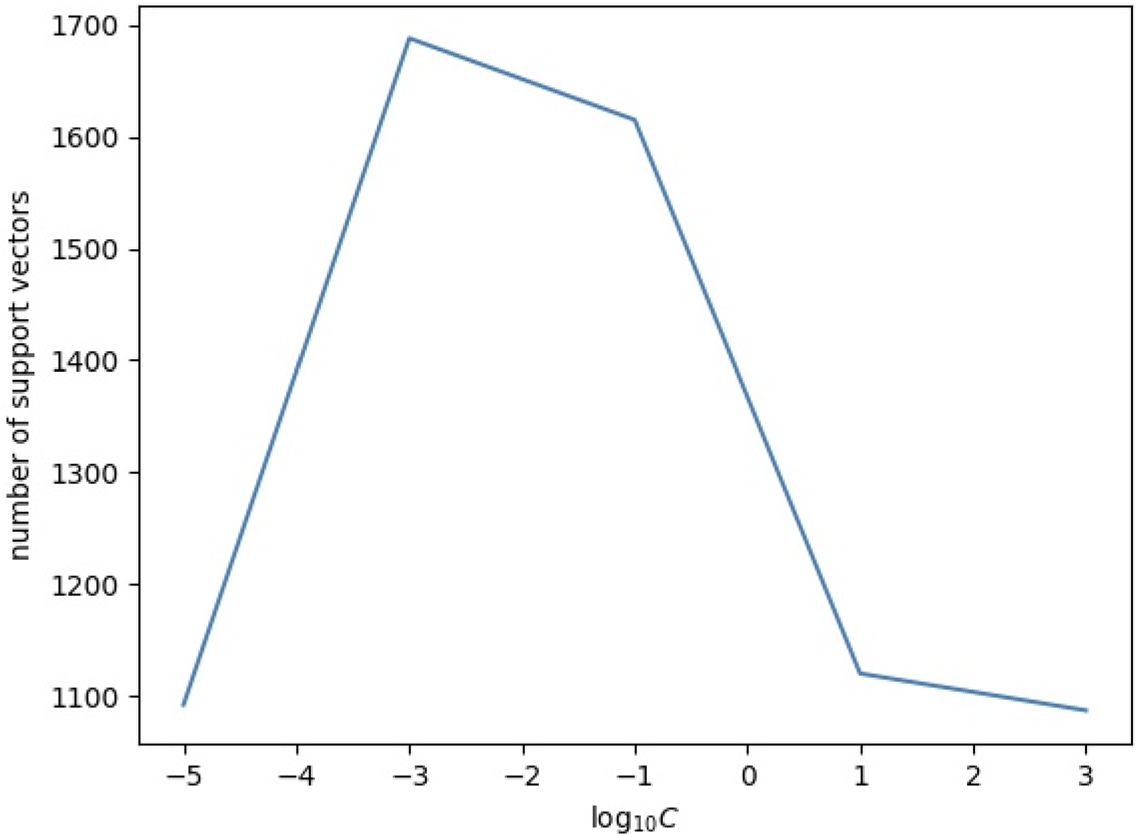
可以發現到因為 C 的限制逐漸放寬了，也代表 $\mathbf{w}$ 的長度可以越來越長，但是提升到一個上限之後似乎就停止了，因此我們可以得到一個結論：$\mathbf{w}$ 的長度 (複雜度) 會隨著 C 的上升而越來越長 (越來越複雜)，但也不會無止盡的跟著 C 向上成長，還是有一個長度的上界。

12.



Findings :
隨著 $\mathbf{w}$ 的複雜度提高，E_{in} 並沒有顯著的改變，可能的原因應該是隨著不同的 C，我們所得到的最佳 $\mathbf{w}$ 都是幾乎一樣的，只是 $\mathbf{w}$ 所選擇的 support vector 有所不同，使得 $\mathbf{w}$ 所張開的超平面的寬度有所變動。

13.

