Le calcul stochastique d'Ito

November 23, 2017

1 Généralités

1.1 Filtration

La variable $t \in \mathbb{R}_+$ représente le temps. Le plus souvent, nous la mettons en indice. ex: $X_t = X(t)$.

On considère une "filtration" $(F_t)_{t\geq 0}$. C'est une suite d'objets aléatoires vérifiant :

$$\forall s < t \qquad \exists fonc: \qquad F_s = fonc(F_t) \tag{Fil}$$

L'objet F_t représente toute l'information connue à l'instant t. L'hypothèse ci-dessus nous indique qu'au temps t on connait aussi l'information du temps s. On a donc de la mémoire.

Exemple : dans un cadre de la simulation, F_t représente tous les résultats des rand() que nous avons lancé de 0 à t.

On appellera trajectoire[1] les fonctions de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que pour tout t, X_t est une fonction de F_t. En particulier X_t n'a pas le droit d'être défini à partir de F_{t+1}. Moralement, les trajectoires n'anticipent pas le futur (elles sont "adaptées" à la filtration F_t).

1.2 Mouvement brownien dans une filtration

On appellera mouvement brownien dans la filtration F_t une trajectoire W_t telle que

- $t \to W_t$ est continue.
- pour tout s, t, $W_{t+s} - W_t$ est indépendant de F_t. (donc indépendant de W_t car $W_t = fonc(F_t)$).
- pour tout s, t, $W_{t+s} - W_t$ suit une loi normale centrée de variance s.

Remarque : les mouvements browniens sont aussi appelés "processus de Wiener", d'où la lettre W. Mais cette lettre nous rappelle aussi qu'ils oscillent beaucoup. En particulier ils ne sont pas dérivables (vous observerez les simulations).

1.3 Mouvement brownien tout court

On peut aussi définir un brownien sans parler de filtration : W est un mouvement brownien (tout court) lorsque

- $t \to W_t$ est continue.
- pour tout s, t, $W_{t+s} - W_t$ est indépendant de $W_{[0,t]}$ (càd tout le bout de trajectoire de 0 à t).
- pour tout s, t, $W_{t+s} - W_t$ suit une loi normale centrée de variance s.

[1] le terme technique est "processus adapté"

Ce qui est équivalent à dire que W_t est un brownien dans la filtration $F_t := W_{[0,t]}$ (c'est la filtration naturelle du passé de W_t).

Ainsi on a plusieurs cadres de travail possibles

- cadre simple : on se donne un brownien W_t (tout court) et on considère la filtration $F_t = W_{[0,t]}$. Cela vérifie l'hypothèse (Fil) car
$$\forall s < t : \qquad W_{[0,s]} = \Big(W_{[0,t]}\Big)_{[0,s]}$$
- cadre complexe : on se donne une filtration F_t qui englobe tous les browniens et autres trajectoires que l'on veut considérer.

Remarque :

- Dans les livres, le plus souvent, les filtrations sont des suites de "tribus", mais cela revient strictement au même.
- Dans la suite, nous supposons aussi que la filtration $t \to F_t$ est continue : l'information croît sans accoup. Cette hypothèse est vérifiée "intuitivement" quand on prend $F_t = W_{[0,t]}$
- Le calcul stochastique que nous présentons n'est pas du tout adapté aux processus stables que nous avons simulé. Nous avons observé qu'ils sautaient brutalement : ils ne peuvent donc pas s'adapter à une filtration continue. Le calcul stochastique pour des processus avec saut existe, mais les formules sont bien plus compliquées.

2 Equation différentielle

2.1 Simple

Considérons une trajectoire a_t. L'équation différentielle
$$\frac{dX_t}{dt} = a_t$$
s'écrit plus joliment
$$dX_t = a_t\, dt$$
s'interprète ainsi :
$$X_{t+\varepsilon} - X_t = a_t \varepsilon$$
se résout approximativement avec le schéma d'Euler : on se donne un point de départ x_0 et une suite de temps t_i très serrés et l'on pose
$$X_{t_{i+1}} = X_{t_i} + a_{t_i}(t_{i+1} - t_i)$$

2.2 Avec une autre trajectoire

Considérons des trajectoires a_t, b_t, Y_t avec Y_t dérivable. L'équation différentielle
$$\frac{dX_t}{dt} = a_t + b_t \frac{dY_t}{dt}$$
s'écrit plus joliment
$$dX_t = a_t\, dt + b_t dY_t$$
s'interprète ainsi :
$$X_{t+\varepsilon} - X_t = a_t \varepsilon + b_t(Y_{t+\varepsilon} - Y_t)$$
se résout approximativement avec le schéma d'Euler : on se donne un point de départ x_0 et une suite de temps t_i très serrés et l'on pose
$$X_{t_{i+1}} = X_{t_i} + a_{t_i}(t_{i+1} - t_i) + b_{t_i}(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i})$$

2.3 Avec une excitation brownienne

Considérons des trajectoires a_t, b_t et une trajectoire brownienne W_t. Le brownien n'étant pas dérivable, on n'écrira PAS

$$\frac{dX_t}{dt} = a_t + b_t \frac{dW_t}{dt}$$

Mais on écrit quand même une "équation différentielle stochastique" :

$$dX_t = a_t\, dt + b_t dW_t$$

Elle s'interprète ainsi :

$$X_{t+\varepsilon} - X_t = a_t \varepsilon + b_t (W_{t+\varepsilon} - W_t)$$

Donc : les accroissements infinitésimaux de X_t dépendent des accroissements infinitésimaux du Brownien. On dit que X_t subit une excitation brownienne. L'équation différentielle stochastique se résout grâce au schéma d'Euler :

$$X_{t_{i+1}} = X_{t_i} + a_{t_i}(t_{i+1} - t_i) + b_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

Nous programmerons ce schéma en TP.

