Stat's trick

June 11, 2018

1 Introduction : c'est quoi les stats ?

Soit $x = [x_0, ..., x_{p-1}] \in \mathbb{R}^p$. Nous notons :

$$\begin{aligned} \text{mean}(x) &= \frac{1}{p} \sum_i x_i \\ \text{std}^2(x) &= \frac{1}{p-1} \sum_i \Big(x_i - \text{mean}(x) \Big)^2 \\ \text{std}(x) &= \sqrt{\text{std}^2(x)} \end{aligned}$$

Ces notations sont inspirées de numpy. Mais attention, pour calculer $\text{std}(x)$ il faut faire `np.std(X,ddof=1)` (pour le $\frac{1}{p-1}$ devant la somme).

Exercice 1.1 Vérifiez que pour $a, b \in \mathbb{R}$, $\text{mean}(ax + b) = a\,\text{mean}(x) + b$ et $\text{std}^2(ax + b) = a^2\,\text{std}(x)$.

Considérons maintenant une va X_0 d'espérance μ et de variance σ^2.

Les statisitques commencent quand on se demande comment on peut estimer μ, σ^2 à partir d'observations $X = [X_0, ..., X_{p-1}]$ (qui sont toutes des copies indépendantes de notre va initiale). Le premier élément de réponse c'est que :

$$\mu \simeq \text{mean}(X) \tag{1}$$
$$\sigma^2 \simeq \text{std}^2(X) \tag{2}$$

Mais quelle est la qualité de ces estimations ? Plus précisémment :

- Quel est l'éloignement entre μ et $\text{mean}(X)$? réponse: LFGN, TCL
- Quelle sera la loi de $\text{mean}(X)$ et $\text{std}^2(X)$? réponse: théorème de Cochrane.
- Puis-je donner un intervalle très probable pour μ ? réponse: intervalle de confiance.
- Puis-je affirmer que $\mu = 0$ lorsque que $\text{mean}(X) = 0.0034123$? réponse: test statistique.

Nous répondrons à ces questions dans ce document. Mais attention, il s'agit d'une initiation très sommaire aux statistiques ; en espérant que cela vous donne des jalons qui vous aideront si vous deviez faire des statistiques plus poussées.

Exercice 1.2 Pourquoi a-t-on mis $\frac{1}{p-1}$ et pas $\frac{1}{p}$ dans l'expression de std^2 ?

2 Convergence en loi

2.1 Informatiquement

La convergence ps (presque sûre) c'est la convergence 'habituelle' : Supposons que X_n sont des réels aléatoires, $X_n \xrightarrow{\text{ps}} X_\infty$ signifie que les nombres X_n convergent vers le nombre X_∞. Pour illustrer une convergence p.s. il suffit de tracer:

$$\text{plot}([0, 1, ...,], [X_0, X_1, ...])$$

On verra une courbe qui se rapproche de la valeur X_∞. On peut éventuellement relancer plusieurs fois le programme (ou bien superposer plusieurs simulations) pour vérifier que cette convergence à lieu à chaque fois (=presque surement).

La convergence en loi c'est la convergence des "histogrammes". Pour l'illustrer on est obligé de considérer plusieurs copies indépendantes $(X_n^i, X_\infty^i)_i$ de (X_n, X_∞). On peut choisir n grand (ex $n = 100$) et tracer les histogrammes:

$$\text{hist}([X_{100}^0, X_{100}^1, X_{100}^2, ...]) \tag{3}$$
$$\text{hist}([X_\infty^0, X_\infty^1, X_\infty^2, ...]) \tag{4}$$

Ces histogrammes devraient se superposer (si n est assez grand, si le nombre de simulation est assez grand par rapport au nombre de batons).

Cependant, en pratique, on dit plutot que X_n converge en loi vers un loi donnée (ex : exponentielle). Dans ce cas, il faut superposer le premier histogramme avec la densité de la loi exponentielle :

$$\text{hist}([X_{100}^0, X_{100}^1, X_{100}^2, ...]) \tag{5}$$
$$x = \text{linspace}(...) \tag{6}$$
$$\text{plot}(x, \exp(-x)]) \tag{7}$$

2.2 Définition

Fixons nous E un espace. Typiquement $E = \mathbb{R}$ ou $E = \mathbb{R}^p$ ou encore E est un espace de trajectoires (=fonctions de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^n$).

Un ensemble de fonctions tests sur E est un ensemble Φ de fonctions qui caractérise la loi des objets aléatoires à valeurs dans E :

$$\forall \varphi \in \Phi : \mathbf{E}[\varphi(X_1)] = \mathbf{E}[\varphi(X_2)] \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{P}[X_1 \in dx] = \mathbf{P}[X_2 \in dx]$$

L'ensemble des fonctions continues bornée $\mathcal{C}_b(E)$ est un ensemble de fonctions testes très important, car il est utilisé pour définir la convergence en loi :

$$X_n \xrightarrow{\text{loi}} X \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_b(E)\ \mathbf{E}[\varphi(X_n)] \to \mathbf{E}[\varphi(X)]$$

Attention : la convergence en loi n'est pas vraiment une convergence entre des objets aléatoires, mais bien une convergence entre leurs lois. Parfois, il vaut mieux noter :

$$\text{loi}(X_n) \to \text{loi}(X)$$

On peut aussi utiliser des notations mixtes, ex :

$$X_n \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1)$$

2.3 Exemple à avoir en tête

- Si $\text{loi}(X_n) = \delta_{x_n}$ et si $x_n \to x$

$$X_n \xrightarrow{\text{loi}}$$

Exo : vérifiez-le avec la définition. Vérifiez aussi que ça ne marcherait pas si on avait choisi comme ensemble de fonction tests, les indicatrices par exemple.

