TERA3 : Conditionnement. Calcul stochastique d'Ito

January 11, 2018

1 Loi conditionnelle

1.1 Probabilité "désintégrée"

Etant donnée une probabilité $\mathbf{P}[\cdot]$ et un objet aléatoire $X \in E$, il existe une (presque)-unique famille de probabilité $(\mathbf{P}[\cdot/X = x] : x \in E)$ qui vérifie les axiomes suivants:

$$\boxed{\mathbf{P}[X = x/X = x] = 1} \qquad (Concentration)$$

$$\mathbf{P}[\cdot] = \int_E \mathbf{P}[\cdot/X = x] \boxed{\mathbf{P}[X \in dx]} \qquad (Recollement)$$

Les mesures de probabilités $\mathbf{P}[\cdot/X = x]$ s'appellent des mesures de probabilités conditionnelles. Mais il y a une autre appellation très parlante : La famille $(\mathbf{P}[\cdot/X = x] : x \in E)$ est une désintégration de $\mathbf{P}[\cdot]$ selon X. En d'autres termes : la probabilité conditionnelle est un découpage de $\mathbf{P}$ selon les lignes de niveau de X. La formule (Recollement) permet de recoller les morceaux.

Ensuite on note $\mathbf{E}[\cdot/X = x]$ l'espérance calculée avec $\mathbf{P}[\cdot/X = x]$. De l'axiome de recollement on déduit :

$$\mathbf{E}[\cdot] = \int_E \mathbf{E}[\cdot/X = x] \boxed{\mathbf{P}[X \in dx]}$$

1.2 Loi conditionnelle

Considérons une désintégration $(\mathbf{P}[\cdot/X = x] : x \in E)$. Considérons $Y \in F$ un autre objet aléatoire. Considérons $\mathbf{P}[Y \in dy/X = x]$, la loi de Y sous $\mathbf{P}[\cdot/X = x]$.

propriété :

$$\mathbf{P}[X \in dx, Y \in dy] = \mathbf{P}[Y \in dy/X \in dx]\,\mathbf{P}[X \in dx] \qquad (Jointe \leftrightarrow Conditionnelle)$$

EXO : dans la démo suivante indiquez quelle axiome ou propriété on utilise à chaque ligne.

Démo : prenons une fonction test φ:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[\varphi(X,Y)] &= \int \mathbf{E}[\varphi(X,Y)/X = x]\,\mathbf{P}[X \in dx] && (\boxed{\text{Recollement}}) \\
&= \int \mathbf{E}[\varphi(x,Y)/X = x]\,\mathbf{P}[X \in dx] && (\boxed{\text{Concentration}}) \\
&= \int\int \varphi(x,y)\mathbf{P}[Y \in dy/X = x]\,\mathbf{P}[X \in dx] && (\boxed{\text{FGE}})
\end{aligned}$$

Puisque c'est vrai sur toutes les fonctions tests, la propriété est vraie. □

1.3 Exemple de modélisation à deux couches

Quand on modélise un phénomène aléatoire en plusieurs couches de hasard, on utilise des conditionnements :

Considérons N le nombre de sardines dans l'atlantique, qui suit une loi de Poisson de paramètre Λ, où Λ est la température de l'eau, qui suit une loi exponentielle de paramètre 1. Essayons de déterminer la loi du couple (N, Λ).

Exo : Il y a plus d'étapes que nécessaire dans le calcul ci-dessous. Mais c'est pour vous permettre d'écrire pour chaque égalité, si l'on utilise les formules (Recollement), (Concentration), (FGE), ou bien une donnée de l'énoncé.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[\varphi(\Lambda, N)] &= \int \mathbf{E}[\varphi(\Lambda, N)/\Lambda = \lambda]\mathbf{P}[\Lambda \in d\lambda] && (\boxed{\text{XXXXXXXXXXX}}) \\
&= \int \mathbf{E}[\varphi(\lambda, N)/\Lambda = \lambda]\mathbf{P}[\Lambda \in d\lambda] && (\boxed{\text{XXXXXXXXXXX}}) \\
&= \int \mathbf{E}[\varphi(\lambda, N)/\Lambda = \lambda]e^{-\lambda}1_{\{\lambda>0\}}\, d\lambda && (\boxed{\text{XXXXXXXXXXX}}) \\
&= \int\int \varphi(\lambda, y)\mathbf{P}[N \in dy/\Lambda = \lambda]e^{-\lambda}1_{\{\lambda>0\}}\, d\lambda && (\boxed{\text{XXXXXXXXXXX}}) \\
&= \int\int \varphi(\lambda, y)\Big(\sum_n e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\delta_n(dy)\ e^{-\lambda}1_{\{\lambda>0\}}d\lambda\Big) && (\boxed{\text{XXXXXXXXXXX}})
\end{aligned}$$