2.4 Où intervient la tribu F_t

Pour résoudre les équations différentielles, nous utilisons le schéma d'Euler, par exemple :

$$X_{t_{i+1}} = X_{t_i} + a_{t_i}(t_{i+1} - t_i) + b_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

Ainsi, quand nous sommes à l'instant t_i, pour construire $X_{t_{i+1}}$, nous avons besoin de connaitre le triplet $X_{t_i}, a_{t_i}, b_{t_i}$... Et nous les connaissons ! puisque se sont des fonctions de l'ensemble de nos connaissances F_{t_i}. Nous avons aussi besoin de simuler l'accroissement brownien $(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$... Et il est facile à simuler ! puisqu'il est indépendant de F_{t_i}, donc indépendant du triplet $X_{t_i}, a_{t_i}, b_{t_i}$

Contre-exemple : L'équation différentielle

$$dX_t = X_{t+10} dW_t$$

est impossible à résoudre (notre schéma d'Euler ne fonctionne pas). A chaque instant t_i, nous avons besoin de connaitre X_{t_i+10} que nous n'avons pas encore construit. Par contre

$$dX_t = X_{t-10} dW_t$$

fonctionne (en supposant par exemple que $X_{t-10} = X_0$ quand $t < 10$).

2.5 Trajectoire régulière et excitée

Fixons le vocabulaire pour la suite :

- Une trajectoire X_t est dite régulière lorsqu'il existe un trajectoire a_t telle que

  $$dX_t = a_t dt$$

  Ce qui est équivalent au fait que

  $$X_t = X_0 + \int_0^t a_s ds$$

  Cela implique notamment que X_t est dérivable presque partout, avec a_t comme dérivée.

- Une trajectoire X_t est dite excitée[2] lorsqu'il existe des trajectoires a_t, b_t et un mouvement brownien W_t tel que

  $$dX_t = a_t dt + b_t\, dW_t$$

  Les trajectoires régulières sont des cas particuliers des trajectoires excitées ($b_t = 0$). Mais quand b_t n'est pas partout nul, alors une trajectoire excitée hérite de la non-dérivabilité du brownien.

[2] Le terme technique est "semi-martingale"

3 Chain-rule

En français, la "chain-rule" est la "règle de dérivation composée".

3.1 La chain-rule pour les trajectoires régulières

Considérons maintenant une fonction $f(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Notons f' et f'' ses dérivées premières et secondes. Quand X_t est une trajectoire régulière nous avons :

$$\frac{df(X_t)}{dt} = f'(X_t)\frac{dX_t}{dt}$$

qui s'écrit plus joliment :

$$df(X_t) = f'(X_t)\,dX_t$$

Cette formule est **fausse** quand X_t est une trajectoire excitée.

3.2 Le crochet stochastique

Le crochet stochastique est un produit scalaire sur les accroissements différentiels (on verra plus loin une définition). Il est donc symétrique :

$$\langle dX_t, dZ_t\rangle = \langle dZ_t, dX_t\rangle$$

Linéaire :

$$\langle dX_t + dY_t, dZ_t\rangle = \langle dX_t, dZ_t\rangle + \langle dY_t, dZ_t\rangle$$

Les éléments non différentiel sortent comme des constantes

$$\langle a_t\, dX_t, dZ_t\rangle = a_t\,\langle dX_t, dZ_t\rangle$$

Dès qu'un des éléments est réduit à dt, le crochet s'annule

$$\langle dX_t, dt\rangle = 0$$

Si les deux éléments sont des Browniens indépendants alors le crochet s'annule

$$\langle dW_t, d\tilde{W}_t\rangle = 0$$

mais s'il y a le même brownien des deux côtés alors :

$$\langle dW_t, dW_t\rangle = dt$$

Exemples quand $dX_t = a_t dt + b_t dW_t + c_t d\tilde{W}_t$ et $dY_t = i_t dt + j_t dW_t + k_t d\tilde{W}_t$ alors

$$\langle dX_t, d\tilde{Y}_t\rangle = b_t j_t\, dt + c_t k_t\, dt$$

3.3 Chain rule pour les trajectoires excitées

Théoreme 3.1 (Formule d'Ito) Considérons X_t une trajectoire excitée. Considérons f une fonction deux fois dérivables, on a

$$df(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)\,\langle dX_t, dX_t\rangle$$

En particulier si $dX_t = a_t dt + b_t dW_t$:

$$df(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)b_t^2\, dt$$

Retenez bien ce terme supplémentaire dans la chain-rule. Remarquez que lorsque X_t est une trajectoire régulière, le crochet différentiel s'annule et on retombe sur la chain-rule-régulière.

3.4 Exemples

- Essayons de définir une trajectoire excitée qui vérifie

$$dX_t = X_t dW_t$$

(nous verrons l'intérêt dans la partie math financière). En vieux routier du calcul diff, on va essayer de résoudre cette équation en posant $X_t = e^{W_t}$. Mais la chain-rule-excitée nous donne :

$$d(e^{W_t}) = e^{W_t} dW_t + \frac{1}{2} e^{W_t} dt = X_t(dW_t + \frac{1}{2} dt)$$

Raté !

