

EXERCICES DE CALCUL STOCHASTIQUE
DESS IM Evry, option finance

Monique Jeanblanc
Université d'EVRY

Octobre 2005

Contents

1	Rappels	7
1.1	Tribu	7
1.2	Variables gaussiennes	8
1.3	Espérance conditionnelle	9
1.4	Martingales	11
1.5	Temps d'arrêt	13
1.6	Temps discret	14
1.7	Algèbre bêta-Gamma	15
1.8	Divers	15
2	Mouvement Brownien	17
2.1	Propriétés élémentaires	17
2.2	Processus Gaussiens	20
2.3	Multidimensionnel	21
2.4	Temps d'atteinte	22
2.5	Scaling	25
2.6	Compléments	26
2.7	Finance	28
2.8	Problème	29
2.8.1	Partie I : Résultats préliminaires	29
2.8.2	Partie II	30
2.8.3	Partie III	30
3	Intégrale d'Itô	33
3.1	Intégrale de Wiener	33
3.2	Formule d'Itô	34
3.3	Cas multidimensionnel	39
3.4	Compléments	40
3.5	Brownien géométrique et extensions.	42
3.6	Le crochet	43
3.7	Finance	44

4	Equations différentielles stochastiques	49
4.1	Equation linéaire	49
4.2	Finance	54
4.3	Equations différentielles	56
5	Exemples	59
5.1	Processus de Bessel	59
5.2	Processus de Bessel carré	61
5.3	Autres processus.	64
5.4	Des calculs	64
6	Girsanov	67
6.1	Résultats élémentaires.	67
6.2	Crochet.	69
6.3	Processus.	69
6.4	Cas multidimensionnel	75
6.5	Temps d'arrêt.	76
6.6	Finance	78
7	Compléments	87
7.1	Théorème de Lévy.	87
7.2	Equations rétrogrades	88
7.3	Théorèmes de représentation	92
7.4	Temps local.	92
7.5	Lois	93
7.6	Filtrations	94
7.7	Options barrières	95
7.8	Méandres, ponts, excursions	96
7.9	Divers	96
8	Processus à sauts	99
8.1	Processus de Poisson	99
8.2	Poisson composé	101
8.3	Formule d'Itô	102
8.4	Défaut	103
8.5	Marché complets, incomplets	103
1	Rappels, Corrigés	107
1.1	Tribu	107
1.2	Variables gaussiennes.	108
1.3	Espérance conditionnelle	111
1.4	Martingales	113
1.5	Temps d'arrêt	114
1.6	Temps discret	115
1.7	Algèbre bêta-gamma	115
1.8	Divers	115

2	Mouvement Brownien, Corrigés	117
2.1	Propriétés élémentaires	117
2.2	Processus Gaussien	121
2.3	Multidimensionnel	124
2.4	Temps d'atteinte	125
2.5	Scaling	127
2.6	Compléments	127
2.7	Finance	129
3	Intégrale d'Itô, Corrigés	131
3.1	Intégrale de Wiener	131
3.2	Formule d'Itô	132
3.3	Cas multidimensionnel	137
3.4	Compléments	138
3.5	Brownien géométrique et extensions	139
3.6	Le crochet	142
3.7	Finance	142
4	Equations différentielles stochastiques, Corrigés	145
4.1	Equation Linéaire	145
4.2	Finance	149
4.3	Equations différentielles	151
5	Exemples, Corrigés	153
5.1	Processus de Bessel	153
5.2	Processus de Bessel carré	155
5.3	Autres processus	155
5.4	Des Calculs	156
6	Girsanov, Corrigés	159
6.1	Résultats élémentaires	159
6.2	Crochet	160
6.3	Processus	160
6.4	Cas multidimensionnel	163
6.5	Temps d'arrêt	163
6.6	Finance	165
7	Compléments, Corrigés	167
7.1	Théorème de Lévy.	167
7.2	Equations rétrogrades	168
7.3	Théorèmes de représentation	168
7.4	Temps local.	168
7.5	Lois	170
7.6	Filtrations	170
7.7	Options barrières	171
7.8	Méandres, ponts, excursions	172

8 Sauts, Corrigés.	175
8.1 Processus de Poisson	175
8.2 Poisson composé	177
8.3 Marché complets, incomplets	178

Chapter 1

Rappels

1.1 Tribu

Exercice 1.1.1 Ensembles appartenant à une tribu.

1. Montrer que si \mathcal{F} est une tribu, et si A et B appartiennent à \mathcal{F} avec $A \subset B$, alors $B - A \in \mathcal{F}$ où $B - A$ est l'ensemble des éléments de B qui ne sont pas dans A .
2. Montrer que $\mathbb{1}_{B-A} = \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A$.
3. Montrer que si C et D appartiennent à \mathcal{F} , alors $C \Delta D \stackrel{def}{=} \{C \cap D^c\} \cup \{C^c \cap D\}$ aussi.

Exercice 1.1.2 Exemples de tribus.

1. Décrire la tribu engendrée par un ensemble A .
2. Décrire la tribu engendrée par deux ensembles A et B disjoints.

Exercice 1.1.3 Fonctions indicatrices.

On note $\mathbb{1}_A$ la v.a. qui vaut 1 pour $\omega \in A$ et 0 sinon.

1. Montrer que $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$.
2. Montrer que, si $A \cap B = \emptyset$, on a $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$.
3. Montrer que $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$.

Exercice 1.1.4 Union et intersection.

Soit \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 deux tribus. Montrer que $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ est une tribu. Montrer qu'en général $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ n'est pas une tribu.

Exercice 1.1.5 Tribu grossie par un ensemble.*

Soit \mathcal{F} une tribu et A n'appartenant pas à \mathcal{F} . Montrer que la tribu engendrée par \mathcal{F} et A est composée des ensembles B tels que il existe C et D appartenant à \mathcal{F} vérifiant $B = (C \cap A) \cup (D \cap A^c)$.

Exercice 1.1.6 Tribu engendrée par une v.a. (*)

Soit X une v.a. sur un espace (Ω, \mathcal{G}) . La tribu engendrée par X , notée $\sigma(X)$, est la plus petite sous tribu \mathcal{F} telle que X soit mesurable de (Ω, \mathcal{F}) dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Elle est engendrée par $\mathcal{C} = \{F \subset \Omega, | F = X^{-1}(B), B \in \mathcal{B}\}$. Montrer que \mathcal{C} est une tribu. Vérifier que si $Y = h(X)$ avec h borélienne, alors Y est $\sigma(X)$ mesurable. On admettra que la réciproque est vraie.

Exercice 1.1.7 Lois de v.a.

Soit (X, Y) un couple de variables indépendantes et (Z, T) deux variables indépendantes telles que $X \stackrel{loi}{=} Z$ et $Y \stackrel{loi}{=} T$.

1. Comparer $E(f(X))$ et $E(f(Z))$.
2. Comparer $E(X^2Y)$ et $E(Z^2T)$.
3. Comparer $E(f(X)g(Y))$ et $E(f(Z)g(T))$.
4. Comparer $E(f(X, Y))$ et $E(f(Z, T))$.

1.2 Variables gaussiennes**Exercice 1.2.1 Moments.**

Soit X une v.a.r. de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Calculer $E(X^3)$, $E(X^4)$, $E(|X|)$ et $E(|X^3|)$.

Exercice 1.2.2 Moments. Soit X un v.a. normale. Calculer les moments de e^X .

Exercice 1.2.3 Exponentielles. Soit N une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Calculer $E(\exp(aN^2 + bN))$. Montrer que $E(\exp \frac{a^2}{2} N^2) = E(\exp aNN')$ avec N et N' i.i.d.

Exercice 1.2.4 Somme de variables gaussiennes indépendantes.

Soit X et Y deux v.a. gaussiennes indépendantes. Montrer que $X + Y$ est une variable gaussienne. Précisez sa loi.

Exercice 1.2.5 Transformée de Laplace.

Soit X une v.a.r. de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

1. Quelle est la loi de $\frac{X-m}{\sigma}$? Calculer $E|X - m|$.
2. Montrer que $E(e^{\lambda X}) = \exp(\lambda m + \frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2)$. Calculer $E(Xe^{\lambda X})$.
3. Soit $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$. Calculer, dans le cas $m = 0$ et $\sigma = 1$ la valeur de $E(\mathbb{1}_{X \leq b} \exp \lambda X)$ en fonction de (Φ, λ, b) .
4. Calculer $E(\exp\{\lambda X^2 + \mu X\})$ pour $1 - 2\lambda\sigma^2 \geq 0$.

5. Montrer que $E(e^{\theta X} f(X)) = e^{m\theta + \sigma^2 \theta^2 / 2} E(f(X + \theta \sigma^2))$ pour f continue bornée.
6. Montrer que, si f est "régulière" $E(f(X)(X - m)) = \sigma^2 E(f'(X))$.
7. Montrer que si G est une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$

$$E(e^{aG} \mathcal{N}(bG + c)) = e^{a^2/2} \mathcal{N}\left(\frac{c + ab}{\sqrt{1 + b^2}}\right)$$

Exercice 1.2.6 Convergence.

Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de v.a. gaussiennes qui converge dans L^2 vers X . Quelle est la loi de X ?

Exercice 1.2.7 Vecteur gaussien. Soit X un vecteur gaussien à valeurs dans \mathbb{R}^n et A une matrice (p, n) . Montrer que AX est un vecteur gaussien. Préciser son espérance et sa variance.

Exercice 1.2.8 Vecteur Gaussien. Soit (X, Y) un vecteur gaussien centré tel que $E(XY) = 0$. Montrer que X et Y sont indépendantes.

Exercice 1.2.9 Projection.*

Rappel : projection dans L^2 : Soit \mathcal{A} un sous espace de $L^2(\Omega)$ engendré par les variables aléatoires Y_1, \dots, Y_n , c'est-à-dire si $Z \in \mathcal{A}$, il existe (a_i) réels tels que $Z = \sum_i a_i Y_i$. Soit $X \in L^2$. On appelle projection de X sur \mathcal{A} l'unique élément PrX de \mathcal{A} tel que

$$E((X - PrX)Z) = 0, \forall Z \in \mathcal{A}$$

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_d, Y_1, \dots, Y_n)$ un vecteur gaussien centré dans \mathbb{R}^{d+n} . Montrer que $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$ et $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ sont deux vecteurs gaussiens centrés.

On suppose $d = 1$. Montrer que PrX est une v.a. gaussienne $\sigma(Y)$ mesurable, telle que $X - PrX$ et Y sont indépendantes.

Exercice 1.2.10 Caractérisation de vecteur gaussien. (*) Soit (X, Y) deux v.a.r. telles que Y est gaussienne et la loi conditionnelle de X à Y est gaussienne de moyenne $aY + b$ et de variance indépendante de Y , c'est-à-dire que $E(\exp(\lambda X) | Y = y) = \exp(\lambda(ay + b) + \frac{\lambda^2}{2} \sigma^2)$. Montrer que le couple (X, Y) est gaussien.

1.3 Espérance conditionnelle

On travaille sur un espace (Ω, \mathcal{F}, P) muni d'une sous-tribu de \mathcal{F} notée \mathcal{G} .

Exercice 1.3.1 Montrer que

$$E(YE(X|\mathcal{G})) = E(XE(Y|\mathcal{G}))$$

Exercice 1.3.2 Montrer que si $X \in L^2$ et $E(X|\mathcal{G}) = Y$ et $E(X^2|\mathcal{G}) = Y^2$ alors $X = Y$.

Exercice 1.3.3 Soit (X, Y) indépendantes, X strictement positive et $Z = XY$. Calculer $E(\mathbb{1}_{Z \leq t} | X)$ en utilisant la fonction de répartition de Y .

Exercice 1.3.4 Soit (X, Y) indépendantes, équadristibuées et $M = \max(X, Y)$. Calculer $E(\mathbb{1}_{X \leq t} | M)$.

Exercice 1.3.5 Conditionnement et indépendance.

Soit X, Y deux v.a. telles que la v.a. $X - Y$ est indépendante de \mathcal{G} , d'espérance m et de variance σ^2 . On suppose que Y est \mathcal{G} -mesurable. Calculer $E(X - Y | \mathcal{G})$. En déduire $E(X | \mathcal{G})$. Calculer $E((X - Y)^2 | \mathcal{G})$. En déduire $E(X^2 | \mathcal{G})$.

Exercice 1.3.6 Vecteur gaussien (*) Suite de l'exercice 1.2.9

Soit (X, Y_1, \dots, Y_n) un vecteur gaussien centré dans \mathbb{R}^{1+n} . Montrer que $E(X|Y) = \text{Pr}X$.

On suppose $n = 1$. Montrer que $E(X|Y) = \alpha Y$. Déterminer α .

Exercice 1.3.7 Soit $X = X_1 + X_2$. On suppose que X_1 est indépendante de \mathcal{G} , que X_2 est \mathcal{G} mesurable et que X_1 est gaussienne.

1. Calculer $E(X|\mathcal{G})$ et $\text{var}(X|\mathcal{G})$.
2. Calculer $E(e^{\lambda X} | \mathcal{G})$.

Exercice 1.3.8 Covariance conditionnelle. Soit Z_1, Z_2 deux variables aléatoires de carré intégrable. On définit

$$\text{Cov}(Z_1, Z_2 | \mathcal{G}) = E(Z_1 Z_2 | \mathcal{G}) - E(Z_1 | \mathcal{G}) E(Z_2 | \mathcal{G}).$$

Montrer que

$$\text{Cov}(Z_1, Z_2 | \mathcal{G}) = E[(Z_1 - E(Z_1 | \mathcal{G})) Z_2 | \mathcal{G}].$$

Exercice 1.3.9 Tribu grossie.

Soit $A \notin \mathcal{G}$ et $A \in \mathcal{F}$ et X une v.a. intégrable. On note \mathcal{H} la tribu engendrée par \mathcal{G} et A . (Voir exercice 1.1.5). On admettra que les v.a. Z qui sont \mathcal{H} mesurables s'écrivent $Z = Y_1 \mathbb{1}_A + Y_2 \mathbb{1}_{A^c}$, où les v.a. Y_i sont \mathcal{G} -mesurables. Montrer que

$$E(X | \mathcal{H}) = \frac{E(X \mathbb{1}_A | \mathcal{G})}{E(\mathbb{1}_A | \mathcal{G})} \mathbb{1}_A + \frac{E(X \mathbb{1}_{A^c} | \mathcal{G})}{E(\mathbb{1}_{A^c} | \mathcal{G})} \mathbb{1}_{A^c}$$

Exercice 1.3.10 Linéarité. Soit $Z = \alpha Y + \beta$, avec $\alpha \neq 0$. Montrer que $E(aX + b | Z) = aE(X | Y) + b$.

Exercice 1.3.11 Grossissement progressif (*) Soit \mathcal{F} une tribu. On considère la tribu \mathcal{G} engendrée par $\tau \wedge 1$ où τ est une v.a. à valeurs dans \mathbb{R}^+ .

1. Montrer que toute v.a. \mathcal{G} mesurable s'écrit $h(\tau \wedge 1)$ où h est borélienne.

2. Montrer que, si X est une v.a. \mathcal{F} mesurable, $E(X|\mathcal{G})\mathbb{1}_{1 \leq \tau} = A\mathbb{1}_{1 \leq \tau}$ où A est une constante. Montrer que $A = E(X\mathbb{1}_{1 \leq \tau})/P(1 \leq \tau)$.

Exercice 1.3.12 Conditionnement et indépendance 1. Soit \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 deux σ -algèbres indépendantes, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \vee \mathcal{G}_2$ et $(X_i, i = 1, 2)$ deux variables aléatoires bornées telles que X_i est \mathcal{G}_i mesurable. Montrer que $E(X_1 X_2 | \mathcal{G}) = E(X_1 | \mathcal{G}_1) E(X_2 | \mathcal{G}_2)$.

Exercice 1.3.13 Conditionnement et indépendance 2. Montrer que si \mathcal{G} est indépendante de $\sigma(X) \vee \mathcal{F}$, $E(X | \mathcal{G} \vee \mathcal{F}) = E(X | \mathcal{F})$.

Exercice 1.3.14 Formule de Bayes. Soit $dQ = LdP$ sur (Ω, \mathcal{F}) et \mathcal{G} une sous-tribu de \mathcal{F} . Montrer que

$$E_Q(X | \mathcal{G}) = E_P(X | \mathcal{G}), \forall X \in \mathcal{F}$$

si et seulement si L est \mathcal{G} mesurable.

Exercice 1.3.15 Soit f et g deux densités strictement positives sur \mathbb{R} . Soit X une v.a. de densité f sur un espace (Ω, P) . Montrer qu'il existe une probabilité Q sur cet espace telle que X soit de densité g .

Exercice 1.3.16 Indépendance conditionnelle Soit (\mathcal{F}_t) et (\mathcal{G}_t) deux filtrations.

- Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes. **(H1)** for any t , the σ -algebras \mathcal{F}_∞ and \mathcal{G}_t are conditionally independent given \mathcal{F}_t .
(H2) $\forall F \in \mathcal{F}_\infty, \forall G_t \in \mathcal{G}_t, E(FG_t | \mathcal{F}_t) = E(F | \mathcal{F}_t) E(G_t | \mathcal{F}_t)$
(H3) $\forall t, \forall G_t \in \mathcal{G}_t, E(G_t | \mathcal{F}_\infty) = E(G_t | \mathcal{F}_t)$
(H4) $\forall t, \forall F \in \mathcal{F}_\infty, E(F | \mathcal{G}_t) = E(F | \mathcal{F}_t)$.
- Soit **F** et **G** deux filtrations telles que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$. Montrer que
 (H) Every **F**-square integrable martingale is a **G**-square integrable martingale
 équivaut à (H1).
- Dans le cas $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(t \wedge \tau)$ où τ est un temps aléatoire, montrer que
 (H1) équivaut à
(H5) $\forall s \leq t, P(\tau \leq s | \mathcal{F}_\infty) = P(\tau \leq s | \mathcal{F}_t)$.

1.4 Martingales

L'espace Ω est muni d'une filtration (\mathcal{F}_t) .

Exercice 1.4.1 Exemple de base. Soit X une v.a. intégrable. Montrer que $(E(X | \mathcal{F}_t), t \geq 0)$ est une martingale.

Exercice 1.4.2 Surmartingale. On dit que M est une surmartingale si

- M_t est adapté, intégrable
- $E(M_t|\mathcal{F}_s) \leq M_s, \forall s \leq t$

Le processus M est une sousmartingale si $-M$ est une surmartingale.

1. Montrer que si M est une martingale et A un processus croissant adapté ($A_s \leq A_t, \forall s \leq t$) alors $M - A$ est une surmartingale.
2. Soit M une martingale. Que peut-on dire de M^2 ?
3. Soit M une martingale telle que $E(M_\infty^2) < \infty$. Montrer que $\sup_t E(M_t^2) < \infty$.
4. Montrer qu'une surmartingale telle que $E(Z_T) = E(Z_0)$ est une martingale sur $[0, T]$.

Exercice 1.4.3 Martingale locale. Montrer qu'une martingale locale positive est une surmartingale.

Exercice 1.4.4 Martingale en fonction de la valeur terminale. Soit X une martingale telle que $X_T = \zeta$. Exprimer X_t en fonction de ζ pour $t < T$ au moyen d'une espérance conditionnelle.

Exercice 1.4.5 Un lemme. On trouve dans la littérature (Duffie) le lemme suivant:

Lemma: Let ϕ be an adapted bounded process. Then $(Y_t = M_t - \int_0^t \phi_s ds, 0 \leq t \leq T)$ for some martingale M if and only if

$$Y_t = E[\int_t^T \phi_s ds + Y_T | \mathcal{F}_t]$$

Donner une démonstration de ce lemme.

Exercice 1.4.6 Martingale de carré intégrable. Soit $(M_t, t \geq 0)$ une \mathcal{F}_t -martingale de carré intégrable (telle que M_t^2 soit d'espérance finie, pour tout t). Montrer que

1. $E((M_t - M_s)^2 | \mathcal{F}_s) = E(M_t^2 | \mathcal{F}_s) - M_s^2$ pour $t > s$.
2. $E((M_t - M_s)^2) = E(M_t^2) - E(M_s^2)$ pour $t > s$.
3. La fonction Φ définie par $\Phi(t) = E(M_t^2)$ est croissante.

Exercice 1.4.7 Projection de martingale. Montrer que si M est une \mathcal{F}_t -martingale, c'est aussi une martingale par rapport à sa propre filtration $\mathcal{G}_t = \sigma(M_s, s \leq t)$. Soit $\mathcal{H}_t \subset \mathcal{F}_t$. Montrer que $Y_t = E(M_t | \mathcal{H}_t)$ est une \mathcal{H}_t -martingale.

Exercice 1.4.8 Une sousmartingale. Soit τ une v.a. positive. Montrer que $Z_t = P(\tau \leq t | \mathcal{F}_t)$ est une sousmartingale.

Exercice 1.4.9 Exemples de martingales.

1. Soit X un PAI. Montrer que X est une martingale et que si X est de carré intégrable, $X_t^2 - E(X_t^2)$ est une martingale.
2. Soit X une chaîne de Markov. Montrer que

$$\sum_{s \leq t} f(X_{s-}, X_s) - \int_0^t \sum q_{X_s, j} f(X_s, j) ds$$

est une martingale.

Exercice 1.4.10 Soit M une martingale positive continue uniformément intégrable et $\tau = \inf\{t : M_t = 0\}$. Montrer que M est nulle sur $t > \tau$.

1.5 Temps d'arrêt

Exercice 1.5.1 Tribu associée à un temps d'arrêt. Soit τ un temps d'arrêt. Montrer que \mathcal{F}_τ est une tribu.

Exercice 1.5.2 Soit T un temps d'arrêt et X une variable aléatoire appartenant à \mathcal{F}_T , vérifiant $X \geq T$. Montrer que X est un temps d'arrêt.

Exercice 1.5.3 Exemple de processus adapté. Soit T un temps d'arrêt. Montrer que le processus $X_t = \mathbb{1}_{[0, T]}(t)$ est adapté.

Exercice 1.5.4 Comparaison de tribus. Soit S et T deux temps d'arrêt tels que $S \leq T$. Montrer que $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

Exercice 1.5.5 Propriété de mesurabilité. Soit S un temps d'arrêt. Montrer que S est \mathcal{F}_S -mesurable.

Exercice 1.5.6 Soit S et T deux temps d'arrêt. Montrer que $\{S \leq T\}$, $\{T \leq S\}$ appartiennent à \mathcal{F}_S .

Exercice 1.5.7 Exemple de processus càdlàg. Soit S et T deux temps d'arrêt tels que $S < T$. Montrer que le processus $Z_t = \mathbb{1}_{[S, T]}(t)$ (égal à 1 si $S \leq t < T$ et à 0 sinon) est un processus càdlàg.

Exercice 1.5.8 Exemple trivial de temps d'arrêt. Montrer qu'une constante τ est un temps d'arrêt. Quelle est dans ce cas la tribu \mathcal{F}_τ ?

Exercice 1.5.9 Opérations sur les temps d'arrêt. Montrer que l'inf (resp. le sup) de deux temps d'arrêt est un temps d'arrêt.

Exercice 1.5.10 Caractérisation de martingale.

1. Soit $s < t$, $A \in \mathcal{F}_s$ et $T = t\mathbb{1}_{A^c} + s\mathbb{1}_A$. Montrer que T est un temps d'arrêt.

- Montrer que si $E(X_T) = E(X_0)$ pour tout temps d'arrêt T , alors le processus X est une martingale.

Exercice 1.5.11 Théorème d'arrêt. Soit M une martingale continue telle que $M_0 = a$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} M_t = 0$. Montrer que $\sup M_t \stackrel{\text{loi}}{=} \frac{a}{U}$ où U est une v.a. de loi uniforme sur $[0, 1]$.

1.6 Temps discret

L'espace Ω est muni d'une filtration (\mathcal{F}_n) .

Exercice 1.6.1 Soit \mathcal{F}_n une suite de tribu décroissante. On suppose que si $B \in \mathcal{F}_\infty = \bigcap_n \mathcal{F}_n$ alors $P(B) = 0$ ou $P(B) = 1$. Calculer $E([P(A|\mathcal{F}_n) - P(A|\mathcal{F}_m)]^2)$. En déduire que $P(A|\mathcal{F}_n)$ converge.

Exercice 1.6.2 Soit \mathcal{F}_n une suite de tribu croissante et $\mathcal{F}_\infty = \bigcup_n \mathcal{F}_n$. Montrer que $E(X|\mathcal{F}_n)$ converge dans L^2 vers $E(X|\mathcal{F}_\infty)$.

Exercice 1.6.3 Processus croissant associé à une martingale de carré intégrable. Soit $(X_n, n \geq 0)$ une (\mathcal{F}_n) -martingale vérifiant $E(X_n^2) < \infty$ pour tout n .

- Montrer que, pour tout $p \geq 0$, $E(X_{n+p}|\mathcal{F}_n) = X_n$.
- Montrer que $E((X_n - X_{n-1})^2|\mathcal{F}_{n-1}) = E(X_n^2|\mathcal{F}_{n-1}) - X_{n-1}^2$ pour tout n .
- Montrer qu'il existe un unique processus (A_n) tel que
 - A_n est \mathcal{F}_{n-1} adapté,
 - $A_0 = 0$,
 - $X_n^2 - A_n$ est une martingale.
 Vérifier que A_n est un processus croissant.
 On montrera que la suite de processus définie par $A_0 = 0$, $A_n = A_{n-1} + E(X_n^2|\mathcal{F}_{n-1}) - X_{n-1}^2$ a les propriétés désirées et que si \tilde{A} a les mêmes propriétés, $A_n - A_{n-1} = \tilde{A}_n - \tilde{A}_{n-1}$.

Exercice 1.6.4 Intégrale stochastique. Soit M une martingale et H un processus borné prévisible (soit H_n est \mathcal{F}_{n-1} -mesurable). On note $\Delta M_k = M_k - M_{k-1}$.

- Montrer que $(H \cdot M)_n = \sum_{k=1}^n H_k \Delta M_k$ est une martingale.
- Soit M et N deux martingales telles que $E(M_n^2) < \infty$, $E(N_n^2) < \infty$. On note $[M, N] = \sum_{k=1}^n \Delta M_k \Delta N_k$. Montrer que

$$(M_n N_n - M_0 N_0 - [M, N]_n; n \geq 0)$$

est une martingale.

1.7 Algèbre bêta-Gamma

Exercice 1.7.1 Loi Arc sinus Une variable aléatoire A a une loi Arc Sinus si sa densité est $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{1-t}} \mathbb{1}_{t \in [0,1]}$. Montrer que $\cos^2(\Theta) \stackrel{\text{loi}}{=} A$ si Θ est uniforme sur $[0, 2\pi]$.

Soit N et N' deux variables $\mathcal{N}(0, 1)$ indépendantes. Montrer que $\frac{N^2}{N^2 + N'^2} \stackrel{\text{loi}}{=} A$.

Soit $C = \frac{N}{N'}$. Montrer que C a une loi de Cauchy et que $\frac{1}{1+C^2}$ a une loi Arc sinus.

1.8 Divers

Exercice 1.8.1 Soit X un processus at $M_t = \sup_{0 \leq s \leq t} X_s$. On note τ une v.a. de loi exponentielle de paramètre θ indépendante de X . Montrer que

$$E(\exp(-\lambda M_\tau)) = 1 - \lambda E\left(\int_0^\infty du e^{-\lambda u} e^{-\theta T_u}\right)$$

où $T_u = \inf\{t : X_t \geq u\}$.

Exercice 1.8.2 Transformée de Laplace et indépendance. Soit X et Y deux v.a. indépendantes. Justifier que $E(e^{\lambda(X+Y)}) = E(e^{\lambda X})E(e^{\lambda Y})$. La réciproque est-elle vraie?

Exercice 1.8.3 Transformée de Laplace et moments. Soit X et Y deux v.a. bornées telles que $E(e^{\lambda X}) = E(e^{\lambda Y})$ pour tout λ . Montrer que X et Y ont même moments.

Exercice 1.8.4 Markov. Soit X un processus de Markov fort et $T_a = \inf\{t : X_t = a\}$. Montrer que, pour $t < T$

$$P(X_T \in dx | X_t = a) = P(X_T \in dx | T_a = t).$$

Exercice 1.8.5 Propriété de Markov Soit B un mouvement Brownien et f une fonction. On note $T^f = \inf\{t : B_t = f(t)\}$. Montrer que $P(B_t \geq f(s) | T^f = s) = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{s < t}$. Si f est croissante, montrer que $P(T^f \leq t) = 2P(B_t \geq f(T^f))$.

Chapter 2

Mouvement Brownien

Dans tout ce qui suit, $(B_t, t \geq 0)$ (ou $(W_t, t \geq 0)$) est un mouvement Brownien réel (un processus à accroissements indépendants issu de 0, tel que pour $t > s$, $B_t - B_s$ est une v.a. gaussienne centrée de variance $t - s$) et on note (\mathcal{F}_t) sa filtration naturelle.

Dans certains exercices, il sera précisé que B est issu de x . On rappelle que B et $(B_t^2 - t, t \geq 0)$ sont des martingales.