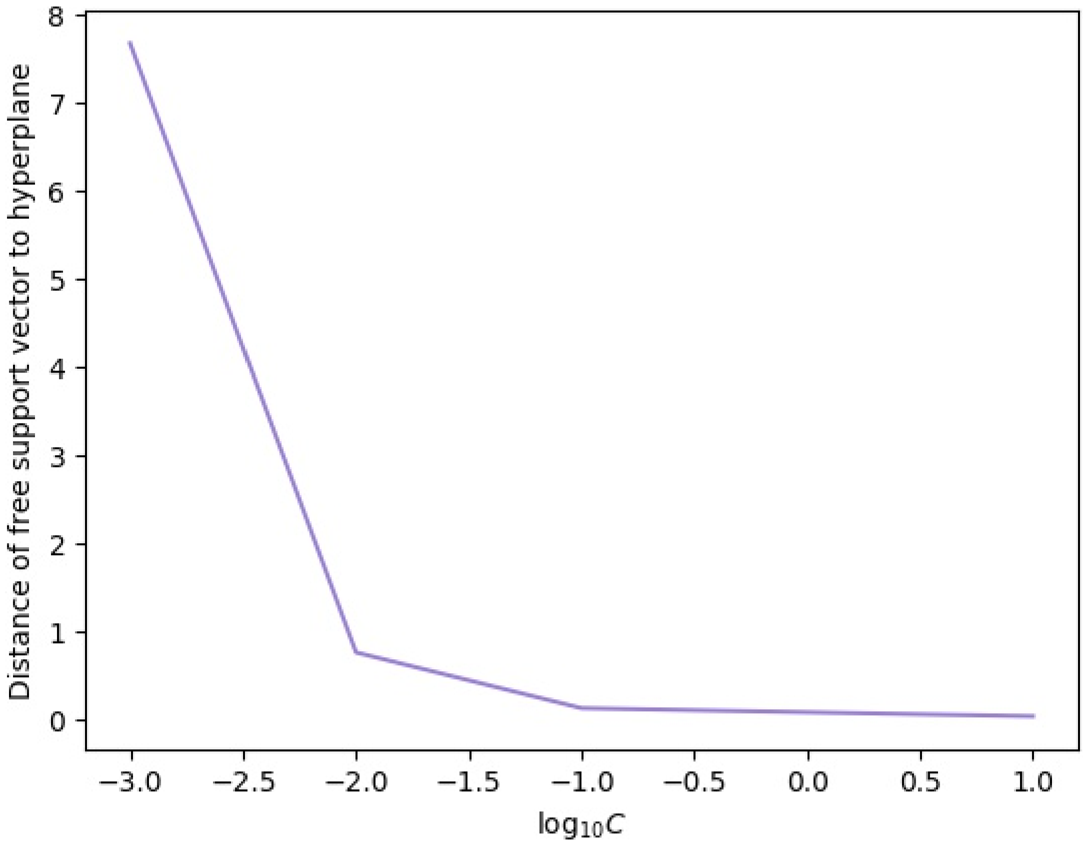


參考：B07902123 蔡奇夆

Findings :

可以發現到承第 12 題，support vector 的數量隨著 C 的變動而有所不同，在 $C = 0.001$ 之後的實驗，support vector 的數量逐漸減少，應該是因為 $\mathbf{w}$ 所張開的平面寬度逐漸變小，使得能罩住的 support vector 數量變小。至於在 $C = 10^{-5}$ 時，和同學討論的結果推測可能會是因為精準度不夠的緣故，使得有些 α 太小的 vector 直接被當作 $\alpha = 0$，使得判斷上有一些誤差。