- Montrez que c'est $X_t = e^{W_t - \frac{1}{2}t}$ qui satisfait $dX_t = X_t dW_t$.
- Prenez une trajectoire excitée $dX_t = a_t dt + b_t dW_t$. Quelle équation différentielle vérifie $X_t^2, \ln X_t, e^{X_t}$?

3.5 Explication

Rappelons le développement de Taylor

$$f(x + \varepsilon) = f(x) + f'(x)\varepsilon + \frac{1}{2} f''(x)\varepsilon^2 + ...$$

Soit X_t une trajectoire régulière. En utilisant le développement de Taylor à l'ordre 1 on a

$$f(X_{t+\varepsilon}) - f(X_t) = f'(X_t)(X_{t+\varepsilon} - X_t) + o(X_{t+\varepsilon} - X_t)$$

Et en passant à la limite le reste à l'ordre 1 est négligeable devant les autres termes ce qui donne

$$df(X_t) = f'(X_t) dX_t$$

Quand X_t est une trajectoire excitée, le reste à l'ordre 1 n'est pas négligeable et il faut effectuer Taylor à l'ordre 2 :

$$f(X_{t+\varepsilon}) - f(X_t) = f'(X_t)(X_{t+\varepsilon} - X_t) + \frac{1}{2} f''(X_t)(X_{t+\varepsilon} - X_t)^2 + o(X_{t+\varepsilon} - X_t)^2$$

Qui donne à la limite

$$df(X_t) = f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) \langle dX_t, dX_t \rangle$$

Le crochet stochastique étant défini comme étant la limite, en un certain sens, de $(X_{t+\varepsilon} - X_t)^2$.

4 Intégrales d'Ito

4.1 Dualité intégration/dérivation

Une trajectoire régulière est définie par une équation différentielle et un point de départ :

$$\begin{cases} dX_t = a_t\, dt \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

Mais cette même trajectoire peut être définie par :

$$X_t = x_0 + \int_0^t a_s\, ds$$

où $\int_0^t$ est l'intégrale usuelle ; que l'on peut construire avec la formule des rectangles, des trapèzes, ou encore en utilisant le cadre théorique de l'intégrale de Lebesgues.

Cela nous rappelle qu'il y a deux manières de présenter "dérivation" et "intégration" :

- L'opération de dérivation peut être définie comme l'opération inverse de l'opération primitive (qui se construit elle même avec la notion d'intégrale).
- L'opération primitive (et donc la notion d'intégrale) peut être définie comme l'opération inverse de la dérivation.

4.2 L'intégrale d'Ito

Une trajectoire excitée est définie par une équation différentielle stochastique et un point de départ :

$$\begin{cases} dX_t = a_t\,dt + b_t\,dW_t \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

On aimerait aussi pouvoir la définir comme ceci :

$$X_t = X_0 + \int_0^t a_s ds + \int_0^t b_s dW_s$$

Il faut donc donner un sens à la seconde intégrale : On utilise pour cela la formule des rectangles-évalués-à-gauche : on se donne des temps $(0 = s_0^n, s_1^n, s_2^n, ...)$ qui se rapprochent quand $n \to \infty$. On définit l'intégrale d'Ito par :

$$it\oint_0^t b_s dW_s := \lim_n \sum_i b_{s_i^n} (W_{s_{i+1}^n} - W_{s_i^n}) 1_{s_i^n < t} \tag{ITO}$$

DESSIN

Si nous remplaçons W_t par une trajectoire régulière K, nous retombons sur la notion classique d'intégrale :

$$\begin{aligned} it\oint_0^t b_s dK_s &= \lim_n \sum_i b_{s_i^n} (K_{s_{i+1}^n} - K_{s_i^n}) 1_{s_i^n < t} \\ &= \lim_n \sum_i b_{s_i^n} \frac{(K_{s_{i+1}^n} - K_{s_i^n})}{(s_{i+1}^n - s_i^n)} (s_{i+1}^n - s_i^n)\ 1_{s_i^n < t} \\ &= \int_0^t b_s \frac{K_s}{ds}\, ds = \int_0^t b_s\, dK_s \end{aligned}$$

Puisque l'intégrale d'Ito étend l'intégrale normale, nous la notons simplement $\int$. On a défini l'intégrale d'Ito par rapport à une trajectoire brownienne, mais on peut la définir par rapport à n'importe quelle trajectoire excitée, en utilisant la linéarité :

$$\int_0^t h_s dX_s = \int_0^t h_s(a_s ds + b_s dW_s) = \int_0^t h_s a_s ds + \int_0^t h_s b_s\, dW_s$$

L'intégrale d'Ito est alors l'inverse de la différentielle dont nous parlons :

$$d\int_0^t dX_s = dX_t \text{ et } \int_0^t dX_s = X_t$$

4.3 Exemple

- Considérons X_t une trajectoire régulière telle que $X_0 = 0$. La chain-rule-régulière nous donne $d(X_t)^2 = 2X_t dX_t$. En intégrant :

$$X_t^2 = 2\int_0^t X_s dX_s$$

- Considérons $X_t = W_t$ une trajectoire brownienne (qui vérifie aussi $W_0 = 0$). La chain-rule-excitée donne $d(W_t)^2 = 2W_t dW_t + dt$. En intégrant :

$$W_t^2 - t = 2\int_0^t W_s dW_s$$

- Moralité : Imaginez que vous gagnez à chaque instant s la somme de $X_s\,dX_s$; au temps t, la formule pour calculer votre gain cumulé ne sera pas la même si X_t est une trajectoire régulière, ou bien un trajectoire excitée ! A première vue, cela fait penser à une boutade de mathématique pure. Mais en fait, les cours de bourse sont très proches de trajectoires excitées, et c'est le calcul d'Ito (donc la chain-rule-excitée) qui est employé en pratique dans les calculs financiers (cf. la fin de ce cours).