2.1 Propriétés élémentaires

Exercice 2.1.1 Caractérisation. Montrer qu'un processus X est un mouvement Brownien si et seulement si

- Pour tout $t_0 < t_1 \dots < t_n$, le vecteur $(X_{t_0}, X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ est un vecteur gaussien centré
- $E(X_t X_s) = s \wedge t$
- $X_0 = 0$

Exercice 2.1.2 Calcul d'espérances.

- Calculer pour tout couple (s, t) les quantités $E(B_s B_t^2)$, $E(B_t | \mathcal{F}_s)$ et $E(B_t | B_s)$.
- On a vu, dans Exercice 1.2.1, que si Z est une v.a. gaussienne centrée de variance σ^2 , on a $E(Z^4) = 3\sigma^4$. Calculer $E(B_t^2 B_s^2)$.
- Quelle est la loi de $B_t + B_s$?
- Soit θ_s une variable aléatoire bornée \mathcal{F}_s -mesurable. Calculer pour $t \geq s$, $E(\theta_s(B_t - B_s))$ et $E[\theta_s(B_t - B_s)^2]$.
- Calculer $E(\mathbb{1}_{B_t \leq a})$ et $E(B_t \mathbb{1}_{B_t \leq a})$ où $\mathbb{1}_A(\omega)$ est la v.a. égale à 1 si $\omega \in A$ et 0 sinon.
- Calculer $E(\int_0^t \exp(B_s) ds)$ et $E(\exp(\alpha B_t) \int_0^t \exp(\gamma B_s) ds)$.

Exercice 2.1.3 Lois. Montrer que $E(f(B_t)) = E(f(G\sqrt{u} + B_{t-u}))$ avec G v.a. indépendante de B_{t-u} et de loi gaussienne centrée réduite.

Exercice 2.1.4 Soit Θ une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre θ (soit $P(\Theta \in dx) = \theta e^{-\theta x} \mathbb{1}_{x>0} dx$) indépendante de B . Quelle est la loi de B_Θ ?

Exercice 2.1.5 Des martingales. Parmi les processus suivants, quels sont ceux qui sont des martingales. (On pourra utiliser, sans démonstration, que

$$E\left[\int_0^t B_u du \middle| \mathcal{F}_s\right] = \int_0^t E[B_u | \mathcal{F}_s] du.$$

1. $M_t = B_t^3 - 3 \int_0^t B_s ds.$
2. $Z_t = B_t^3 - 3tB_t.$
3. $X_t = tB_t - \int_0^t B_s ds.$
4. $U_t = \sin B_t - \int_0^t B_s (\cos s) ds.$
5. $U_t = \sin B_t + \frac{1}{2} \int_0^t \sin(B_s) ds.$
6. $Y_t = t^2 B_t - 2 \int_0^t B_s ds.$

Exercice 2.1.6 On suppose $b < 0 < a$. Montrer que $(a - B_t)(B_t - b) + t$ est une \mathcal{F}_t -martingale. En déduire $E(T_{a,b})$ où $T_{a,b} = T_a \wedge T_b$.

Exercice 2.1.7 Exponentielle de Brownien. Calculer $E(e^{x+B_t})$ et $E(\sin(x+B_t))$ en utilisant

$$E(f(x+B_t)) = f(x) + \frac{1}{2} \int_0^t E(f''(x+B_s)) ds.$$

Exercice 2.1.8 Changement de temps. Soit $Z_t = B_{A(t)}$ où A est une fonction déterministe continue strictement croissante.

1. Calculer l'espérance et la variance de Z_t . Ce processus est-il une martingale par rapport à \mathcal{F}_t ?
2. On définit $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{A(t)}$. Montrer que Z est une \mathbf{G} -martingale.
3. Déterminer le processus croissant C tel que $(Z_t)^2 - C_t$ soit une \mathbf{G} -martingale.
4. Soit un processus M tel que M est une martingale et il existe A , fonction déterministe continue strictement croissante telle que $M_t^2 - A(t)$ est une martingale. On note C l'inverse de A , c'est-à-dire la fonction telle que $C(A(t)) = t$. Montrer que $W_t = M_{C(t)}$ est un mouvement Brownien.

Exercice 2.1.9 Calcul d'espérance. Comment calculer $E_x(f(B_t)g(B_s))$?

Exercice 2.1.10 Calculer

$$E((\lambda \int_0^1 du B_u + \mu B_1)^2)$$

Exercice 2.1.11 Calcul de transformée de Laplace. Calculer $E_x(\exp(-\lambda W_t^2))$.

Exercice 2.1.12 Comportement limite.

1. Montrer que $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{B_t}{t} = 0$
2. Montrer que $\lim_{t \rightarrow \infty} P_x(B_t < 0) = 1/2$. En déduire que pour tout $x > 0$, si $T_0 = \inf\{t : B_t = 0\}$, on a $P_x(T_0 < \infty) \geq 1/2$. (En fait, on peut montrer que T_0 est fini ps.)

Exercice 2.1.13 Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{B_s}{s} ds$ est convergente.

Exercice 2.1.14 Tribu triviale. On admettra qu'un ensemble appartenant à la filtration $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0^+$ a pour probabilité 0 ou 1.

Si $\tau = \inf\{t \geq 0 : B_t > 0\}$, montrer que $P(\tau \leq t) \geq \frac{1}{2}$. En déduire que $P(\tau = 0) = 1$.

Exercice 2.1.15 Application de la propriété de Markov. Montrer que

$$E_x\left(\int_0^t h(r, B_r) dr \middle| \mathcal{F}_s\right) = \int_0^s h(r, B_r) dr + E_{B_s}\left(\int_0^{t-s} h(s+u, B_u) du\right)$$

Exercice 2.1.16 Soit τ un temps d'arrêt, $\lambda > 0$ et u une fonction continue bornée. On pose $g(x) = E_x\left(\int_0^\tau e^{-\lambda t} u(B_t) dt\right)$ et $f(x) = E_x\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} u(B_t) dt\right)$ où comme d'habitude l'indice x précise que le Brownien est issu de x .

1. Montrer que g et f sont définies.
2. Montrer que

$$E_x\left(\int_\tau^\infty e^{-\lambda t} u(B_t) dt\right) = E_x\left(\mathbb{1}_{\tau < \infty} e^{-\lambda \tau} f(B_\tau)\right).$$

3. Montrer que si $\tau = T_0$, alors $g(x) = f(x) - f(0)\varphi(x)$ où on explicitera φ .

Exercice 2.1.17 Polynômes d'Hermite. Les polynômes d'Hermite H_k sont définis par $e^{\alpha x - \frac{\alpha^2}{2}} = \sum \frac{\alpha^k}{k!} H_k(x)$. Montrer qu'il existe $H_k(x, t)$, polynômes en les deux variables (t, x) tels que $e^{\alpha x - \frac{\alpha^2}{2}t} = \sum \frac{\alpha^k}{k!} H_k(x, t)$. En déduire la valeur de $E(B_t^k | \mathcal{F}_s)$.

Exercice 2.1.18 Des gaussiennes Soit $S_t = \exp(\mu t + \sigma W_t)$. Calculer l'espérance et la variance de $\int_0^T S_t dt$ et $\int_0^T \ln S_t dt$. Ces variables sont-elles gaussiennes?

Exercice 2.1.19 Zeros Montrer que

$$P(B_u \neq 0, \forall u \in]s, t]) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{s}{t}}$$

Exercice 2.1.20 Filtration Soit $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(B_1)$. Vérifier que B n'est pas une (\mathcal{G}_t) -martingale.

2.2 Processus Gaussiens

Exercice 2.2.1 Montrer que le processus $Y_t = \int_0^t B_u du$ est gaussien. Calculer son espérance et sa covariance.

Exercice 2.2.2 Expliciter la solution de

$$dX_t = -aX_t dt + e^{bt} dB_t$$

Calculer $E(X_t)$ et $Var(X_t)$.

Exercice 2.2.3 Non-existence de processus. Montrer qu'il n'existe pas de processus X tel que $\forall(s, t), s \neq t$, les variables X_t et X_s soient indépendantes, centrées gaussiennes, et $E(X_t^2)$ localement borné. On considérera $\int_0^t X_s ds$ et on montrera que ce processus serait Gaussien, on calculera son espérance et sa variance.

Exercice 2.2.4 Le pont Brownien. On définit un pont Brownien par

$$Z_t = B_t - tB_1, 0 \leq t \leq 1.$$

1. Montrer que Z est un processus gaussien indépendant de B_1 . Préciser sa loi, c'est-à-dire sa moyenne et sa fonction de covariance.
2. Montrer que le processus \tilde{Z} avec $\tilde{Z}_t = Z_{1-t}$ a même loi que Z .
3. Montrer que le processus Y avec $Y_t = (1-t)B_{\frac{t}{1-t}}, 0 < t < 1$ a même loi que Z .
4. Montrer que $(Z_t \stackrel{loi}{=} (B_t | B_1 = 0))$.

Exercice 2.2.5 Un exemple surprenant. Montrer que $Z_t = B_t - \int_0^t \frac{B_s}{s} ds$ est un processus gaussien. Calculer sa variance et sa covariance. En déduire que Z est un mouvement Brownien. Montrer que Z n'est pas une (\mathcal{F}_t^B) -martingale, où (\mathcal{F}_t^B) est la filtration naturelle de B .

Exercice 2.2.6 Pont. Soit B un MB et Γ_t l'espace Gaussien engendré par $(B_u - \frac{u}{t}B_t, u \leq t)$. Montrer que Γ_t est croissant en t . Montrer que $\Gamma(B_u, u \leq t) = \Gamma_t \oplus \Gamma(B_t)$ où $\Gamma(G)$ est l'espace engendré par G .

Exercice 2.2.7 Changement de probabilité. Soit B un MB, $L_t = \exp(mB_t - \frac{m^2}{2}t)$, et Q définie sur \mathcal{F}_T par $dQ = L_T dP$. Montrer que $\tilde{B}_t = B_t - mt$ est, sous Q , un processus gaussien à accroissements indépendants. Montrer que \tilde{B}_t est un Q -mouvement Brownien.

Exercice 2.2.8 Soit B un mouvement Brownien, $p > 1$ et T une v.a. positive. On admettra que

$$E(\sup_t (|B_t| - t^{p/2})) < \infty$$

1. Montrer que

$$E(\sup_t (|B_t| - \mu t^{p/2})) = \lambda E(\sup_s (|B_s| - s^{p/2}))$$

$$\text{avec } \lambda = \left(\frac{1}{\mu}\right)^{1/(p-1)}.$$

2. Montrer que $E(|B_T|) \leq E(\sup_t (|B_t| - \mu t^{p/2})) + \mu E(T^{p/2})$.

3. Montrer que

$$\forall p > 1, \exists C_p, \forall T, \quad E(|B_T|) \leq C_p \|T^{1/2}\|_p$$

2.3 Multidimensionnel

Exercice 2.3.1 Soit deux mouvements Browniens $B^{(1)}$ et $B^{(2)}$ corrélés de coefficient de corrélation ρ . Montrer, sans utiliser la formule d'Itô pour des processus corrélés, qu'il existe un Brownien $B^{(3)}$, indépendant de $B^{(2)}$ tel que $B^{(1)} = \rho B^{(2)} + \sqrt{1 - \rho^2} B^{(3)}$.

Exercice 2.3.2 Somme de browniens. Soit W un mouvement brownien indépendant de B et $\rho \in [0, 1]$. Montrer que $(U_t = \rho W_t + \sqrt{1 - \rho^2} B_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien.

Soient $B^{(1)}$ et $B^{(2)}$ deux browniens indépendants et $(\sigma_i, i = 1, 2)$ deux fonctions déterministes. Montrer qu'il existe une fonction σ_3 telle que le processus $B^{(3)}$ défini par

$$\sigma_3(t)dB_t^{(3)} = \sigma_1(t)dB_t^{(1)} + \sigma_2(t)dB_t^{(2)}$$

est un Brownien.

Exercice 2.3.3 Soit B un Brownien n -dimensionnel. Soit f une fonction borélienne bornée. Montrer que, pour $0 < s < t$ $E_x(f(B_t)|\mathcal{F}_s) = \Phi(B_s)$ avec $\Phi(x) = E_x[f(B_{t-s})]$. En déduire que $B^i B^j$ est une martingale pour $i \neq j$.

Exercice 2.3.4 Mouvement Brownien dans R^2 .

1. Soit W_1 et W_2 deux mouvements Browniens indépendants. Le processus $W_t = W_1(t) + W_2(t)$ est-il un mouvement Brownien? Si oui, justifiez la réponse, sinon, expliquez pourquoi. Même question avec $\alpha W_1(t) + \beta W_2(t)$.
2. Soit W_1 et W_2 deux processus. Soit c un réel donné. Montrer que si

$$\left(\exp \left\{ aW_1(t) + bW_2(t) - \frac{t}{2}[a, b] \begin{bmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\}, t \geq 0 \right)$$

est une martingale pour tout couple (a, b) , W_1 et W_2 sont des MB. Calculer $E[\exp(aW_1(t) + bW_2(t))]$.

Exercice 2.3.5 Brownien n -dimensionnel Soit B un MB n -dimensionnel et U une matrice telle que $UU^T = I$. Montrer que $(UB_t, t \geq 0)$ est un MB.

2.4 Temps d'atteinte

Dans tous ces exercices, $a \in \mathbb{R}$ et $T_a = \inf\{t : B_t = a\}$ où B est un mouvement Brownien.

Exercice 2.4.1 Transformée de Laplace. Montrer que T_a est un temps d'arrêt. Calculer $E(e^{-\lambda T_a})$ pour tout λ réel. Montrer que $P(T_a < \infty) = 1$ et que $E(T_a) = \infty$.

Mêmes questions avec $S_t = \exp(\sigma B_t)$.

Exercice 2.4.2 Montrer (sans calculs) que pour $b > a > 0$, la v.a. $T_b - T_a$ est indépendante de T_a . Quelle est la loi de $T_b - T_a$? Que peut-on dire du processus $(T_a, a > 0)$?

Exercice 2.4.3 Soit $a < 0 < b$ et $T = T_a \wedge T_b$. Calculer $P(T_a < T_b)$ et $E(T)$.

Exercice 2.4.4 Processus du temps d'atteinte.

1. Soit $f(t) = E(e^{-rT_a} \mathbb{1}_{T_a < t})$. On ne cherchera pas à calculer f ici. Calculer en fonction de f la quantité $E(e^{-r \inf(T, T_a)})$ où T est un nombre positif.
2. Montrer que si $0 < a < b$, $T_b - T_a$ est indépendant de T_a et a même loi que T_{b-a} .
3. Mêmes questions si $T_a = \inf\{t; \nu t + B_t = a\}$.
4. Soit S un brownien géométrique (soit $S_t = x \exp(\nu t + \sigma W_t)$) et $\tau_a = \inf\{t : S_t = a\}$. Calculer $E(\int_0^\infty e^{-rt} S_t dt)$ et $E(\int_0^{\tau_b} e^{-rt} S_t dt)$.
Montrer que si $0 < a < b$, $\tau_b - \tau_a$ est indépendant de τ_a et a même loi que τ_{b-a} .
Calculer $E(e^{-r\tau_K} \mathbb{1}_{\tau_K < T} \mathbb{1}_{\tau_H - \tau_K > t})$.

Exercice 2.4.5 Temps d'atteinte Soit T un nombre réel. Calculer $Z_t = P(T_a > T | \mathcal{F}_t)$. On rappelle que $\sup_{u \leq t} W_u \stackrel{loi}{=} |W_t|$.

Exercice 2.4.6 Premier instant. Soit W un MB issu de 0 et $T^d = d + \inf\{t : W_{t+d} = 0\}$. Calculer $E(e^{-\lambda T^d})$ et $E(\mathbb{1}_{W_d \leq a} e^{-\lambda T^d})$.
Soit $T^* = d$ si $W_d \geq -a$ et $T^* = d + T^d$ si $W_d \leq -a, W_{d+T^d} \geq -a$. Calculer $E(e^{-\lambda T^*})$.

Exercice 2.4.7 Self decomposable Montrer qu'il existe c tel que $T_r \stackrel{loi}{=} cT_r + X$ avec X indépendante de c .

Exercice 2.4.8 Soit \tilde{T}_a et \hat{T}_a deux v.a. indépendantes de même loi que T_a .
Quelle est la loi de $\frac{\tilde{T}_a}{\tilde{T}_a + \hat{T}_a}$ (Sans faire de calculs).

Exercice 2.4.9 Loi de l'inf. Soit $I = -\inf_{s \leq T_1} B_s$. Montrer que $P(I \in dx) = \frac{dx}{1+x^2}$.

Exercice 2.4.10 Calculer $E(e^{-\lambda T_a})$ avec $T_a = \inf\{t : X_t = a\}$ et $X_t = \nu t + W_t$. Calculer $E(e^{-\lambda T})$ pour $T = T_a \wedge T_b$.

Exercice 2.4.11 Soit $T_a^* = \inf\{u : M_u - B_u > a\}$ avec $M_u = \sup_{t \leq u} B_t$. Montrer que $M_{T_a^*}$ a une loi exponentielle.

Exercice 2.4.12 Temps d'atteinte Soit A et B deux nombres positifs. On note $X_t = \mu t + \sigma B_t$ et $h(x) = \frac{\exp(-2\mu x/\sigma^2) - \exp(2\mu B/\sigma^2)}{\exp(-2\mu A/\sigma^2) - \exp(2\mu B/\sigma^2)}$. Vérifier que $h(X_t)$ est une martingale. Le temps d'arrêt τ est défini par

$$\tau = \inf\{t : X_t = A \text{ ou } X_t = -B\}.$$

Calculer $P(X_\tau = A)$.

Exercice 2.4.13 Soit f une fonction borélienne bornée et

$$u(x) = E_x(\exp[-\frac{\theta^2}{2}T_0 + \int_0^{T_0} du f(B_u)])$$

où B est un mouvement Brownien issu de x . Montrer que u est solution de

$$\frac{1}{2}u'' = (\frac{\theta^2}{2} + f)u, \quad u(0) = 1$$

Exercice 2.4.14 Soient a, d deux nombres réels positifs.

1. Calculer $E(e^{-|B_d|\sqrt{2\lambda}} \mathbb{1}_{B_d \leq -a})$.

2. Soit $T_1 = \inf\{t \geq d : B_t = 0\}$. Montrer que T_1 est un temps d'arrêt. Calculer $E(e^{-\lambda T_1})$ et $E(e^{-\lambda T_1} \mathbb{1}_{B_d \leq -a})$. Montrer que B_{T_1+d} est indépendant de B_d et de T_1 .
3. On introduit la v.a. τ_1 suivante : si $B_d \leq -a$, on pose $\tau_1 = d$. Si $B_d > -a$ et si $B_{T_1+d} \leq -a$, on pose $\tau_1 = T_1 + d$, sinon on pose $\tau_1 = \infty$. Calculer pour $\lambda > 0$ la transformée de Laplace de τ_1 , soit $E(e^{-\lambda \tau_1})$.
4. On continue. Si $B_d \leq -a$, on pose $\tau_2 = d$. Si $B_d > -a$ et si $B_{T_1+d} \leq -a$, on pose $T\tau_2 = T_1 + d$, sinon on définit $T_2 = \inf\{t \geq T_1 + d : B_t = 0\}$. Si $B_{T_2+d} \leq -a$ on pose $\tau_2 = T_2 + d$. Dans tous les autres cas, on pose $\tau_2 = \infty$.
 - (a) Montrer que B_{T_2+d} est indépendant de (B_{T_1+d}, B_d) et de T_2 .
 - (b) Calculer la transformée de Laplace de τ_2 .
5. On utilise la même procédure pour définir par itération τ_n et on pose $\tau = \tau_\infty$.
 - (a) Montrer que τ est fini en utilisant, après l'avoir justifié que

$$P(\tau < \infty) = \prod_i P(B_{T_i+d} < -a)$$

- (b) Calculer la transformée de Laplace de τ .
- (c) Calculer la transformée de Laplace de B_τ .
- (d) Montrer que B_τ est indépendant de τ .

Exercice 2.4.15 On trouve parfois (voir exercice précédent, ou les temps d'atteinte d'un niveau) des temps d'arrêt τ tels que τ et B_τ sont indépendants. Ceci n'est cependant pas très courant. Dans ce qui suit on admettra le résultat (non trivial) suivant (Cramer) *Si X et Y sont deux v.a. indépendantes telles que $X + Y$ est une v.a. gaussienne, alors X et Y sont des gaussiennes.*

Le but de cet exercice est de montrer : si τ est borné par K et si τ et B_τ sont indépendants, alors τ est une constante.

1. Montrer que si $s > K$,

$$B_s = B_\tau + \widehat{B}_{s-\tau}$$
 avec \widehat{B} un mouvement Brownien indépendant de \mathcal{F}_τ .
2. Montrer que B_τ et $\widehat{B}_{s-\tau}$ sont des v.a. indépendantes.
3. Calculer l'espérance et la variance de B_τ . (Attention, ce n'est pas trivial. Penser au cas où $\tau = T_a$.)
4. Montrer que $\widehat{B}_{s-\tau}$ est une v.a. Gaussienne.
5. Montrer que l'on obtient $\sqrt{K-\tau} G \stackrel{loi}{=} \sqrt{K-E(\tau)} G$ où G est une v.a. gaussienne réduite centrée.

6. Conclure.

Exercice 2.4.16 Soit a et μ deux constantes strictement positives et $T_1 = \inf\{t : B_t \geq a - \mu t\}$, $T_2 = \inf\{t : B_t \leq -a + \mu t\}$. On pose, pour tout $\lambda a \geq 0$, $\Phi(\lambda) = E(\exp[-\lambda\tau])$ avec $\tau = T_1 \wedge T_2$.

1. Montrer que $T_1 \stackrel{loi}{=} T_2$ et que $(T_1, T_2) \stackrel{loi}{=} (T_2, T_1)$.
2. Vérifier que Φ est bien définie et donner un majorant et un minorant simples de Φ (S'aider par un dessin).
3. Montrer que $\Phi(\lambda) = 2E(\exp(-\lambda T_1)\mathbb{1}_{T_1 < T_2})$.
4. Montrer que

$$e^{\lambda a}\Phi(-\lambda\mu - \lambda^2/2) + e^{-\lambda a}\Phi(\lambda\mu - \lambda^2/2) = 2$$

Exercice 2.4.17 Soit $X_t = \nu t + \sigma B_t$. Montrer que, pour tout λ

$$\exp(\lambda X_t + \beta t), t \geq 0$$

est une martingale pour un paramètre β que l'on déterminera.

On note $T_a = \inf\{t : X_t \geq a\}$. Calculer $E\left(\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}T_a\right)\right)$ et $P(T_a < \infty)$.

Exercice 2.4.18 Calculer $P(M_t \leq y | W_t = x)$ où $M_t = \sup(W_s, s \leq t)$.

2.5 Scaling

Exercice 2.5.1 Montrer que le calcul de $E\left(\int_0^t \exp(\nu s + \sigma B_s) ds\right)$ se déduit de $E\left(\int_0^T \exp(2(\mu s + B_s)) ds\right)$. On ne demande pas de faire ce calcul.

Exercice 2.5.2 Soit $T_1 = \inf\{t : B_t = 1\}$. Utiliser le scaling du MB pour établir les égalités en loi suivantes

1. $T_1 \stackrel{loi}{=} \frac{1}{S_1^2}$ avec $S_1 = \sup(B_u, u \leq 1)$
2. $T_a \stackrel{loi}{=} a^2 T_1$ avec $T_a = \inf\{t : B_t = a\}$.
3. $g_t \stackrel{loi}{=} t g_1, d_t \stackrel{loi}{=} t d_1$ où $g_t = \sup\{s \leq t : B_s = 0\}$ et $d_t = \inf\{s \geq t : B_s = 0\}$.
Montrer que $\{g_t < u\} = \{d_u > t\}$. En déduire $g_t \stackrel{loi}{=} \frac{t}{d_1} \stackrel{loi}{=} \frac{1}{d(1/t)}$.

4. On suppose que A est un processus croissant continu tel que, pour tout c

$$(B_{ct}, A_{ct}, t \geq 0) \stackrel{loi}{=} (\sqrt{c}B_t, cA_t; t \geq 0)$$

On note $\Delta_a = \inf\{t : A_t \geq a\}$. Montrer que $d_{\Delta_a} \stackrel{loi}{=} ad_{\Delta_1}$. En déduire $A_g \stackrel{loi}{=} 1/d_{\Delta_1}$.

5. Montrer que $A_t = \sup_{s \leq t} B_s^2$ vérifie les conditions précédentes.

Exercice 2.5.3 Montrer que

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |W_t| \stackrel{loi}{=} \frac{1}{\sqrt{T_1^*}}$$

où $T_1^* = \inf\{t \geq 0 : |W_t| = 1\}$.

Exercice 2.5.4 Soit A une fonctionnelle du mouvement brownien. On dit que A a la propriété (hom) s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que pour tout c ,

$$(B_{ct}, A_{ct}; t \geq 0) \stackrel{loi}{=} (\sqrt{c}B_t, c^{r+1}A_t; t \geq 0)$$

Pour quelle valeur de r la fonctionnelle $A_t = \int_0^t \mathbb{1}_{(B_s > 0)} ds$ a-t-elle la propriété (hom)? Même question pour le temps local (voir la définition plus loin)

2.6 Compléments

Exercice 2.6.1 Projection d'un Brownien. Soit B un MB dans sa filtration (\mathcal{F}_t) et (\mathcal{G}_t) une filtration plus petite que (\mathcal{F}_t) . On suppose que $E(B_t | \mathcal{G}_t) = \hat{B}_t$ est un MB. Montrer que $\hat{B}_t = B_t$.

Exercice 2.6.2 Filtration de carrés de Browniens. Soit $Y_t = aB_t^2 + bW_t^2$ avec $a \neq b$ et a et b non nuls, W et B étant des Browniens indépendants. Montrer que $\sigma(Y_s, s \leq t) = \sigma(B_s, W_s, s \leq t)$. Généraliser au cas de n carrés.

Exercice 2.6.3 Représentation prévisible. Soit $W^{(i)}, i = 1, 2, 3$ trois MB, avec $W^{(i)}, i = 1, 2$ indépendants. Montrer qu'il n'est pas possible d'avoir $\sigma(W_s^{(3)}, s \leq t) = \sigma(W_s^{(1)}, W_s^{(2)}, s \leq t)$. On utilisera le théorème de représentation prévisible pour représenter $W_t^{(1)}, W_t^{(2)}$ en terme de $W^{(3)}$.

Exercice 2.6.4 Ponts, suite de ex. 2.2.6 Pour chaque t on définit la tribu

$$\mathcal{F}_t^\beta = \sigma\left\{B_s - \frac{s}{t}B_t, s \leq t\right\}$$

1. Montrer que la famille \mathcal{F}_t^β est croissante en t .

2. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}_+, ds)$. Calculer la projection \widehat{F}_t sur $L^2((\mathcal{F}^\beta)_t)$ de $F_t = \int_0^t f(s)dB_s$.

3. Montrer que le processus $\widehat{B}_t = B_t - \int_0^t du \frac{B_u}{u}$ est un (\mathcal{F}_t^β) -mouvement Brownien et que

$$\mathcal{F}_t^\beta = \sigma\{\widehat{B}_u, u \leq t\}$$

4. Montrer que $\widehat{F}_t = \int_0^t \widehat{f}(s)d\widehat{B}_t$, avec $\widehat{f}(t) = f(t) - \frac{1}{t} \int_0^t f(u)du$.

Exercice 2.6.5 Soit B un MB réel, $T_0 = \inf\{t : B_t = 0\}$, $g = \sup\{t < 1 : B_t = 0\}$ et $d = \inf\{t > 1 : B_t = 0\}$. Montrer que $P_x(d > 1+t) = \int p(1, x; y)P_y(T_0 > t)dy$ et que $P_0(g \leq t) = \int p(t, 0; y)P_y(T_0 > 1-t)dy$.

Exercice 2.6.6 Loi de g_t . Montrer que

$$P\left(\sup_{s \leq u \leq t} B_u > 0, B_s < 0\right) = 2P(B_t > 0, B_s < 0) = 2\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \arcsin \sqrt{\frac{s}{t}}\right]$$

En déduire la loi de $g_t = \sup\{s \leq t : B_s = 0\}$

Exercice 2.6.7 Représentation prévisible. Trouver un processus f prévisible

tel que $F = E(F) + \int_0^T f_s dB_s$ pour

1. $F = B_T$,
2. $F = \int_0^T B_s ds$,
3. $F = B_T^2$,
4. $F = \exp B_T$.

Exercice 2.6.8 Le mouvement Brownien B est issu de 0. Soit W un second mouvement Brownien issu de 0 indépendant de B et

$$X_t = (1-t) \int_0^t \frac{W_s}{(1-s)^2} ds + (1-t) \int_0^t \frac{1}{1-s} dB_s.$$

1. Montrer que $\int_0^t \frac{W_s}{1-s} ds - \int_0^t ds \int_0^s \frac{W_u}{(1-u)^2} du = (1-t) \int_0^t \frac{W_s}{(1-s)^2} ds$.
2. En admettant que si f et g sont deux fonctions déterministes on peut intervertir le sens des intégrales dans $\int_0^t ds f(s) \int_0^s g(u) dB_u$, montrer que

$$B_t - \int_0^t ds \int_0^s \frac{1}{1-u} dB_u = (1-t) \int_0^t \frac{1}{1-s} dB_s$$

3. Vérifier que X est solution de

$$X_t = B_t + \int_0^t \frac{W_s - X_s}{1-s} ds.$$

4. (sans utiliser ce qui précède) Montrer que $X_t = (1-t) \int_0^t \frac{dB_s - dW_s}{1-s} + W_t$.