- Le point précédent peut se déduire de l'implication générale suivante:

$$X_n \xrightarrow{\text{ps}} X \qquad \Rightarrow \qquad X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$$

L'implication inverse est complètement fausse: considérons des va $(X_n), X$ indépendantes, non constantes, de même loi. On a $X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$ (rappelez vous que cela signifie $\text{loi}(X_n) \to \text{loi}(X)$). Pourtant, du fait de l'indépendances, la suite $n \to X_n$ ne se stabilise jamais, donc, pas de convergence ps.

- Cependant il y a un cas où l'on a une l'implication dans l'autre sens: Soit c une constante

$$X_n \xrightarrow{\text{loi}} c \qquad \Rightarrow\ X_n \xrightarrow{\text{ps}} c$$

Pour comprendre cela, pensez aux histogrammes : la convergence en loi vers une constante, implique que toutes les trajectoires finissent nécessairement dans le baton qui contient c. C'est bien une convergence ps. (techniquement, il s'agit d'une convergence en proba, mais c'est quasi pareil)

- Si f est une fonction continue on a

$$X_n \xrightarrow{\text{loi}} X \text{ et } Y_n \xrightarrow{\text{ps}} Y \qquad \text{alors} \qquad f(X_n, Y_n) \xrightarrow{\text{loi}} f(X, Y)$$

Cette implication est fausse quand on considère deux converges en loi. Prenons par exemple la fonction continue $f(x, y) = x + y$. Prenons Z et Z' deux va indépendantes non constante et de même loi. Posons $\forall X_n = Z$ et $\forall n Y_n = -Z$. On a : $X_n \xrightarrow{\text{loi}} Z$ et $Y_n \xrightarrow{\text{loi}} Z'$. Pourtant ...

- Si $\text{loi}(X_n) = \frac{1}{n}\delta_0 + \frac{n-1}{n}\delta_{1-\frac{1}{n}}$ alors

$$X_n \xrightarrow{\text{loi}}$$

2.4 Caractérisation

- Dans le cas $E = \mathbb{R}$. Rappelons que la fonction caractérisitique d'une va X c'est $\text{Carac}_X(u) = \mathbf{E}[e^{iuX}]$. On a :

$$X_n \xrightarrow{\text{loi}} X \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall u\ \text{Carac}_{X_n}(u) \xrightarrow[n\to\infty]{} \text{Carac}_X(u)$$

Remarque : Cela revient à dire que l'ensemble des fonctions tests $\{e^{iu\cdot} : u \in \mathbb{R}\}$ est tout aussi bon que $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ pour définir la convergence en loi.

- La convergence en loi de X_n vers X équivaut au fait que, pour tout a, b telle que $\mathbf{P}[X = a] = \mathbf{P}[X = b] = 0$ on a :

$$\mathbf{P}\Big[X_n \in]a, b[\Big] \to \mathbf{P}\Big[X \in]a, b[\Big]$$

La condition $\mathbf{P}[X = a] = \mathbf{P}[X = b] = 0$ est importante. Exo : Trouvez un exemple très très simple où $X_n \to X$ en loi, et tel que

$$\mathbf{P}\Big[X_n \in]0, 1[\Big] \to 1 \qquad \text{mais} \qquad \mathbf{P}\Big[X \in]0, 1[\Big] = 0$$

3 Théorème central limite

3.1 Enoncé

Soit $X = [X_0, X_1, ...]$ une suite de va iid d'espérance μ et de variance $\sigma^2 < \infty$. Notons $X_{:n} = [X_0, ..., X_{n-1}]$.

theorem 3.1 La version centrée-réduite de $\text{sum}(X_{:n})$ converge en loi vers une $\mathcal{N}(0,1)$.

Précisons : l'espérance et la variance de $\text{sum}(X_{:n})$ valent respectivement $n\mu$ et $n\sigma^2$, ainsi :

$$\frac{\text{sum}(X_{:n}) - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1)$$

en divisant le numérateur et le dénominateur par n on trouve:

$$\frac{\text{mean}(X_{:n}) - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1)$$

On peut retenir, que lorsque n est grand :

$$\text{mean}(X_{:n}) - \mu \qquad \sim \qquad \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,\mathcal{N}(0,1)$$

Ainsi, moralement $\text{mean}(X_{:n})$ vers $\mathcal{N}(0,1)$ à la vitesse $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

3.2 Monte-Carlo

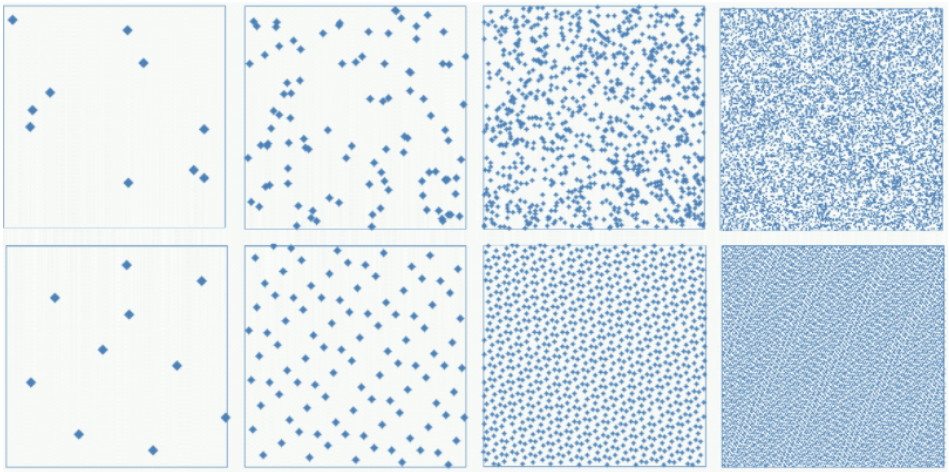
L'algorithme de Monte-Carlo c'est:

(a). Traduire une intégrale ex: $\int_E \varphi(x)dx$ par une espérance ex: $c_{st}\mathbf{E}[\varphi(X)]$ où X est uniforme sur E.