4.4 Subtilités

Attention il y a des subtilités :

- La limite dans (ITO) existe dans un sens faible (dans L^2). Mais cela implique que pour une certaine sous-suite n_i, la limite existe presque-surement, ce qui nous suffit largement.
- Changeons très légèrement de formule des rectangles. Utilisons la formule des rectangles-évalués-au-milieu :

$$\lim_n \sum_i \Big(\frac{b_{s_i^n} + b_{s_i^n}}{2}\Big)(W_{s_{i+1}^n} - W_{s_i}^n)1_{s_i^n<t}$$

  Si W était une trajectoire régulière, cette limite donnerait la même chose que dans (ITO). Mais le Brownien varie si rapidement que le fait d'évaluer la fonction au milieu des rectangles change le résultat (malgré le fait que la base des rectangles tende vers 0). La formule ci-dessus définit une nouvelle intégrale : l'intégrale de Stratanovich. Elle nécessite plus d'hypothèse sur b_t. La notion de dérivée qui se déduit de intégrale de Stratanovich donne lieu à une notion de différentielle et une autre chain-rule
- La formule des rectangles-évalués-à-gauche correspond au Schéma d'Euler. En effet en notant :

$$L_{t_j} = \sum_{i=0}^{j} b_{s_i^n}(W_{s_{i+1}^n} - W_{s_i}^n)$$

  on a

$$L_{t_{j+1}} = L_{t_j} + b_{s_j^n}(W_{s_{j+1}^n} - W_{s_j}^n)$$

  L'intégrale de Stratanovich (et la différentielle associée) correspond à un schéma numérique "centré".

5 Multi-dimension

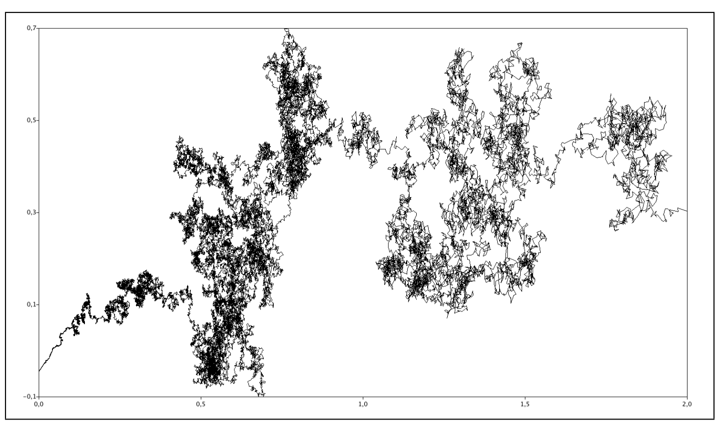
5.1 Formule d'Ito multi-dimensionnelle

On considère maintenant plusieurs browniens indépendants W_t^k et on définit plusieurs trajectoires excitées X_t^i par :

$$dX_t^i = a_t^{ik}dt + b_t^{ik}dW_t^k$$

En TP, nous construirons des processus de dimension 2 en utilisant 2 browniens indépendants, qui pourront avoir toutes sortes de têtes différentes en fonction des a_t, b_t. Par exemple :

$$\begin{cases} dX_t^1 = dt + X_t^1 dW_t^1 \\ dX_t^2 = dt + X_t^1 dW_t^2 \end{cases}$$



theorem 5.1 (Formule d'Ito multi-dimensionnelles) Considérons des trajectoires excitées $(X_t^1, ..., X_t^n)$. Considérons $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction 2 fois dérivable. On a :

$$df(X_t^1, ..., X_t^n) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial X_t^i}\, dX_t^i + \frac{1}{2}\sum_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial X_t^i \partial X_t^j}\, \langle dX_t^i, dX_t^j\rangle$$

5.2 Dérivation d'un produit

Exemple 5.2 (Dérivation d'un produit) Considérons 2 trajectoires excitées :

$$X_t = a_t dt + b_t dW_t \tag{1}$$
$$Y_t = c_t dt + e_t d\tilde{W}_t \tag{2}$$

L'opération produit est une fonction : $x \times y = f(x, y)$ que l'on sait bien dériver. Ainsi

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + \langle dX_t, dY_t \rangle$$

Ainsi si $W_t = \tilde{W}_t$ on trouve

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + b_t e_t dt$$

Mais si W et $\tilde{W}$ sont indépendants on retombe sur la formule bien connue

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t$$

(si vous ne reconnaissez pas cette formule, divisez les deux termes par dt !) .

Exercice 5.1 (Pont brownien) Dans cet exo t appartient à $[0, 1[$. Montrez que :

$$X_t = (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s \tag{$SOLpont$}$$

est solution de

$$dX_t = \frac{-X_t}{1-t} + dW_s \tag{$EDSpont$}$$

Aide : vous dériverez un produit composé d'un trajectoire régulière : $(1-t)$ et d'une trajectoire excitée $\int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s$. Bien entendu toutes les intégrales avec des dW_s sont des intégrales d'ito, et on a $d\big(\int_0^t a_s dW_s\big) = a_t dW_t$ (l'intégrale d'Ito a été construite pour cela).