5. Calculer $E(X_s X_t)$.

Exercice 2.6.9 Soit \mathbf{G} une filtration, W un \mathbf{G} mouvement brownien. Soit \mathbf{H} une filtration plus petite que \mathbf{G} . Montrer que le processus $M_t = E(W_t | \mathcal{H}_t)$ est une martingale. (on précisera par rapport à quelle filtration). Soit $X_t = W_t + \int_0^t Y_u du$ où Y est un processus \mathbf{G} adapté. On note \mathbf{F}^X la filtration de X et $\hat{Y}_u = E(Y_u | \mathcal{F}_u^X)$. Vérifier que $Z_t = (X_t - \int_0^t \hat{Y}_u du, t \geq 0)$ est une \mathbf{F}^X -martingale (on calculera l'espérance conditionnelle de Z_t par rapport à \mathbf{F}_s^X).

Exercice 2.6.10 Let X be a Brownian motion with drift μ and $M_t^X = \sup_{\{s \leq t\}} X_s$. Prove that

$$E(M_T^X | \mathcal{F}_t) = M_t^X + \int_{M_t^X - X_t}^{\infty} (1 - F(T-t, u)) du$$

where $F(T-t, u) = P(M_{T-t}^X \leq u)$

2.7 Finance

Exercice 2.7.1 Black et Scholes. Calculer $E(e^{-at}(S_t - K)^+)$ quand

$$S_t = xe^{bt} \exp(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t)$$

Ecrire la formule obtenue quand $a = b = r$ et quand $a = r, b = r - \delta$. Calculer $E(e^{-rt}(S_t - K)^+ | \mathcal{F}_s)$ pour $s < t$.

Exercice 2.7.2 Options reset Une option reset est caractérisée par une suite de dates t_1, t_2, \dots, t_n . Le payoff de cette option est

$$A = \sum_i (S_T - S_{t_i})^+ \mathbb{1}_{S_{t_i} = \inf\{K, S_{t_1}, S_{t_2}, \dots, S_{t_n}\}} + (S_T - K)^+ \mathbb{1}_{K = \inf\{K, S_{t_1}, S_{t_2}, \dots, S_{t_n}\}}$$

Calculer le prix d'une telle option, c'est-à-dire calculer $E(e^{-rT} A)$ quand

$$S_t = xe^{rt} \exp(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t)$$

2.8 Problème

2.8.1 Partie I : Résultats préliminaires

Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien standard sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) . On note $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ la filtration naturelle de B .

Etant donné un processus continu $(X_t)_{t \geq 0}$ à valeurs réelles, on pose pour $t > 0$,

$$M_t^X = \sup_{s \leq t} X_s,$$

$$m_t^X = \inf_{s \leq t} X_s.$$

Si a est un nombre réel strictement positif, on définit également

$$T_a^X = \inf\{t \geq 0; X_t = a\}, \quad \tilde{T}_a^X = \inf\{t \geq 0; |X_t| = a\}.$$

Il a été démontré en cours que T_a^B est un temps d'arrêt relativement à $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, fini p.s., tel que $E(T_a^B) = \infty$ et pour $\lambda \geq 0$,

$$E[\exp(-\lambda T_a^B)] = \exp(-a\sqrt{2\lambda}).$$

1. En inversant la transformée de Laplace de T_a^B , montrer que la densité de la loi de T_a^B est donnée par

$$\frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{2t}\right) 1_{(t>0)}.$$

2. Démontrer que pour $\lambda \geq 0$,

$$E[\exp(-\lambda \tilde{T}_a^B)] = \left(\cosh(a\sqrt{2\lambda})\right)^{-1}.$$

3. Prouver que \tilde{T}_a^B est intégrable et calculer $E(\tilde{T}_a^B)$.
4. Soient c et d deux nombres réels strictement positifs et posons $T^B = T_c^B \wedge T_{-d}^B$. Montrer que pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$E\left[\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2} T^B 1_{(T^B = T_c^B)}\right)\right] = \frac{\sinh(\lambda d)}{\sinh(\lambda(c+d))},$$

$$E\left[\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2} T^B\right)\right] = \frac{\cosh(\lambda(c-d)/2)}{\cosh(\lambda(c+d)/2)}.$$

5. En utilisant la propriété de Markov forte, démontrer que si $c \geq 0, b \leq c$,

$$P[B_t \leq c, M_t^B > c] = P[B_t > 2c - b].$$

6. En-déduire que pour chaque $t > 0$, les variables aléatoires M_t^B et $|B_t|$ ont la même loi.

7. Vérifier que pour chaque $t > 0$, la densité de la loi du couple (B_t, M_t^B) est donnée par

$$\frac{2(2c-b)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(2c-b)^2}{2t}\right) 1_{\{0 \leq c\}} 1_{\{b \leq c\}}.$$

8. Retrouver alors la densité de la loi de T_a^B explicitée au 1..

2.8.2 Partie II

On considère le processus $(Y_t)_{t \geq 0}$ défini par : $\forall t \geq 0, Y_t = \mu t + B_t$, où $\mu \in \mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe une mesure de probabilité P^μ sous laquelle $(Y_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien standard.
2. En utilisant le résultat de la question I.7., en-déduire que pour chaque $t > 0$, la densité de la loi du couple (Y_t, M_t^Y) est donnée par

$$\frac{2(2c-b)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(2c-b)^2}{2t}\right) \cdot \exp\left(\mu b - \frac{1}{2}\mu^2 t\right) 1_{\{0 \leq c\}} 1_{\{b \leq c\}}.$$

2.8.3 Partie III

Soit $(S_t)_{t \geq 0}$ le processus tel que : $\forall t \geq 0, S_t = x \exp\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\right]$, où x, r et σ sont des nombres réels strictement positifs. Dans la suite, on désignera par N la fonction de répartition de la loi normale centrale réduite.

1. Expliciter la probabilité P^θ qui fait de $(\tilde{B}_t)_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien standard, avec $\tilde{B}_t = \theta t + B_t$ et $\theta = \frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}$.
2. Trouver une relation entre M_t^S et $M_t^{\tilde{B}}$ et entre m_t^S et $m_t^{\tilde{B}}$ pour chaque $t > 0$.

Dans ce qui suit, H et K désigne des nombres réels strictements positifs.

3. Montrer que

$$P[S_t \leq K, M_t^S \leq H] = N(d_1) - \left(\frac{H}{x}\right)^{(2r/\sigma^2)-1} N(d_2),$$

avec

$$d_1 = \left(\log\left(\frac{K}{x}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right) / \sigma\sqrt{t},$$

$$d_2 = \left(\log\left(\frac{Kx}{H^2}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right) / \sigma\sqrt{t}.$$

4. Montrer que

$$P[S_t \geq K, m_t^S \geq H] = N(d_3) - \left(\frac{H}{x}\right)^{(2r/\sigma^2)-1} N(d_4),$$

avec

$$d_3 = \left(\log\left(\frac{x}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t \right) / \sigma\sqrt{t},$$

$$d_4 = \left(\log\left(\frac{H^2}{xK}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t \right) / \sigma\sqrt{t}.$$

5. Dédurre de la question 3. que (E désignant l'espérance sous P)

$$E[S_t 1_{\{S_t \leq K, m_t^S \leq H\}}] = x e^{rt} \left(N(d_5) - \left(\frac{H}{x}\right)^{(2r/\sigma^2)+1} N(d_6) \right),$$

avec

$$d_5 = \left(\log\left(\frac{K}{x}\right) - \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right) t \right) / \sigma\sqrt{t},$$

$$d_6 = \left(\log\left(\frac{Kx}{H^2}\right) - \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right) t \right) / \sigma\sqrt{t}.$$

6. En utilisant le résultat de la question 4., vérifier que

$$E[S_t 1_{\{S_t \geq K, m_t^S \geq H\}}] = x e^{rt} \left(N(d_7) - \left(\frac{H}{x}\right)^{(2r/\sigma^2)+1} N(d_8) \right),$$

avec

$$d_7 = \left(\log\left(\frac{x}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right) t \right) / \sigma\sqrt{t},$$

$$d_8 = \left(\log\left(\frac{H^2}{Kx}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right) t \right) / \sigma\sqrt{t}.$$

7. On pose $v_1(x, T) = E[e^{-rT} (S_T - K)_+ 1_{\{m_T^S \geq H\}}]$.

Montrer que

$$v_1(x, T) = x \left[N(d_7) - \left(\frac{H}{x}\right)^{(2r/\sigma^2)+1} N(d_8) \right] - e^{-rT} K \left[N(d_3) - \left(\frac{H}{x}\right)^{(2r/\sigma^2)-1} N(d_4) \right].$$

Déterminer la quantité $\frac{\partial}{\partial x} v_1(x, T - t)$.

8. On pose $v_2(x, T) = E[e^{-rT} (S_T - K)_+ 1_{\{m_T^S \leq H\}}]$. Donner une formule explicite pour $v_2(x, T)$ et $\frac{\partial}{\partial x} v_2(x, T - t)$.

9. On pose

$$v_3(x, T) = E \left[e^{-rT} (S_T - K)_+ 1_{\{M_T^S \geq H\}} \right],$$

$$v_4(x, T) = E \left[e^{-rT} (S_T - K)_+ 1_{\{m_T^S \leq H\}} \right],$$

$$v(x, T) = E \left[e^{-rT} (S_T - K)_+ \right].$$

Donner une relation entre $v_2(x, T)$, $v_3(x, T)$ et $v(x, T)$ d'une part et entre $v_1(x, T)$, $v_4(x, T)$ et $v(x, T)$ d'autre part.

Chapter 3

Intégrale d'Itô

Dans tout ce chapitre, B (ou W) est un mouvement Brownien dont la filtration est notée (\mathcal{F}_t) .

3.1 Intégrale de Wiener

Exercice 3.1.1 Soit $Y_t = tB_t$. Calculer dY_t , l'espérance de Y_t et $E(Y_t Y_s)$.

Exercice 3.1.2 1. Montrer que la v.a. $X_t = \int_0^t (\sin s) dB_s$ est définie.

2. Montrer que X est un processus gaussien.
Calculer son espérance et la covariance $E(X_s X_t)$.

3. Calculer $E[X_t | \mathcal{F}_s]$.

4. Montrer que $X_t = (\sin t)B_t - \int_0^t (\cos s)B_s ds$.

Exercice 3.1.3 1. Montrer que le processus $(Y_t = \int_0^t (\tan s) dB_s, 0 \leq t < \frac{\pi}{2})$ est défini.

2. Montrer que Y est un processus gaussien, calculer son espérance et sa variance et son espérance conditionnelle.

3. Montrer que $Y_t = (\tan t)B_t - \int_0^t \frac{B_s}{\cos^2 s} ds$.

Exercice 3.1.4 Pont. On considère l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dX_t &= \frac{X_t}{t-1} dt + dB_t ; 0 \leq t < 1 \\ X_0 &= 0 \end{cases}$$

1. Montrer que

$$X_t = (1-t) \int_0^t \frac{dB_s}{1-s}; \quad 0 \leq t < 1.$$

2. Montrer que $(X_t, t \geq 0)$ est un processus gaussien. Calculer son espérance et sa covariance.

3. Montrer que $\lim_{t \rightarrow 1} X_t = 0$.

Exercice 3.1.5 Montrer que, si f est une fonction déterministe de carré intégrable

$$E(B_t \int_0^\infty f(s) dB_s) = \int_0^t f(s) ds.$$

Exercice 3.1.6 Calculs de moments.

Calculer $A = E(\int_{t_1}^{t_2} (B_t - B_{t_1}) dt | \mathcal{F}_{t_1})$. Montrer que $\int_{t_1}^{t_2} (B_t - B_{t_1}) dt = \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - t) dB_t$. Utiliser cette égalité pour calculer A d'une autre manière. Calculer $\text{Var} \left[\int_{t_1}^{t_2} (B_t - B_{t_1}) dt | \mathcal{F}_{t_1} \right]$.

3.2 Formule d'Itô

Exercice 3.2.1 Ecrire les processus suivants comme des processus d'Itô en précisant leur drift et le coefficient de diffusion

1. $X_t = B_t^2$
2. $X_t = t + e^{B_t}$
3. $X_t = B_t^3 - 3tB_t$
4. $X_t = 1 + 2t + e^{B_t}$
5. $X_t = [B_1(t)]^2 + [B_2(t)]^2$
6. $X_t = (B_t + t) \exp(-B_t - \frac{1}{2}t)$
7. $X_t = \exp(t/2) \sin(B_t)$

Exercice 3.2.2 Intégration par parties. Soit $X_t = \exp \left(\int_0^t a(s) ds \right)$ et

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \left[b(s) \exp \left(- \int_0^s a(u) du \right) \right] dB_s$$

où a et b sont des fonctions déterministes. On pose $Z_t := X_t Y_t$. Montrer que $dZ_t = a(t)Z_t dt + b(t)dB_t$.

Exercice 3.2.3 Intégration par parties. Soit $Y_t = tX_1(t)X_2(t)$ avec

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= f(t)dt + \sigma_1(t)dB_t \\ dX_2(t) &= \sigma_2(t)dB_t \end{aligned}$$

Calculer dY_t .

Exercice 3.2.4 Montrer que $(Y_t = \sin(B_t) + \frac{1}{2} \int_0^t \sin(B_s) ds, t \geq 0)$ est une martingale. Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 3.2.5 Equation différentielle. On admet que le système suivant admet une solution

$$\begin{cases} X_t &= x + \int_0^t Y_s dB_s \\ Y_t &= y - \int_0^t X_s dB_s \end{cases}$$

Montrer que $X_t^2 + Y_t^2 = (x^2 + y^2)e^t$.

Exercice 3.2.6 Formule d'Itô. Soit $Y_t = \int_0^t e^s dB_s$ et $Z_t = \int_0^t Y_s dB_s$.

1. Ecrire l'EDS vérifiée par Z_t .
2. Calculer $E(Z_t)$, $E(Z_t^2)$ et $E(Z_t Z_s)$.

Exercice 3.2.7 On suppose que X est un processus d'Itô de drift $a(K_t - X_t)$, que $X_t = f(K_t)$ et que $K_t = bt + \sigma B_t$ où a, b, σ sont des constantes et B un mouvement brownien. Quelle est la forme de f ?

Exercice 3.2.8 Exponentielle. Soit σ un processus adapté continu de $L^2(\Omega \times \mathbb{R})$ et

$$X_t = \int_0^t \sigma_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 ds.$$

On pose $Y_t := \exp X_t$ et $Z_t = Y_t^{-1}$.

1. Expliciter la dynamique de Y , c'est-à-dire exprimer dY_t .
2. Montrer que Y est une martingale locale. Donner une condition sur σ pour que ce soit une martingale.
3. Calculer $E(Y_t)$ dans ce cas. Expliciter les calculs quand $\sigma = 1$.
4. Calculer dZ_t .

Exercice 3.2.9 Soit (a, b, c, z) des constantes et

$$Z_t = e^{(a-c^2/2)t+cW_t} \left(z + b \int_0^t e^{-(a-c^2/2)s-cW_s} ds \right)$$

Quelle est l'EDS vérifiée par Z ?

Exercice 3.2.10 On considère le processus de dynamique

$$dS_t = S_t((r - q + h_t)dt + \sigma dW_t)$$

où $(h_t, t \geq 0)$ est un processus adapté.

1. On se place dans le cas $h_t = 0, \forall t$. Montrer que $(M_t = S_t e^{-(r-q)t}, t \geq 0)$ est une martingale positive. On définit une probabilité Q par $dQ|_{\mathcal{F}_t} = \frac{M_t}{M_0} dP|_{\mathcal{F}_t}$. Comment se transforme le MB W ?
2. Dans le cas h non nul, expliciter S_t (Utiliser l'exercice 3.2.9).
3. On suppose que $h_t = h(S_t)$ où h est une fonction continue. On admet qu'il existe une solution de l'EDS correspondante. Montrer que

$$e^{-rT} E(e^{-\int_0^T h(S_s) ds} \Psi(S_T)) = e^{-qT} S_0 E_Q(S_T^{-1} \Psi(S_T))$$

4. On se place maintenant dans le cas $h_t = S_t^{-p}$, avec p réel. On admet qu'il existe une solution de l'EDS. On pose $Z_t = S_t^p$.
 - (a) Quelle est la dynamique de Z ?
 - (b) Vérifier, en utilisant l'exercice 4 que l'on peut expliciter Z .
 - (c) Pour quelles fonctions f , le processus $f(Z)$ est-il une martingale (locale)?

Exercice 3.2.11 Processus d'Ornstein Uhlenbeck. Soit X tel que $dX_t = (a - bX_t)dt + dB_t$

1. Montrer que $Z_t = \exp\left(c \int_0^t X_s dB_s - \frac{c^2}{2} \int_0^t X_s^2 ds\right)$ est une martingale locale.
2. Soit $U_t = X_t^2$. Ecrire dU_t puis la variable U_t comme une somme d'intégrales.
3. Montrer que $\int_0^t X_s dB_s = \frac{1}{2}(X_t^2 - X_0^2 - t) - a \int_0^t X_s ds + b \int_0^t X_s^2 ds$.

Exercice 3.2.12 Soit Z le processus défini par

$$Z_t = \frac{1}{\sqrt{1-t}} \exp\left(-\frac{W_t^2}{2(1-t)}\right).$$

1. Montrer que Z est une martingale et que Z_t tend vers 0 quand t tend vers 1.
2. Calculer $E(Z_t)$.
3. Ecrire Z_t sous la forme

$$Z_t = \exp\left(\int_0^t \Phi_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \Phi_s^2 ds\right)$$

où Φ est un processus que l'on précisera.

Exercice 3.2.13 Moments d'une exponentielle. Soit L le processus solution de

$$dL_t = L_t \phi dW_t, \quad L_0 = 1$$

où ϕ est une constante. Le processus L est l'exponentielle de Doléans-Dade de ϕW et se note $L_t = \mathcal{E}(\phi W)_t$.

1. Déterminer la fonction λ telle que, pour $a \in \mathbb{R}$, le processus $(L_t)^a \exp(-\lambda(a)t)$ est une martingale.
2. En déduire le calcul de $E[(L_t)^a]$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.2.14 Démonstration de l'unicité de l'écriture d'un processus d'Itô.

Soit $dX_t = a_t dt + \sigma_t dW_t$. On souhaite démontrer que si $X \equiv 0$, alors $a \equiv 0, \sigma \equiv 0$.

1. Appliquer la formule d'Itô à $Y_t = \exp(-X_t^2)$.
2. En déduire le résultat souhaité.

Exercice 3.2.15 Soit $V = KX$ avec

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t(\mu - k - s \ln X_t)dt + \sigma X_t dW_t \\ dK_t &= K_t(r + k)dt \end{aligned}$$

Calculer dV_t et $d \ln X_t$.

Exercice 3.2.16 Montrer que

$$M_t = \exp\left(-\int_0^t B_s^2 ds\right) \exp\left(-\frac{B_t^2}{2} \tanh(T-t)\right) \frac{1}{(\cosh(T-t))^{1/2}}$$

est une martingale locale.

Exercice 3.2.17 Soit $A_t = \int_0^t \exp(W_s + \nu s) ds$ et $dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t)$. Montrer que le processus $f(t, S_t, A_t)$ est une martingale si f vérifie une équation aux dérivées partielles à coefficients *déterministes* que l'on précisera.

Exercice 3.2.18 Soit $dX_t = dB_t + \frac{1}{X_t} dt$. Montrer que $\frac{1}{X_t}$ est une martingale (locale). Quelles sont les fonctions f telles que $f(t, X_t)$ soit une martingale locale?.

Exercice 3.2.19 Soit B et W deux browniens corrélés et

$$\begin{aligned} dr_t &= [a(b - r_t) - \lambda \sigma r_t]dt + \sigma \sqrt{r_t} dW_t \\ dV_t &= (r_t - \delta)V_t dt + \sigma_V V_t dB_t \end{aligned}$$

On pose $X_t = \sqrt{r_t}$ et $Y_t = \ln V_t - \alpha X_t$ avec $\alpha = 2\rho\sigma_V/\sigma$. Calculer dX et dY .

Exercice 3.2.20 Soit T fixé et $B(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f(t, u)du\right)$ avec

$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dW_t, \forall t < T$$

Montrer que

$$dB(t, T) = (r_t - \tilde{\alpha}(t, T) + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}(t, T))B(t, T)dt - \tilde{\sigma}(t, T)B(t, T)dW_t$$

où on a noté $\tilde{\alpha}(t, T) = \int_t^T \alpha(u, T)du$

Exercice 3.2.21 Soit

$$dr_t = (a - br_t)dt - \sigma\sqrt{r_t}(dW_t + \lambda dt)$$

et B un mouvement Brownien indépendant de W . On note H le processus

$$H_t = \exp\left(\int_0^t r_s ds + \frac{1}{2}\int_0^t (\lambda_1^2 + \lambda r_s)ds + \int_0^t \lambda_1 dB_s + \int_0^t \lambda\sqrt{r_s}dW_s\right)$$

Montrer que le calcul de $E(\exp(H_T^\alpha)|\mathcal{F}_t)$ se réduit à celui de $E(\exp(-\eta r_T - \mu \int_t^T r_s ds)|\mathcal{F}_t)$.

Exercice 3.2.22 Fonction d'échelle. Soit X un processus d'Itô. Une fonction s est une fonction d'échelle si $s(X)$ est une martingale locale. Déterminer les fonctions d'échelle des processus suivants:

1. $B_t + \nu t$
2. $X_t = \exp(B_t + \nu t)$
3. $X_t = x + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)ds$. Identifier le processus croissant A tel que $s(X_t) = \beta_{A_t}$ où β est un MB.

Exercice 3.2.23 Soit

$$d\Psi_t = (1 - r\Psi_t)dt + \sigma\Psi_t dW_t$$

Soit u une solution de

$$\frac{\sigma^2}{2}x^2u''(x) + (1 - rx)u'(x) - \lambda u(x) = 0$$

On définit x^* comme solution de $x^*u'(x^*) = u(x^*)$ et $v(x) = \frac{x^*}{u(x^*)}u(x)$. On admettra que $v''(x) \geq 0$. Soit enfin V définie par

$$\begin{cases} V(x) &= v(x), & 0 \leq x \leq x^* \\ &= x, & x > x^* \end{cases}$$

Montrer que $1 - (r + \lambda)x^* \leq 0$.

Ecrire la formule d'Itô pour $e^{-\lambda t}V(\Psi_t)$. Il apparaît un terme $LV(x) - \lambda V(x)$ avec

$$LV(x) = (1 - rx)V'(x) + \frac{\sigma^2}{2}x^2V''(x)$$

Montrer que sur $x > x^*$ on a $LV(x) - \lambda V(x) \leq 0$ et que sur $x \leq x^*$, on a $LV(x) - \lambda V(x) = 0$

En déduire que

$$V(\Psi_0) \geq \tilde{E}(e^{-\lambda T}V(\Psi_T))$$

(en admettant que l'intégrale stochastique est une martingale).

Exercice 3.2.24 Reprendre l'exercice 2.6.8 en utilisant la formule d'Itô.

Exercice 3.2.25 Pont Brownien Calculer $P(\sup_{0 \leq s \leq t} B_s \leq y, B_t \in dx)$. En déduire que, pour un pont brownien b , issu de x à l'instant 0, qui doit se trouver en z , $z > 0$ à l'instant t , on a pour $y > z$

$$P(\sup_{0 \leq s \leq t} b_s \leq y) = \exp\left(-\frac{(z + x - 2y)^2}{2t} + \frac{(z - x)^2}{2t}\right).$$

Quelle est la valeur de $P(\sup_{0 \leq s \leq t} b_s \leq y)$ pour $y < z$?

Exercice 3.2.26 Formule de Clark-Ocone Soit f une fonction bornée de classe C^1 . Justifier rapidement qu'il existe une fonction ψ telle que, pour $t \leq 1$

$$E(f(B_1)|\mathcal{F}_t) = \psi(t, B_t).$$

Expliciter $\psi(t, x)$ sous la forme d'une espérance (non conditionnelle). Ecrire la formule d'Itô pour ψ en faisant les simplifications qui s'imposent. Montrer que

$$\psi(t, B_t) = E(f(B_1)) + \int_0^t E(f'(B_1)|\mathcal{F}_s)dB_s.$$

3.3 Cas multidimensionnel

Exercice 3.3.1 On considère deux processus S_1 et S_2 définis par

$$dS_i(t) = S_i(t)(r dt + \sigma_i dB_t^i), \quad i = 1, 2 \quad (3.1)$$

où B^1 et B^2 sont deux Browniens indépendants et où les coefficients r, σ_i sont constants.

1. On pose $S_3(t) \stackrel{def}{=} \frac{S_1(t) + S_2(t)}{2}$. Ecrire l'équation différentielle stochastique vérifiée par S_3 .

2. Soit $S_4(t) \stackrel{def}{=} \sqrt{S_1(t)S_2(t)}$. Ecrire l'équation différentielle stochastique vérifiée par S_4 .

Exercice 3.3.2 Formule d'Itô multidimensionnelle. Soient $(B_1(t), t \geq 0)$ et $(B_2(t), t \geq 0)$ deux mouvements Browniens indépendants. Soit $(L_i(t), i = 1, 2, t \geq 0)$ les processus définis par

$$dL_i(t) = \theta_i(t)L_i(t)dB_i(t), L_i(0) = 1$$

où $(\theta_i(t), i = 1, 2)$ sont des processus adaptés continus bornés. Soit $Z_t = L_1(t)L_2(t)$. Ecrire dZ_t .

Montrer que $L_1(t)L_2(t)$ est une martingale.

Exercice 3.3.3 Soit $(B_1(t), t \geq 0)$ et $(B_2(t), t \geq 0)$ deux mouvements Browniens indépendants et ρ une constante telle que $|\rho| \leq 1$.

1. Montrer que le processus $(W_t, t \geq 0)$ défini par $W_t = \rho B_1(t) + \sqrt{1 - \rho^2} B_2(t)$ est un mouvement Brownien.
2. Soit $(\phi_i(t), t \geq 0; i = 1, 2)$ deux processus continus adaptés de carré intégrable (tels que $\forall T \geq 0, E(\int_0^T \phi_i^2(t) dt) < \infty$).
 - (a) On définit $(Z_t, t \geq 0)$ par $dZ_t = \phi_1(t)dB_1(t) + \phi_2(t)dB_2(t)$ et $Z_0 = z$. Montrer que Z est une martingale.
 - (b) Soit $\Psi(t) = \phi_1^2(t) + \phi_2^2(t)$. On suppose que $\Psi(t) > 0$. On définit $(Y_t, t \geq 0)$ par

$$dY_t = \frac{\phi_1(t)}{\sqrt{\Psi(t)}} dB_1(t) + \frac{\phi_2(t)}{\sqrt{\Psi(t)}} dB_2(t), Y_0 = y.$$

Ecrire l'équation vérifiée par Y_t^2 .

Montrer que $(Y_t, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien.

3. On définit $R_t = B_1^2(t) + B_2^2(t)$. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par R et celle vérifiée par $U_t = \sqrt{R_t}$. On montrera que

$$dU_t = \frac{a}{U_t} dt + b dB_3(t)$$

où a et b sont des constantes et B_3 un mouvement Brownien.

Exercice 3.3.4 Soit $dS_t^{(i)} = S_t^{(i)}(\mu_t^{(i)} dt + \sigma_t^{(i)} dW_t^{(i)})$ où $W^{(i)}, i = 1, 2$ sont deux MB corrélés. Déterminer $k_i, i = 1, 2$ pour que $e^{-rt}(S_t^{(1)})^{k_1}(S_t^{(2)})^{k_2}$ soit une martingale.

3.4 Compléments

Exercice 3.4.1 Formule de Tanaka. Soit f une fonction et F définie par

$$F(x) = \int_{-\infty}^x dz \int_{-\infty}^z f(y) dy$$

Vérifier que

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - y)^+ f(y) dy$$

et que $F'(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \mathbb{1}_{x > y} dy$.

Montrer, en appliquant la formule d'Itô à F que

$$\int_0^t f(B_s) ds = 2 \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \left((B_t - y)^+ - (B_0 - y)^+ - \int_0^t \mathbb{1}_{B_s > y} dB_s \right) dy.$$

Exercice 3.4.2 Égalité de Bougerol. Soit W_1 et W_2 deux mouvements browniens indépendants.

1. Appliquez la formule d'Itô aux processus

$$X_t \stackrel{def}{=} \exp(W_1(t)) \int_0^t \exp(-W_1(s)) dW_2(s), \quad Z_t \stackrel{def}{=} \sinh W_1(t)$$

2. Montrer que $dZ_t = \int_0^t \phi(Z_s) dW_1(s) + \int_0^t \psi(Z_s) ds$.
3. Vérifier que $M_t \stackrel{def}{=} W_2(t) + \int_0^t X_s dW_1(s)$ est une martingale. Calculer $E(M_t^2)$. En admettant que $M_t = \int_0^t \gamma_s dW_3(s)$, où W_3 est un mouvement brownien, identifier γ .
4. En déduire une relation entre X_t et Z_t .