Donc la loi de (N, Λ) c'est tout ce qui apparait dans la grande parenthèse : c'est une loi mixte : un mélange de Dirac $\delta_n(dy)$ et de Lebesgue $d\lambda$. On peut supprimer une intégrale grâce aux Dirac :

$$\mathbf{E}[\varphi(\Lambda, N)] = \int \sum_n \varphi(\lambda, n)\frac{\lambda^n}{n!}e^{-2\lambda}1_{\{\lambda>0\}}\, d\lambda$$

Déterminez maintenant la loi de N seul:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[\varphi(N)] &= \int \sum_n \varphi(n)\frac{\lambda^n}{n!}e^{-2\lambda}1_{\{\lambda>0\}}\, d\lambda \\
&= \sum_n \varphi(n)\frac{1}{n!}\int \lambda^n e^{-2\lambda}1_{\{\lambda>0\}}\, d\lambda \\
&= \sum_n \varphi(n)\frac{1}{n!}\int \frac{\lambda^n}{2^n}e^{-\lambda}1_{\{\lambda>0\}}\,\frac{1}{2}d\lambda \\
&= \sum_n \varphi(n)\frac{1}{2}\frac{1}{2^n} = \int \varphi(x)\sum_n \frac{1}{2}\frac{1}{2^n}\delta_n(dx)
\end{aligned}$$

Dingue : nous constatons que N suit une loi $\boxed{\text{géométrique de paramètre } \frac{1}{2}.}$

2 Début du calcul d'Ito

2.1 Mouvement brownien dans une filtration

On appellera mouvement brownien dans la filtration F_t une trajectoire W_t telle que

- $t \to W_t$ est continue.
- pour tout s, t, $W_{t+s} - W_t$ est $\boxed{\text{indépendant}}$ de F_t.

- pour tout s, t, $W_{t+s} - W_t$ suit une loi $\boxed{\text{normale centrée de variance } s.}$

Remarque : les mouvements browniens sont aussi appelés "processus de Wiener", d'où la lettre W. Mais cette lettre nous rappelle aussi qu'ils oscillent beaucoup. En particulier ils ne sont pas dérivables (vous observerez les simulations).

3 Equation différentielle

3.1 Simple

Considérons une trajectoire a_t. L'équation différentielle

$$\frac{dX_t}{dt} = a_t$$

s'écrit plus joliment

$$dX_t = a_t\, dt$$

se résout approximativement avec le schéma d'Euler : on se donne un point de départ x_0 et une suite de temps t_i très serrés et l'on pose

$$X_{t_{i+1}} = \boxed{X_{t_i} + a_{t_i}(t_{i+1} - t_i)}$$

3.2 Avec une excitation brownienne

Considérons des trajectoires a_t, b_t et une trajectoire brownienne W_t. On écrit une "équation différentielle stochastique" :

$$dX_t = a_t\, dt + b_t dW_t$$

Elle s'interprète ainsi :

$$X_{t+\varepsilon} - X_t = a_t\varepsilon + b_t(W_{t+\varepsilon} - W_t)$$

Donc : les accroissements infinitésimaux de X_t dépendent des accroissements infinitésimaux du Brownien. On dit que X_t subit une excitation brownienne. L'équation différentielle stochastique se résout grâce au schéma d'Euler :

$$X_{t_{i+1}} = \boxed{X_{t_i} + a_{t_i}(t_{i+1} - t_i) + b_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})}$$

Nous programmerons ce schéma en TP.

4 Chain-rule

En français, la "chain-rule" est la "règle de dérivation composée".