(b). Estimer cette espérance par la moyenne de va simulées ex: $\mathbf{E}[\varphi(X)] \sim \text{mean}(\varphi(X_0), ..., \varphi(X_{n-1}))$

Ainsi la vitesse de convergence dans l'algorithme de Monte-Carlo est $\frac{1}{\sqrt{n}}$, ce qui est plutôt lent : les bons schémas d'analyse numérique font du $\frac{1}{n^2}$. Cependant l'algorithme de Monte-Carlo est très facile à programmer, surtout quand la dimension de E est grand ou quand E est biscornu (ex E est une sphère, E a des trous...)

Il existe des suites $(X_0^n, ..., X_{n-1}^n)$ qui ne sont pas aléatoires, mais qui se génèrent avec des algorithmes simples, et qui remplissent l'espace plus régulièrement que les suites aléatoires : Ce sont les suites à discrépence faible. La moyenne $\text{mean}(\varphi(X_0^n), ..., \varphi(X_{n-1}^n))$ converge vers l'intégrale à la vitesse de $\frac{1}{n}$.



Inconvénient : la suite $(X_0^{n+p}, ..., X_{n+p-1}^{n+p})$ ne s'obtient pas en rallongeant la suite $(X_0^n, ..., X_{n-1}^n)$.

3.3 Généralisation

Le TCL admet de nombreuses généralisations : En fait il suffit que les X_n soient suffisamment décorrélées (au sens large) et que leur variance reste dans un intervalle borné pour que cela marche.

On peut aussi voir ce théorème ainsi : En sommant un nombre important de v.a. suffisamment indépendantes, on est proche d'une gaussienne (pas forcément centrée-réduite).

3.4 Intervalle de confiance

Plaçons nous dans la situation suivante : vous disposez de plusieurs appareils pour mesurer la température. Tous ces appareils font des erreurs aléatoires. On suppose que tous ces appareils sont indépendants et tous identiques (= de même loi).

Notons $X_{:n} = [X_0, ..., X_{n-1}]$ ces mesures. Notons μ la vraie température. On suppose que nos appareils ne sont pas biaisés, donc $\mathbf{E}[X_i] = \mu$. On note σ^2 la variance des X_i.

On estime naturellement μ par $\text{mean}(X_{:n})$. On aimerait construire un intervalle de confiance pour cette estimation, càd trouver une va $a > 0$ telle que

$$\mathbf{P}[-a < \mu < a] = 1 - \alpha$$

avec $\alpha = 5\% = 0.05$ par exemple.

Par le TCL on a que

$$\frac{\mu - \text{mean}(X_{:n})}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Notons $q_\alpha > 0$ le réel tel que $\mathbf{P}[-q_\alpha < \mathcal{N}(0,1) < +q_\alpha] = 1 - \alpha$. On le calcule avec l'inverse de la fonction de répartition = la fonction quantile = probability percentile function = ppf :

$$q_\alpha = \text{ppf}(1 - \frac{\alpha}{2})$$

DESSIN

On a:

$$\mathbf{P}\Big[- q_\alpha < \frac{\mu - \text{mean}(X_{:n})}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < +q_\alpha \Big] = 1 - \alpha$$

Donc

$$\mathbf{P}\Big[\text{mean}(X_{:n}) - \frac{\sigma q_\alpha}{\sqrt{n}} \ < \ \mu \ < \ \text{mean}(X_{:n}) + \frac{\sigma q_\alpha}{\sqrt{n}}\Big] = 1 - \alpha$$

On a trouvé l'intervalle qui va bien. Remarquons qu'il se resserre quand n grandi.

4 Vecteur aléatoires

Par défaut, les vecteurs seront considérés comme des colonnes. En particulier, lorsque a est une matrice et b un vecteur de taille compatible, on peut définir le produit matriciel ab qui donne un vecteur colonne.

4.1 Vecteur aléatoire

Considérons un vecteur aléatoire $X \in \mathbb{R}^p$.

- L'espérance de X c'est le vecteur $\mu = \mathbf{E}[X]$ défini par $\mu_i = \mathbf{E}[X_i]$.
- la matrice de covariance de X c'est la matrice $\sigma^2 = \mathbf{V}[X]$ définie par $\sigma_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j)$. On peut l'écrire avec une multiplication matricielle:

  $$\sigma^2 = \mathbf{E}[(X - \mu)(X - \mu)^T] \qquad (SigmaMat)$$

  (où nous supposons, comme pour les vecteurs, que l'espérance d'une matrice aléatoire, c'est la matrice des espérances).

- La matrice σ^2 est symétrique et ses valeurs propres sont positives. Donc on peut l'écrire

$$\sigma^2 = US^2U^T$$

avec S^2 la matrice diagonale formée des valeurs propres (=valeurs singulières) que l'on classe dans l'ordre décroissant $s_0^2 > s_1^2 > ...$, et U une matrice orthogonale (= les colonnes forment une base orthonormale = les lignes forment une base orthonormale)

4.2 Interprétation géométrique de la covariance

Considérons un vecteur aléatoire X de matrice de covariance $\sigma^2 = US^2U^T$. Noons U_i les colonnes de U. On note naturellement s_i les racines carrées des $s_i^2 = S_{i,i}^2$. Elles sont ordonnées $s_0 > s_1 > ....$ On note μ le vecteur espérance de X. Si maintenant nous simulons des copies indépendantes de X, elles formeront un nuage de point autour de μ, dont la dispersion sera décrite par les U_i et s_i :

DESSIN

en particulier, quand un des s_i s'annule, le nuage est écrasé :

DESSIN

Attention 1 : même en classant les valeurs propres par ordre décroissant, il n'y a pas unicité de la base U (il y a un choix à faire quand des valeurs propres sont égales).