Exercice 3.4.3 Soit $dr_t = \delta dt + 2\sqrt{r_t} dB_t$ et $f(t, x)$ une fonction de $C_b^{1,2}$.

1. Quelle condition doit vérifier la fonction s pour que $s(r_t)$ soit une martingale ?
2. Quelle condition doit vérifier la fonction f pour que $f(t, r_t)$ soit une martingale ?
3. Soit $Z_t = r_t^2$ et $\rho_t = \sqrt{r_t}$. Ecrire les EDS vérifiées par Z_t et par ρ_t .
4. Soit $dr_t^1 = \mu_1 dt + 2\sqrt{r_t} dB_t^1$ et $dr_t^2 = \mu_2 dt + 2\sqrt{r_t} dB_t^2$ deux processus, avec B^1 et B^2 deux browniens indépendants. On admettra que r^1 et r^2 sont indépendants. On note R le processus défini par $R_t = r_t^1 + r_t^2$. Montrer que R s'écrit sous la forme (5.1).

Exercice 3.4.4 Temps d'atteinte. Soit $\tau = T_a = \inf\{t : W_t = a\}$. On a calculé $Z_t = P(\tau > t | \mathcal{F}_t)$. Quelle est la dynamique du processus Z ?

Exercice 3.4.5 Exponentielle. Soit X et Y deux martingales de la forme $dX_t = H_t dW_t$, $dY_t = K_t dW_t$. On note M_t l'unique solution de l'équation $dM_t = M_t dX_t$, $M_0 = 1$. Montrer que la solution de $dZ_t = dY_t + Z_t dX_t$, $Z_0 = z$ est

$$Z_t = M_t(z + \int_0^t \frac{1}{M_s}(dY_s - H_s K_s ds))$$

Quelle est la solution de $dZ_t = dY_t + Z_t dX_t$ lorsque $dX_t = H_t dW_t^1$, $dY_t = K_t dW_t^2$ où W^1 et W^2 sont deux MB éventuellement corrélés?

3.5 Brownien géométrique et extensions.

Dans cette section, S est un Brownien géométrique de dynamique

$$dS_t = S_t(b dt + \sigma dB_t) \quad (3.2)$$

où b et σ sont des constantes.

Exercice 3.5.1 Soit $\tilde{S}_t = e^{-bt} S_t$.

1. Montrer que $(\tilde{S}_t, t \geq 0)$ est une martingale. En déduire $E(S_t)$ et la valeur de $E(S_t | \mathcal{F}_s)$ pour tous les couples (t, s) .
2. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par $(S_t)^{-1}$.
3. Montrer que $S_T = S_0 \exp[(b - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma B_T]$, puis que $S_T = S_t \exp[(b - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t) + \sigma(B_T - B_t)]$.
4. Soit $dL_t = -L_t \theta_t dW_t$ où θ_t est un processus adapté continu de $L^2(\Omega \times \mathbb{R})$. On pose $Y_t = S_t L_t$. Calculer dY_t .
5. Soit ζ_t défini par

$$d\zeta_t = -\zeta_t(r dt + \theta_t dB_t)$$

Montrer que $\zeta_t = L_t \exp(-rt)$. calculer $d\zeta_t^{-1}$.

6. Calculer $d(S_t \zeta_t)$. Comment choisir θ pour que ζS soit une martingale ?

Exercice 3.5.2 Soit $A_t = \frac{1}{t} \int_0^t \ln S_s ds$.

1. Montrer que $\ln S_s = \ln S_t + (b - \frac{\sigma^2}{2})(s - t) + \sigma(B_s - B_t)$ pour $s \geq t$.
2. Montrer que A_t est une variable gaussienne.
3. Soit $G(t, T) = \frac{1}{T} \int_t^T (B_s - B_t) ds$. Montrer que

$$A_T = \frac{t}{T} A_t + (1 - \frac{t}{T}) [\ln S_t + \frac{1}{2}(b - \frac{\sigma^2}{2})(T - t)] + \sigma G(t, T)$$

4. Montrer que $G(t, T)$ est une variable gaussienne indépendante de \mathcal{F}_t , dont on calculera l'espérance conditionnelle et la variance conditionnelle (par rapport à \mathcal{F}_t).
5. En déduire que $A_T = Z_t + U$ où Z_t est \mathcal{F}_t mesurable et U une variable gaussienne indépendante de \mathcal{F}_t . Montrer que $\alpha(t)e^{Z_t} = E(e^{A_T} | \mathcal{F}_t)$, où l'on précisera la valeur de α .

Exercice 3.5.3 Soit $V_T = \frac{1}{h} \int_{T-h}^T S_u du$ où h est un nombre réel donné tel que $0 < h < T$. Soit X le processus défini par

$$e^{-bt} X_t = E[e^{-bT} V_T | \mathcal{F}_t].$$

1. Quelle est la valeur de X_T ?
2. Exprimer X_t en fonction de S_t pour $t \leq T - h$.
3. Exprimer X_t en fonction de S_t et de $(S_u, T - h \leq u \leq t)$ pour $T - h \leq t \leq T$.
4. Montrer que $dX_t = X_t b dt + \sigma S_t \gamma_t dW_t$ avec $\gamma_t = \mathbb{1}_{\{t < T-h\}} \frac{1 - e^{-bh}}{bh} + \mathbb{1}_{\{T-h < t < T\}} \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{bh}$.

Exercice 3.5.4 Soit $Y_t = S_t^a$ avec $a \geq 2$. Quelle est l'EDS satisfaite par Y ? Calculer $E(Y_t)$.

Exercice 3.5.5 Soit δ une fonction borélienne bornée et

$$dS_t = S_t((r - \delta(t))dt + \sigma dW_t), S_0 = x.$$

Les questions qui suivent peuvent être traitées dans un ordre différent.

1. Montrer que $e^{-rt} S_t + \int_0^t \delta(s) e^{-rs} S_s ds$ est une martingale locale.
2. Ecrire explicitement la solution S en fonction de S_0, r, σ, δ et W .
3. Calculer espérance et variance de S .
4. Calculer avec le minimum de calculs (on peut utiliser des résultats connus), $E((S_T - K)^+)$ dans le cas δ constant.

3.6 Le crochet

Soit M une martingale continue de carré intégrable. On admet qu'il existe un processus croissant A tel que $M_t^2 - A_t$ est une martingale. On note $A_t = \langle M, M \rangle_t = \langle M \rangle_t$ ce processus que l'on appelle le crochet de M .

Exercice 3.6.1 Calcul de crochets.

1. Calculer $\langle M \rangle$ pour $M = B$.
2. Calculer $\langle M \rangle$ pour $M_t = \int_0^t \sigma_s dB_s$

Exercice 3.6.2 Crochet de martingales. Soit M et N deux martingales. On pose, par analogie avec $2ab = (a+b)^2 - a^2 - b^2$

$$2\langle M, N \rangle = \langle M + N, M + N \rangle - \langle M, M \rangle - \langle N, N \rangle$$

Montrer que $MN - \langle M, N \rangle$ est une martingale.

Exercice 3.6.3 Utilisation de crochets. Ecrire la formule d'Itô en utilisant le crochet.

3.7 Finance

Exercice 3.7.1 Dans un marché incomplet, il existe des actifs contingents duplicables. En particulier, montrer que $\int_0^T (aS_s + b)ds$ est duplicable lorsque S est un processus d'Itô.

Exercice 3.7.2 Equation d'évaluation. Soit $dS_t = rS_t dt + S_t \sigma(t, S_t) dB_t$, où r est une constante.

1. Montrer que $E(\Phi(S_T)|\mathcal{F}_t)$ est une martingale pour toute fonction Φ borélienne bornée.
2. Justifier que $E(\Phi(S_T)|\mathcal{F}_t) = E(\Phi(S_T)|S_t)$
3. Soit $\varphi(t, x)$ la fonction définie par $\varphi(t, S_t) = E(\Phi(S_T)|S_t)$. Ecrire dZ_t avec $Z_t = \varphi(t, S_t)$.
4. En utilisant que $\varphi(t, S_t)$ est une martingale, et en admettant que φ est $C^{1,2}$, montrer que pour tout $t > 0$ et tout $x > 0$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) + rx \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2(t, x) x^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t, x) = 0.$$

Quelle est la valeur de $\varphi(T, x)$?

Exercice 3.7.3 Options Européennes et Américaines. On rappelle l'inégalité de Jensen : si Φ est une fonction convexe et \mathcal{G} une tribu, $E(\Phi(X)|\mathcal{G}) \geq \Phi(E(X|\mathcal{G}))$.

On admettra que si τ est un temps d'arrêt borné par T et Z une sous-martingale, $E(Z_T) \geq E(Z_\tau)$. On note $dS_t = S_t(rdt + \sigma_t dW_t)$ le prix d'un actif où σ est un processus adapté borné. Soit $C = E(e^{-rT}(S_T - K)^+)$ le prix d'un call Européen et $C^{Am} = \sup_\tau E(e^{-r\tau}(S_\tau - K)^+)$ le prix d'un call Américain, le sup étant pris sur tous les temps d'arrêt à valeurs dans $[0, T]$. On note $P = E(e^{-rT}(Ke^{rT} - S_T)^+)$ et $P^{Am} = \sup_\tau E(e^{-r\tau}(Ke^{r\tau} - S_\tau)^+)$ les prix de puts à strike actualisés.

1. Montrer que $(e^{-rt}S_t - K)^+$ est une sous-martingale.
2. Soit g une fonction convexe de classe C^2 telle que $g(0) = 0$. Montrer que

$$\forall x, \forall \alpha \geq 1, g(x) \leq \frac{1}{\alpha} g(\alpha x)$$

En déduire que

$$E(e^{-ru}g(S_u)|\mathcal{F}_t) \leq E(e^{-rT}g(S_T)|\mathcal{F}_t)$$

pour tout $t < u \leq T$. Montrer que $C = C^{Am}$.

3. Montrer que $P = P^{Am}$.

Exercice 3.7.4 Volatilité stochastique Soit r un réel et $(\sigma_t, t \geq 0)$ un processus aléatoire (\mathcal{F}_t) adapté tel que $\sigma_1 \leq \sigma_t \leq \sigma_2$ où σ_1 et σ_2 sont des constantes.

1. On note \mathcal{V}_1 la fonction $\mathcal{V}_1(t, x)$ définie par $\mathcal{V}_1(t, x) = e^{-r(T-t)}E(h(X_T)|X_t = x)$ lorsque $dX(t) = X(t)(r dt + \sigma_1 dB_t)$. Montrer que $e^{-rt}\mathcal{V}_1(t, X_t)$ est une martingale.
2. Ecrire l'EDS vérifiée par le processus $\mathcal{V}_1(t, X_t)$. En déduire que la fonction \mathcal{V}_1 satisfait une EDP. Dans la suite, on suppose \mathcal{V}_1 convexe en x .
3. Soit $dS_1(t) = S_1(t)(r dt + \sigma_t dW_t)$. Ecrire la formule d'Itô pour $e^{-rt}\mathcal{V}_1(t, S_t)$. En déduire $e^{-rT}\mathcal{V}_1(t, S_T)$ en fonction de $e^{-rt}\mathcal{V}_1(t, S_t)$, d'une intégrale en dt dont on donnera le signe et d'une intégrale stochastique.
4. Montrer que $e^{-rt}\mathcal{V}_1(t, S_t) \leq E(e^{-rT}h(S_T)|\mathcal{F}_t) \leq e^{-rt}\mathcal{V}_2(t, S_t)$.

Exercice 3.7.5 Heath-Jarrow-Morton. Soit T fixé et $(r_t, 0 \leq t \leq T)$ une famille de processus (dépendant du paramètre T) que l'on notera, comme dans toute la littérature sur les taux $(r(t, T), 0 \leq t \leq T)$ telle que, pour tout T fixé

$$dr(t, T) = \sigma(t, T)\Sigma(t, T)dt + \sigma(t, T)dW_t$$

où $\frac{\partial}{\partial T}\Sigma(t, T) = \sigma(t, T)$.

1. On pose $X_t = \int_T^{T+a} r(t, u)du$. Montrer que l'on peut écrire

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \phi_s dW_s$$

où on explicitera μ et ϕ .

2. En déduire la dynamique de $Y_t = \exp X_t$.

Exercice 3.7.6 Portefeuille de marché. On considère un marché comportant un actif sans risque de taux r et un actif risqué de dynamique

$$dS_t = S_t(\mu_t dt + \sigma_t dW_t).$$

Un portefeuille est un couple (α, β) de processus adaptés et la valeur du portefeuille est le processus $(V_t, t \geq 0)$

$$V_t = \alpha_t S_t^0 + \beta_t S_t.$$

Le portefeuille est dit autofinanciant si

$$dV_t = \alpha_t dS_t^0 + \beta_t dS_t.$$

1. Montrer qu'un portefeuille autofinanciant est caractérisé par le couple (v, β) tel que

$$dV_t = r_t V_t dt + \beta_t (dS_t - r_t S_t dt), V_0 = v.$$

On utilise très souvent le processus H défini par

$$dH_t = -H_t(r_t dt + \theta_t dW_t)$$

avec $\theta = \frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t}.$

2. Montrer que $M_t = (H_t)^{-1}$ est la valeur d'un portefeuille autofinanciant dont on précisera la valeur de α et de β . Ce portefeuille est appelé portefeuille de marché.

Exercice 3.7.7 Dividendes. Soit

$$dS_t = S_t([r - \delta]dt + \sigma dW_t), S_0 = x \quad (3.3)$$

1. Montrer que $S_t = S_0 \exp(at + cW_t)$ où on explicitera a, c . Montrer que

$$S_t e^{-rt} = E(S_T e^{-rT} + \int_t^T \delta S_s e^{-rs} ds | \mathcal{F}_t),.$$

2. Montrer qu'il existe β tel que S^β soit une Q -martingale.
3. On suppose que $dY_t = Y_t(rdt + \nu dW_t), Y_0 = y$. Soit γ une constante. Montrer que Y^γ vérifie une équation du type (3.3) où l'on précisera la valeur de δ et de σ .
4. Calculer $E((S_T - K)^+)$.

Exercice 3.7.8 Assurance de portefeuille.

1. Soit M une martingale telle que $M_T \geq 0$. Montrer que $M_t \geq 0$ pour $t < T$. Cette propriété s'étend-elle au cas $t > T$? Si oui, donner une démonstration, sinon, donner un contre exemple.
Soit τ un temps d'arrêt borné par T . On suppose que $M_\tau = 0$. Montrer qu'alors $M_s = 0$ pour $s \in [\tau, T]$.
2. Soit V la valeur d'un portefeuille autofinancé dans un modèle Black-Scholes. On rappelle que $d(R_t V_t) = \pi_t R_t \sigma V_t dW_t$ avec $R_t = e^{-rt}$. Montrer que si $V_T \geq K$ alors $V_t \geq e^{-r(T-t)} K$. Montrer que s'il existe $\tau < T$ tel que $V_\tau = e^{-r(T-\tau)} K$, alors $V_t = e^{-r(T-t)} K$ pour $t \in [\tau, T]$.
3. Un agent de richesse initiale x souhaite former un portefeuille tel que $V_T > K$. Quelle condition sur x cela implique-t'il? Comment peut-il réaliser cet objectif? (on donnera plusieurs solutions)

Exercice 3.7.9 Soit $dX_t = \sqrt{\frac{Y_t}{T-t}} X_t dW_t$ et $dY_t = g_t dB_t + \mu dt$. On note $C(T-t, x, \sigma)$ la fonction de Black-Scholes. Donner une relation entre g, μ pour que $C(T-t, X_t, \sqrt{\frac{Y_t}{T-t}})$ soit une martingale.

Exercice 3.7.10 Calcul de $E(\exp - \int_0^T r_s ds | \mathcal{F}_t)$ avec $r_t = f(t) + \frac{\sigma^2}{2} t + \sigma W_t$

Exercice 3.7.11 Question préliminaire Soit X et Y deux processus d'Itô continus (on ne précisera pas leur dynamique, c'est inutile pour ce qui suit). Rappeler la formule d'intégration par parties pour $d(XY)$. En déduire que

$$X_t d\left(\frac{1}{X_t}\right) + \frac{1}{X_t} dX_t + d\left\langle X, \frac{1}{X} \right\rangle_t = 0.$$

On considère un marché comportant deux actifs dont les prix sont des processus d'Itô S^1 et S^2 tels que S^1 est strictement positif. Un portefeuille de valeur $V_t = \pi_t^1 S_t^1 + \pi_t^2 S_t^2$ est autofinancé si

$$dV_t = \pi_t^1 dS_t^1 + \pi_t^2 dS_t^2.$$

On choisit comme numéraire le premier actif et on note $\tilde{V}_t = V_t/S_t^1$, $\tilde{S}_t^2 = S_t^2/S_t^1$, d'où

$$\tilde{V}_t = V_t/S_t^1 = \pi_t^1 + \pi_t^2 \tilde{S}_t^2.$$

Le but de cet exercice est de montrer que la notion d'autofinancement ne dépend pas du choix de numéraire, c'est-à-dire que

$$dV_t = \pi_t^1 dS_t^1 + \pi_t^2 dS_t^2 \tag{3.4}$$

implique

$$d\tilde{V}_t = \pi_t^2 d\tilde{S}_t^2. \tag{3.5}$$

1. Calculer $d\langle V, \frac{1}{S^{(1)}} \rangle_t$ en fonction de $d\langle S^{(1)}, \frac{1}{S^{(1)}} \rangle_t$ et $d\langle S^{(2)}, \frac{1}{S^{(1)}} \rangle_t$
2. Montrer que $dV_t^1 = \pi_t^2 \left(S_t^{(2)} d\frac{1}{S_t^{(1)}} + \frac{1}{S_t^{(1)}} dS_t^{(2)} + d\langle S^{(2)}, \frac{1}{S^{(1)}} \rangle_t \right)$
3. Montrer que $dV_t^1 = \pi_t^2 d\left(\frac{S_t^{(2)}}{S_t^{(1)}} \right)$.

Exercice 3.7.12 On considère un marché dans lequel sont négociés trois actifs
Un actif sans risque dont la dynamique est $dS_t^0 = S_t^0 r dt$ et DEUX actifs risqués

$$dS_t^i = S_t^i (\mu_i dt + \sigma dW_t)$$

avec $\mu_1 \neq \mu_2$ et le même mouvement Brownien uni-dimensionnel W . Les actifs contingents sont choisis dans $\mathcal{F}_T = \sigma(S_s^1, S_s^2, s \leq T) = \sigma(W_s, s \leq T)$.

1. Montrer que le marché est complet.
2. Montrer que la marché admet des opportunités d'arbitrage.
3. Construire EXPLICITEMENT une telle opportunité d'arbitrage, c'est-à-dire expliciter un triplet (π_0, π_1, π_2) de processus adaptés tels que le portefeuille associé soit autofinancé et $V_0 = 0, V_T > 0$. On pourra se restreindre à une OA statique, c'est-à-dire telle que (π_0, π_1, π_2) soient des constantes.

Chapter 4

Equations différentielles stochastiques

4.1 Equation linéaire

Exercice 4.1.1 Soit α, σ deux constantes et $dX(t) = -\frac{1}{2}\alpha X(t)dt + \frac{1}{2}\sigma dW(t)$. Soit $Y_t = X_t e^{\alpha t/2}$. Ecrire dY_t . En déduire la forme de la solution $X(t)$.

Exercice 4.1.2 Soit l'EDS

$$dX_t = bX_t dt + dB_t, \quad X_0 = x.$$

1. On pose $Y_t = e^{-t}X_t$. Quelle est l'EDS vérifiée par Y_t ? Exprimer Y_t sous la forme $Y_t = y + \int_0^t f(s)dB_s$ où l'on explicitera la fonction f .
2. Calculer $E(Y_t)$ et $E(Y_t^2)$.
3. Justifier que $\int_0^t Y_s ds$ est un processus gaussien. Calculer $E(\exp[\int_0^t Y_s ds])$.
4. Exprimer Y_t pour $t > s$ sous la forme $Y_t = Y_s + \int_s^t g(u)dB_u$ où l'on explicitera la fonction g . Calculer $E(Y_t|\mathcal{F}_s)$ et $\text{Var}(Y_t|\mathcal{F}_s)$.
5. Calculer $E(X_t|\mathcal{F}_s)$ et $\text{Var}(X_t|\mathcal{F}_s)$.

Exercice 4.1.3 Soit

$$d\Psi_t = (1 - r\Psi_t)dt + \sigma\Psi_t dW_t$$

Soit u une solution de

$$\frac{\sigma^2}{2}x^2 u''(x) + (1 - rx)u'(x) - \lambda u(x) = 0$$

On définit x^* comme solution de $x^*u'(x^*) = u(x^*)$ et $v(x) = \frac{x^*}{u(x^*)}u(x)$. On admettra que $v''(x) \geq 0$. Soit enfin V définie par

$$\begin{cases} V(x) &= v(x), & 0 \leq x \leq x^* \\ &= x, & x > x^* \end{cases}$$

Montrer que $1 - (r + \lambda)x^* \leq 0$.

Ecrire la formule d'Itô pour $e^{-\lambda t}V(\Psi_t)$. Il apparaît un terme $LV(x) - \lambda V(x)$ avec

$$LV(x) = (1 - rx)V'(x) + \frac{\sigma^2}{2}x^2V''(x)$$

Montrer que sur $x > x^*$ on a $LV(x) - \lambda V(x) \leq 0$ et que sur $x \leq x^*$, on a $LV(x) - V(x) = 0$

En déduire que

$$V(\Psi_0) \geq \tilde{E}(e^{-\lambda T}V(\Psi_T))$$

(en admettant que l'intégrale stochastique est une martingale).

Exercice 4.1.4 Préliminaire. Soit a, α, b, β quatre constantes réelles. Soit $x \in \mathbb{R}$.

On considère l'équation différentielle stochastique

$$\begin{aligned} dX_t &= (a + \alpha X_t) dt + (b + \beta X_t) dB_t \\ X_0 &= x \end{aligned} \tag{4.1}$$

1. Montrer que (4.1) admet une solution unique.
2. On note $m(t) = E(X_t)$ et $M(t) = E(X_t^2)$.

- (a) Montrer que $m(t)$ est l'unique solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{aligned} y' - \alpha y &= a \\ y(0) &= x \end{aligned} \tag{4.2}$$

- (b) Ecrire la formule d'Itô pour X_t^2 où X_t est solution de (4.1).
- (c) En déduire que $M(t)$ est l'unique solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{aligned} y' - (2\alpha + \beta^2)y &= 2(a + b\beta)m + b^2 \\ y(0) &= x^2 \end{aligned} \tag{4.3}$$

où m est la solution de (4.2). (On admettra que l'intégrale stochastique qui intervient est une martingale)

- (d) Résoudre (4.2) puis (4.3).

Exercice 4.1.5 Cas particulier 1.

1. Soit $(Y_t)_{t \geq 0}$ l'unique solution de l'équation (4.1) quand $a = b = 0$ vérifiant $Y_0 = 1$.

Montrer que

$$Y_t = \exp \left\{ \left(\alpha - \frac{1}{2} \beta^2 \right) t + \beta B_t \right\}.$$

2. Montrer que si $\alpha \geq 0$, Y est une sous-martingale par rapport à la filtration (\mathcal{F}_t) .

À quelle condition sur α , Y est-elle une martingale?

3. Soit $(Z_t)_{t \geq 0}$ le processus défini par

$$Z_t = x + (a - b\beta) \int_0^t Y_s^{-1} ds + b \int_0^t Y_s^{-1} dB_s.$$

Montrer que $(Z_t)_{t \geq 0}$ est un processus d'Itô. Calculer $\langle Y, Z \rangle_t$.

En déduire que la solution X_t de (4.1) peut s'écrire $X_t = Y_t Z_t$.

Exercice 4.1.6 Cas particulier 2. On se place dans le cas $a = \beta = 0$

$$\begin{aligned} dX_t &= \alpha X_t dt + b dB_t \\ X_0 &= x. \end{aligned} \tag{4.4}$$

1. Montrer que l'unique solution de (4.4) s'écrit

$$X_t = e^{\alpha t} \left(X_0 + b \int_0^t e^{-\alpha s} dB_s \right).$$

(On pourra utiliser l'exercice précédent ou poser $Y_t = e^{-\alpha t} X_t$ et résoudre l'équation vérifiée par Y .)

2. Montrer que X est un processus gaussien, calculer son espérance et sa variance.

3. Justifier que $\int_0^t X_s ds$ est un processus gaussien. Calculer $E \left(\exp \left[\int_0^t X_s ds \right] \right)$.

4. Calculer $E(X_t | \mathcal{F}_s)$ et $\text{Var}(X_t | \mathcal{F}_s)$.

5. Soit X_t solution de (4.4), et ϕ une fonction de classe C^2 . Ecrire la formule d'Itô pour $Z_t = \phi(X_t)$.

En déduire que si $\phi(x) = \int_0^x \exp(-\alpha \frac{y^2}{b^2}) dy$, alors

$$Z_t = b \int_0^t \exp(-\alpha \frac{B_s^2}{b^2}) dB_s$$

Z_t est-elle une martingale de carré intégrable?

6. Soit λ fixé. Calculer

$$\Phi(t, y) = E(e^{\lambda X_t^2}).$$

Soit t fixé. Etudier la martingale $E(e^{\lambda X_t^2} | \mathcal{F}_s), s \leq t$.

Montrer que Φ est solution d'une équation aux dérivées partielles. Soit $\Psi(t, x) = \ln \Phi(t, x)$. Montrer que

$$\Psi(t, x) = x^2 a(t) + b(t), \text{ avec } a'(t) = -a(t)(2\alpha + b^2 a(t)), \quad b'(t) = -b^2 a(t).$$

Exercice 4.1.7 Cas particulier 3. On se place dans le cas $a = \alpha = 0$

$$\begin{aligned} dX_t &= (b + \beta X_t) dB_t \\ X_0 &= x \end{aligned} \tag{4.5}$$

où $x \neq -\frac{b}{\beta}$. Soit h la fonction définie par

$$h(y) = \frac{1}{\beta} \ln \left| \frac{b + \beta y}{b + \beta x} \right|$$

pour $y \neq -\frac{b}{\beta}$

1. On pose $Y_t = h(X_t)$. Quelle est l'équation vérifiée par Y_t ?
2. En déduire que la solution de (4.5) s'écrit

$$X_t = \left(x + \frac{b}{\beta}\right) \exp\left(-\frac{\beta^2}{2}t + \beta B_t\right) - \frac{b}{\beta}$$

Exercice 4.1.8 Cas particulier 4. On se place dans le cas $a = 1, b = 0$. On pose $Y_t = e^{-\alpha t} X_t$. Quelle est l'équation différentielle vérifiée par Y ? Calculer $E(X_t)$ et $\text{Var}(X_t)$.

Exercice 4.1.9 Soit f, F, g, G des fonctions continues bornées. On note X la solution de

$$dX_t = [f(t) + F(t)X_t]dt + [g(t) + G(t)X_t]dW_t, \quad X_0 = x$$

et Y la solution de

$$dY_t = F(t)Y_t dt + G(t)Y_t dW_t, \quad Y_0 = 1$$

1. Expliciter Y .
2. Soit Z défini par

$$Z_t = x + \int_0^t Y_s^{-1} [f(s) - G(s)g(s)] ds + \int_0^t Y_s^{-1} g(s) dW_s.$$

Montrer que $X = YZ$.

3. Soit $m(t) = E(X_t)$ et $M_t = E(X_t^2)$. Montrer que m est l'unique solution de $y'(t) - F(t)y(t) = f(t)$, $y(0) = x$. En déduire

$$m(t) = \exp(\tilde{F}(t)) \left[x + \int_0^t \exp(-\tilde{F}(s)) f(s) ds \right]$$

où $\tilde{F}(t) = \int_0^t F(s) ds$. Montrer que M est l'unique solution de

$$Y'(t) - [2F(t) + G^2(t)]y(t) = 2[f(t) + g(t)G(t)]m(t) + g^2(t), \quad y(0) = x^2$$

Exercice 4.1.10 Calculer espérance et variance de X_t avec

$$dX_t = a(b - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t$$

Exercice 4.1.11 Soit $0 < s < T$ et $m \in \mathbb{R}$. Vérifier que la solution de

$$dX_t = \frac{(s - T)X_t + mT}{(s - T)t + T^2}dt + dB_t$$

est

$$X_t = \frac{m}{T}t + [(s - T)t + T^2] \int_0^t \frac{dB_u}{(s - T)u + T^2}$$

Exercice 4.1.12 Soit π un processus adapté (de carré intégrable), σ , θ et r des processus adaptés (bornés), c un processus positif, adapté, borné et X la solution de

$$\begin{aligned} dX_t^{x,\pi,c} &= r_t X_t^{x,\pi,c} dt - c_t dt + \pi_t^T \sigma_t [dW_t + \theta_t dt] \\ X_t^{x,\pi,c}(0) &= x \end{aligned} \quad (4.6)$$

On note H le deflateur, soit $H_t = \exp\left(\int_0^t r_s ds + \int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds\right) = L_t \int_0^t r_s ds$. Montrer que les processus $H_t X_t + \int_0^t H_s c_s ds$, $t \geq 0$ et $L_t(X_t R_t + \int_0^t c R_s ds)$ sont des martingales. Vérifier que leur différence est une martingale.