Remarque :

- Dans l'exercice précédent, la trajectoire excitée a une propriété très intéressante que vous découvrirez en la simulant.
- Contrairement à l'exercice précédent, la pluspart du temps, on définit les trajectoires excitées par des équations différentielles stochastiques telles que ($EDSpont$), et on a rarement des solutions explicites telles que ($SOLpont$). Mais ce n'est pas grave : l'équation différentielle, en donnant la dynamique des processus, permet souvent de mieux comprendre la trajectoire qu'une solution explicite.
- Pour illustrer le point précédent : faites une simulation à la main de $dX_t = -X_t + dW_t$ pour tout t (c'est un Ornstein-Uhlenbeck). Puis de $dX_t = \frac{-X_t}{1-t} + dW_s$ pour $t \in [0, 1[$ (c'est un pont brownien).
- Dans l'exercice 5.1, je vous ai donné la solution, mais vous auriez pu la trouver tout seul avec la méthode de la variation de la constante : en effet, l'équation "homogène":

  $$dY_t = \frac{-Y_t}{1-t}$$

  admet clairement comme solution $Y_t = (1-t)$. On suppose alors que $X_t = K_t(1-t)$ pour un certain K_t, et on injecte ceci dans l'équation complète (EDS), ce qui nous permet de trouver K_t.
- Si vous voulez vous entrainer, résolvez $dX_t = X_t dt + dW_t$ avec la technique de la variation de la constante.
- Et si vous voulez encore plus vous entrainer, résolvez $dX_t = X_t d\tilde{W}_t + dW_t$; W_t et $\tilde{W}_t$ étant indépendants. Pour cette exercice, vous noterez $\mathcal{E}_t = e^{\tilde{W}_t - \frac{1}{2}t}$ la solution de l'équation "homogène" (cf. avant). Attention au crochet quand vous dérivez un produit !

6 Processus de Markov et Martingales

6.1 Markov = Diffusions

Une trajectoire X_t est processus de Markov dans la filtration F_t quand

- $\forall t, s,\ X_{t+s} - X_t$ est indépendant de F_t conditionnellement à X_t.

Interprétation : «à chaque instant t, l'évolution futur $X_{t+s} - X_t$ ne dépend que du présent X_t et d'un hasard indépendant du passé F_t. »

En particulier, un brownien est un processus Markov.

Définition 6.1 Soient a et b sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La trajectoire excitée

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW_t$$

est appelée une diffusion.

Les diffusions sont des processus de Markov : En effet à chaque instant t, l'évolution futur d'une diffusion (ici dX_t) ne dépend que de sa position présente (X_t) et d'un hasard indépendant du passé (dW_t).

6.2 Martingale = trajectoire purement excitée

Une trajectoire X_t est une martingale la filtration F_t quand

$$\forall t, s \qquad \mathbf{E}[X_{t+s} - X_t / F_t] = 0$$

Interprétation : «A tout instant, l'évolution futur d'une martingale,sachant le passée, est centrée». Calculant l'espérance de cette égalité on trouve que $t \to \mathbf{E}[X_t]$ est constant. Les martingales sont des trajectoires "en moyenne constante".

Ex: une trajectoire brownienne est une martingale.

Les trajectoires 'purement' excitées

$$dX_t = b_t dW_t$$

sont justement des martingales[3]. Explication :

$$\mathbf{E}[X_{t+\varepsilon} - X_t / F_t] = \mathbf{E}[b_t(W_{t+\varepsilon} - W_t))/F_t] = b_t \mathbf{E}[(W_{t+\varepsilon} - W_t))/F_t] = 0$$

6.3 Fonction d'une martingale et modélisation de prix

Considérons

$$dX_t = b_t dW_t$$

D'après la formule d'Ito :

$$d\,f(X_t) = f'(X_t) b_t dW_t + \frac{1}{2} b_t^2 f''(X_t) dt$$

Dès que $f'' \neq 0$, $f(X_t)$ n'est plus une martingale : le second terme (appelé "dérive" ou "drift") décrit comment $f(X_t)$ s'éloigne d'une martingale. En particulier quand f est convexe/concave, $f(X_t)$ dérive vers le haut/bas[4].

Exercice 6.1 Soit X_t tel que $dX_t = b_t dW_t$. Vérifiez que quand f est convexe, $\mathbf{E}[f(X_t)]$ est croissant en t.

$$\mathbf{E}[f(X_t)] = X_0 + \mathbf{E}\Big[\int_0^t f'(X_s) b_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t b_s^2 f''(X_s) ds\Big] = \cdots$$

[3]En fait, pour que ce soit vraiment vrai, il faut que b_t ne soit pas trop grand. Par ex : $\forall T : \mathbf{E}[\int_0^T b_t^2 dt] < \infty$

[4]on partle de sous/sur martingale (terminologie anti-intuitive)