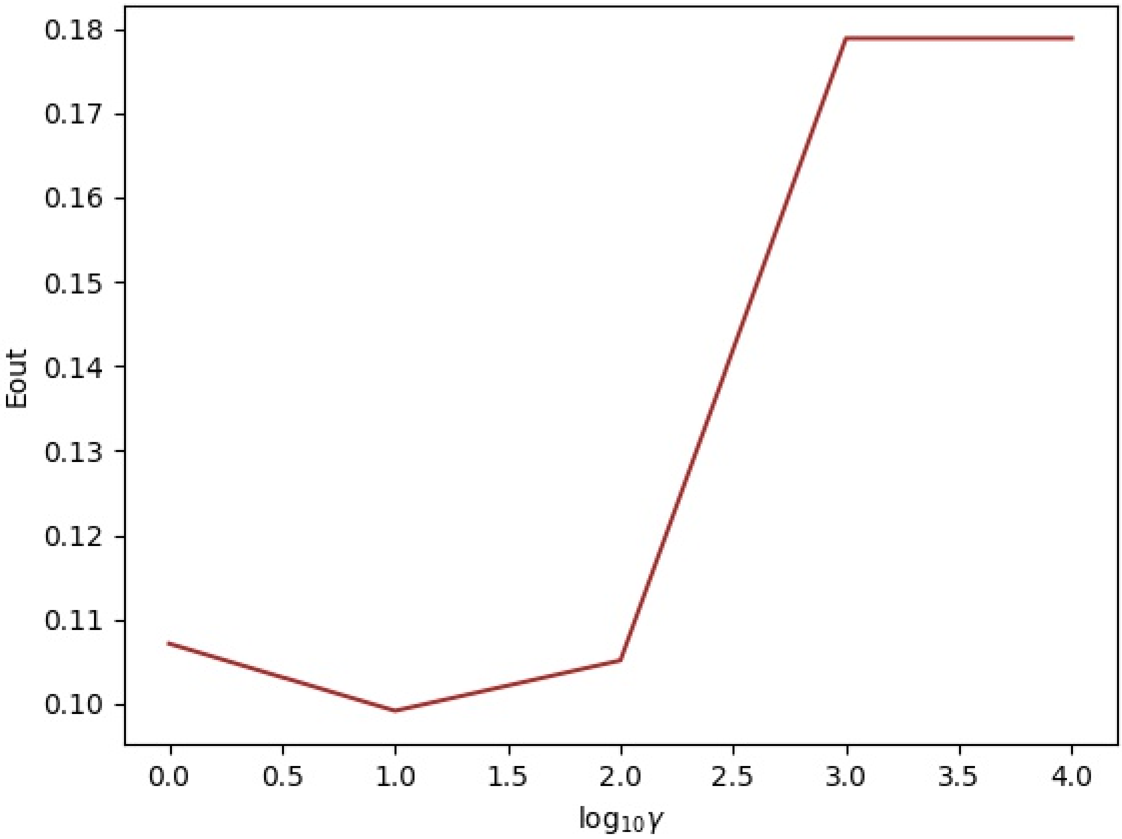
14.



Findings :

這題的圖片正好可以印證與 12 和 13 題類似的想法 (雖然使用的 kernel function 不同)，當 C 的大小逐漸變大，超平面的複雜度逐漸變高，free support vector 到超平面的距離就也逐漸變小。