Exercice 4.1.13 Calculer $E(\exp(\lambda X_T))$ pour

$$\begin{aligned} dX_t &= (\mu - \alpha X_t - \gamma V_t)dt + \sqrt{V_t}dW_{1,t} \\ dV_t &= k(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}dW_{2,t} \end{aligned}$$

Exercice 4.1.14 On considère l'équation

$$dX_t = \mathbb{1}_{X_t \geq 0} dW_t, \quad X_0 = x. \quad (4.7)$$

On suppose qu'il existe une solution.

- Vérifier que, pour $x = 0$, la solution de (4.7) n'est pas identiquement nulle.

2. Vérifier que, pour $x \geq 0$, la solution est à valeurs positives. On pourra montrer, en utilisant la formule d'Itô, que si f est une fonction régulière, nulle sur \mathbb{R}^+ , alors $f(X_t)$ est nulle.
3. Montrer que la solution issue de 0 est d'espérance nulle à tout instant t .
4. Que peut on en conclure?

Exercice 4.1.15 Soit

$$dS_t = \mu(S_t)dt + \sigma(S_t)dW_t$$

où μ et σ^2 (le carré de σ) sont des fonctions affines : $\mu(x) = \mu_0 + \mu_1 x$; $\sigma^2(x) = \sigma_0 + \sigma_1 x$. On souhaite montrer que pour toute fonction affine $\psi(x) = \psi_0 + \psi_1 x$, pour tout θ , il existe deux fonctions α et β telles que,

$$E \left(e^{\theta S_T} \exp \left(- \int_t^T \psi(S_s) ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right) = e^{\alpha(t) + \beta(t) S_t}.$$

1. Montrer qu'il suffit d'établir l'existence de deux fonctions α et β telles que le processus

$$e^{\alpha(t) + \beta(t) S_t} \exp \left(- \int_0^t \psi(S_s) ds \right)$$

est une martingale avec $\alpha(T) = 0, \beta(T) = \theta$.

2. Montrer que la détermination de α et β conduit à la résolution d'une équation de Ricatti (type d'équation différentielle non linéaire) et d'une équation différentielle linéaire. On ne demande pas la résolution de ces équations.
3. Généraliser le résultat au cas où $dS_t = \mu(S_t)dt + \sigma(S_t)dW_t + dX_t$ où $(X_t, t \geq 0)$ est un processus de Poisson.

Exercice 4.1.16 Soit $0 < s < T$ et $m \in \mathbb{R}$. Vérifier que la solution de

$$dX_t = \frac{(s-T)X_t + mT}{(s-T)t + T^2} dt + dW_t, X_0 = 0$$

est

$$X_t = \frac{m}{T}t + [(s-T)t + T^2] \int_0^t \frac{dW_u}{(s-T)u + T^2}$$

4.2 Finance

Exercice 4.2.1 Options Asiatiques. Soit S_t solution de

$$dS_t = S_t (r dt + \sigma dB_t)$$

les paramètres r et σ étant constants.

1. Soit K une constante. Montrer que le processus $M_t = E \left(\left(\frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K \right)^+ | \mathcal{F}_t \right)$ est une martingale.
2. Montrer que, si l'on pose $\zeta_t = S_t^{-1} (K - \frac{1}{T} \int_0^t S_u du)$, on a

$$M_t = S_t E \left(\left[\frac{1}{T} \int_t^T \frac{S_u}{S_t} du - \zeta_t \right]^+ | \mathcal{F}_t \right).$$

3. Soit $\Phi(t, x) = E \left(\left[\frac{1}{T} \int_t^T \frac{S_u}{S_t} du - x \right]^+ \right)$. Montrer que $\Phi(t, x) = E \left(\left[\frac{1}{T} \int_t^T \frac{S_u}{S_t} du - x \right]^+ | \mathcal{F}_t \right)$ et que $M_t = S_t \Phi(t, \zeta_t)$.
4. Ecrire la formule d'Itô pour M . En déduire une équation aux dérivées partielles vérifiée par Φ .

Exercice 4.2.2 Black et Scholes, volatilité déterministe. Soit σ une fonction déterministe continue et r une constante et $(S_t, t \geq 0)$ la solution de

$$dS_t = S_t (r dt + \sigma(t) dB_t), \quad S_0 = x$$

1. Montrer que

$$S_t = S_0 \exp \left(rt + \int_0^t \sigma(s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(s) ds \right)$$

2. Montrer que $\int_0^t \sigma(s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(s) ds$ est une variable gaussienne dont on calculera l'espérance et la variance.
3. On rappelle que dans le cas σ constant, le prix d'un call est donné par

$$C(0, x) = x \mathcal{N}(d_1) - K e^{-rT} \mathcal{N}(d_2)$$

avec

$$d_1 = \frac{1}{\sigma \sqrt{T}} \left(\ln \left(\frac{x}{K} \right) + T \left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \right), \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

En déduire (sans faire de calculs) que, dans le cas de volatilité déterministe, la formule de Black et Scholes s'écrit

$$E((S_T - K)^+) = x \mathcal{N}(D_1) - K e^{-rT} \mathcal{N}(D_2)$$

Exprimer D_1 et D_2 .

Exercice 4.2.3 La formule de Dupire. Soit

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma(t, S_t)dW_t)$$

où σ est une fonction de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ dans \mathbb{R} et $f(t, x)$ la densité de S_t , soit $f(t, x) = P(S_t \in dx)$. ON admettra que

$$\partial_t f - \frac{1}{2} \partial_{xx} [x^2 \sigma^2(t, x) f(t, x)] + \partial_x [rxf] = 0$$

On note $C(K, T)$ le prix en zéro d'un call Européen de strike K et de maturité T . On note $\partial_1 C, \partial_2 C, \partial_{11} C$ les dérivées partielles de C par rapport à la première variable, seconde variable, dérivée seconde par rapport à la première variable.

1. Montrer que $\partial_{11} C(K, T) = e^{-rT} f(T, K)$.
2. Montrer que

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [x^2 \sigma^2(t, x) f(t, x)] = e^{rt} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (rx \frac{\partial}{\partial x} C) + e^{rt} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial C}{\partial t}$$

3. En déduire

$$\frac{1}{2} x^2 \sigma^2(t, x) \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(t, x) = rx \frac{\partial C}{\partial x}(x, t) + \frac{\partial C}{\partial t}(t, x)$$

4.3 Equations différentielles

Exercice 4.3.1 Soit α une constante et

$$dX_t = -\alpha^2 X_t^2 (1 - X_t) dt + \alpha X_t (1 - X_t) dW_t \quad (4.8)$$

la condition initiale étant $X_0 = x$ avec $x \in]0, 1[$. On admet que X prend ses valeurs dans l'intervalle $]0, 1[$. On pose $Y_t = \frac{X_t}{1 - X_t}$.

1. Quelle est l'équation différentielle stochastique vérifiée par Y ?
2. En déduire que $X_t = \frac{x \exp(\alpha W_t - \alpha^2 t/2)}{x \exp(\alpha W_t - \alpha^2 t/2) + 1 - x}$.

Exercice 4.3.2 Produit d'exponentielle. Soit W un MB et h un processus adapté borné. On note $\mathcal{E}(hW)_t \stackrel{\text{def}}{=} L_t$ l'unique solution de $dL_t = L_t h_t dW_t$, $L_0 = 1$. Etablir une formule du type $\mathcal{E}(h_1 W_1 + h_2 W_2)_t = X_t \mathcal{E}(h_1 W_1)_t \mathcal{E}(h_2 W_2)_t$ où X est à déterminer.

Exercice 4.3.3 Soit W un mouvement Brownien issu de $a > 0$ et $T_0 = \inf\{t : W_t = 0\}$. Pour $t < T_0$, on définit $X_t = \mu(W_t)^\alpha$. Montrer que, pour $t < T_0$,

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dW_t$$

où on explicitera b et σ . En déduire la forme de la solution de $dY_t = Y_t^n dW_t + \frac{1}{2}nY_t^{2n-1}dt$, $Y_0 = y \geq 0$ avant le premier temps d'atteinte de 0. (On admettra l'unicité de la solution).

Exercice 4.3.4 Ponts

1. Soit N une gaussienne réduite centrée indépendante de B . Vérifier que la solution de $dX_t = dB_t + \frac{N - X_t}{1-t}dt$ est $X_t = tN + (1-t) \int_0^t \frac{1}{1-s}dB_s$.
En déduire que X est un processus gaussien, dont on calculera l'espérance et la covariance.
2. Soit W un MB indépendant de B . Vérifier que la solution de $dX_t = dB_t + \frac{W_t - X_t}{1-t}dt$ est $X_t = (1-t) \int_0^t \frac{W_s}{(1-s)^2}ds + (1-t) \int_0^t \frac{1}{1-s}dB_s$.
En déduire que X est un processus gaussien, dont on calculera l'espérance et la covariance.

Chapter 5

Exemples

Dans tout ce chapitre, B (ou W) est un mouvement Brownien dont la filtration est notée (\mathcal{F}_t) .

5.1 Processus de Bessel

Exercice 5.1.1 Soit B_1 et B_2 deux mouvements Browniens indépendants et

$$Z_t = B_1^2(t) + B_2^2(t).$$

1. Ecrire l'EDS vérifiée par Z_t .
2. On pose $Y_t = \sqrt{Z_t}$. Ecrire l'EDS vérifiée par Y_t .
3. Ecrire l'EDS vérifiée par $1/Y_t$.

Exercice 5.1.2 Formule d'Itô On considère les processus de la forme

$$dr_t = \mu dt + 2\sqrt{r_t}dB_t \quad (5.1)$$

On admet que $r_t \geq 0$ presque partout (par rapport à t et à ω .)

1. Soit $f(t, x)$ une fonction de $C_b^{1,2}$. Quelle condition doit vérifier la fonction f pour que $f(t, r_t)$ soit une martingale ?
2. Soit $Z_t = r_t^2$ et $\rho_t = \sqrt{r_t}$. Ecrire les EDS vérifiées par Z_t et par ρ_t .
3. Soit $dr_t^1 = \mu_1 dt + 2\sqrt{r_t}dB_t^1$ et $dr_t^2 = \mu_2 dt + 2\sqrt{r_t}dB_t^2$ deux processus, avec B^1 et B^2 deux browniens indépendants. On admettra que r^1 et r^2 sont indépendants. On note R le processus défini par $R_t = r_t^1 + r_t^2$. Montrer que R s'écrit sous la forme (5.1).

Exercice 5.1.3 Processus de Bessel de dimension 3. Soit R le processus solution de

$$dR_t = \frac{1}{R_t} dt + dW_t, \quad R_0 = 1.$$

1. Montrer que $Z_t = \frac{1}{R_t}$ est une martingale locale.
2. Montrer que $(U_t = \exp(-\frac{\lambda^2 t}{2}) \frac{\sinh \lambda R_t}{\lambda R_t}, t \geq 0)$ est une martingale locale. On admettra que c'est une martingale.
3. En déduire la valeur de $E(\exp(-\frac{\lambda^2 T_m}{2}))$ où $T_m = \inf\{t : R_t = m\}$, avec $m > 0$.
4. Soit f une fonction continue bornée et a un nombre réel. Quelles conditions doit vérifier la fonction v pour que

$$v(R_t) \exp[-at - \int_0^t f(R_s) ds]$$

soit une martingale?

5. Supposons que v est explicitée. Comment calculerez vous

$$E(\exp[-aT_m - \int_0^{T_m} f(R_s) ds])?$$

Exercice 5.1.4 Processus de Bessel de dimension 2. Soit $dR_t = dW_t + \frac{1}{2R_t} dt$.

1. Montrer que $Z_t = \ln R_t$ est une intégrale stochastique par rapport à W .
2. Soit ν un nombre réel positif. Montrer que $L_t = [R_t]^\nu \exp(-\frac{\nu^2}{2} \int_0^t \frac{ds}{R_s^2})$ est une martingale locale.

Exercice 5.1.5 Processus de Bessel de dimension δ . Soit $dR_t = dB_t + \frac{\delta-1}{2R_t} dt$.

1. Pour quelles fonctions s le processus $s(R_t)$ est-il une martingale locale?
2. Quelle est la dynamique de $Y_t = R_t^2$?
3. Montrer que $Z_t \stackrel{\text{def}}{=} \exp(-\frac{\mu}{2}(Y_t - \delta t) - \frac{\mu^2}{2} \int_0^t Y_u du)$ est une martingale.
4. Soit $dQ = Z dP$. Quelle est la dynamique de Y sous Q ?

Exercice 5.1.6 Minimum d'un Bessel

Quelle est la loi de $\inf_{s \leq t} X_s$ lorsque X est un processus de Bessel?

5.2 Processus de Bessel carré

Exercice 5.2.1 Soit α, σ deux constantes et $dX(t) = -\frac{1}{2}\alpha X(t)dt + \frac{1}{2}\sigma dW(t)$. Soit $Y_t = X_t e^{\alpha t/2}$. Ecrire dY_t .

1. En déduire la forme de la solution $X(t)$.
2. On suppose que (W_1, W_2, \dots, W_n) sont des Browniens indépendants et on note X_i la solution de $dX_i(t) = -\frac{1}{2}\alpha X_i(t)dt + \frac{1}{2}\sigma dW_i(t)$. Soit r le processus défini par $r(t) = X_1^2(t) + \dots + X_n^2(t)$.
3. Montrer que le processus B défini par $B(0) = 0$ et $dB(t) = \sum_{i=1}^n \frac{X_i(t)dW_i(t)}{\sqrt{r_t}}$ est un mouvement Brownien.
4. Montrer que $dr_t = (a - br_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dB_t$

Exercice 5.2.2 Processus de Bessel carré. Soit $x \geq 0$ et R un processus tel que

$$dR_t = \mu dt + 2\sqrt{R_t}dW_t, \quad R_0 = x \quad (5.2)$$

On admettra que R_t existe et que $R_t \geq 0$.

1. Soit $Z_t = (W_t)^2$. Montrer que Z vérifie une équation de la forme (5.2). Quelle est la valeur de μ correspondante?
2. Soit W^1 un mouvement Brownien indépendant de W et $Z_t^1 = (W_t)^2 + (W_t^1)^2$. Montrer que Z^1 vérifie une équation de la forme (5.2). Quelle est la valeur de μ correspondante? Généralisation à la somme des carrés de n Browniens indépendants.
3. Soit $\rho_t = \sqrt{R_t}$. Montrer que $d\rho_t = b(t, \rho_t, \mu)dt + dW_t$. On explicitera b .
4. Soit W^1 un mouvement Brownien indépendant de W . On note $R^{(\mu)}(x)$ le processus défini en (5.2) et, pour $y \geq 0$, le processus $R^{(\nu)}(y)$ solution de

$$dR_t^{(\nu)} = \nu dt + 2\sqrt{R_t^{(\nu)}}dW_t^1, \quad R_0^{(\nu)} = y \quad (5.3)$$

On notera simplement $R_t^{(\mu)}$ et $R_t^{(\nu)}$ ces deux processus. On supposera que les processus $R_t^{(\mu)}$ et $R_t^{(\nu)}$ ne s'annulent pas et on admettra qu'ils sont indépendants.

- (a) Soit $X_t = R_t^{(\mu)} + R_t^{(\nu)}$. Calculer dX_t .

- (b) Montrer que le processus Z défini ci-dessous est un mouvement Brownien

$$dZ_t = \frac{\sqrt{R_t^{(\mu)}}dW_t + \sqrt{R_t^{(\nu)}}dW_t^1}{\sqrt{R_t^{(\mu)} + R_t^{(\nu)}}}$$

- (c) En déduire que $X_t = R_t^{(\mu)} + R_t^{(\nu)}$ vérifie

$$dX_t = \beta dt + 2\sqrt{X_t}dZ_t$$

On explicitera β en fonction de μ et ν .

5. (a) On suppose que l'on connaît $E(R_t^{(\mu)}) = m(\mu)$ et $\text{Var}(R_t^{(\mu)}) = v(\mu)$ pour tout μ . Exprimer $E(X_t)$ et $\text{Var}(X_t)$ en fonction de m et v .
 (b) On admet que, si W est un brownien issu de \sqrt{x} (voir exo 2.1.11)

$$E(\exp -\lambda(W_t)^2) = \frac{1}{\sqrt{1+2\lambda t}} \exp\left(-\frac{\lambda x}{1+2\lambda t}\right) \quad (5.4)$$

Comment calculer $E(\exp -\lambda[\rho_t^{(1)}]^2)$, $E(\exp -\lambda R_t^{(1)}(x))$ et $E(\exp -\lambda R_t^{(2)}(x))$?

On utilisera la question (d) et l'indépendance de $R_t^{(\mu)}$ et $R_t^{(\nu)}$.

6. Montrer que

$$E(\exp -\lambda R_t^{(\mu)}(x)) = E(\exp -\lambda R_t^{(1)}(x)) \left(E(\exp -\lambda R_t^{(1)}(0))\right)^{\mu-1}$$

Calculer $E(\exp -\lambda R_t^{(\mu)}(x))$.

7. Comment démontrer l'indépendance de $R_t^{(\mu)}$ et $R_t^{(\nu)}$?
 Comment démontrer (5.4) ?

Exercice 5.2.3 Processus de Bessel carré. Soit X un $BESQ^{(\delta)}(x)$.

1. Montrer que $(\frac{1}{c}X_{ct}, t \geq 0)$ est un $BESQ^{(\delta)}(x/c)$.
 2. Montrer que, si F est un processus adapté

$$Z_t = \exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t F_s d(X_s - \delta s) - \frac{1}{2}\int_0^t F_s^2 X_s ds\right\}$$

est une martingale locale.

3. Montrer que si F est déterministe, dérivable

$$Z_t = \exp\left\{\frac{1}{2}F(t)X_t - F(0)X_0 - \delta\int_0^t F(s)ds - \frac{1}{2}\int_0^t F_s^2 X_s ds + X_s dF(s)\right\}$$

4. Soit Φ solution de

$$\Phi'' = b^2 \Phi, \Phi(0) = 1, \Phi'(1) = 0$$

Montrer que $Z_t = \exp\{\frac{1}{2}F(t)X_t - F(0)X_0 - \delta \ln \Phi(t) - \frac{b^2}{2} \int_0^t X_s ds\}$. On admettra que Z est une martingale.

5. En déduire que

$$Q_x^{(\delta)}(\exp - \frac{1}{2} \int_0^1 X_s ds) = (\cosh b)^{-\delta/2} \exp(-xb \tanh b)$$

Exercice 5.2.4 En utilisant que

$$\sup_{1 \leq t \leq 1} |W_t| \stackrel{loi}{=} \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{ds}{R_s^{(2)}}$$

où $R_s^{(2)} = B_s + \frac{1}{2} \int_0^s \frac{du}{R_u^{(2)}}$ montrer que $E \sup_{1 \leq t \leq 1} (|W_t|) = \sqrt{\pi/2}$.

Exercice 5.2.5 Application du théorème de Lamperti The following absolute continuity relation between two *BES* processes (with $\nu \geq 0$)

$$P_x^{(\nu)} = \left(\frac{R_t}{x}\right)^\nu \exp - \left(\frac{\nu^2}{2} \int_0^t \frac{ds}{R_s^2}\right) P_x^{(0)}$$

where $P^{(\nu)}$ is the law of a *BES* with index ν . On utilisera

$$W^{(\nu)}|_{\mathcal{F}_t} = \exp(\nu W_t - \frac{\nu^2}{2}t)W|_{\mathcal{F}_t}$$

et $(R_t; t \geq 0) \stackrel{loi}{=} x \exp(B_{C_t} + \nu C_t)$

Exercice 5.2.6 Soit $dX_t = 2\sqrt{X_t}dW_t + \delta(t)dt$ où δ est une fonction (continue bornée). On veut calculer

$$A = E_{t,x} \left(\exp \left(-\frac{1}{2} \int_t^T X_u m(u) du \right) f(X_T) \right)$$

1. On se place dans le cas $f = 1$, et on note φ la solution de

$$\partial_{uu}\varphi(u, T) = m(u)\varphi(u, T); \partial_u\varphi(T, T) = 0$$

Montrer que

$$E_{t,x} \left(\exp \left(-\frac{1}{2} \int_t^T X_u m(u) du \right) \right) = \exp \left(\frac{\partial_u \varphi(t, T)}{2\varphi(t, T)} x \right) \exp \left(\frac{1}{2} \int_t^T \frac{\partial_u \varphi(s, T)}{\varphi(s, T)} \delta(u) du \right)$$

2. Montrer que le calcul de A se ramène au calcul de la solution d'une EDP.

5.3 Autres processus.

Exercice 5.3.1 Processus d'Ingersoll. Soit $a < z < b$ et Z le processus solution de

$$dZ_t = (Z_t - a)(b - Z_t)\sigma dW_t, \quad Z_0 = z$$

On admet que pour tout t , le processus Z vérifie $a < Z_t < b$.

1. Calculer $d(Z_t^{-1})$.
2. soit $\zeta_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Z_t - a}{b - Z_t}$. Calculer $d\zeta_t$ puis $d(\ln \zeta_t)$.
3. Soit $X_t = (b - Z_t)g(t, \zeta_t)$. Donner une condition sur g pour que X soit une martingale. Sauriez vous résoudre l'équation obtenue ?
4. Soit Y solution de

$$dY_t = (Y_t - a)(b - Y_t)^2 dt + (Y_t - a)(b - Y_t)\sigma dW_t$$

Montrer qu'il existe une probabilité Q que l'on déterminera telle que, sous Q Y ait même loi que Z sous P .

Exercice 5.3.2 Un processus stationnaire. Soit X vérifiant $dX_t = -aX_t dt + \sigma dW_t$, X_0 v.a. donnée.

1. Explicitez X_t .
2. Montrer que si X_0 est une v.a. gaussienne indépendante de W , le processus X est un processus gaussien.
3. On suppose que X_0 est gaussienne, indépendante de W . Déterminer la loi de X_0 pour que la loi de la v.a. X_t ne dépende pas de t .

Exercice 5.3.3 Soit X solution de (on admet que X existe)

$$dX_t = X_t(1 - X_t)((\mu - X_t)dt + dW_t), \quad X_0 = x$$

Soit $h_0(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{2\theta-1}$ et $h_1(x) = 2\frac{\ln(1-x)-\ln x}{(2\mu-1)}$ et $\tau = \inf\{t \geq 0, S_t \notin [a, b]\}$.

1. Montrer que $h_0(X_t)$ et $h_1(X_t) - t$ sont des martingales.
2. Montrer que $P(X_\tau = a) = \frac{h_0(x)-h_0(b)}{h_0(a)-h_0(b)}$ et calculer $E(\tau)$.

5.4 Des calculs

Exercice 5.4.1 Un calcul de probabilité. On suppose connue

$$\Phi(a, T) = P(W_t \leq at, \forall t \leq T)$$

Soit W_1 et W_2 deux MB indépendants et

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t(rdt + \sigma_1 dW_1(t)), \quad X_0 = 1 \\ dY_t &= Y_t(rdt + \sigma_2 dW_2(t)), \quad Y_0 = 1 \end{aligned}$$

Calculer, en fonction de Φ la quantité $P(X_t \leq Y_t, \forall t \leq T)$.

Exercice 5.4.2 Un calcul de loi Let $dX_t = \mu(t)dt + \sigma(t)dW_t$, $X_0 = 0$ where μ and σ are piece wise constant over known time.

Let us restrict our attention to the case

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \mu \forall t \in [0, 1[, & \mu(t) &= \mu_1 \forall t \in [1, \infty[, \\ \sigma(t) &= \sigma \forall t \in [0, 1[, & \sigma(t) &= \sigma_1 \forall t \in [1, 2[/. \end{aligned}$$

Describe the distribution of $Y_t = \max_{0 \leq s \leq t} X_s$.

Exercice 5.4.3 Montrer que la solution de

$$dC_t = C_t \left[r_t dt + m \left(\frac{dS_t}{S_t} - r_t dt \right) \right]$$

avec $dS_t = S_t(\mu_t dt + \sigma_t dW_t)$ s'écrit sous la forme

$$C_t = C_0 \left(\frac{S_t}{S_0} \exp \left[a \int_0^t r_s ds + b \int_0^t \sigma_s^2 ds \right] \right)^m$$

où on explicitera a et b .

Exercice 5.4.4 Changement de temps Soit $dX_t = -\lambda X_t dt + \sigma dW_t$ et $\tau = \inf\{t : |X_t| > g(t)\}$ où g est une fonction déterministe. Exprimer $P(\tau > t)$ en fonction de $\Psi(u) = P(\tau^* > u)$ avec $\tau^* = \inf\{t : |W_t| > h(t)\}$.

Chapter 6

Girsanov

Dans tous ces exercices, B (ou W) désigne un P -mouvement Brownien issu de 0, \mathcal{F}_t sa filtration canonique.

6.1 Résultats élémentaires.

Exercice 6.1.1 Changement de probabilité Soit $(\theta_t, t \geq 0)$ un processus adapté continu borné et $L_t = \exp[\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds]$. Soit Q la probabilité définie sur \mathcal{F}_T par $dQ = L_T dP$. Soit $(\phi_t, t \geq 0)$ un processus adapté continu borné et $M_t = \int_0^t \phi_s dB_s - \int_0^t \theta_s \phi_s ds$. Montrer que M_t est une Q -martingale. On pose $Z_t = M_t L_t$. Calculer dZ_t . Montrer que Z_t est une P -martingale locale. Pouvait-on prévoir ce résultat.

Exercice 6.1.2 Un calcul d'espérance. Soit θ un processus adapté borné et H le processus défini par $dH_t = -H_t \theta_t dW_t$, $H_0 = 1$. On note $dQ|_{\mathcal{F}_t} = H_t dP|_{\mathcal{F}_t}$. Montrer que $E_P(H_T \ln H_T) = E_Q(\frac{1}{2} \int_0^T \theta_s^2 ds)$. On pourra faire une démonstration à la main (quand θ est déterministe) ou utiliser le théorème de Girsanov.

Exercice 6.1.3 Calcul d'espérance. Soit p une fonction déterministe donnée. Pour quelles fonctions h et k le processus $\exp(h(t) + k(t)W_t^2 + \int_0^t p(s)W_s^2 ds)$ est-il une martingale. Applications :

1. Calculer $E[\exp(\lambda W_T^2 + \int_0^T p(s)W_s^2 ds)]$
2. Calculer $E[\exp(\lambda W_T^2 + \int_0^T p(s)W_s^2 ds)\Psi(A + BW_T)]$

Exercice 6.1.4 Itô+ Girsanov. Soit Γ le processus solution de $d\Gamma_t = \Gamma_t(\beta_t dt + \gamma_t dW_t)$, $\Gamma_0 = 1$ où β et γ sont des processus \mathbf{F} adaptés bornés.

1. Montrer que $\Gamma_t \exp\left(-\int_0^t \beta_s ds\right)$ est une martingale locale.
2. Trouver une probabilité Q telle que Γ_t soit une Q -martingale locale.
3. Calculer $d\Gamma^{-1}$. Trouver une probabilité R telle que Γ_t^{-1} soit une R -martingale locale.

Exercice 6.1.5 Longstaff's Model. Soit $r_t = Y_t^2$ avec $dY_t = dW_t - (\lambda Y_t + \frac{\alpha}{2})dt$.

1. Donner la dynamique de r .
2. Soit f et g deux fonctions déterministes (que l'on supposera continues bornées). Exprimer

$$E\left(\exp \int_0^t [f(s)W_s + g(s)]dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t [f^2(s)W_s^2 + 2W_s f(s)g(s)]ds\right)$$

en fonction de $\exp \frac{1}{2} \int_0^t g^2(s)ds$.

3. Montrer que le calcul de $E(\exp - \int_0^t r_s ds)$ se déduit du calcul de l'expression précédente avec des fonctions f et g vérifiant des conditions que l'on précisera.

Exercice 6.1.6 Loi conditionnelle. Soit $t > s$. Montrer que la densité

$$P(B_t + \nu t \in dy | B_s + \nu s = x)$$

ne dépend pas de ν .

Exercice 6.1.7 Loi du sup. On supposera que l'on connaît la loi du couple (B_t^*, B_t) où pour un processus X on note

$$X_t^* = \sup_{s \leq t} X_s.$$

Montrer comment calculer la loi de (L_t^*, L_t) pour $L_t = \exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t)$.

Exercice 6.1.8 Loi de quantiles

1. Soit F et G deux fonctionnelles définies sur $C([0, 1], \mathbb{R})$. Montrer que l'on a équivalence entre
 - (i) $\forall t, \forall \mu \in \mathbb{R}, F(X_s, s \leq t) \stackrel{loi}{=} G(X_s, s \leq t)$ le processus X étant un Brownien de drift μ
 - (ii) $\forall t, F(X_s, s \leq t) \stackrel{loi}{=} G(X_s, s \leq t)$ le processus X étant un Brownien.

2. Soit $A_t = \int_0^t ds \mathbb{1}_{X_s \geq 0}$ et $\theta_t = \sup\{s \leq t : \sup_{u \leq s} X_u = X_s\}$. Montrer que

$A_t \stackrel{loi}{=} \theta_t$, lorsque le processus X est un mouvement Brownien de drift μ équivaut à

$A_1 \stackrel{loi}{=} \theta_1$, lorsque le processus X est un mouvement Brownien

3. Soit X un mouvement Brownien. Montrer que si $E(f(X_1, A_1) \mathbb{1}_{X_1 > 0}) = E(f(X_1, \theta_1) \mathbb{1}_{X_1 > 0})$, alors $X_1, A_1 \stackrel{loi}{=} (X_1, \theta_1)$.