4.1 La chain-rule pour les trajectoires régulières

Considérons maintenant une fonction $f(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Notons f' et f'' ses dérivées premières et secondes. Quand X_t est une trajectoire régulière nous avons :

$$\frac{df(X_t)}{dt} = f'(X_t)\boxed{\frac{dX_t}{dt}}$$

qui s'écrit plus joliment :

$$df(X_t) = \boxed{f'(X_t)\, dX_t}$$

Cette formule est **fausse** quand X_t est une trajectoire excitée.

4.2 Le crochet stochastique

Le crochet stochastique est un produit scalaire sur les accroissements différentiels (on verra plus loin une définition). Listez ses propriétés

Il est donc symétrique :

$$\langle dX_t, dZ_t \rangle = \langle dZ_t, dX_t \rangle$$

Linéaire :

$$\langle dX_t + dY_t, dZ_t \rangle = \langle dX_t, dZ_t \rangle + \langle dY_t, dZ_t \rangle$$

Les éléments non différentiel sortent comme des constantes

$$\langle a_t \, dX_t, dZ_t \rangle = a_t \, \langle dX_t, dZ_t \rangle$$

Dès qu'un des éléments est réduit à dt, le crochet s'annule

$$\langle dX_t, dt \rangle = 0$$

Si les deux éléments sont des Browniens indépendants alors le crochet s'annule

$$\langle dW_t, d\tilde{W}_t \rangle = 0$$

mais s'il y a le même brownien des deux côtés alors :

$$\langle dW_t, dW_t \rangle = dt$$

Exemples quand $dX_t = a_t dt + b_t dW_t + c_t d\tilde{W}_t$ et $dY_t = i_t dt + j_t dW_t + k_t d\tilde{W}_t$ alors

$$\langle dX_t, d\tilde{Y}_t \rangle = b_t j_t \, dt + c_t k_t \, dt$$

4.3 Chain rule pour les trajectoires excitées

Théoreme 4.1 (Formule d'Ito) Considérons X_t une trajectoire excitée. Considérons f une fonction deux fois dérivables, on a

$$df(X_t) = \boxed{f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) \, \langle dX_t, dX_t \rangle}$$

En particulier si $dX_t = a_t dt + b_t dW_t$:

$$df(X_t) = \boxed{f'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) b_t^2 \, dt}$$

Retenez bien ce terme supplémentaire dans la chain-rule. Remarquez que lorsque X_t est une trajectoire régulière, le crochet différentiel s'annule et on retombe sur la chain-rule-régulière.

4.4 Exemples

Montrez que $X_t = e^{W_t - \frac{1}{2}t}$ satisfait $dX_t = X_t dW_t$.

5 Intégrales d'Ito

5.1 L'intégrale d'Ito

Une trajectoire excitée est définie par une équation différentielle stochastique et un point de départ :

$$\begin{cases} dX_t = a_t\, dt + b_t\, dW_t \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

On aimerait aussi pouvoir la définir comme ceci :

$$X_t = X_0 + \int_0^t a_s ds + \int_0^t b_s dW_s$$

Il faut donc donner un sens à la seconde intégrale : On utilise pour cela la formule des rectangles-évalués-à-gauche : on se donne des temps $(0 = s_0^n, s_1^n, s_2^n, ...)$ qui se rapprochent quand $n \to \infty$. On définit l'intégrale d'Ito par :

$$it\oint_0^t b_s dW_s := \lim_n \boxed{\sum_i b_{s_i^n}(W_{s_{i+1}^n} - W_{s_i^n}) 1_{s_i^n < t}} \tag{ITO}$$

FAITES UN DESSIN

6 Multi-dimension

6.1 Formule d'Ito multi-dimensionnelle

On considère maintenant plusieurs browniens indépendants W_t^k et on définit plusieurs trajectoires excitées X_t^i par :

$$dX_t^i = a_t^{ik} dt + b_t^{ik} dW_t^k$$

theorem 6.1 (Formule d'Ito multi-dimensionnelles) Considérons des trajectoires excitées $(X_t^1, ..., X_t^n)$. Considérons $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction 2 fois dérivable. On a :

$$df(X_t^1, ..., X_t^n) = \boxed{\sum_i \frac{\partial f}{\partial X_t^i}\, dX_t^i + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial X_t^i \partial X_t^j}\, \langle dX_t^i, dX_t^j \rangle}$$