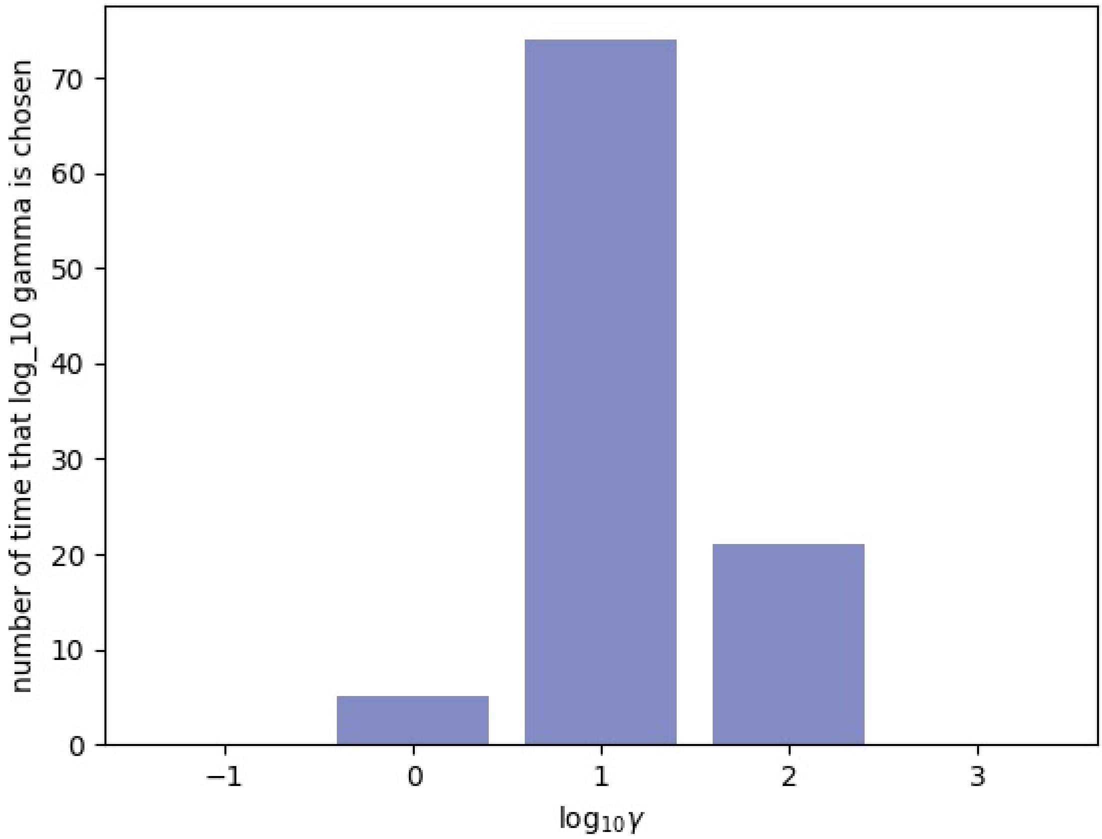
15.



Findings :

隨著 γ 的升高，E_{out} 並沒有一致的趨勢，反而是在 $\gamma = 10$ 的時候有了最好的 E_{out} 表現，因此可以得到 γ 越大或越小不一定會讓預測變準確，必須使用剛剛好的 γ 才能使預測表現最好。

16.



Findings :
和上一題的結果一樣，因為 $\gamma = 10$ 的時候應該是最好的預測，所以 $\gamma = 10$ 被我們自行設計的 validation procedure 所挑選出來的次數也最多。

Bonus

17.

這題使用反證法，考慮一個 soft margin SVM，如果對於以下這個問題：

$$\begin{aligned} \min_{b,\mathbf{w}} \quad & \frac{1}{2}\mathbf{w}^T\mathbf{w} + C\sum_{n=1}^{N}\xi_n \\ \text{s.t.} \quad & y_n(\mathbf{w}^T\mathbf{z}_n + b) \geq 1 - \xi_n \\ & \text{and } \xi_n \geq 0 \ \text{ for all } n \end{aligned}$$

的最佳解是 $(\mathbf{w}_*, b_*)$，其中對應到所有常數的特徵轉換 index 的集合是 S_{constant}，並且對於所有 $i \in S_{\text{constant}}$，$z_i$ 的權重 $w_{*i} \neq 0$，那麼我們可以構造出一個更好的最佳解：
令

$$
b' = b_* + \sum_{i \in S_{\text{constant}}} z_i w_{*i}
$$

$$
\mathbf{w}' = (w_k), \text{where } w_k = \begin{cases} 0 & , \text{if } k \in S_{\text{constant}} \\ w_{*k} & , \text{if } k \notin S_{\text{constant}} \end{cases}
$$

則 $(\mathbf{w}', b')$ 是一個更好的最佳解：
先檢查 $(\mathbf{w}', b')$ 是否滿足題目的要求：

$$
\begin{aligned}
y_n(\mathbf{w}_*^T \mathbf{z}_n + b_*) &= y_n \left(\sum_{i \in S_{\text{constant}}} w_{*i} z_i + \sum_{j \notin S_{\text{constant}}} w_{*j} z_j + b_* \right) \\
&= y_n \left(\sum_{j \notin S_{\text{constant}}} w_{*j} z_j + b' \right) \\
&= y_n \left(\sum_{i=1}^{N} w'_j z_j + b' \right) \\
&= y_n((\mathbf{w}')^T \mathbf{z}_n + b') \geq 1 - \xi_n \\
&\text{and } \xi \geq 0 \ \text{ for all } n
\end{aligned}
$$