Attention 2 : tous les vecteurs aléatoires ne se répartissent pas en patate. Voici des simulations de vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^2$ qui admettent tous la matrice identité pour matrice de covariance (merci wikipedia).

4.3 Exo

Exercice 4.1 Dans cet exo a sera une matrice et b un vecteur. Vérifiez ou complétez les points suivants:

- $\mathbf{E}[aX + b] = a\mathbf{E}[X] + b$.
- $\mathbf{V}[aX + b] = a\mathbf{V}[X]a^T$. Aide: utilisez $(sigmaMat)$
- Soit X un vecteur aléatoire de matrice de covariance $\sigma^2 = US^2U^T$ et d'espérance μ. Notons $\sigma = USU^T$. Quelles est la matrice de covariance de $\sigma^{-1}(X - \mu)$? Faites le lien avec le fait de centrer-réduire les va.
- σ^2 est symétrique et ses valeurs propres sont positives. La symétrie est évidente. Pour les valeurs propres, il suffit de montrer qu'elle est semi-définie positive. Vérifions-le : $\forall v : v^T\sigma^2 v = ... \geq 0$.
- Les coefficients de corrélation sont définis par $c_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j)/\sqrt{\mathbf{V}(X_i)}/\sqrt{\mathbf{V}(X_j)}$. Quelle fameuse inégalité permet d'affirmer que ces coefficients sont compris entre -1 et $+1$.

4.4 Dataframe

Soit $(X^0, ..., X^{p-1})$ un vecteur aléatoire (j'ai mis les indices en haut, car pour une fois, je le considère en ligne). On en considère n copies $(X_i^0, ..., X_i^{p-1})_{i<n}$. Notons `X` la matrice $\texttt{X}_{ij} = X_i^j$. Cette matrice s'appelle une dataframe.

Dans une dataframe, les lignes représentent les individus et les colonnes leur caractéristique (age, sexe, taille, poids). Les lignes sont indépendantes, mais pas les colonnes.

Nous parlerons beaucoup de ces dataframe en analyse de données. Pour l'instant nous nous contentons d'un exo.

Exercice 4.2 Considérons `X` une dataframe Que fait-on dans le programme python suivant :

```
X -=  np.mean(X,axis=0)
X /=  np.std(X,axis=0,ddof=1)
C  =  np.matmul(X.T,X)
```

Aide : `sum(X,axis=0)` cela fait $\sum_i X_{ij}$. `mean` et `std` fonctionnent de la même manière.

4.5 Déformation de la densité

Soit $X \in \mathbb{R}^p$ un vecteur aléatoire de densité f. Soit a une matrice inversible $p \times p$. Soit $b \in \mathbb{R}^p$. Montrez que la densité de $aX + b$ est

$$x \to \frac{1}{|\det a|} f\Big(a^{-1}(x-b)\Big)$$

Cela vous fera réviser votre formule de changement de variable.

5 Vecteur gaussien

Les vecteurs gaussiens sont les vecteurs aléatoires les plus naturels.

On notera I la matrice identité.

5.1 gaussien standart $\to$ gaussien général

Définition 5.1 Soit $Y \in \mathbb{R}^p$. On dit que Y est un vecteur gaussien standart, et on note $Y \sim \mathcal{N}_p(0, I)$ lorsque les composantes Y_i sont des $\mathcal{N}(0, 1)$ indépendantes. Son espérance est 0 et sa matrice de covariance c'est I.

Définition 5.2 Les vecteurs gaussiens sont tous les vecteurs de la forme $aY + b$ avec a matrice, b vecteur et $Y \sim \mathcal{N}_p(0, I)$.

Ainsi par construction, la famille des vecteurs gaussiens est stable par combinaison affine.

5.2 gaussien général $\to$ gaussien standart

Ainsi, par définition, un vecteur gaussien général c'est $X = aY + b$ avec $Y \sim \mathcal{N}(0, I)$. L'espérance de X est alors $\mu = b$ et sa matrice de covariance est alors $\sigma^2 = aa^T$ (cf. exo 4.1).

Définissons alors $Y' := \sigma^{-1}(X - \mu)$ (attention, on ne retombe pas forcément sur Y). On a que

$$X = \sigma Y' + \mu \qquad \text{et} \qquad Y' \sim \mathcal{N}_p(0, I)$$

Ci-dessus, on a une écriture "canonique" d'un vecteur Gaussien général (une écriture pas tout à fait unique car pour définir σ il faut écrire $\sigma^2 = US^2U^T$ et il peut y avoir des choix arbitraires dans la construction de U). On voit bien avec cette écriture que la loi de X ne dépend que de σ^2 et de μ. On notera d'ailleurs:

$$X \sim \mathcal{N}_p(\mu, \sigma^2)$$

5.3 Densité

Si $Y \sim \mathcal{N}_p(0, I)$. Sa densité est le produit des densités des Y_i, c'est donc:

$$f_Y(x) = \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_i^2} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}x^T x}$$

Prenons maintenant $X \sim \mathcal{N}_p(0, \sigma^2)$. Puisque il peut s'écrire σY, sa densité est

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\det \sigma|} e^{-\frac{1}{2}(\sigma^{-1}x)^T \sigma^{-1} x} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\det \sigma|} e^{-\frac{1}{2}x^T \sigma^{-2} x}$$

Remarque : on a utilisé implicitement que σ^2 étant inversible (= aucun des s_i ne s'annule). Que se passe-t-il dans le cas contraire ? Et bien il n'y a pas de densité, ce qui est logique car : σ^2 non-inversible $\Leftrightarrow$ un des s_i est nul $\Leftrightarrow$ σ n'est pas de rang maximal $\Rightarrow$ $X = \sigma Y$ est porté par un sous-espace vectoriel strict de $\mathbb{R}^p$.