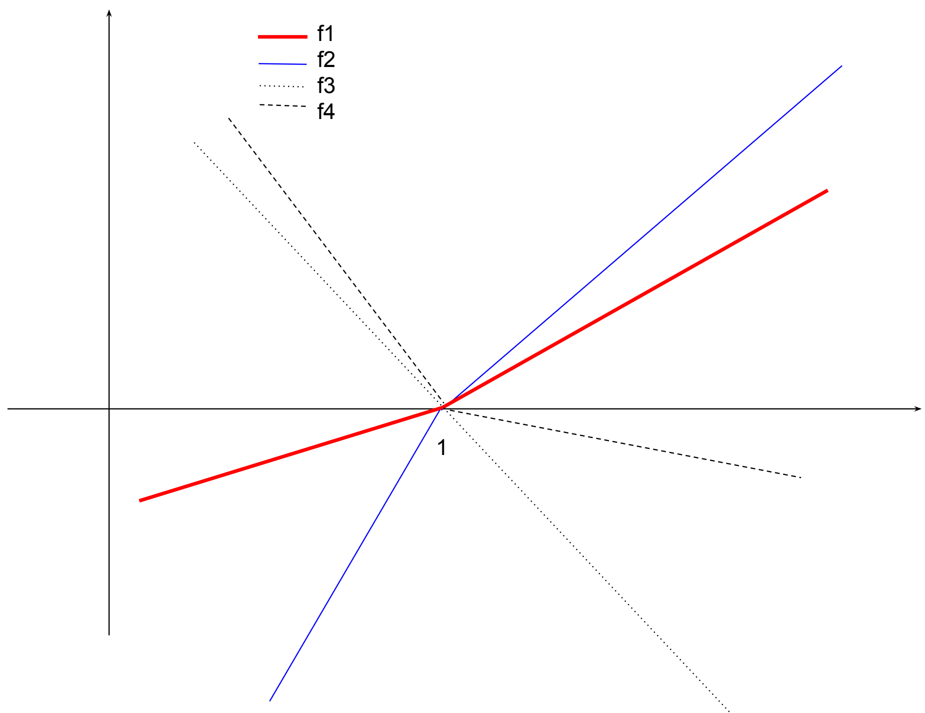
Rappelons l'exponentielle stochastique : $X_t = e^{W_t - \frac{1}{2}t}$. Rappelons qu'elle est aussi définie par :

$$X_0 = 1 \quad ; \quad dX_t = X_t dW_t$$

Ainsi c'est une martingale, et de plus elle est positive. Ce qui est très intéressant pour modéliser des sommes d'argent X_t qui "en moyenne n'évolue pas" (ex : les gains lors d'un jeu équilibré). Un non-mathématicien dira alors : puisqu'en moyenne le prix n'évolue pas, autant le modéliser par un processus constant ($\forall t : X_t = X_0$).

Et bien non, ce n'est pas la même chose : car dès qu'on va faire quelque chose avec l'argent, c'est à dire, dès qu'on va considérer des sommes $f(X_t)$ le hasard prendra son importance. L'erreur du non-mathématicien c'est de croire que $\mathbf{E}[f(X_t)] = f(\mathbf{E}[X_t])$.

Exercice 6.2 Considérons une martingale positive X_t avec $X_0 = 1$, qui représente le prix d'une action. Votre banquier vous propose de placer votre argent sur cette action. Il vous propose de gagner $f_1(X_t)$ ou $f_2(X_t)$ ou $f_3(X_t)$ ou $f_4(X_t)$. Quelle fonction choisiriez-vous ?



Remarque : même sans déformer les prix avec une fonction, les humains ont une certaine appréhension du risque : on préfère en général avoir une somme d'argent sûre, qu'une martingale (sauf quand on est un joueur). C'est pour cela que les banquiers vous proposent des produits financiers qui "lissent" les fluctuations de la bourse.

7 Lotka-Volterra

7.1 Deux espèces en concurrences

Exemple 7.1 (Lotka-Voltera) Considérons

$$dX_t = X_t dt - X_t Y_t dt + \varepsilon X_t dW_t$$
$$dY_t = -Y_t dt + X_t Y_t dt + \varepsilon Y_t d\tilde{W}_t$$

Quand $\varepsilon = 0$ on trouve le système différentiel de Lotka-Voltera classique : X est la population de proies et Y est la population de prédateurs. Quand les proies/prédateurs sont seuls leur population croit/décroit exponentiellement. Mais les prédateurs mangent les proies, il s'en suit un système périodique :

$$X_t \uparrow \Rightarrow \; Y_t \uparrow \Rightarrow \; X_t \downarrow \Rightarrow \; Y_t \downarrow \Rightarrow \; X_t \uparrow \Rightarrow \; \dots$$

Cette belle mécanique perd sont caractère périodique avec l'ajout de bruit. Par contre, elle gagne en réalisme, et l'on observe quand même des cycles, mais qui ne retombent pas exactement sur leur pied.

Exercice 7.1 Considérons le processus (X_t, Y_t) défini précédemment. Notons

$$Z_t = X_t + Y_t - \ln(X_t) - \ln(Y_t)$$

Calculez dZ. Quand $\varepsilon = 0$ vous devriez trouver $dZ = 0$, donc

$$\forall t : \qquad X_t - \ln(X_t) = -[Y_t - \ln(Y_t)]$$

ce qui est une étape dans la preuve de la périodicité de (X_t, Y_t). Mais quand $\varepsilon > 0$ que constate-on sur Z_t ? Et d'après vous, la population proie+prédateur augmente-t-elle ? diminue-t-elle ?