La preuve de la première assertion peut être trouvée dans Embrechts et al.

6.2 Crochet.

Exercice 6.2.1 Girsanov Soit M une P -martingale et $dQ = \exp(M_t - \frac{1}{2} \langle M \rangle_t) dP$. Montrer que si N est une P martingale, $N - \langle N, M \rangle$ est une Q martingale.

Exercice 6.2.2 h -processus. Soit X tel que $dX_t = \mu dt + \sigma dW_t$, $X_0 = x$ et h une fonction de classe C^1 telle que $h(X_t)$ est une martingale positive. On note Q la probabilité définie par $dQ|_{\mathcal{F}_t} = \frac{h(X_t)}{h(x)} dP|_{\mathcal{F}_t}$. Soit M une P -martingale.

Montrer que $M_t - \int_0^t \frac{h'(X_s)}{h(X_s)} d\langle M, X \rangle_s$ est une Q -martingale.

6.3 Processus.

Exercice 6.3.1 Processus de Bessel. Soit P la probabilité historique, θ et μ deux processus. On note P^θ la probabilité telle que le processus W^θ défini par $W_t^\theta \stackrel{def}{=} W_t - \int_0^t \theta(s) ds$ soit un mouvement Brownien et P^μ la probabilité telle que $W^\mu \stackrel{def}{=} W_t - \int_0^t \mu(s) ds$ soit un mouvement Brownien.

1. Quelles sont les densités $L^\theta = \frac{dP^\theta}{dP}$ et $L^\mu = \frac{dP^\mu}{dP}$?

2. Soit $L = \frac{L^\theta}{L^\mu}$. Expliciter L en fonction de W puis en fonction de W^μ . A quel changement de probabilité type Girsanov correspond L ?
3. Soit R le processus solution de

$$dR_t = \frac{\delta - 1}{R_t} dt + dW_t, R_0 = 1$$

- (a) Montrer que

$$\int_0^t \frac{dR_s}{R_s} = \ln R_t + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{R_s^2} ds$$

- (b) Soit θ un processus adapté borné et $L_t = \exp(\int_0^t \theta(s) dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \theta^2(s) ds)$. On notera Q la probabilité définie par $dQ = L_t dP$. Comment choisir θ pour que, sous Q

$$dR_t = \frac{1}{R_t} dt + d\tilde{W}_t$$

où \tilde{W} est un Q -Brownien.

- (c) Exprimer dans ce cas L_t en n'utilisant que le processus R
- (d) En déduire que

$$E(f(R_t)) = E\left((\rho_t)^\delta \exp\left[\alpha \int_0^t \frac{ds}{\rho_s^2}\right] f(\rho_t)\right)$$

où α est une constante dépendant de n et

$$d\rho_t = \frac{1}{\rho_t} dt + d\tilde{W}_t, \rho_0 = 1.$$

Exercice 6.3.2 Fonctionnelles exponentielles

1. Calculer $E(\int_0^t \exp(B_s) ds)$ et $E(\exp(\alpha B_t) \int_0^t \exp(\gamma B_s) ds)$.
2. Soit $A(t, \nu) = \int_0^t \exp(B_s + \nu s) ds$.
 - (a) Montrer en utilisant le théorème de Girsanov que le calcul de $E(A(t, \nu))$ se ramène au cas $\nu = 0$.
 - (b) Peut-on faire un calcul direct?

Exercice 6.3.3 Soit X le processus solution de

$$dX_t = -\lambda X_t dt + dB_t, X_0 = x.$$

1. On définit

$$L_t = \exp \left(\lambda \int_0^t X_s dB_s - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t X_s^2 ds \right)$$

- . Vérifier que L est une martingale locale. On admet pour la suite que c'est une martingale.
2. On note P^λ la mesure de probabilité définie sur \mathcal{F}_t par $dP^\lambda = L_t dP$. Quelle est la dynamique de X sous P^λ ?

3. Montrer que

$$L_t = \exp \left(\int_0^t \lambda X_s dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \lambda^2 X_s^2 ds \right)$$

4. Calculer

$$E_P \left(\exp \left(-\frac{b^2}{2} \int_0^t X_s^2 ds \right) \right).$$

- 5.

6. Montrer que le calcul de $E(\exp \int_0^t X_s^2 ds)$ se déduit de celui de $E(\exp(a \int_0^t B_s dB_s - b \int_0^t B_s^2 ds))$. On ne cherchera pas à effectuer ce dernier calcul.

Exercice 6.3.4 Processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

1. Soit U une variable gaussienne d'espérance m et de variance σ^2 . Calculer $E(\exp\{\lambda U^2 + \mu U\})$ pour $1 - 2\lambda\sigma^2 \geq 0$.
2. On définit sur \mathcal{F}_T la mesure P^b par

$$dP^b = \exp \left\{ -b \int_0^T B_s dB_s - \frac{b^2}{2} \int_0^T B_s^2 ds \right\} dP$$

- (a) Justifier que, sous P^b le processus $(W_t = B_t + b \int_0^t B_s ds, t \leq T)$ est un brownien.
- (b) En déduire que sous P^b , le processus $(B_t, t \geq 0)$ est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, et que B_t est une variable gaussienne dont on précisera, en s'appuyant sur le cours, l'espérance et la variance.
- (c) Montrer que, sous P , on a

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t).$$

La même égalité est-elle vraie sous P^b ?

(d) Montrer que, pour tout $t \leq T$,

$$E_P(\exp\{-\alpha B_t^2 - \frac{b^2}{2} \int_0^t B_s^2 ds\}) = E_b(\exp\{-\alpha B_t^2 + \frac{b}{2}(B_t^2 - t)\})$$

où E_b désigne l'espérance sous P^b .

Montrer que si \tilde{B} est un brownien issu de a , on a

$$E_P(\exp\{-\alpha \tilde{B}_t^2 - \frac{b^2}{2} \int_0^t \tilde{B}_s^2 ds\}) = E_b(\exp\{-\alpha \tilde{B}_t^2 + \frac{b}{2}(\tilde{B}_t^2 - a^2 - t)\})$$

(e) En déduire (il y a des calculs) que, pour tout t ,

$$E_P(\exp\{-\alpha B_t^2 - \frac{b^2}{2} \int_0^t B_s^2 ds\}) = (\cosh bt + 2\frac{\alpha}{b} \sinh bt)^{-\frac{1}{2}}$$

3. Montrer que si \tilde{B}_t est un Brownien issu de a

$$E_P(\exp\{-\alpha \tilde{B}_t^2 - \frac{b^2}{2} \int_0^t \tilde{B}_s^2 ds\}) = (\cosh bt + 2\frac{\alpha}{b} \sinh bt)^{-\frac{1}{2}} \exp[-\frac{xb}{2} \frac{1 + \frac{2\alpha}{b} \coth bt}{\coth bt + \frac{2\alpha}{b}}]$$

avec $x = a^2$.

Exercice 6.3.5 Soit S solution de

$$dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dB_t), S_0 = s,$$

les coefficients μ et σ étant constants.

1. Montrer que $S_t = S_0 \exp(\mu t + \sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t)$.

2. On pose $\theta = -\frac{\mu - r}{\sigma}$. Soit Q définie sur \mathcal{F}_t par $dQ = L_t dP$ avec $L_t = \exp(\theta B_t - \frac{1}{2}\theta^2 t)$. Montrer que $(W_t = B_t + \theta t, t \geq 0)$ est un Q -mouvement brownien.

3. Soit \tilde{P} définie sur \mathcal{F}_t par $d\tilde{P} = Z_t dQ$ avec $Z_t = \exp(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t)$. Montrer que

$$dS_t = S_t ((r + \sigma^2) dt + \sigma d\tilde{B}_t)$$

où \tilde{B} est un \tilde{P} -mouvement brownien.

4. Soit $P_t = P_0 e^{rt}$. Montrer que $\left(\frac{S_t}{P_t}, t \geq 0\right)$ est une Q -martingale.

Montrer que $\frac{P_t}{S_t}$ est une \tilde{P} -martingale.

5. Soit $F_t = e^{-\lambda t} \left(\int_0^t S_u du + sA \right)$ où A, λ sont des constantes
 Soit $\Psi_t = \frac{F_t e^{\lambda t}}{S_t}$. Ecrire l'équation différentielle stochastique vérifiée par Ψ_t en utilisant le Brownien \tilde{B} .

Exercice 6.3.6 Soit α, β et σ des fonctions (déterministes) bornées et $b(t) = \int_0^t \beta(s) ds$. On note r le processus solution de

$$dr_t = (\alpha(t) - \beta(t)r_t) dt + \sigma(t)dW_t$$

On suppose que σ ne s'annule pas.

1. Vérifier que

$$r_t = \exp(-b(t)) \left(r_0 + \int_0^t \exp(b(u)) \alpha(u) du + \int_0^t \exp(b(u)) \sigma(u) dW_u \right).$$

2. Calculer $E(r_t)$ et $\text{Cov}(r_t, r_s)$.

3. Soit Q_1 la probabilité définie sur \mathcal{F}_t par $dQ_1 = L_t dP$, avec

$$L_t = \exp\left(\int_0^t \theta(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t (\theta(s))^2 ds\right)$$

où $\theta(s) = -\frac{\alpha(s)}{\sigma(s)}$. On suppose θ bornée. On note $W_t^1 = W_t - \int_0^t \theta(s) ds$.

Montrer que $(\exp(b(t)) r_t, t \geq 0)$ est une Q_1 martingale.

4. Soit Q_2 la probabilité définie sur \mathcal{F}_t par $dQ_2 = Z_t dP$, avec

$$dZ_t = Z_t \frac{\beta(t)}{\sigma(t)} r_t dW_t^1, Z_0 = 1$$

Montrer que r est une Q_2 -martingale.

Exercice 6.3.7 Drift non observable Soit $B_t^Y = Yt + B_t$ où Y est une variable aléatoire de loi ν , indépendante de B . Soit F une fonctionnelle sur $C([0, t], \mathbb{R})$. Montrer que

$$E[F(B_s^Y, s \leq t)] = E[F(B_s; s \leq t)h(B_t, y)]$$

avec $h(x, t) = \int \nu(dy) \exp(yx - \frac{y^2}{2}t)$ En déduire que, sur l'espace canonique

$$X_t - \int_0^t ds \frac{h'_x}{h}(X_s, s)$$

est une martingale sous P^h avec $P^h|_{\mathcal{F}_t} = h(X_t, t)W|_{\mathcal{F}_t}$. Montrer que $B_t^Y = \tilde{B}_t^h + \int_0^t \int_0^s ds \frac{h'_x}{h}(B_s^Y, s)$ où \tilde{B}_t^h est un Brownien.

Soit Q définie par $dQ = e^{-YB_t - \frac{1}{2}Y^2t}dP$. Montrer que sous Q , B_t^Y est indépendant de Y .

Exercice 6.3.8 Soit B un MB et \mathbf{F} sa filtration naturelle. On note h une fonction.

1. Donner des conditions sur h pour que $dQ = h(B_T)dP$ définisse, sur \mathcal{F}_T une probabilité équivalente à P .
2. Calculer L_t telle que $dQ|_{\mathcal{F}_t} = L_t dP|_{\mathcal{F}_t}$
3. Montrer que $\forall X \in \mathcal{F}_T$, on a $E_Q(X|B_T) = E_P(X|B_T)$
4. Expliciter $Q(B_T \in dx)$.
5. Soit $A \in \mathcal{F}_T$, indépendante de B_T . Montrer que $Q(A) = P(A)$. Donner des exemples de tels A .
6. Calculer $Q(f(B_T)|\mathcal{F}_t)$.
7. Montrer que

$$L_t = 1 + \int_0^t dB_s \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{h'(y)e^{-(y-B_s)^2/(2(T-s))}}{\sqrt{2\pi(T-s)}}$$

8. Montrer que le processus W défini par

$$dW_t = dB_t - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dy h'(y)e^{-(y-B_t)^2/(2(T-t))}}{\int_{-\infty}^{\infty} dy h(y)e^{-(y-B_t)^2/(2(T-t))}} dt$$

est un Q mouvement Brownien.

9. (cette question ne dépend pas des précédentes) Soit $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(B_T)$. Montrer que le processus $M_t = B_t - \int_0^t \frac{B_T - B_s}{T-s} ds$ est un P - \mathcal{G}_t mouvement Brownien. Montrer que M_t est indépendante de B_T .
10. Montrer que M est un Q - \mathcal{G}_t mouvement Brownien.

Exercice 6.3.9 Soit $X_t = W_t + \int_0^t \frac{x - X_s}{1-s} ds$ et $M_t = \exp \left(- \int_0^t \frac{x - X_s}{1-s} dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{x - X_s}{1-s} \right)^2 ds \right)$.

Montrer que

$$M_t = \exp \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{(x - X_t)^2}{2(1-t)} + \frac{1}{2} \ln(1-t) \right)$$

VERIFIER CETTE FORMULE

Exercice 6.3.10 Soit $dQ|_{\mathcal{F}_t} = h(t, X_t)dP|_{\mathcal{F}_t}$. Sous quelles conditions sur h Q est-elle une probabilité sur \mathcal{F}_T ? Montrer que

$$B_t - \int_0^t \partial_x h(s, B_s) ds$$

est une Q -martingale?

Exercice 6.3.11 Soit $L_t = \exp\left(-\frac{1}{4}(e^{-2W_t} - 1) + \frac{1}{2} \int_0^t (e^{-2W_s} - \frac{1}{4}e^{-4W_s}) ds\right)$

1. Question préliminaire: Calculer l'intégrale $\int_0^t e^{-2W_s} dW_s$.
2. Montrer que L est une martingale. Quelle est son espérance?
3. On pose $dQ = L_t dP$. Quelle est la dynamique de W sous Q ?

6.4 Cas multidimensionnel

Exercice 6.4.1 Cas multidimensionnel. Soient $(B_1(t), t \geq 0)$ et $(B_2(t), t \geq 0)$ deux mouvements Browniens indépendants. Soit $(L_i(t), i = 1, 2, t \geq 0)$ les processus définis par

$$dL_i(t) = \theta_i(t)L_i(t)dB_i(t), \quad L_i(0) = 1$$

où $(\theta_i(t), i = 1, 2)$ sont des processus adaptés continus bornés.

1. Vérifier que

$$L_i(t) = \exp\left(\int_0^t \theta_i(s)dB_i(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_i^2(s) ds\right).$$

2. Soit $T \geq 0$ et Q_1 la probabilité définie sur \mathcal{F}_T par $dQ_1 = L_1(T)dP$.

Soit $(\phi_t, t \geq 0)$ un processus adapté continu et $M_t = \int_0^t \phi_s dB_1(s) - \int_0^t \theta_1(s)\phi_s ds$.

- (a) Montrer que $(M_t, 0 \leq t \leq T)$ est une Q_1 -martingale locale.
 - (b) On pose $Z_1(t) = M_t L_1(t)$. Calculer $dZ_1(t)$. Montrer que Z_1 est une P -martingale. Pouvait-on prévoir ce résultat ?
3. Soit $Z_t = L_1(t)L_2(t)$. Ecrire dZ_t . Montrer que Z est une P -martingale.
 4. Soit Q la probabilité définie sur \mathcal{F}_T par $dQ = Z_T dP$. Comment se transforment les browniens B_i ?

5. Soit $(S_i, i = 1, 2)$ deux processus solutions de

$$dS_i(t) = S_i(t)[b_i(t)dt + \sigma_i(t)dB_1(t) + \phi_i(t)dB_2(t)]$$

Montrer qu'il existe une probabilité Q équivalente à P telle que, sous Q

$$dS_i(t) = S_i(t)[r dt + \sigma_i(t)dW_1(t) + \phi_i(t)dW_2(t)]$$

où $(W_i, i = 1, 2)$ sont des Q -Browniens indépendants.

6.5 Temps d'arrêt.

Exercice 6.5.1 Temps d'arrêt. Soit τ un (\mathcal{F}_t) -temps d'arrêt. Soit Q telle que $dQ|_{\mathcal{F}_T} = L_T dP|_{\mathcal{F}_T}$ et $X \in \mathcal{F}_T$. Comparer $E_P(L_T \mathbb{1}_{\tau > T} X)$ et $E_Q(X \mathbb{1}_{\tau > T})$.

Exercice 6.5.2 Let W be a Brownian motion and $T = \inf\{t : e^{B_t - t/2} > a\}$, where $a > 1$. Prove that, $\forall \lambda \geq 1/2$,

$$E(\mathbb{1}_{T < \infty} \exp(\lambda B_T - \frac{\lambda^2}{2} T)) = 1$$

Exercice 6.5.3 Temps d'atteinte. Soit X un processus tel que

$$dX_t = \mu dt + \nu dW_t, \quad X_0 = 0$$

où μ et ν sont des constantes telles que $\nu > 0$. Soit r une constante.

1. Montrer qu'il existe θ tel que

$$M_t \stackrel{def}{=} \exp(-rt + \theta X_t)$$

soit une martingale.

2. Soit b un nombre positif et τ le temps d'arrêt défini par

$$\tau = \inf\{t \geq 0 \mid X_t = b\}$$

Calculer $E(\exp(-r\tau + \theta X_\tau))$. On admettra que la martingale M_t est uniformément intégrable et que le temps d'arrêt τ est fini. En déduire $E(\exp(-r\tau))$.

3. On suppose que les conditions de la première question sont satisfaites. Soit Q telle que $dQ = M_t dP$, sur \mathcal{F}_t . Comment se transforme W ?
4. Soit S le processus défini par

$$dS_t = S_t[r dt + \sigma dW_t], \quad S_0 = s$$

et $Y_t = \ln \frac{S_t}{s}$. Ecrire dY_t .

5. Soit B une constante telle que $s < B$. Soit T_B le temps d'arrêt

$$T_B = \inf\{t \geq 0 \mid S_t = B\}$$

Calculer

$$E(\exp(-rT_B)).$$

Exercice 6.5.4 Soit f et g deux fonctions déterministes, f de classe C^1 , g continue. On note $F_t = \int_0^t f(u) dW_u$ et u est la solution de

$$u''(t) - 2\frac{f'(t)}{f(t)}u'(t) - 2\lambda g(t)f^2(t)u(t) = 0$$

avec $u'(T) = -2\lambda u(T)f^2(T)$. Le but de cet exercice est de montrer que

$$E\left(\exp\left(-\lambda\left[aF_T^2 + \int_0^T g(t)F_t^2 dt\right]\right)\right) = \left(\frac{u(T)}{u(0)}\right)^2$$

1. Montrer que, pour toute fonction h continue, le processus L défini par

$$L_t = \exp\left(\int_0^t h(s)F_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t h^2(s)F_s^2 ds\right)$$

est une martingale.

2. En déduire que

$$\begin{aligned} 1 &= E\left(\exp\left(\int_0^T \frac{h(s)}{2f(s)} dF_s^2 - \frac{1}{2}\int_0^T (h(s)f(s) + h^2(s)F_s^2) ds\right)\right) \\ &= E\left(\exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{h(T)}{f(T)}F_T^2 - \int_0^T F_t^2 \left(\frac{h'(t)f(t) - f'(t)h(t)}{f^2(t)}\right) dt - \int_0^T (h(s)f(s) + h^2(s)F_s^2) ds\right)\right]\right) \end{aligned}$$

3. Montrer que

$$E\left(\exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{u'(T)}{u(T)f^2(T)}\right)F_T^2 - \int_0^T F_t^2 \left(\frac{u''(t) - 2u'(t)f'(t)/f(t)}{u(t)f^2(t)}\right) dt\right]\right) = \left(\frac{u(T)}{u(0)}\right)^{1/2}$$

4. Résoudre le même problème par changement de temps.

5. Soit Ψ une fonction borélienne bornée de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Comment calculer

$$K = E\left(\exp\left(-\lambda\left[aF_T^2 + \int_0^T g(t)F_t^2 dt\right]\right)\Psi\left(A + BF_T + \int_0^T \phi(t)F_t dt\right)\right)$$

Exercice 6.5.5 Décomposition canonique Soit W un mouvement Brownien et h une fonction positive, vérifiant $h(0,0) = 1$ et harmonique en espace (c'est-à-dire telle que $h(t, W_t)$ est une martingale). On définit Q par $dQ|_{\mathcal{F}_t} = h(t, W_t)dP_{\mathcal{F}_t}$. Montrer que $W_t - \int_0^t \frac{h'_x}{h}(s, W_s)ds$ est un Q -mouvement Brownien.

6.6 Finance

Exercice 6.6.1 Moyenne. Soit $dS_t = S_t(rdt + \sigma dB_t)$, $S_0 = 1$, r et σ étant des constantes. On souhaite calculer $C = E[(Z_T - S_T)^+]$ quand $Z_T = \exp\left(\frac{1}{T} \int_0^T \ln S_t dt\right)$.

1. Soit Q la probabilité définie sur \mathcal{F}_T par $dQ = \exp(\sigma B_T - \sigma^2 T/2) dP$. Montrer que

$$e^{-rT} E_P[(Z_T - S_T)^+] = E_Q[(\frac{Z_T}{S_T} - 1)^+].$$

2. Soit $\tilde{B}_t = B_t - \sigma t$. Ecrire Z_T/S_T sous la forme $\exp(\alpha T - \int_0^T \beta(t) d\tilde{B}_t)$.
3. Montrer que le calcul de C se réduit au calcul de $E((\tilde{S}_T - K)^+)$ pour un Brownien géométrique \tilde{S} dont on précisera la loi.

Exercice 6.6.2 Volatilité stochastique On rappelle le théorème de représentation prévisible à deux dimensions Soit $W = (W^1, W^2)$ un Brownien à valeurs dans \mathbb{R}^2 et (\mathcal{F}_t) sa filtration canonique. Toute (\mathcal{F}_t) -martingale de carré intégrable s'écrit $M_t = m + \int_0^t \phi_1(s) dW^1(s) + \int_0^t \phi_2(s) dW^2(s)$ où $(\phi_i, i = 1, 2)$ sont des processus adaptés. Soient μ et η deux fonctions déterministes de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} et σ, γ deux fonctions déterministes de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On considère alors un marché financier où l'actif risqué vérifie

$$dS_t = S_t(\mu(t)dt + \sigma(Y_t)dW_t^1), \quad S_0 = s$$

où Y est un processus solution de

$$dY_t = \eta(t)dt + \gamma(Y_t)dW_t^2, \quad Y_0 = 1$$

1. Quelles doivent être les propriétés du processus $(L_t, t \geq 0)$ pour que la formule $dQ|_{\mathcal{F}_t} = L_t dP$ définisse une probabilité Q ?
2. Déterminer l'ensemble des probabilités équivalentes à P telles que, sous Q , S soit une martingale.
3. Soit B un actif contingent $B \in \mathcal{F}_T$. Comment lui donner un prix (le taux sans risque est nul) ?

Exercice 6.6.3 Options boost. Soit M une \mathcal{F}_t -martingale à valeurs strictement positives.

1. Justifier qu'il existe ψ tel que $dM_t = \psi_t dW_t$.
2. Montrer qu'il existe Ψ tel que $dM_t = \Psi_t M_t dW_t$.

3. Soit γ un nombre réel. Calculer $d[(M_t)^\gamma]$.
4. Soit S un Brownien géométrique tel que $S_0 = s$ et

$$dS_t = S_t(r dt + \sigma dW_t) \quad (6.1)$$

où r et σ sont des constantes. Montrer qu'il existe γ tel que $S_t = s(M_t)^\gamma$ où M est une martingale de la forme précédente. Expliciter Ψ en fonction de r et σ . A quel choix de r et σ correspond la valeur $\gamma = 1$?

5. Soit K un nombre réel positif et M une martingale telle que $dM_t = M_t \sigma dW_t$ où σ est une constante et $M_0 = 1$. Montrer que

$$E((M_t - K)^+) = E((1 - KM_t)^+)$$

On pourra utiliser le théorème de Girsanov et faire apparaître une nouvelle probabilité Q et déterminer la loi de $1/M$ sous Q .

6. Soit S un processus vérifiant (6.1), $S_t^* = \sup_{s \leq t} S_s$ et $W_t^* = \sup_{s \leq t} W_s$. La loi de W_t^* est connue (c'est celle de $|W_t|$, ce résultat sera admis), on notera $\Phi(a) = P(W_t^* \leq a)$. Calculer, en utilisant les résultats de la question 3, $E(\mathbb{1}_{S_T^* \leq a})$ qui correspond à la valeur d'une option boost (au coefficient $\exp(-rT)$ près).

Exercice 6.6.4 Volatilité stochastique. Soit W^1 et W^2 deux Browniens indépendants, et $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s^1, W_s^2, s \leq t)$ la filtration engendrée par les deux Browniens. Soit μ et η deux fonctions déterministes bornées de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} et σ, γ deux fonctions déterministes bornées définies de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On note S la solution de

$$dS_t = S_t(\mu(t)dt + \sigma(Y_t)dW_t^1), \quad S_0 = s$$

où Y est un processus solution de

$$dY_t = \eta(t)dt + \gamma(Y_t)dW_t^2, \quad Y_0 = 1$$

1. Soit θ un processus borné et Z la solution de

$$dZ_t = Z_t \theta_t dW_t^1, \quad Z_0 = 1$$

Ecrire explicitement Z_t sous la forme d'une exponentielle.

2. Soit λ et ν deux processus adaptés bornés et L le processus défini par

$$L_t = \exp \left[\int_0^t \lambda_s dW_s^1 - \frac{1}{2} \int_0^t (\lambda_s)^2 ds + \int_0^t \nu_s dW_s^2 - \frac{1}{2} \int_0^t (\nu_s)^2 ds \right] \quad (6.2)$$

Ecrire l'EDS vérifiée par L .

3. On pose $\tilde{W}_t = W_t^1 - \int_0^t \lambda_s ds$ et on note \tilde{Z} la solution de $d\tilde{Z}_t = \tilde{Z}_t \theta d\tilde{W}_t^1$, $\tilde{Z}_0 = 1$ où θ est une constante. Montrer que $L\tilde{Z}$ est une martingale.

4. Soit Q définie sur \mathcal{F}_t par $dQ = L_t dP$. Montrer que \tilde{Z} est une Q martingale. En déduire que \tilde{W}^1 est un Q brownien.
5. Montrer que $\tilde{W}_t^2 = W_t^2 - \int_0^t \nu_s ds$ est un Q brownien.
6. On admet que si Q est une mesure équivalente à P il existe λ, ν tels que la densité de Q par rapport à P soit de la forme (6.2). Décrire l'ensemble des couples λ, ν correspondants à des probabilités Q telles que $(S_t e^{-rt}, t \geq 0)$ soit une Q -martingale.
7. Le marché financier est-il complet ?
8. Soit X un actif contingent duplicable, c'est-à-dire tel qu'il existe V processus adapté de la forme

$$dV_t = rV_t dt + \phi_t(dS_t - rS_t dt)$$

vérifiant $V_T = X$, avec ϕ processus adapté borné. (On ne demande pas de justifier cette définition)

- (a) Montrer que $(V_t e^{-rt}, t \geq 0)$ est une Q martingale pour tout $Q \in \mathcal{Q}$.
- (b) On suppose que $V_t = v(t, S_t, Y_t)$. Montrer que v vérifie une équation aux dérivées partielles que l'on explicitera.

Exercice 6.6.5 Symétrie put-call. Soit M une (\mathcal{F}_t) -martingale telle que $dM_t = M_t \sigma dW_t$ où σ est une constante et $M_0 = 1$.

1. Vérifier que M est à valeurs strictement positives.
2. Calculer dY_t quand $Y_t = (M_t)^{-1}$.
3. Soit Q telle que $dQ = M_t dP$ sur \mathcal{F}_t . Déterminer la loi de Y sous Q .
4. Montrer que $E_P((M_T - K)^+) = K E_P((K^{-1} - M_T)^+)$.

Exercice 6.6.6 Symétries

On suppose que le prix d'un actif, sous la probabilité risque neutre Q est donné par (3.3) où q est le taux de dividendes. On note $C(x, K, r, q)$ (ou $C(x, K, r, q, \sigma)$ si besoin est) le prix d'une option d'achat européenne de prix d'exercice K , soit

$$C(x, K, r, q) = E(e^{-rT}(S_T - K)^+)$$

On rappelle que, dans le cas $r = 0 = q$, en notant $C^*(x, K) = C(x, K, 0, 0)$ le prix d'un call de strike K sur un sous-jacent de valeur initiale x et P^* le prix d'un put, on a

$$C^*(x, K) = x\mathcal{N}\left[d_1\left(\frac{x}{K}\right)\right] - K\mathcal{N}\left[d_0\left(\frac{x}{K}\right)\right], \quad P^*(x, K) = -x\mathcal{N}\left[d_0\left(\frac{K}{x}\right)\right] + K\mathcal{N}\left[d_1\left(\frac{K}{x}\right)\right], \quad (6.3)$$

avec

$$d_1(\alpha) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln(\alpha) + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}, \quad d_0(\alpha) = d_1(\alpha) - \sigma\sqrt{T}$$

et que le delta du call est $\text{DeltaC}^*(x, K) = \mathcal{N}(d_1(\frac{x}{K}))$.