Construisons un vecteur gaussien de dimension 2 qui n'a pas de densité: Prenons $Y = [Y_0, Y_1] \sim \mathcal{N}_2(0, I)$. Notons $X = [(Y_0 + Y1)/2, (Y_0 + Y1)/2]$. C'est un vecteur gaussien qui est porté par la diagonale. Comme la diagonale est d'aire nulle, X n'a pas de densité.

Exercice 5.1 Ecrire la densité de $X \sim \mathcal{N}_p(\mu, I)$ (placez μ au bon endroit)

5.4 Covariance nulle et indépendance

Rappelons que pour un vecteur $(X_0, X_1, ..., X_{p-1})$ la factorisation de la densité

$$f(x_0, x_1, ..., x_{p-1}) = f_0(x_0) f_1(x_1) ... f_{p-1}(x_{p-1})$$

équivaut à l'indépendance. Dans le cas particulier des vecteurs gaussiens, on voit que la densité se factorise ssi σ^2 est diagonale.

En fait ce résultat est vrai même quand le vecteur gaussien n'a pas de densité (= σ^2 non inversible).

Exercice 5.2 Un de vos camarades vous affirme que : lorsque X_1 et X_2 sont deux va gaussiennes alors $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2 \Leftrightarrow \text{cov}(X_1, X_2) = 0$ Mais s'il écrit cela à l'interro, le prof ne sera pas content. Aidez-le à corriger son imprécision.

5.5 TCL en dimension p

Le TCL se généralise aux vecteurs aléatoire. Nous traitons ceci au via un exercice.

Considérons K, L deux va indépendantes centrées réduites. Définissons le vecteur $X = (X^0, X^1) = (K, K + L)$. Prenons $(X_0, ..., X_{n-1})$ des copies de X.

A quoi ressemble la loi de $(X_0 + X_1 + ... + X_{n-1}) \in \mathbb{R}^2$?

Je ne vous demande pas de preuve, mais uniquement une intuition. Vous pouvez aussi procéder par analogie avec le TCL en dimension 1. Vous pouvez aussi regarder sur internet, mais c'est la solution la moins marrante.

6 Loi des estimateurs de l'espérance et de la variance

6.1 Intro

On dispose d'observation $X = [X_0, ..., X_{p-1}]$. On calcule des estimateurs ex: $\text{mean}(X), \text{std}(X), ...$ On aime bien ensuite connaitre la loi de ces estimateurs. Par exemple pour calculer des intervalles de confiance (cf. avant), ou bien pour faire des tests (cf. après). Le calcul des lois exactes des estimateurs est souvent trop compliqué, sauf ... quand X est un vecteur gaussien ! Et quand X n'est pas gaussien, mais que p est grand, les lois des estimateurs sont proches des lois qu'on obtient dans le cas gaussien (merci le TCL).

Dans cette section, nous calculons la loi du couple $\text{mean}(X), \text{std}(X)$ quand $X \sim \mathcal{N}_p(0, I)$. La technique utilisée (projection de vecteur gaussien) est assez générique. Dans votre vie future, si vous rencontrez des estimateurs plus complexes (ex: coefficient de régression), le calcul de leur loi sera probablement basé sur cette technique de projection de vecteur gaussien.

6.2 Loi du Chi2

On dit que Y suit une loi du χ_2 à p degrés de liberté (=degree of freedom=df) lorsque qu'il existe $X \sim \mathcal{N}_p(0, I)$ telle que

$$Y = \|X\|^2 = X_0^2 + ... + X_{p-1}^2$$

On note $Y \sim \chi_2(df : p)$ ou plus simplement $\chi_2(p)$. Comme d'habitude, si $k > 0$ est une constante, on note $kY \sim \chi_2(df : p, scale : k)$.

Propriété : Quand $Y \sim \chi_2(p)$ on a

$$\mathbf{E}[Y] = p \tag{8}$$
$$\mathbf{V}[Y] = 2p \tag{9}$$

6.3 Projection

Exercice 6.1 Soit $Y \sim \mathcal{N}_p(0, I)$. Soit U une matrice orthogonale. Montrez que $UY \sim \mathcal{N}_p(0, I)$. En d'autre terme: les lois $\mathcal{N}_p(0, I)$ sont invariante par rotation et symmétrie. Aide : UY est un vecteur ..... et donc sa loi est caractérisée par ..... et ..... qui se calculent facilement.

Proposition 6.1 Soit E un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ et $E^\perp$ sont orthogonal. Soit $Y \sim \mathcal{N}_p(0, I)$. Les projections $\Pi_E Y$ et $\Pi_{E^\perp} Y$ sont indépendantes.