Correction : on allège en enlevant les indices t. Z s'écrit bien $fonc(X, Y)$. On applique la formule d'Ito :

$$\begin{aligned} dZ &= \Big(1 - \frac{1}{X}\Big)dX + \Big(1 - \frac{1}{Y}\Big)dZ + \frac{1}{2}\frac{X^2}{X^2}\langle dX, dX\rangle + \frac{1}{2}\frac{Y^2}{Y^2}\langle dY, dY\rangle \\ &= \Big(\frac{X-1}{X}\Big)(X_t dt - X_t Y_t + \varepsilon dW_t) + \Big(\frac{Y-1}{Y}\Big)(-Y_t dt + X_t Y_t + \varepsilon d\tilde{W}_t) + \varepsilon dt \\ &= \frac{X-1}{X}\varepsilon dW + \frac{Y-1}{Y}\varepsilon d\tilde{W} + \varepsilon dt \end{aligned}$$

Le terme de dérive nous indique que Z_t (qui n'est pas loin d'être la population globale) augmente linéairement. Observons le terme martingale : lorsque $X_0 > 1$ et $Y_0 > 1$ tout se passe bien bien sagement. Par contre si on part de valeur X_0 ou Y_0 petite, il y a beaucoup de bruit dans Z.

7.2 Deux espèces en symbiose

Considérons le modèle suivant :

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t dt - \frac{1}{2}X_t^2 dt + X_t Y_t dt \\ dY_t &= Y_t dt - \frac{1}{2}Y_t^2 dt + X_t Y_t dt \end{aligned}$$

Interprétation ?

En partant de $X_0 = Y_0 = 1$, les deux populations ont le même point de départ et la même dynamique, elles sont donc égales, et, l'une ou l'autre vérifie

$$dX_t = X_t dt + \frac{1}{2}X_t^2 dt \geq \frac{1}{2}X^2 dt$$

Or la solution de $dY_t = \frac{1}{2}Y^2 dt; Y_0 = 1$ est trivialement $Y_t = \frac{1}{1-\frac{t}{2}}$: la population explose au temps $t = 2$! Donc, puisque $dX_t \geq dY_t$, X_t explose avant $t = 2$!

Généralisons, si on considère le modèle de population suivant

$$\begin{aligned} dX_t &= b_1 X_t dt - a_{11} X_t^2 dt + a_{12} X_t Y_t dt \\ dY_t &= b_2 Y_t dt - a_{22} Y_t^2 dt + a_{21} X_t Y_t dt \end{aligned}$$

On montre que pour ne pas avoir explosion on doit avoir $a_{12}a_{21} < a_{11}a_{22}$: «la limitation naturelle des naissances doit être plus forte que l'apport de la symbiose.»

Exercice 7.2 Prenez le cas simple $b_1 = b_2 = b, a_{11} = a_{22} = \alpha, a_{21} = a_{12} = \beta, X_0 = Y_0 = 1$ et vérifiez que la solution est donnée par

$$X_t = Y_t = \frac{b}{(\beta - \alpha) + (b + \beta - \alpha)e^{-bt}}$$

Pour quel paramètres α, β a lieu l'exposion ? Quand a lieu l'explosion ?

Ainsi, pour de nombreux paramètres, notre modèle de symbiose n'a pas de solution durable. Par contre, le système suivant a toujours des solutions non explosives dès que $\varepsilon \neq 0$.

$$\begin{aligned} dX_t &= b_1 X_t dt - a_{11} X_t^2 dt + a_{12} X_t Y_t dt + \varepsilon X_t dW_t \\ dY_t &= b_2 Y_t dt - a_{22} Y_t^2 dt + a_{12} X_t Y_t dt + \varepsilon Y_t d\tilde{W}_t \end{aligned}$$

Moralité : le bruit stabilise les équations différentielles.

Le bruit rend aussi les systèmes plus réaliste. Par exemple, quand on modélise le pendule (amorti ou non) avec des équations différentielles, lorsqu'on positionne le pendue verticalement, la tête vers le haut, il reste en place. Or on n'a jamais vu cela (à moins d'un pendule très rouillé). En rajoutant un tout petit bruit dans les équations (les courant d'air, ou simplement le choc des molécules d'air), le pendule n'aura qu'une seule position d'équilibre : verticalement avec la tête en bas.

8 Le modèle financier de Black and Scholes

Notons S_t (pour Stock) le prix que vaut une action au temps t. Si je dispose de x euros, au temps s je peux acheter $\frac{x}{S_s}$ actions, et en les revendant au temps $t > s$ j'aurais la somme de $\frac{xS_t}{S_s}$

Le modèle de Black and Scholes suppose que le prix d'une action évolue comme ceci :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \tag{3}$$

« L'évolution "relative" du prix dépend linéairement du temps et d'un accroissement brownien». Question : une action qui "cartonne" vérifie ...

Nous savons résoudre cette équation différentielle stochastique :

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t} e^{\mu t}$$

Une "option" de type "call" est un contrat financier du type suivant : Au temps 0, je me mets d'accord avec Toto qui possède une action dont le cours est S_t. On se fixe un montant $K > 0$ et une date T :

- si au temps T, le cours de l'action S_T est supérieure à K, alors je lui achète son action au prix K.
- si au temps T, le cours de l'action S_T est inférieur à K, alors je ne fais rien.

Bien entendu, ce contrat m'est entièrement favorable. Je dois donc donner une somme forfaitaire x au temps 0 pour que Toto accepte.

La juste valeur de x est bien sûr $x = \mathbf{E}[max(S_T - K, 0)]$. Bien sûr ?