6.2 Dérivation d'un produit

Exemple 6.2 (Dérivation d'un produit) Considérons 2 trajectoires excitées :

$$X_t = a_t dt + b_t dW_t \tag{1}$$
$$Y_t = c_t dt + e_t d\tilde{W}_t \tag{2}$$

L'opération produit est une fonction : $x \times y = f(x, y)$ que l'on sait bien dériver. Ainsi

$$d(X_tY_t) = \boxed{X_t dY_t + Y_t dX_t + \langle dX_t, dY_t \rangle}$$

Ainsi si $W_t = \tilde{W}_t$ on trouve

$$d(X_tY_t) = \boxed{X_t dY_t + Y_t dX_t + b_t e_t dt}$$

Mais si W et $\tilde{W}$ sont indépendants on retombe sur la formule bien connue

$$d(X_tY_t) = \boxed{X_t dY_t + Y_t dX_t}$$

Exercice 6.1 (Pont brownien) Dans cet exo t appartient à $[0, 1[$. Montrez que :

$$X_t = (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s \tag{$SOLpont$}$$

est solution de

$$dX_t = \frac{-X_t}{1-t} + dW_s \tag{$EDSpont$}$$

Aide : vous dériverez un produit composé d'un trajectoire régulière : $(1-t)$ et d'une trajectoire excitée $\int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s$. Bien entendu toutes les intégrales avec des dW_s sont des intégrales d'ito, et on a $d\big(\int_0^t a_s dW_s\big) = a_t dW_t$ (l'intégrale d'Ito a été construite pour cela).

Résolvez l'exo

7 Processus de Markov et Martingales

7.1 Markov = Diffusions

Une trajectoire X_t est processus de Markov dans la filtration F_t quand

- $\forall t, s,\ X_{t+s} - X_t$ est $\boxed{\text{indépendant de } F_t \text{ conditionnellement à } X_t.}$

Interprétation : «à chaque instant t, l'évolution futur $X_{t+s} - X_t$ ne dépend que du présent X_t et d'un hasard indépendant du passé F_t. »

En particulier, un brownien est un processus Markov.

Définition 7.1 Soient a et b sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La trajectoire excitée

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW_t$$

est appelée une diffusion.

Les diffusions sont des processus de Markov : En effet à chaque instant t, l'évolution futur d'une diffusion (ici dX_t) ne dépend que de sa position présente (X_t) et d'un hasard indépendant du passé (dW_t).

Exercice 7.1 Considérons W_t un mouvement brownien. Quelle équation différentielle vérifie W_t^2. Expliquez pourquoi W_t^2 n'est pas une diffusion.

7.2 Martingale = trajectoire purement excitée

Une trajectoire X_t est une martingale la filtration F_t quand

$$\forall t, s \qquad \mathbf{E}[X_{t+s} - X_t / F_t] = \boxed{0}$$

Ex: une trajectoire brownienne est une martingale.

Les trajectoires 'purement' excitées

$$dX_t = b_t dW_t$$

sont justement des martingales[1]. Explication :

$$\mathbf{E}[X_{t+\varepsilon} - X_t / F_t] = \mathbf{E}[b_t(W_{t+\varepsilon} - W_t))/F_t] = b_t \mathbf{E}[(W_{t+\varepsilon} - W_t))/F_t] = 0$$

7.3 Fonction d'une martingale et modélisation de prix

Considérons

$$dX_t = b_t dW_t$$

D'après la formule d'Ito :

$$d\,f(X_t) = f'(X_t) b_t dW_t + \frac{1}{2} b_t^2 f''(X_t) dt$$

[1]En fait, pour que ce soit vraiment vrai, il faut que b_t ne soit pas trop grand. Par ex : $\forall T : \mathbf{E}[\int_0^T b_t^2 dt] < \infty$

Dès que $f'' \neq 0$, $f(X_t)$ n'est plus une martingale : le second terme (appelé "dérive" ou "drift") décrit comment $f(X_t)$ s'éloigne d'une martingale. En particulier quand f est convexe/concave, $f(X_t)$ dérive vers le haut/bas[2].