但是

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} \mathbf{w}_*^T \mathbf{w}_* &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i \in S_{\text{constant}}} w_{*i}^2 + \sum_{j \notin S_{\text{constant}}} w_{*j}^2 \right) \\
&> \frac{1}{2} \left(\sum_{j \notin S_{\text{constant}}} w_{*j}^2 \right) = \frac{1}{2} (\mathbf{w}')^T \mathbf{w}'
\end{aligned}
$$

因此可以發現到 $(\mathbf{w}_*, b_*)$ 不是最佳解，最佳解會是對於所有常數特徵轉換的 w_i 權重都為 0 的 $(\mathbf{w}', b')$。

18.

Hard margin SVM 的對偶問題：

$$
\begin{aligned}
&\min_{\boldsymbol{\alpha}} \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha}^T Q \boldsymbol{\alpha} - 1_N^T \boldsymbol{\alpha} \\
\text{subject to } &\mathbf{y}^T \boldsymbol{\alpha} = 0, \\
&\alpha_n \geq 0 \text{ for all } \alpha_n \\
&\text{where } Q = [q_{n,m}], \quad q_{n,m} = y_n y_m \mathbf{x}_n^T \mathbf{x}_m
\end{aligned}
$$

使用拉格朗日乘數，就可以得到：

$$\min_{\boldsymbol{\alpha}} \max_{\lambda_i \geq 0} \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}^T Q \boldsymbol{\alpha} - 1_N^T \boldsymbol{\alpha} - \lambda_0 \mathbf{y}^T \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\alpha}$$

假設這個問題具有強對偶性，則上方的式子就等於：

$$\max_{\lambda_i \geq 0} \min_{\boldsymbol{\alpha}} \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}^T Q \boldsymbol{\alpha} - 1_N^T \boldsymbol{\alpha} - \lambda_0 \mathbf{y}^T \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\alpha}$$

我們求上列式子對於 $\boldsymbol{\alpha}$ 的偏微分：

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = Q\boldsymbol{\alpha} - 1_N^T - \lambda_0 \mathbf{y} - \boldsymbol{\lambda} = 0 \\
&\implies Q\boldsymbol{\alpha} = 1_N^T + \lambda_0 \mathbf{y} + \boldsymbol{\lambda} \\
&\implies \text{if Q is invertible, then } \boldsymbol{\alpha} = Q^{-1}(1_N^T + \lambda_0 \mathbf{y} + \boldsymbol{\lambda})
\end{aligned}$$

再將以上結果代回去式子中，因此原本的問題轉為：

$$\begin{aligned}
&\max_{\lambda_i \geq 0} \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}^T(1_N^T + \lambda_0 \mathbf{y} + \boldsymbol{\lambda}) - 1_N^T \boldsymbol{\alpha} - \lambda_0 \mathbf{y}^T \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\alpha} \\
&= \max_{\lambda_i \geq 0} -\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}^T(1_N^T + \lambda_0 \mathbf{y} + \boldsymbol{\lambda}) \\
&= \max_{\lambda_i \geq 0} -\frac{1}{2}(1_N^T + \lambda_0 \mathbf{y} + \boldsymbol{\lambda})^T Q^{-1}(1_N^T + \lambda_0 \mathbf{y} + \boldsymbol{\lambda}) \\
&\text{subject to } \lambda_i \geq 0, \ \ \forall i \in \{0, 1, \cdots, N\}
\end{aligned}$$

再把負號提出來，就變成和原本問題蠻相似的問題：

$$\begin{aligned}
&\min_{\lambda_i \geq 0} \frac{1}{2}(1_N^T + \lambda_0 \mathbf{y} + \boldsymbol{\lambda})^T Q^{-1}(1_N^T + \lambda_0 \mathbf{y} + \boldsymbol{\lambda}) \\
&\text{subject to } \lambda_i \geq 0, \ \ \forall i \in \{0, 1, \cdots, N\}
\end{aligned}$$