Ce x serait en effet le juste prix si Toto n'avait pas la possibilité de placer cet argent durant $[0, T]$. Mais il peut le placer à la banque par exemple. Dans ce cas, pour avoir le juste prix, il faudrait prendre en compte le taux d'intérêt r. L'argent placée évolue selon

$$dX_t = rX_t dt$$

Ainsi la juste somme serait $x' = e^{-rT}\mathbf{E}[max(S_T - K, 0)]$. Mais pour simplifier les calculs, on va supposer que les taux d'intérêt sont nuls[5].

Mais même si les taux d'intérêt sont nuls, Toto a quand même la possibilité d'acheter des actions avec l'argent x et d'essayer d'en tirer profit avec la stratégie de son choix. Donc avec $x = \mathbf{E}[max(S_T - K, 0)]$ je me fais rouler.

[5] Si $r \neq 0$, la technique habituelle est de tout exprimer en euro actualisé : au temps t : $1€_{act} = e^{-rt}$ €

8.1 L'espérance risque neutre

Nous faisons l'hypothèse suivante : il existe un probabilité $\mathbf{P}^{RN}$ (différente de $\mathbf{P}$) qui permettrait de rendre équitable notre marché. Essayons de voir quelles seraient les propriétés de l'action sous cette probabilité (appelée Risque neutre).

Toto peut utiliser la stratégie suivante : acheter $\frac{x}{S_0}$ actions au temps 0 et les revendre à un temps $t \in [0,T]$ qu'il choisit. Ainsi, le gain de Toto est :

$$\frac{xS_t}{S_0} - max(S_T - K, 0)$$

donc son gain moyen est :

$$x\mathbf{E}^{RN}[\frac{S_t}{S_0}] - x$$

Ainsi, pour que Toto ne fasse pas de bénéfice, il faut nécessairement que $\mathbf{E}^{RN}[S_t] = S_0$: sous la probabilité risque neutre, le prix moyen de l'action doit être constant. En fait, on montre même que le prix de l'action doit être une martingale ! (cf. à la fin pour les plus motivés)

Conclusion : même si notre modèle nous indique que le prix d'une action est :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \tag{4}$$

la possibilité qu'à Toto de placer son argent sur cette action nous indique qu'il faut observer cette action avec une autre probabilité, une probabilité qui transforme S_t en une martingale. Sous cette probabilité, la dérive disparait, l'action vérifie :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \sigma dW_t \tag{5}$$

Ainsi le prix de l'option "call" est

$$x = \mathbf{E}^{RN}[\max(S_T - K, 0)] = \mathbf{E}^{RN}[max(e^{\sigma W_T - \frac{T^2}{2}} - K, 0)]$$

Cette espérance peut se calculer avec une intégration numérique ou bien avec la méthode de monté-Carlo. Dans les deux cas, il suffit d'utiliser que la loi de W_T sous $\mathbf{P}^{RN}$ est une loi normale de variance T.

8.2 D'autres stratégies pour Toto

A lire à la maison.

Toto peut choisir des temps $s < t < T$; au temps s il peut acheter au maximum $\frac{x}{S_s}$ actions. Mais il n'est pas obligé de mettre tout sont argent dans les actions. Il peut donc acheter $\frac{x}{S_s}f(F_s)$ actions (avec $f \in [0,1]$) et garder $x(1-f(F_s))$ dans la poche : la proportion d'action qu'il achète s'écrit $f(F_s)$ car elle peut dépendre de l'information disponible à l'instant s ; typiquement, Toto fait son choix en fonction du cours de l'action S_s.

En revendant au temps t, le gain de Toto sera :

$$\frac{xS_t}{S_s}f(F_s) + x(1-f(F_s)) - max(S_T - K, 0) = xf(F_s)(\frac{S_t}{S_s} - 1) + x - max(S_T - K, 0)$$

ce qui fait en espérance

$$x\mathbf{E}^{RN}[f(F_s)(\frac{S_t}{S_s} - 1)]$$

Pour que cette quantité soit nulle quelle que soit la stratégie de Toto il faut que

$$\forall f \forall s < t \qquad \mathbf{E}^{RN}[f(F_s)S_t] = \mathbf{E}^{RN}[f(F_s)S_s]$$

Ce qui revient à dire que S_t est une martingale sous $\mathbf{P}^{RN}$ (si ce n'est pas clair pour vous, et si vous êtes motivé par le sujet, il faut ouvrir un livre de probabilité au chapitre "espérance conditionnelle").

Nous n'avons pas encore décrit toutes les stratégie possible pour Toto : les temps s d'achat et t de revente peuvent être aléatoires (ils peuvent dépendre de S) et Toto peut plusieurs fois acheter et revendre durant $[0, T]$. On montre que pour toute "option" $op(S_T)$ (nous avions $op(S_T) = max(S_T - K, 0)$) il existe une stratégie telle que le gain de Toto soit exactement $\mathbf{E}^{RN}[op(S_T)]$ et qu'à l'inverse aucune stratégie ne lui procure plus que cette somme. Ceci se généralise au cas où les coefficients μ et σ varient en fonction du temps et dépendent de S.

Cette théorie de Black and Scholes repose sur de nombreuses hypothèses : on suppose une loi précise pour S_t, on suppose que l'on peut acheter et revendre instantanément sans frais, on suppose qu'il n'y a qu'une seule action achetable... Il existe des modèles plus complexes qui collent mieux à la réalité... Mais plus le modèle est complexe, et plus il y a de paramètres à ajuster. C'est là qu'interviennent les statistiques. Dans black and Scholes les deux seuls paramètres sont σ et μ, et nous avons vu que le prix de l'option ne dépend pas de μ ; pas trop fatigant pour le statisticien.