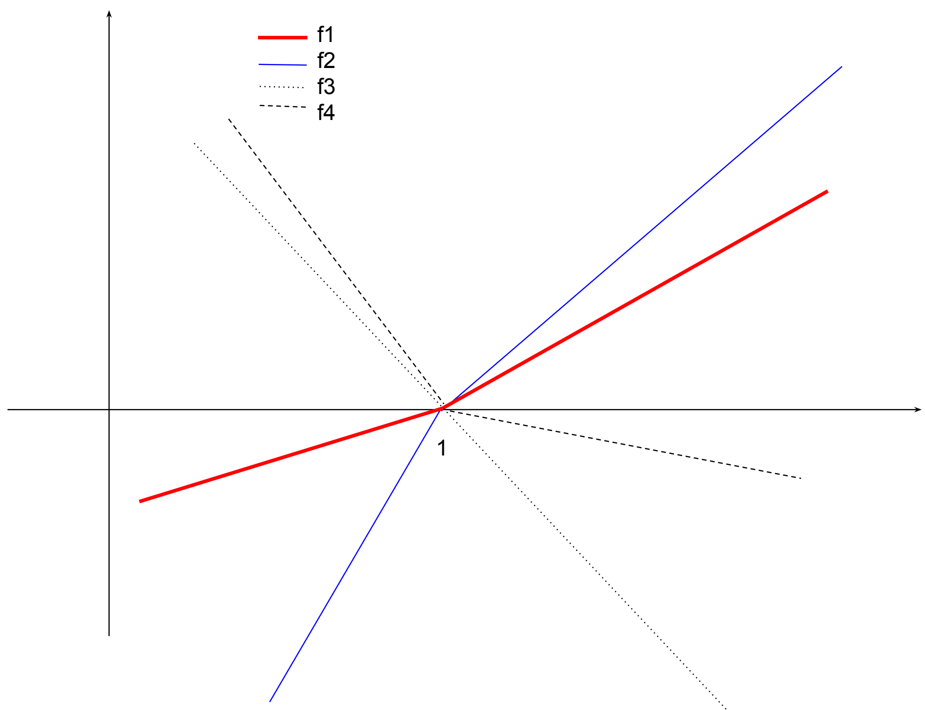
Rappelons l'exponentielle stochastique : $X_t = e^{W_t - \frac{1}{2}t}$. Rappelons qu'elle est aussi définie par :

$$X_0 = 1 \quad ; \quad dX_t = X_t dW_t$$

Ainsi c'est une martingale, et de plus elle est positive. Ce qui est très intéressant pour modéliser des sommes d'argent X_t qui "en moyenne n'évolue pas" (ex : les gains lors d'un jeu équilibré). Un non-mathématicien dira alors : puisqu'en moyenne le prix n'évolue pas, autant le modéliser par un processus constant ($\forall t : X_t = X_0$).

Et bien non, ce n'est pas la même chose : car dès qu'on va faire quelque chose avec l'argent, c'est à dire, dès qu'on va considérer des sommes $f(X_t)$ le hasard prendra son importance. L'erreur du non-mathématicien c'est de croire que $\mathbf{E}[f(X_t)] = f(\mathbf{E}[X_t])$.

Exercice 7.2 Considérons une martingale positive X_t avec $X_0 = 1$, qui représente le prix d'une action. Votre banquier vous propose de placer votre argent sur cette action. Il vous propose de gagner $f_1(X_t)$ ou $f_2(X_t)$ ou $f_3(X_t)$ ou $f_4(X_t)$. Quelle fonction choisiriez-vous ?



Classez les fonctions. Mettez une phrase d'explication.

[2] on partle de sous/sur martingale (terminologie anti-intuitive)

8 Lotka-Volterra

8.1 Deux espèces en concurrences

Exemple 8.1 (Lotka-Voltera) Considérons

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t dt - X_t Y_t dt + \varepsilon X_t dW_t \\ dY_t &= -Y_t dt + X_t Y_t dt + \varepsilon Y_t d\tilde{W}_t \end{aligned}$$

Quand $\varepsilon = 0$ on trouve le système différentiel de Lotka-Voltera classique : X est la population de proies et Y est la population de prédateurs.

Expliquez schématiquement pourquoi cette équation a des solutions périodiques

Exercice 8.1 Considérons le processus (X_t, Y_t) défini précédemment. Notons

$$Z_t = X_t + Y_t - \ln(X_t) - \ln(Y_t)$$

Calculez dZ. soignez la présentation des calculs (utilisez un brouillon). Interprétez.

Ce dernier exercice est plus long que les autres. Il rapporte plus de points.