1. Montrer, en utilisant les résultats de l'exercice 3.3 que $C(x, K, r, q) = C^*(xe^{-qT}, Ke^{-rT})$.

2. Montrer, au vu des formules précédentes que

$$\text{DeltaC}(x, K, r, q) = e^{-qT} \mathcal{N} \left[d_1 \left(\frac{xe^{-qT}}{Ke^{-rT}} \right) \right] \quad \text{DeltaP}(x, K, r, q) = -e^{-qT} \mathcal{N} \left[d_0 \left(\frac{Ke^{-rT}}{xe^{-qT}} \right) \right]$$

où DeltaC est le Delta du call.

3. Montrer, au vu des formules (6.3) et de la question (a) que

$$C(x, K, r, q) = C^*(Ke^{-\mu T}, x) = P^*(xe^{-\mu T}, K) = P(K, x, q, r) \quad (6.4)$$

où $\mu = r - q$ et P le prix d'un put. Commenter.

4. On souhaite montrer avec des arguments probabilistes que $C^*(K, x) = P^*(x, K)$. (cas $\mu = 0$).

(a) On commencera par calculer la dynamique de $1/S$, dans le cas $dS_t = S_t \sigma dW_t$.

(b) On transformera $E((S_T - K)^+)$ en $\tilde{E}((x - \tilde{S}_T)^+)$ où \tilde{E} est l'espérance sous une probabilité que l'on précisera.

5. Le payoff d'une option power sur le sous-jacent Y est $Y_T^\alpha (Y_T - K)^+$. Montrez que son prix $C^{pow}(y, K, \nu, \alpha)$ peut s'obtenir facilement à partir de call européens portant sur les sous-jacents Y^α et $Y^{\alpha+1}$.

Exercice 6.6.7 Options power. Soit

$$dS_t = S_t((r - \delta)dt + \sigma dB_t), \quad S_0 = x.$$

Cette dynamique modélise, sous la probabilité risque-neutre P , le prix d'un actif versant des dividendes au taux δ le taux spot étant r .

1. On souhaite évaluer un actif contingent sur S , actif versant des dividendes. Il s'agit donc de calculer

$$E_P(h(S_T)e^{-r(T-t)}|\mathcal{F}_t).$$

Quelle est la valeur de cet actif dans le cas $h(x) = (x^\alpha - K)^+$? (On utilisera sans modération les formules classiques sur l'évaluation de produits étudiés dans le poly ou dans tout ouvrage de référence.)

2. On suppose $r = \delta$. On pose $dQ|_{\mathcal{F}_t} = (S_t/x)dP|_{\mathcal{F}_t}$. Justifier rapidement que l'on définit un changement de probabilité. On pose $Z_t = x^2/S_t$. Quelle est la dynamique de $(Z_t, t \geq 0)$ sous Q ? Montrer que pour toute fonction f borélienne bornée

$$\frac{1}{x} E_P(S_T f(\frac{x^2}{S_T})) = E_P(f(S_T))$$

3. On repasse au cas général. Montrer que S^a est une martingale pour une valeur de a que l'on précisera. Montrer que, pour toute fonction f borélienne bornée

$$E_P(f(S_T)) = \frac{1}{x^a} E_P(S_T^a f(\frac{x^2}{S_T}))$$

4. On se place dans le cas

$$h(x) = x^\beta (x - K)^+$$

Montrer que $h(S_T)$ s'écrit comme différence de deux payoffs correspondants à des options d'achat Européennes portant sur $S^{\beta+1}$ et sur S^β avec des strikes que l'on déterminera.

Exercice 6.6.8 Option d'échange Soit $dS_t^{(i)} = S_t^{(i)}(b_i dt + \sigma_i dW_t^{(i)})$, $i = 1, 2$ où les coefficients sont constants, les browniens $W^{(i)}$ étant corréllés. Calculer la valeur d'une option d'échange dont le payoff est $(S_T^{(1)} - S_T^{(2)})^+$.

Exercice 6.6.9 Option quanto

Exercice 6.6.10 Taux de change On considère deux pays. Les quantités relatives au pays domestique seront indexées par d , les quantités relatives à l'autre pays par f . Chaque pays possède un taux sans risque noté respectivement r^d et r^f . Les marchés des deux pays sont dirigés par un mouvement Brownien W . Sous la probabilité P , un actif S suit la dynamique

$$dS_t = S_t(\mu_t dt + \sigma_t^S dW_t)$$

On suppose que chacun des deux marchés est sans arbitrage : il existe une probabilité risque neutre domestique notée Q^d équivalente à P telle que sous Q^d le processus $(e^{-r^d t} S_t^d, t \geq 0)$ est une Q^d martingale.

1. Montrer que tout actif domestique S^d a une dynamique de la forme

$$dS_t^d = S_t^d(r^d dt + \sigma_t^d dW_t^d)$$

où W^d est un Q^d mouvement Brownien. On notera λ^d la prime de risque définie par $dW_t^d = dW_t + \lambda_t^d dt$. Le taux de change entre ces pays est X dirigé par

$$dX_t = X_t[(r^d - r^f) dt + \sigma_t^X dW_t^d]$$

Si S^f est un prix en unités monétaires du pays étranger, $S^f X$ est le prix du même produit en unités monétaires domestiques.

2. Soit S^f un actif étranger de dynamique

$$dS_t^f = S_t^f(r_t^f dt + \sigma_t dW_t^f)$$

Montrer que

$$\lambda_t^f - \lambda_t^d = -\sigma_t^X$$

$$W_t^d - W_t^f = \int_0^t \sigma_s^X ds$$

3. Quelle est la dynamique du taux de change inverse $Y = 1/X$?
4. On souhaite valoriser une option quanto, c'est à dire une option sur produit étranger faisant intervenir le taux de change. Comment évaluer en monnaie domestique un flux étranger de $(S_T^f - K)^+$? Comment évaluer une option d'achat sur action étrangère avec strike en monnaie domestique ?

Exercice 6.6.11 Richesse (Cox-Huang, Karatzas) Un agent financier souhaite investir sur un marché sur lequel deux actifs sont négociables:

Un actif sans risque de dynamique $dS_0(t) = S_0(t)r(t)dt$ où r est déterministe,

Un actif risqué dont le prix a pour dynamique $dS_1(t) = S_1(t)(b(t)dt + \sigma(t)dW_t)$. On suppose que σ ne s'annule pas.

La richesse X de cet agent a pour dynamique

$$dX_t = X_t r(t)dt + \pi_t [b(t) - r(t)]dt + \sigma(t)\pi_t dW_t$$

où π est un processus (\mathcal{F}_t) adapté représentant la proportion de la richesse investie dans l'actif risqué.

- Montrer qu'il existe une probabilité Q telle que $dS_1(t) = S_1(t)(r(t)dt + \sigma(t)d\widetilde{W}_t)$ où \widetilde{W} est un Q mouvement Brownien.
- Montrer que $(R(t)X_t, t \geq 0)$ est une Q martingale locale, avec $R(t) = \exp - \int_0^t r(s)ds$
- Soit $\theta(t) = \frac{b(t) - r(t)}{\sigma(t)}$ et H solution de l'équation $dH_t = -H_t(r(t)dt + \theta(t)dW_t)$, $H_0 = 1$. Montrer que le processus $(H_t X_t, t \geq 0)$ est une P -martingale locale.
- On suppose que $(H_t X_t, t \geq 0)$ est une P -martingale pour tout choix de π . L'agent souhaite obtenir une richesse terminale égale à ζ , v.a. \mathcal{F}_T mesurable (i.e. $X_T = \zeta$). Montrer que sa richesse initiale X_0 est alors déterminée, et que son portefeuille de couverture (i.e. π) également.

Exercice 6.6.12 Optimisation de richesse Sur le marché financier on trouve un actif risqué et un actif sans risque. Soit $(S_t, t \geq 0)$ le prix de l'actif risqué. On suppose que $dS_t = S_t(\mu_t dt + \sigma dB_t)$. L'actif sans risque vérifie

$$dS_0(t) = S_0(t)r_t dt.$$

Les processus μ_t, r_t sont \mathcal{F}_t -adaptés bornés, σ est une constante non nulle.

1. Montrer que $S_t \exp\left(-\int_0^t \mu_s ds\right)$ est une P -martingale.

2. On pose $\theta_t = \frac{\mu_t - r_t}{\sigma}$.

Déterminer Q telle que, sous Q le processus $\tilde{B}_t = B_t + \int_0^t \theta_s ds$ soit un mouvement Brownien.

Ecrire l'équation vérifiée par S_t en utilisant \tilde{B}_t .

3. Un agent de richesse initiale x investit sa richesse X_t suivant l'actif sans risque et l'actif risqué de prix S_t suivant $X_t = n_0(t)S_0(t) + n_1(t)S_t$. On suppose que $dX_t = n_0(t)dS_0(t) + n_1(t)dS_t$.

- (a) Montrer que $dX_t = r_t X_t dt + n_1(t)(dS_t - S_t r_t dt)$.

- (b) On note $\pi_t = n_1(t)S_t$ et $R_t = \exp - \int_0^t r_s ds$.

Ecrire dX_t en fonction de π_t, r_t , et \tilde{B}_t .

- (c) Montrer que, sous Q , le processus $X_t R_t$ est une martingale.

- (d) Soit $\zeta = X_T$. Ecrire X_t sous forme d'une espérance conditionnelle faisant intervenir ζ et le processus r .

4. On se donne un processus $(c_t, t \geq 0)$ à valeurs positives adapté et un processus $(\pi_t, t \geq 0)$ de carré intégrable \mathcal{F}_t - adapté.

Soit $(X_t, t \geq 0)$ un processus tel que

$$dX_t = r_t X_t + \pi_t (dB_t + \theta_t dt) - c_t dt. \quad (6.5)$$

- (a) Montrer que, sous Q , le processus $X_t R_t + \int_0^t R_s c_s ds$ est une martingale.

En déduire que $X_t R_t = E_Q(X_T R_T + \int_t^T R_s c_s ds | \mathcal{F}_t)$.

- (b) Ecrire cette relation sous P .

- (c) Montrer que si l'on impose la condition $X_T \geq 0$, il existe une solution de (6.5) positive, vérifiant cette condition.

Exercice 6.6.13 Soit $X_t = \mu t + \sigma B_t$. On note $T_a = \inf\{t | X_t = a\}$. Trouver une probabilité Q telle que sous Q , $(\tilde{B}_t = X_t/\sigma, t \geq 0)$ soit un mouvement Brownien. Exprimer T_a en utilisant \tilde{B}_t . Calculer $E_P(\exp - \lambda T_a)$.

Exercice 6.6.14 Montrer que le prix d'une option Asiatique dont le strike est le sous-jacent est le prix d'un call sur un sous-jacent de dynamique $dZ_t = (1 - rU_t)dt - Z_t\sigma dW_t$. Comment faire le calcul?

Exercice 6.6.15 Zero-coupons Soit $Y_t = h(t)dt + dW_t$ et $r_t = \sigma(t)Y_t$ où h et σ sont des fonctions de classe C^1 . On souhaite calculer $E\left(\exp\left[-\int_0^t r_s ds\right]\right)$.

1. Exprimer dr .

2. Soit $L_t^H = \exp\left(\int_0^t H(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t H^2(s)ds\right)$. Justifier que $E(L_T^H) = 1$ pour toute fonction H continue. En déduire que

$$E\left(\exp\left[H(T)W_T - \int_0^T F'(s)W_s ds - \frac{1}{2}\int_0^T H^2(s)ds\right]\right) = 1.$$

3. En utilisant L_t^h , montrer que

$$E\left(\exp\left[-\int_0^T r_s ds\right]\right) = E\left(\exp\left(h(T)W_T - \int_0^T W_s(h'(s) + \sigma(s))ds - \int_0^T \frac{1}{2}\int_0^T h^2(s)ds\right)\right).$$

4. Calculer cette quantité.

Exercice 6.6.16 Soit $dY_t = 2\sqrt{Y_t}dW_t + (2\beta(t)Y_t + \delta)dt$ et $r_t = \sigma(t)Y_t$, où σ et β sont des fonctions de classe C^1 . On introduit $dX_t = 2\sqrt{X_t}dW_t + \delta dt$.

1. Calculer dr_t .

2. Soit H une fonction de classe C^2 et

$$Z_t^H = \exp\left(\int_0^t H(s)\sqrt{X_s}dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t H^2(s)X_s ds\right)$$

On admet que Z est une martingale. Montrer que

$$Z_t = \exp\left(\frac{1}{2}\left(H(t)X_t - \delta\int_0^t H(s)ds - \int_0^t H'(s)X_s ds - \frac{1}{2}\int_0^t H^2(s)X_s ds\right)\right)$$

3. Montrer que

$$E\left(\exp\left[-\int_0^T r_s ds\right]\right) = \exp\left[\frac{1}{2}(-\beta_0 X_0 - \delta\int_0^T \beta(s)ds)\right] E\left(\exp\left[\frac{1}{2}(\beta(T)X_T - \int_0^T X_s(\beta^2(s) + \beta'(s) + 2\sigma(s))ds)\right]\right)$$

4. Comment calculer cette dernière expression?

Exercice 6.6.17 On se place dans le cas où $S_t = e^{2(W_t + \nu t)}$. Montrer en utilisant la formule d'Itô que S est une sousmartingale pour $\nu + 1 \geq 0$ et une surmartingale sinon. En déduire que le prix d'une option asiatique est plus petit que le prix d'une option plain vanilla. Montrer par une minoration simple que $E(\frac{1}{T} \int_0^T \exp(2(W_s + \nu s)) ds) \geq E(e^{2(W_T + \nu T)})$

Chapter 7

Compléments

ENONCES

Dans tout ce chapitre, B (ou W) est un mouvement Brownien dont la filtration est notée (\mathcal{F}_t) .

7.1 Théorème de Lévy.

Exercice 7.1.1 Lévy's theorem. Let W be a standard Brownian motion and

$$D = \sup_{0 \leq s \leq t \leq 1} (W_s - W_t), \quad D_1 = W_\theta - \inf_{\theta \leq t \leq 1} W_t, \quad D_2 = \sup_{0 \leq t \leq \sigma} W_t - W_\sigma$$

where θ (resp. σ) is the time of the absolute maximum (resp. minimum) of the Brownian motion over $[0, 1]$, (i.e.,).

1. Prove that $D \stackrel{loi}{=} \sup_{0 \leq t \leq 1} |W_t|$.
2. En déduire la loi de D .
3. Prove that $D_1 \stackrel{loi}{=} \sup_{g \leq t \leq 1} |W_t|$ where $g = \sup\{t \leq 1 : W_t = 0\}$.

Exercice 7.1.2 Loi du couple $(|B_t|, L_t)$.

1. Montrer que la loi du couple $(|B_t|, L_t)$ est

$$\mu_t(da, d\ell) = \mathbb{1}_{a \geq 0} \mathbb{1}_{\ell \geq 0} \frac{2(a + \ell)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(a + \ell)^2}{2t}\right) da d\ell$$

2. On note $T_a = \inf\{t \geq 0; B_t = a\}$ et $\tau_\ell = \inf\{t \geq 0; L_t = \ell\}$. Montrer que $T_\ell \stackrel{loi}{=} \tau_\ell$

3. Montrer que le processus $(|B_t|, L_t)$ est markovien de semi groupe

$$Q_t(\alpha, \lambda, f) = \int \mu_t(da, d\ell) f(\alpha \vee \ell - (\ell - a), (\lambda - \alpha) + \alpha \vee \ell)$$

4. Montrer que $S_t(S_t - B_t)$ et B_t sont indépendantes.
5. Montrer que $S_t(S_t - B_t) \stackrel{\text{loi}}{=} \frac{t}{2}\mathcal{E}$ où \mathcal{E} est une variable exponentielle de paramètre 1.

Exercice 7.1.3 On note W^* le processus $W_t^* = \sup_{s \leq t} W_s$.

1. Justifier rapidement (en se basant sur des résultats classiques) que $P(W_t^* > a) = 2P(W_t > a)$ pour $a > 0$. Cette égalité est-elle vérifiée également pour $a \leq 0$?
2. Soit $s < t$. Montrer que

$$P\left(\sup_{s \leq u \leq t} W_u > 0, W_s < 0\right) = 2P(W_t > 0, W_s < 0)$$

3. Calculer explicitement cette quantité.
4. On note $g_t = \sup\{s \leq t : W_s = 0\}$. Calculer la loi de g_t .

Exercice 7.1.4 On note $M_t = \sup_{0 \leq s \leq t} B_s$ et $\theta = \sup\{t \leq 1 : B_t = M_t\}$. On souhaite calculer la loi de θ .

1. Ecrire $\{\theta \leq t\}$ en utilisant les variables M_t et $\sup_{t \leq s \leq 1} B_s$
2. Ecrire $\{\theta \leq t\}$ en utilisant M_t et $\sup_{t \leq s \leq 1} (B_s - B_s)$
3. Quelle est la loi de $\sup_{t \leq s \leq 1} (B_s - B_s)$ conditionnelle à \mathcal{F}_t ?
4. En déduire que $P(\theta \leq t | \mathcal{F}_t) = \Phi(M_t - B_t)$ où $\Phi(x) = P(M_{1-t} < x)$
5. En utilisant le cours, calculer $\Phi(x)$.
6. On admet que $M_t - B_t$ a même loi que B_t . Comment obtenir la loi de θ ?

7.2 Equations rétrogrades

Exercice 7.2.1 Equation rétrograde 1. Soit H

$$dH_t = -H_t(rdt + \theta dW_t), \quad H_0 = 1$$

On notera $H_{t,s} = \frac{H_s}{H_t}$ pour $t < s$.

1. Soit t fixé. Quelle est l'EDS suivie par $(H_{t,s}, s \geq t)$.

2. Soit ζ une v.a. de \mathcal{F}_T et $X_t = \ln E(H_{t,T}e^\zeta | \mathcal{F}_t)$. Montrer que $Y_t \stackrel{def}{=} \exp(X_t)H_t$ est une martingale que l'on peut écrire sous la forme $z + \int_0^t z_s dW_s$.
3. Montrer que $dX_t = (a\hat{X}_t^2 + b\hat{X}_t + c)dt + \hat{X}_t dW_t$ où \hat{X} est un processus adapté que l'on déterminera en fonction de Z, z, r et θ et où b et c sont des constantes.

Exercice 7.2.2 Equation rétrograde 2. La question (b) est triviale, si l'on admet (a). Dans tout le problème ζ est une variable \mathcal{F}_T -mesurable, intégrable.

1. Soit H est une variable \mathcal{F}_T mesurable, intégrable. Justifier qu'il existe un processus $(h_s, s \leq T)$ et une constante z tels que $E(H | \mathcal{F}_t) = z + \int_0^t h_s dW_s$.
On pourra admettre ce résultat pour poursuivre.
2. On note $X_t = E(\zeta | \mathcal{F}_t)$. Montrer qu'il existe un processus $(\hat{X}_s, s \leq T)$ tel que

$$dX_t = \hat{X}_t dW_t, \quad Y_T = \zeta \quad (7.1)$$

En déduire que, si ζ une variable \mathcal{F}_T mesurable intégrable, il existe un couple (X, \hat{X}) de processus (\mathcal{F}_t) adaptés vérifiant (7.1).

3. Soit r un nombre réel. En utilisant $e^{rt} E(\zeta e^{-rT} | \mathcal{F}_t)$ montrer qu'il existe un couple (X, \hat{X}) de processus (\mathcal{F}_t) adaptés tels que

$$dX_t = rX_t dt + \hat{X}_t dW_t \quad Y_T = \zeta$$

4. Soit $(r_t, t \geq 0)$ un processus (\mathcal{F}_t) adapté borné. En utilisant une méthode analogue, montrer qu'il existe un couple (X, \hat{X}) de processus (\mathcal{F}_t) adaptés tels que

$$dX_t = r_t X_t dt + \hat{X}_t dW_t, \quad Y_T = \zeta$$

5. Soit $\Gamma^{\beta, \gamma}$ le processus solution de $d\Gamma_t = -\Gamma_t(\beta_t dt + \gamma_t dW_t)$, $\Gamma_0 = 1$ où β et γ sont des processus (\mathcal{F}_t) adaptés bornés. Soit ϕ un processus (\mathcal{F}_t) adapté borné. En considérant

$$E(\Gamma_T \zeta + \int_t^T \Gamma_s \phi_s ds | \mathcal{F}_t)$$

montrer qu'il existe un couple (X, \hat{X}) de processus (\mathcal{F}_t) adaptés tels que

$$dX_t = -(\phi_t + X_t \beta_t + \gamma_t \hat{X}_t) dt + \hat{X}_t dW_t, \quad \hat{X}_T = \zeta$$

6. Soit a un nombre réel. En considérant $\frac{1}{2a} \ln(E[\exp(2a\zeta) | \mathcal{F}_t])$, montrer qu'il existe un couple (X, \hat{X}) de processus (\mathcal{F}_t) -adaptés tels que

$$dX_t = -\hat{X}_t^2 dt + \hat{X}_t dW_t, \quad \hat{X}_T = \zeta \quad (7.2)$$

7. Montrer que $\frac{1}{2a} \ln \left(E \left[\Gamma_{t,T}^{2ac,b} \exp(2a\zeta) | \mathcal{F}_t \right] \right)$ est solution de

$$dX_t = -(a\hat{X}_t^2 - b\hat{X} - c)dt + \hat{X}_t dW_t, \quad \hat{X}_T = \zeta$$

Exercice 7.2.3 Equation rétrograde 3..

1. Soit $(\alpha_t, t \geq 0)$ un processus \mathbf{F} -adapté. Donner la solution (Y, Z) de l'équation rétrograde

$$-dY_t = \alpha_t dt - Z_t dW_t, \quad Y_T = 0. \quad (7.3)$$

2. Au moyen du théorème de Girsanov, donner la solution de

$$-dY_t = (\alpha_t + \gamma Z_t)dt - Z_t dW(t), \quad Y_T = 0. \quad (7.4)$$

où γ est un scalaire quelconque. Exprimer Y_0 sous la forme d'une espérance dépendant des données du problème.

3. On pose $\alpha_t = W_t$. Montrer que $Y_0 = \int_0^T E(M_t W_t) dt$ où $M_t = \exp(\gamma W_t - \frac{1}{2}\gamma^2 t)$. Calculer $E(M_t W_t)$ et $E(M_t \text{sign} W_t)$ où

$$\text{sign}(W_s) = 1 \text{ si } W_s > 0, \quad \text{et } \text{sign}(W_s) = -1 \text{ si } W_s \leq 0.$$

4. On introduit le processus

$$\overline{W}_t = \int_0^t \text{sign}(W_s) dW_s,$$

On rappelle (cf. cours) que ce processus est un mouvement Brownien, on notera $\overline{\mathcal{F}}_t = \sigma(\overline{W}_s; s \leq t)$ sa filtration, qui est incluse dans \mathcal{F}_t . Montrer que la solution de

$$-d\overline{Y}_t = (\overline{W}_t + \gamma \overline{Z}_t) dt - \overline{Z}_t d\overline{W}_t, \quad \overline{Y}_T = 0,$$

vérifie

$$\overline{Y}_0 = \gamma T^2 / 2. \quad (7.5)$$

5. Montrer que la solution de

$$-dY_t = (\overline{W}_t + \gamma Z_t)dt - Z_t dW_t, \quad Y_T = 0, \quad (7.6)$$

vérifie

$$Y_0 = \int_0^T E(M_T \overline{W}_t) dt = \int_0^T E(M_t \overline{W}_t) dt.$$

6. Montrer, au moyen de la formule d'Itô que

$$E(M_t \overline{W}_t) = \int_0^t \gamma E(M_s \text{sign}(W_s)) ds,$$

pour $0 \leq t \leq T$. et en déduire que

$$Y_0 = \gamma T^2/2 - 2\gamma \int_0^T (T-s)\Phi(-\gamma\sqrt{s})ds. \quad (7.7)$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

7. Supposons que Y_0 représente l'utilité (mesure le bien être que l'on éprouve quand on consomme c) associée à un plan de consommation ($c_t = \exp(\overline{W}(t))$) et une information \mathbf{F} et que \overline{Y}_0 représente l'utilité associée au même plan de consommation mais avec l'information $\overline{\mathbf{F}}$. Interprétez alors le résultat trouvé en (7.5) et en (7.7) selon que $\gamma > 0$ ou que $\gamma < 0$.

Exercice 7.2.4 facts on quadratic BSDE The solution of the BSDE $-dy_t = az_t^2 - z_t dW_t, y_T = \zeta$ is $y_t = \frac{1}{2a} \ln E(e^{2a\zeta} | \mathcal{F}_t)$. The solution of

$$-dy = (az^2 + bz)dt - z dW_t$$

obtained by Girsanov.

$$-dy = (az^2 + bz)dt - z dW_t = az^2 dt - z(dW_t - bdt) = az^2 dt - z_t d\widehat{W}_t$$

leads to

$$\begin{aligned} y_t &= \frac{1}{2a} \ln \widehat{E}(e^{2a\zeta} | \mathcal{F}_t) \\ &= \frac{1}{2a} \ln E(e^{bW_T - \frac{1}{2}b^2T} e^{2a\zeta} | \mathcal{F}_t) e^{bW_t - \frac{1}{2}b^2t} \\ &= \frac{1}{2a} \left(\ln E(e^{bW_T - \frac{1}{2}b^2T} e^{2a\zeta} | \mathcal{F}_t) + bW_t - \frac{1}{2}b^2t \right) \end{aligned}$$

The solution of

$$-dy = (az^2 + bz + c_t)dt - z dW_t$$

follows setting $\tilde{y}_t = y_t + \int_0^t c_s ds$. The process \tilde{y} satisfies

$$-d\tilde{y} = (az^2 + bz)dt - z dW_t, \quad \tilde{y}_T = \zeta + \int_0^T c_s ds$$

therefore

$$\frac{1}{2a} \left(\ln E(e^{bW_T - \frac{1}{2}b^2T} e^{2a(\zeta + \int_0^T c_s ds)} | \mathcal{F}_t) + bW_t - \frac{1}{2}b^2t \right) - \int_0^t c_s ds$$

7.3 Théorèmes de représentation

Exercice 7.3.1 Soit $W^{(i)}, i = 1, 2, 3$ trois MB, avec $W^{(i)}, i = 1, 2$ indépendants. Montrer qu'il n'est pas possible d'avoir $\sigma(W_s^{(3)}, s \leq t) = \sigma(W_s^{(1)}, W_s^{(2)}, s \leq t)$.

Exercice 7.3.2 Changement de temps Soit $M_t = \int_0^t \mathbb{1}_{W_s > 0} dW_s$.

1. Justifier que $(M_t, t \geq 0)$ est une martingale.
2. Trouver un processus $(A_t, t \geq 0)$ croissant tel que $M_t^2 - A_t$ est une (\mathcal{F}_t) -martingale.
3. On admet qu'il existe un processus croissant C tel que $A(C(t)) = t$. Montrer que $(M_{C_t}, t \geq 0)$ est un (\mathcal{G}_t) -mouvement Brownien. Préciser quelle est la filtration (\mathcal{G}_t) -utilisée.

Exercice 7.3.3 Crochet et indépendance. Soient W_1 et W_2 deux MB tels que leur crochet soit nul. Montrer qu'ils sont indépendants.

7.4 Temps local.

Exercice 7.4.1 Formule de Tanaka.

1. Peut-on appliquer la formule d'Itô pour calculer dZ_t avec $Z_t = |W_t|$?
2. On admet qu'il existe un processus croissant L tel que

$$|W_t| = |W_0| + \int_0^t f(W_s) dW_s + L_t$$

avec $f(x) = 1$ si $x > 0$ et $f(x) = -1$ sinon. Montrer que $(\int_0^t f(W_s) dW_s, t \geq 0)$ est un mouvement Brownien que l'on notera β .

3. Soit $S_t = \sup_{s \leq t} W_s$. Vérifier que S est un processus croissant. Comparer les décompositions $|W_t| = \beta_t + L_t$ et $S_t - W_t = -W_t + S_t$. Pour cette question, je ne vous demande aucun raisonnement précis.

Exercice 7.4.2 Temps local. Soit L le temps local. Montrer que $L_t = \inf_{s \geq t} (|B_s| + L_s)$.

Exercice 7.4.3 Temps aléatoire. Soit B un MB, S son maximum sur $[0, 1]$ (soit $S = \sup\{B_s, s \leq 1\}$ et $\theta = \inf\{t \leq 1 : B_t = S\}$). La v.a. θ est-elle un temps d'arrêt? Quelle est la loi de θ ? On calculera $P(\theta \leq u)$ et on utilisera le principe de réflexion et l'identité de Lévy $(S_t - B_t, t \geq 0) \stackrel{loi}{=} (|B_t|, t \geq 0)$. Calculer $P(\theta \leq t | \mathcal{F}_t)$.

Exercice 7.4.4 Des martingales. Soit X une martingale continue et $S_t = \sup_{s \leq t} X_s$.

1. Pour quelles fonctions f le processus $Y_t = f(X_t, S_t, \langle X \rangle_t)$ est-il une martingale locale?
2. Montrer que si g est C^2 et $g(0) = 0$, le processus

$$g(S_t) - (S_t - X_t)g'(S_t)$$

est une martingale locale.

3. Montrer que si g est C^2 et $g(0) = 0$, le processus

$$g(L_t) - |X_t|g'(L_t)$$

est une martingale locale.