Démo : Considérons U une matrice orthogonale, dont les premières colonnes $U_{:k}$ forment une base de E et les dernières colonnes $U_{k:}$ forment une base de $E^\perp$. Le vecteur $U^{-1}Y$ est l'expression de Y dans la base U. D'après l'exercice précédent, $\tilde{Y} = U^{-1}Y$ suit une loi $\mathcal{N}_p(0, I)$, donc ses coordonnées sont indépendantes. Ainsi:

$$\Pi_E Y = U\tilde{Y}_{:k} \qquad \perp\!\!\!\perp \qquad \Pi_{E^\perp} Y = U\tilde{Y}_{k:}$$

6.4 Théorème de cochrane

Pour une échantillon $X = [X_0, X_1, ..., X_{p-1}]$ quelconque, la loi de $\text{mean}(X)$ et $\text{std}^2(X)$ est impossible à calculer. Mais dans le cas gaussien :

Théoreme 6.1 Considérons $X = [X_0, X_1, ..., X_{p-1}]$ un échantillon de va de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. En d'autres termes $X \sim \mathcal{N}_p(\mu\mathbf{1}, \sigma^2 I))$. On a :

- $\text{mean}(X)$ et $\text{std}^2(X)$ sont indépendants.
- $\text{mean}(X)$ suit une $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{p})$.
- $\frac{\text{std}^2(X)}{\sigma^2}$ suit une loi $\chi_2(df : p-1, scale : \frac{1}{p-1})$.

Exo : Du troisième point, on peut en déduire que $\text{std}^2(X)$ est non biaisé (mais on avait déjà fait cet exo en dehors du cadre gaussien).

Exo : Sauriez-vous construire une région de confiance pour le couple (μ, σ), c'est à dire un ensemble $A \subset \mathbb{R}^2$, dépendant de X, tel que $\mathbf{P}[(\mu, \sigma) \in A] = 0,95$?

Démonstration: Quitte à remplacer X par $(X - \mu)/\sigma$, on peut supposer que $\mu = 0$ et $\sigma = 1$.

L'application $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p, x \to \text{mean}(x)$ est la projection sur la diagonale de $\mathbb{R}^p$. Donc l'application $x \to x - \text{mean}(x)$ est la projection sur l'orthogonale de la diagonale. Donc $\text{mean}(X)$ est indépendant de $X - \text{mean}(X)$. Considérons une base orthonormale dont le premier vecteur est dans la diagonale. Notons $\tilde{X}$ l'expression de X dans cette base. Ainsi $\text{mean}(X) = \tilde{X}_0$ suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$, tandis que $[\tilde{X}_1 ... \tilde{X}_{p-1}] \sim \mathcal{N}_{p-1}(0, I)$. La norme euclidienne ne dépend pas du système de coordonnées (= de la base orthonormale choisie), ainsi :

$$\|X - \text{mean}(X)\|^2 = \|(\tilde{X}_1, ..., \tilde{X}_{p-1})\|^2 \sim \chi_2(df : p-1)$$

□

7 TCL sans connaitre la variance

7.1 Définition de la loi t de Student.

On dit que Y suit une t de Student à p-degré de liberté lorsqu'il existe deux va Z, U indépendantes avec $Z \sim N(0,1)$ et $U \sim \chi_2(df = p)$ et que

$$Y = \frac{Z}{\sqrt{\frac{U}{p}}}$$

On note alors $Y \sim t(df : p)$ ou plus simplement $Y \sim t(p)$

7.2 Une sorte de TCL

On considère un échantillon : $X = [X_0, ..., X_{p-1}]$ représentant des observations iid d'une quantité.

On note comme d'habitude μ et σ l'espérance et l'écart-type de X_0. Ce sont des caractéristiques de la vraie quantité. Si on n'y a pas accès, on les estime par $\text{mean}(X)$ et $\text{std}(X)$.

Maintenant nous aimerions répondre à la question suivante : «de combien $\text{mean}(X)$ et μ sont éloignés ? »

Pour répondre avec le TCL, nous utilisions :

$$\frac{\text{mean}(X) - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{p}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Mais en général, on ne connait pas σ, on le remplace par son estimateur. Définissons:

$$R(X) := \frac{\text{mean}(X) - \mu}{\frac{\text{std}(X)}{\sqrt{p}}}$$

Quand p est grand, σ et $\text{std}(X)$ sont très proches, et on peut affirmer que $R(X) \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Mais quand p est petit, le hasard peut donner des valeurs de $\text{std}(X)$ très petites, donc des valeurs de $R(X)$ très grandes. Du coup on s'attend à ce que la loi de $R(X)$ ait des queues plus lourdes que celle de la gaussienne.

La loi exacte de $R(X)$ est impossible à calculer dans le cas générale. Mais on peut supposer que chaque observation X_i est proche d'une gaussienne (car chaque observation est sans doute elle-même la somme de plusieurs phénomènes indépendants).

theorem 7.1 Quand $X_0, ..., X_{p-1}$ sont iid de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ on a :

$$\text{loi}(R(X)) = t(p-1)$$

7.3 Démo

Première étape : On peut écrire $X = \sigma Y + \mu$ avec $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$. Et en recalculant le rapport $R(X)$, on trouve :

$$R(X) = \frac{\text{mean}(Y)}{\frac{\text{std}(Y)}{\sqrt{n}}}$$

Donc on peut supposer dès le début que $\mu = 0$ et $\sigma^2 = 1$. On suppose donc désormais que $X \sim \mathcal{N}_p(0, I)$.

Seconde étape : à faire vous même en utilisant le théorème de Cochrane.

7.4 Conclusion

A la réponse «de combien mean(X) et μ sont éloignés ? » on peut répondre dans le cas gaussien :

$$\text{mean}(X) - \mu \sim \frac{\text{std}(X)}{\sqrt{p}}\ t(p-1)$$

quand p est grand, on retombe sur le TCL. Quand p est petit, il faut se méfier des queues de la Student : la "constante aléatoire" $t(p-1)$ peut-être très grande.

La plupart du temps, quand on estime un paramètre par une moyenne d'observation, on a au moins 20 observations (en dessous de 20 observations, on est plus voyant que statisticien). Or dès $p = 20$, σ et std sont très proches. Aurait-on fait tout ceci pour rien ? Non, car ce travail est juste un cas d'école. Dans la vraie vie, les estimateurs sont plus complexes et les degrés de liberté différents. Par exemple, quand on fait de la regression linéaire avec p observations et d variables explicatives, on tombe sur des estimateurs qui, une fois renormalisés, suivent des lois $t(p-d-1)$. Attention aux queues lourdes quand d est grand !

8 Tests statistiques

8.1 Test avec statistique positive

On a deux hypothèses: H_0 et son contraire H_1. Exemple 1:

H_0 : les hommes boivent autant de bière que de vin
H_1 : les hommes ne boivent pas autant de bière que de vin.

Exemple 2:

H_0 : l'échantillon observé est a une distribution gaussienne.
H_1 :l'échantillon observé est n'a pas une distribution gaussienne.

Exemple 3:

H_0 : Le sexe et le QI sont indépendants.
H_1 : Le sexe et QI ne sont pas indépendants.

Notez que les deux hypothèses ne sont pas interchangeable : H_0 est une hypothèse "précise", et donc sont contraire H_1 est une hypothèse "vague".

On construit une "statistique" $D > 0$. On a construit D pour qu'en théorie :

$H_0 \quad \Rightarrow$ D petit.
$H_1 \quad \Rightarrow$ D grand

Ainsi en pratique, on effectue des observations pour calculer D et :

$D \leq$ seuil $\quad \Rightarrow$ on choisit H_0
$D >$ seuil $\quad \Rightarrow$ on choisit H_1

Mais comment choisir le seuil ? En fait, en construisant D on a fait en sorte que :

$H_0 \quad \Rightarrow$ D suit une loi de fonction de répartition F bien connue (ex : χ_2).
$H_1 \quad \Rightarrow$ D est très très grand.

En général, puisque H_1 est une hypothèse "vague", sous H_1 on a beaucoup mal à évaluer la loi de D, on sait juste qu'il est grand.

Le principe de tous les tests est que :

«Quand H_0 est vrai, on veut choisir H_1 rarement».

On se fixe un α petit (ex: 0.05). C'est le niveau du test. Et on souhaite que, sous H_0, la probabilité de choisir H_1 soit de α. Ainsi : Sous H_0 :

$$\mathbf{P}[D > seuil] = \alpha \;\Leftrightarrow\; \mathbf{P}[D \leq seuil] = 1-\alpha \;\Leftrightarrow\; F(seuil) = 1-\alpha \;\Leftrightarrow\; seuil = F^{-1}(1-\alpha)$$

C'est la méthode la plus simple qu'on a trouvé pour dire précisément que D est grand ou petit.

Remarque 8.1 on aurait aussi pu choisir comme critère :

«Quand H_1 est vrai, on veut choisir H_0 rarement»

mais c'est beaucoup plus dur car, sous H_1, on connait en général mal la loi de D.

Donc en résumée $\begin{array}{ll} D \leq F^{-1}(1-\alpha) & \Rightarrow \text{ on choisit } H_0 \\ D > F^{-1}(1-\alpha) & \Rightarrow \text{ on choisit } H_1 \end{array}$

8.2 p-valeur

Mais l'histoire ne s'arête pas là, car on aimerait avoir un critère quantitatif pour dire si on choisit H_1 franchement, ou du bout des lèvres. On a :

$$\{\text{choisir}H_1\} \;\Leftrightarrow\; D > F^{-1}(1-\alpha) \;\Leftrightarrow\; F(D) > 1-\alpha \;\Leftrightarrow\; 1-F(D) \leq \alpha$$

On définit alors p-valeur $= 1-F(D)$ et du coup, plus cette p-valeur est petite est plus l'hypothèse H_1 est la bonne.

p-valeur	~ 0	H_1 est $\star\star\star$
p-valeur	~ 0.01	H_1 est $\star\star$
p-valeur	~ 0.05	H_1 est $\star$
p-valeur	~ 0.1	H_1 est bof

8.3 Exemple : le test du χ_2 de Pearson

On dispose de deux dès : un rouge et un noir. On voudrait savoir si l'un des deux est truqué. On les fait rouler 60 fois chacun. On trouve les effectifs suivants :

$$black = [9, 10, 12, 11, 8, 10]$$
$$red = [6, 5, 14, 15, 11, 9]$$

A l'oeil : pensez-vous qu'un des deux dés est truqué ?

Que prendriez-vous pour: $\begin{array}{ll} H_0 & : \ldots \\ H_1 & : \ldots \end{array}$

La statistique de Pearson (= distance du χ_2) est donnée par :

$$D = \sum_i \frac{(f_{obs}[i] - f_{exp}[i]))^2}{f_{exp}[i]}$$

Avec :
$f_{obs}[i]$: effectif observé dans la classe i.
$f_{exp}[i] = 10$: effectif attendu dans la classe i

Notons $J = 6$ le nombre de classes possibles. On a :

$\begin{array}{ll} H_0 & \Rightarrow\; D \sim \chi_2(J-1). \\ H_1 & \Rightarrow\; D \sim +\infty. \end{array}$

Attention : si on veut être précis : sous H_0 on a une convergence en loi vers $\chi_2(J-1)$ (quand le nombre de lancés tend vers l'infini), tandis que sous H_1 on a une convergence p.s. vers ∞ ; ça c'est facile à voir avec la loi forte des grands nombres.

8.4 Le test du χ_2 de Pearson (suite)

Le test de Pearson juge de l'adéquation entre une série de données (=observed) et une loi de probabilité définie a priori (=attendue=expected).

La loi à priori peut-être discrète (ex: Poisson) ou continue (ex: Normale).

Dans les deux cas, on se ramène à J classes en découpant le support de la loi attendue. Ex :

- Poisson, on peut prendre $[0], [1], [2, 3], [4, 5, 6], [7, ..., \infty[$ donc $J = 5$
- Normale, on peut prendre $]-\infty, -1], [-1, 1], [1, +\infty[$ donc $J = 3$

Ces classes doivent être assez nombreuses pour ne pas perdre trop d'information mais, à l'inverse, doivent contenir un minimum de valeur de la distribution attendue. En général, on fait en sorte qu'il y ai 5 observations par classe.

Si la loi de probabilité théorique dépend de paramètres (moyenne, variance...) inconnus au moment du test, les données peuvent être utilisées pour estimer ceux-ci, ce qui facilite l'adéquation. Il faut alors diminuer le nombre de degrés de liberté du nombre de paramètres estimés.

En l'absence d'estimation, le nombre de degré de liberté est de $J - 1$

Nous verrons en TP comment ce test général peut-être utiliser pour tester l'indépendance d'un couple de va.

8.5 Test avec une statistique signée

C'est une très légère variante du test avec une statistique positive. On écrit quand même les détails, car c'est dans les détails que se cachent les erreurs.

On a deux hypothèses: H_0 et sont contraire H_1. On construit une "statistique" T pour qu'en théorie :

$H_0 \quad \Rightarrow \ |T|$ petit.
$H_1 \quad \Rightarrow \ |T|$ grand

Ainsi en pratique, on effectue des observations pour calculer T et :

$|T| \leq$ seuil $\quad \Rightarrow$ on choisit H_0
$|T| >$ seuil $\quad \Rightarrow$ on choisit H_1

Mais comment choisir le seuil ? En fait, en construisant T on a fait en sorte que :

$H_0 \quad \Rightarrow \ T$ suit une loi de fonction de répartition F (ex : gaussienne ou student).
$H_1 \quad \Rightarrow \ T$ est très grand en valeur absolue.

Le principe de tous les tests est que :

«Quand H_0 est vraie, on veut choisir H_1 rarement».

On se fixe un α petit (ex: 0.05). C'est le niveau du test. Et on souhaite que, sous H_0, la probabilité de choisir H_1 soit de α. Ainsi : Sous H_0 :

$$\mathbf{P}[|T| > seuil] = \alpha \ \Leftrightarrow \ \mathbf{P}[|T| \leq seuil] = 1 - \alpha \ \Leftrightarrow \ \mathbf{P}[-seuil \leq T \leq seuil] = 1 - \alpha \ \Leftrightarrow \ seuil = F^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$$

Donc en résumé

$|T| \leq F^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \quad \Rightarrow$ on choisit H_0
$|T| > F^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \quad \Rightarrow$ on choisit H_1

On aimerait avoir un critère quantitatif pour dire si on choisit H_1 franchement, ou du bout des lèvres. On a :

$$\{\text{choisir}H_1\} \ \Leftrightarrow \ |T| > F^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) \ \Leftrightarrow \ F(|T|) > (1 - \frac{\alpha}{2}) \ \Leftrightarrow \ 1 - F(|T|) \leq \frac{\alpha}{2} \ \Leftrightarrow \ 2[1 - F(|T|)] \leq \alpha$$

On définit alors p-valeur $= 2[1 - F(|T|)]$ et du coup, plus cette p-valeur est petite et plus l'hypothèse H_1 est la bonne.

Il faut absolument que vous soyez capable de refaire cette série de calcul sur une feuille, sans regarder aucune note. Beaucoup d'erreur (ex: dans les blog) proviennent d'une confusion entre $\alpha, 1 - \alpha$ ou entre α et $\frac{\alpha}{2}$ ou entre une loi du χ_2 et une loi de Student.

8.6 Exemple : le test de Student

H_0 : les hommes boivent autant de bière que de vin
H_1 : les hommes ne boivent pas autant de bière que de vin.

On considère p individu. On note X_i la différence entre les verres de bière et les verres de vin consommés par l'individu i. On note $\mu = \mathbf{E}[X_0]$. Ainsi $\begin{array}{l} H_0 : \mu = 0 \\ H_1 : \mu \neq 0. \end{array}$

On définit la statistique

$$T = \frac{\text{mean}(X)}{\frac{\text{std}(X)}{\sqrt{p}}} \qquad (defT)$$

Sous H_0, $\mu = 0$, et $T = R(X)$ dont nous avions calculé la loi : c'est une $t(p-1)$.

Sous H_1, $\mu \neq 0$, $\text{mean}(X) \to \mu$, $\text{std}(X) \to \sigma$, $\sqrt{p} \to \infty$, donc T tend vers $\pm\infty$ en fonction du signe de μ.

En TP nous verrons aussi une variante de ce test, quand on dispose de deux échantillons indépendants, dont on veut comparer les espérances.

8.7 vraie vie et grosse-donnée

Un gros problème des tests : ils dépendent toujours de la taille de l'échantillon.

Typiquement, si on travaille avec des échantillons de taille 1 million issus de la 'vraie vie' (=non-simulés), les tests rejetteront toujours H_0 : En effet, rappelons que H_0 est une hypothèse 'précise' qui suppose une égalité entre deux lois (ou deux espérances). Or dans la 'vraie vie' il n'y a jamais d'égalité parfaite. Et 1 million de données permettent de détecter la plus infime différence.

Cette triste vérité n'est pas assez connue. En TP on l'appellera : l'effet «vraie vie et grosse-donnée»

A l'inverse, quand on a très peu de données, les tests ont tendance à beaucoup accepter H0 : c'est l'effet «petite-donnée».