Exercice 7.4.5 Scaling Soit B un MB et L son temps local. Montrer que

$$(L_{\lambda^2 t}^x, x \in \mathbb{R}, t \geq 0) \stackrel{loi}{=} (\lambda L_t^{x/\lambda}, x \in \mathbb{R}, t \geq 0)$$

On utilisera

$$\int_0^{\lambda^2 t} f(B_s) ds \stackrel{loi}{=} \lambda^2 \int_0^t f(\lambda B_u) du$$

Exercice 7.4.6 Calculer $E(L_{T_a}^x)$.

Exercice 7.4.7 Let M be a continuous martingale such that $\langle M \rangle_\infty = \infty$ and β the associated Dubins-Schwarz BM. Prove that $L_t^a(M) = L_{\langle M \rangle_t}^a(\beta)$.

Exercice 7.4.8 Let ϕ be a non negative process indexed by $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Prove that

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_0^t d_s L_s^y \phi(s, y) = \int_0^t d_s \langle Y \rangle_s \phi(s, Y_s).$$

7.5 Lois

Exercice 7.5.1 Temps d'atteinte. Soit X solution de

$$X_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW_t, X_0 = x.$$

On note $T_a = \inf\{t \geq 0 \mid X_t = a\}$.

1. Donner des conditions sur la fonction V pour que $(e^{-\lambda t}V(X_t), t \geq 0)$ soit une martingale.
2. En déduire $E(e^{-\lambda T_a} \mathbb{1}_{(T_a < \infty)})$ en fonction de V . On ne demande pas d'explicitier V .

3. Soit $f(x) = \int_0^x \frac{y}{b(y)} dy$ et $Y_t = f(X_t)$. On suppose $b \in C^1$. Calculer dY_t .
4. En déduire que $\int_0^t X_s dW_s = f(X_t) - f(x) + \int_0^t g(X_s) ds$ où g est une fonction que l'on précisera.

Exercice 7.5.2 Temps d'atteinte Soit $V_t = v + W_t$ et $\tau_a(V) = \inf\{t : V_t = a\}$. Montrer que $\tau_a(V) \stackrel{\text{loi}}{=} \frac{(a-v)^2}{G^2}$, où G est une variable de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
Comment calculer $E(\mathbb{1}_{\{T < \tau_a(V)\}} h(V_T))$?

Exercice 7.5.3 Soit M une martingale telle que $M_0 = a$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} M_t = 0$. On rappelle (exercice 1.5.11) $\sup M_t \stackrel{\text{loi}}{=} \frac{a}{U}$ où U est une v.a. de loi uniforme sur $[0, 1]$.

On propose des applications de ce résultat.

1. Let B be a BM with initial value $a > 0$ and $T_0 = \inf\{t : B_t = 0\}$. Identify the law of $\sup_{u \leq T_0} B_u$.
2. Prove that, for $a > 0$, $\sup_u (B_u - au) \stackrel{\text{loi}}{=} \frac{1}{2a} \mathbf{e}$, where \mathbf{e} is a standard exponential variable with mean 1.
3. Let B be a BM and T_1 the first hitting time of 1. Define $I_t = -\inf_{s \leq t} B_s$. Identify the law of I_{T_1} .

Exercice 7.5.4 Loi du maximum.

On rappelle que, pour T fixé, $\max_{t \leq T} W_t \stackrel{\text{loi}}{=} |W_T|$. On note $C = E[(e^{-\sigma W_T} - 1)^+]$ et $P = [(1 - e^{\sigma W_T})^+]$. Montrer que pour $x > 0$

$$E[\max_{t \leq T} (xe^{\sigma W_t} - xe^{\sigma W_T})] = x[C + P]$$

(Il n'y a aucun calcul à faire)

7.6 Filtrations

Exercice 7.6.1 Agent initié L'agent initié connaît la valeur terminale du Brownien. Le problème est de savoir comment se transforment les martingales.

Soit $Z_t \stackrel{\text{def}}{=} W_t - \int_0^t \frac{W_T - W_u}{T - u} du$

1. Soit f une fonction déterministe. Montrer que

$$E[Z_u \int_0^T f(v) dW_v] = \int_0^u f(v) dv - \int_0^u ds \frac{1}{T-s} \int_s^T dv f(v)$$

En déduire que si, pour tout u , $E[Z_u \int_0^T f(v) dW_v] = 0$, alors f vérifie

$$f(u) = \frac{1}{T-u} \int_u^T dv f(v) \text{ et montrer que } f \text{ est une constante.}$$

2. Soit $t < T$. On admet que $E(W_t|W_T) = aW_T + b$ où a et b sont des constantes. Montrer que $b = 0$ et que $a = \frac{t}{T}$. (On pourra prendre l'espérance des deux membres et calculer $E(W_t W_T)$)
3. Soit $s < t < T$. On admet que $E(W_t|W_s, W_T) = aW_s + bW_T + c$ où a, b et c sont des constantes. Montrer que $a = \frac{T-t}{T-s}$, $b = \frac{t-s}{T-s}$, $c = 0$.
4. On note $\mathcal{F}_t^* = \mathcal{F}_t \vee \sigma(W_T)$ la tribu engendrée par $(W_u, u \leq t)$ et par W_T . On admet que pour $s < t$, $E(W_t|W_T, W_s) = E(W_t|\mathcal{F}_s^*)$. Montrer que Z est une (\mathcal{F}_t^*) -martingale. On pourrait montrer que c'est un MB.

Exercice 7.6.2 Soit \mathbf{G} une filtration et W un \mathbf{G} mouvement brownien.

1. Soit \mathbf{H} une filtration plus petite que \mathbf{G} . Vérifier que le processus $M_t = E(W_t|\mathcal{H}_t)$ est une martingale. (on précisera par rapport à quelle filtration).
2. Soit $X_t = W_t + \int_0^t Y_u du$ où Y est un processus \mathbf{G} adapté intégrable. On note \mathbf{F}^X la filtration de X (qui vérifie $\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{G}_t$) et $\hat{Y}_u = E(Y_u|\mathcal{F}_u^X)$. Vérifier que $Z_t = (X_t - \int_0^t \hat{Y}_u du, t \geq 0)$ est une \mathbf{F}^X -martingale (on calculera l'espérance conditionnelle de Z_t par rapport à \mathcal{F}_s^X). Montrer que Z est un mouvement Brownien.

7.7 Options barrières

Exercice 7.7.1 On note \mathcal{N} la fonction de répartition de la loi normale et $M_t = \sup(B_s, s \leq t)$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $P(B_t \leq x) = P(B_t \leq -x) = \mathcal{N}(x(\sqrt{t})^{-1})$.
2. Soit $y > 0$ donné, $T = \inf\{t \geq 0 | B_t = y\}$. Soit $B_t^* = B_{T+t} - B_T$. On admet que T est un temps d'arrêt et $(B_t^*, t \geq 0)$ est un Brownien indépendant de \mathcal{F}_T .

(a) Montrer que

$$P(B_t \leq x, M_t > y) = P(T < t, B_{t-T}^* \leq x - y)$$

(b) Montrer que

$$P(T < t, B_{t-T}^* \leq x - y) = \int_0^t P(T \in du) P(B_{t-u}^* \leq x - y) = P(T < t, B_{t-T}^* \geq y - x)$$

(c) Montrer que pour $y > x$, on a

$$P(B_t \leq x, M_t > y) = P(B_t \geq 2y - x)$$

En déduire que

$$P(B_t \leq x, M_t < y) = \mathcal{N}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - \mathcal{N}\left(\frac{x-2y}{\sqrt{t}}\right)$$

3. En déduire la loi de T , celle de M_t et la densité du couple (B_t, M_t) .
4. Soit $X_t = \mu t + B_t$, $Y_t = \sup(X_s, 0 \leq s \leq t)$. Montrer, en utilisant le théorème de Girsanov, que le calcul de

$$P(X_t < x, Y_t < y)$$

se déduit du calcul précédent.

7.8 Méandres, ponts, excursions

Exercice 7.8.1 Loi conditionnelle. Soit $d_t = \inf\{s \geq t : B_s = 0\}$. Montrer que $d_t(W) \stackrel{\text{loi}}{=} t + \frac{(-W_t)^2}{G^2}$ où G est une variable gaussienne de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ indépendante de W_t . Soit $g = \sup\{t \leq 1 : B_t = 0\}$. Calculer $P(g \leq t | \mathcal{F}_t)$.

Exercice 7.8.2 Martingale d'Azéma. On admet que le processus $m_u = \frac{1}{\sqrt{t-g_t}} |B_{g_t+u(t-g_t)}|$, $u \leq 1$ est indépendant de \mathcal{F}_{g_t} , que $\text{sgn} B_t$ est \mathcal{F}_{g_t} mesurable et que m_1 a pour densité $xe^{-x^2/2} \mathbb{1}_{x>0} dx$. Calculer $E(B_t | \mathcal{F}_{g_t})$, $E(B_t^2 - t | \mathcal{F}_{g_t})$ et $E(e^{\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2} t} | \mathcal{F}_{g_t})$. Montrer que ces processus sont des martingales.

7.9 Divers

Exercice 7.9.1 Soit $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$ et $\tilde{S}_t = S_t \max(1, \max_{0 \leq s \leq t} \frac{K}{S_s})$. Calculer $e^{-rT} E(\tilde{S}_T)$

Exercice 7.9.2 Soit S un brownien géométrique

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$$

On pose $M_t = \frac{1}{t} \int_0^t S_u du$. Calculer

$$E((M_T - k)^+ | \mathcal{F}_t) \mathbb{1}_{M_t \geq (Tk/t)}$$

1. Soit $s < t$ $M_s = \sup_{u \leq s} W_u$, $M_t^s = \sup_{s \leq u \leq t} W_u$. Calculer $P(M_s < a, M_t^s < b, W_t < c)$. On donnera le résultat sous forme d'une intégrale.

2. Soit $X_t = e^{2(W_t + \nu t)}(x + \int_0^t e^{2(W_s + \nu s)} ds)$. Montrer que

$$dX_t = f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dW_t$$

où l'on explicitera les fonctions f et g . Comment pourrait-on calculer le prix d'une option européenne sur le sous-jacent X , en présence d'un actif sans risque de taux constant r ?

Exercice 7.9.3 Let B be a Brownian motion and $T_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$ where $a > 0$.

1. Using the Doléans-Dade exponential of λB , prove that

$$E(e^{-\lambda^2 T_a} / 2 | \mathcal{F}_t) = e^{-\lambda a} + \lambda \int_0^{T_a \wedge t} e^{-\lambda(a-B_u) - \lambda^2 u/2} du$$

and that

$$e^{-\lambda^2 T_a/2} = e^{-\lambda a} + \lambda \int_0^{T_a} e^{-\lambda(a-B_u) - \lambda^2 u/2} du$$

2. By differentiating the Laplace transform of T_a , and the fact that φ satisfies the Kolmogorov equation, prove that

$$\lambda e^{-\lambda c} = 2 \int_0^\infty e^{-\lambda^2 t/2} \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, c) dt$$

where $\varphi(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/(2t)}$.

3. Prove that, for any f

$$E(f(T_a) | \mathcal{F}_t) = E(f(T_a)) + 2 \int_0^{T_a \wedge t} \int_0^\infty f(u+s) \frac{\partial}{\partial u} \varphi(u, B_s - a) du dB_s$$

4. Deduce that

$$\mathbb{1}_{T_a < t} = P(T_a < t) + 2 \int_0^{T_a \wedge t} \varphi(T-t, B_t - a) dB_t$$

Chapter 8

Processus à sauts

8.1 Processus de Poisson

Dans cette section, N_t est un processus de Poisson d'intensité déterministe $\lambda(s)$ et $M_t = N_t - \int_0^t \lambda(s)ds$ la martingale compensée.

Exercice 8.1.1 Soit $N^i, i = 1, 2$ deux processus de Poisson indépendants de même intensité. Montrer que $N^1 - N^2$ est une martingale.

Exercice 8.1.2 Soit $\mathcal{F}_t^* = \sigma(N_s, s \leq t, N_T)$. Montrer que

$$M_t^* \stackrel{def}{=} N_t - \int_0^t \frac{N_T - N_s}{T - s} ds$$

est une \mathcal{F}_t^* -martingale.

Exercice 8.1.3 Montrer que les processus

$$\begin{aligned} X_t &= \exp\left(\int_0^t s dN_s + \int_0^t \lambda(s)(1 - e^s)ds\right) \\ Y_t &= \exp\left(\int_0^t \ln(1 + s) dM_s + \int_0^t [\ln(1 + s) - s]\lambda(s)ds\right) \end{aligned}$$

sont des martingales.

Exercice 8.1.4 Caractérisation de Processus de Poisson.

1. Calculer $\psi(z, t) = \sum_n z^n P(N_t = n)$.
2. Soit X un processus à accroissements indépendants, à valeurs dans l'ensemble des entiers, tel que $X_{t+s} - X_t \stackrel{loi}{=} X_s$ et $\psi(z, t) = \sum_n z^n P(X_t = n)$. Montrer que $\psi(z, t + h) = \psi(z, t)\psi(z, h)$. On suppose qu'il existe ν tel que

$$\frac{1}{h}P(X_h \geq 2) \rightarrow 0, \quad \frac{1}{h}P(X_h = 1) \rightarrow \nu, \quad \frac{1}{h}(1 - P(X_h = 0)) \rightarrow \nu$$

quand h tend vers 0. Montrer que $\frac{\partial}{\partial t}\psi(z, t) = \nu(z-1)\psi(z, t)$. Quel est le processus X ?

Exercice 8.1.5 Soit $(Y_i, i \geq 1)$ des variables indépendantes équadistribuées d'espérance μ et indépendantes de N . On note $X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$ le processus de Poisson composé. Soit $M_t = N_t - \lambda t$ et $Z_t = X_t - \mu \lambda t$. Montrer que Z et $(M_t Y_t - \mu \lambda t, t \geq 0)$ sont des martingales.

Exercice 8.1.6 On considère l'équation

$$X_t = x + N_t - c \int_0^t X_s ds$$

1. Montrer que cette équation admet au plus une solution.
2. Montrer que

$$e^{-ct}x + \int_0^t e^{-c(t-s)} dN_s$$

est une solution.

Exercice 8.1.7 On note $\tau = T_1$ le premier saut de N et $D_t = N_{t \wedge \tau}$

1. Déterminer δ tel que $Z_t = D_t - \int_0^{t \wedge \tau} \delta_u du$ soit une martingale.
2. On note $L_t = (1 - D_t)/(1 - F(t))$ où $F(t) = P(\tau \leq t)$ est supposée continue. Montrer que $dL_t = \alpha_t dZ_t$ où on explicitera α . Même question si F est seulement continue à droite.
3. Soit N_1 et N_2 deux PP d'intensité constante λ_1 et λ_2 et D_i les processus associés. On note $\mu_1(t) = (\frac{\alpha_1}{\lambda_1} - 1)D_2(t-)$ et $\mu_2(t) = (\frac{\alpha_2}{\lambda_2} - 1)D_1(t-)$. Soit ρ_t solution de $d\rho_t = \rho_{t-}(\mu_1(t)dZ_1(t) + \mu_2(t)dZ_2(t))$. Expliciter ρ_t . Soit $dQ = \rho_t dP$. Calculer $Q(\tau_1 > t, \tau_2 < s)$ pour $s < t$.

Exercice 8.1.8 Calculer la TL de $\int_0^t N_s ds$.

Exercice 8.1.9 Montrer que

$$f(N_t) = f(N_0) + \Delta f(0) \int_0^t dN_s + \int_0^t dN_s \left(\int_0^s \Delta^2 f(N_u - dN_u) \right)$$

Calculer $\int_0^t dN_s \left(\int_0^s dN_u \right)$ et $\int_0^t dN_s \left(\int_0^s dN_u \int_0^u dN_v \right)$

8.2 Poisson composé

Let λ be a positive number and μ be a probability law on \mathbb{R} . A (λ, μ) compound Poisson process is a process $X = (X_t, t \geq 0)$ of the form

$$X_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k$$

where N is a Poisson process with intensity $\lambda > 0$ and $(Y_k, k \in \mathbb{N})$ are non-negative i.i.d. random variables with law μ , independent of N . It differs from a Poisson process since the sizes of the jump are random variables, independent of the Poisson process.

Exercice 8.2.1 We denote by Y a random variable with law μ . Prove that a compound Poisson process is with independent increments, and

$$E(X_t) = \lambda t E(Y)$$

$$\text{Var}(X_t) = \lambda t E(Y^2).$$

Exercice 8.2.2 Let X be a (λ, μ) compound Poisson process. Prove that the process

$$M_t^f = \sum_{s \leq t} f(\Delta X_s) \mathbb{1}_{\Delta X_s \neq 0} - t \lambda \mu(f)$$

is a martingale; the process

$$(M_t^f)^2 - t \lambda \mu(f^2)$$

is a martingale.

Suppose that X is a pure jump process and that there exists a finite positive measure σ such that

$$\sum_{s \leq t} f(\Delta X_s) \mathbb{1}_{\Delta X_s \neq 0} - t \sigma(f)$$

is a martingale for any f , then X is a compound Poisson process.

Exercice 8.2.3 If X is a (λ, μ) compound Poisson process,

$$E(e^{-\alpha X_t}) = \exp \left(-\lambda t \left(1 - \int_0^\infty e^{-\alpha u} \mu(du) \right) \right).$$

Exercice 8.2.4 Let X be a (λ, μ) compound Poisson process and f a bounded Borel function. Then,

$$\exp \left(\sum_{k=1}^{N_t} f(Y_k) + t \int (1 - e^{f(x)}) \lambda \mu(dx) \right)$$

is a martingale.

8.3 Formule d'Itô

Exercice 8.3.1 Soit W un mouvement Brownien et $M_t = N_t - \lambda t$ la martingale compensée associée au processus de Poisson N d'intensité constante λ .

1. Montrer que la solution de

$$dS_t = S(t_-)(r dt + \sigma dW_t + \phi dM_t), \quad S_0 = x$$

est, pour $\phi > -1$

$$S_t = x e^{rt} \exp(\sigma W_t - \frac{1}{2} \sigma^2 t) \exp(\ln(1 + \phi) N_t - \phi \lambda t). \quad (8.1)$$

2. Ecrire la solution en faisant apparaître la martingale M .
3. Quelle est la dynamique de $1/S_t$?
4. Quelle est la dynamique de S_t^2 ?
5. Calculer $E(S_t)$ et $E(S_t^2)$.
6. Quelle est la solution de (8.1) pour $\phi = -1$? et pour $\phi < -1$?
7. Quelle est la solution de (8.1) lorsque les coefficients dépendent du temps?

Exercice 8.3.2 Soit

$$dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t + \phi(t, X_{t-}) dM_t$$

et H une fonction de classe $C^{1,2}$. Sous quelles conditions le processus $Y_t = H(t, X_t)$ est-il une martingale locale?

Exercice 8.3.3 Soit un espace de probabilité (Ω, \mathbf{F}, P) sur lequel évoluent un mouvement Brownien W et un processus de Poisson N , d'intensité déterministe λ . On suppose que $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, N_s, s \leq t)$.

1. Déterminer la dynamique de toutes les martingales strictement positives.
2. Soit Q une probabilité équivalente à P sur tout \mathcal{F}_t . Caractériser la dynamique de la densité L_t de Q par rapport à P .
3. Quelles sont les formes possibles de L si on impose que, sous Q le processus $\tilde{S} = e^{-rt} S_t$ où S a pour dynamique

$$dS_t = S(t_-)(r dt + \sigma dW_t + \phi dM_t)$$

soit une martingale?

4. Même question si

$$dS_t = S(t_-)(\mu dt + \sigma dW_t + \phi dM_t)$$

8.4 Défaut

Exercice 8.4.1 Soit τ un temps aléatoire sur un espace $(\Omega, \mathcal{G}_t, P)$. On suppose qu'il existe un processus positif, \mathbf{G} -adapté $(\lambda_s, s \geq 0)$ tel que $\mathbb{1}_{\tau \leq t} - \int_0^{t \wedge \tau} \lambda_u du$ soit une \mathcal{G}_t martingale. Soit h une fonction borélienne, X une variable aléatoire \mathcal{G}_T mesurable et

$$V_t = E(X \exp - \int_t^T \lambda_s ds + \int_t^T du h_u \lambda_u (\exp - \int_t^u \lambda_s ds) | \mathcal{G}_t).$$

Montrer que

$$\mathbb{1}_{\{t < \tau\}} V_t = E\left((\Delta V_\tau) \mathbb{1}_{\{t < \tau \leq T\}} + X \mathbb{1}_{\{T < \tau\}} \mid \mathcal{G}_t\right).$$

(Appliquer Ito à $V_t \exp - \int_0^t \lambda_s ds + \int_0^t du h_u \lambda_u (\exp - \int_0^u \lambda_s ds) = U_t$ et à $U_t(1 - \mathbb{1}_{\tau \leq t})$).

8.5 Marché complets, incomplets

Exercice 8.5.1 Soit

$$dS_t = S_{t-}[\mu dt + \phi dM_t]$$

and $r = 0$. Quelle est la condition pour que ce marché soit sans arbitrage? Quelle est le m.m.e.? Quelle est la dynamique de S sous Q ?

Exercice 8.5.2 On étudie un modèle dans lequel il y a un actif sans risque de taux r et un actif risqué

$$dS_t = S(t_-)(r dt + \sigma dW_t + \phi dM_t) \quad (8.2)$$

1. Montrer que ce marché est incomplet, déterminer les m.m.e..
2. Quels sont les actifs duplicables?
3. On note $X^{x, \pi, C}$ la valeur d'un portefeuille π de richesse initiale x , avec processus de consommation cumulé C . Montrer que

$$R_t X_t = x + \int_0^t \pi_s X_s d(RS) - \int_0^t R_s dC_s$$

4. Soit \mathcal{Q} l'ensemble des probabilités risque neutre, et

$$V_t = \text{esssup}_Q E_Q(R_T B | \mathcal{F}_t)$$

On admettra que V est une surmartingale pour tout Q et que toute surmartingale s'écrit comme une martingale moins un processus croissant.

Montrer qu'il existe A^Q processus croissant, μ, ν tels que $V_t = v + \int_0^t \mu_s dW_s^Q + \int_0^t dM_s^Q - A_t^Q$, où W^Q et M^Q sont des Q -martingales et W^Q un MB..
Préciser le lien entre A^P et A^Q .

5. Montrer que $\mu_t \frac{\phi}{\sigma} - \nu_t \geq 0$
6. Montrer que $A^P - \int_0^t \lambda(\mu_s \frac{\phi}{\sigma} - \nu_s)$ est un processus croissant.
7. En déduire que V est la valeur d'un portefeuille X dont on explicitera le processus de consommation.

Exercice 8.5.3 On considère un actif de prix

$$dS_t = S_{t-}(r dt + \varphi dM_t)$$

où M est la martingale composée associée à un processus de Poisson d'intensité constante λ .

1. Vérifier que $S_t e^{-rt}$ est une martingale.
2. Soit X le valeur d'un portefeuille autofinancant comportant θ parts d'actif risqué, soit

$$dX_t = rX_t dt + \theta_t(dS_t - rS_t dt)$$

Vérifier que $\tilde{X}_t = e^{rt} X_t$ est une martingale. Ecrire la dynamique de \tilde{X} en fonction de \tilde{S} .

3. Ecrire l'EDS vérifiée par X/S .
4. On pose $dQ = S_t e^{-rt} / S_0 dP$. Vérifier que X/S est une martingale sous Q .

S

CORRIGES

Chapter 1

Rappels, Corrigés

1.1 Tribu

Exercice 1.1.1: L'ensemble $B - A$ s'écrit $B \cap A^c$. Si \mathcal{F} est une tribu, elle est stable par passage au complémentaire et par intersection, d'où le résultat.

Exercice 1.1.2 : 1) La tribu engendrée par A est constituée des quatre ensembles $A, A^c, \emptyset, \Omega$.

2) Cette tribu doit contenir A et B , l'ensemble vide et Ω . Puis les complémentaires, soit A^c et B^c (les complémentaires de Ω et de l'ensemble vide égaux à l'ensemble vide et à Ω sont déjà dans la liste). Puis les unions d'ensembles soit $A \cup B$, les autres unions $A \cup \Omega = \Omega$, $A \cup B^c = B^c$, ... sont déjà dans la liste. Puis les intersections $A^c \cap B^c$. On a terminé car les autres ensembles formés à partir d'opérations de passage au complémentaire, d'intersection et d'union sont dans la liste par exemple $(A^c \cap B^c) \cup B^c = B^c$.

Exercice 1.1.4 : Soit $\mathcal{G} = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ la famille composée des ensembles qui appartiennent à \mathcal{F}_1 et à \mathcal{F}_2 . La famille \mathcal{G} est une tribu si

(i) $\Omega \subset \mathcal{G}$, ce qui est le cas car $\Omega \subset \mathcal{F}_1, \Omega \subset \mathcal{F}_2$ donc $\Omega \subset \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$.

(ii) la famille \mathcal{G} est stable par passage au complémentaire: si $A \subset \mathcal{G}$, la stabilité des tribus \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 par passage au complémentaire implique $A^c \subset \mathcal{F}_1, A^c \subset \mathcal{F}_2$ donc $A^c \subset \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$.

(iii) la famille \mathcal{G} est stable par intersection dénombrable: si $A_i \subset \mathcal{G}$, la stabilité des tribus \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 par intersection dénombrable implique $\cap_i A_i \subset \mathcal{F}_1, \cap_i A_i \subset \mathcal{F}_2$ donc $\cap_i A_i \subset \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$.

Les autres propriétés résultent des précédentes: L'ensemble vide appartient à \mathcal{G} car c'est le complémentaire de Ω (utiliser (i) et (ii)), la famille \mathcal{G} est stable par union dénombrable: en passant au complémentaire l'identité $(\cap_i A_i)^c \cup (\cup_i A_i^c)$ on obtient $\cap_i A_i = (\cup_i A_i^c)^c$. Il reste à utiliser (ii) et (iii).

L'union de tribus n'est pas une tribu: considérer le cas $\mathcal{F}^1 = \sigma(A), \mathcal{F}^2 = \sigma(B)$. la famille $\mathcal{F}^1 \cup \mathcal{F}^2$ ne contient pas $A^c \cap B^c$. Ne pas confondre sous ensembles

et éléments. Par exemple, un intervalle est un sous ensemble de \mathbb{R} , et n'est pas un élément de \mathbb{R} .

Exercice 1.1.6 : On utilise que $X^{-1}(B) = \{\omega : X(\omega) \in B\}$. La famille \mathcal{C} est une tribu: la stabilité requise provient des égalités suivantes: $X^{-1}(B^c) = (X^{-1}(B))^c$, $X^{-1}(\cap B_n) = \cap X^{-1}(B_n)$. On trouvera une démonstration de la réciproque dans tout ouvrage de proba, cette démonstration est basée sur le théorème qui précise que si une tribu contient une classe stable par intersection finie, elle contient la plus petite tribu engendrée par cette classe.

Exercice 1.1.7 : Les diverses quantités que l'on veut comparer sont égales. Les espérances $E(f(X))$ et $E(f(Z))$ sont égales parce que X et Z ont même loi, et $E(f(X, Y)) = E(f(Z, T))$ car le couple (X, Y) a même loi que le couple (Z, T) . Si l'hypothèse (Z, T) sont indépendantes n'était pas faite, l'égalité en loi des variables X et Z et celle des variables Y et T ne suffirait pas. Par exemple, on peut prendre $X \stackrel{\text{loi}}{=} Y$ de loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$, X et Y indépendantes et $Z = T = X$. On aurait alors $E(X^2 Y^2) = 1$ et $E(Z^2 T^2) = E(X^4) = 3$. (contre exemple pour la question 3)

1.2 Variables gaussiennes.

Exercice 1.2.1 : Par symétrie de la densité et imparité de x^3 , on a $E(X^3) = 0$

et, par parité de x^4 on a $E(X^4) = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x^4 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$. Cette dernière intégrale se calcule par intégrations par parties successives et on obtient $E(X^4) = 3\sigma^4$.

On a également $E(|X|) = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x \exp -\frac{x^2}{2\sigma^2} dx$, d'où $E(|X|) = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}$ et, par des calculs analogues $E(|X^3|) = \frac{4\sigma^3}{\sqrt{2\pi}}$.

Exercice 1.2.4 : Si X et Y sont gaussiennes indépendantes, la somme $X + Y$ est gaussienne: ceci se voit très facilement avec les fonctions caractéristiques:

$$E(e^{it(X+Y)}) = E(e^{itX})E(e^{itY}) = e^{itm_1 - \frac{t^2\sigma_1^2}{2}} e^{itm_2 - \frac{t^2\sigma_2^2}{2}} = e^{itm - \frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

avec $m = m_1 + m_2$ et $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$.

On peut le voir aussi en se souvenant que si X et Y sont indépendantes, de densité f et g , la somme $X + Y$ a pour densité $h(x) = \int_{-\infty}^\infty f(x-y)g(y)dy$ et en effectuant le calcul. Attention, ce résultat n'est pas vrai si on n'a pas l'indépendance de X et Y .

On peut aussi calculer la transformée de Laplace de la somme

$$E(\exp(\lambda(X+Y))) = E(\exp(\lambda(X)))E(\exp(\lambda(Y))) = \exp[\lambda(m(X)+m(Y))+\frac{\lambda^2}{2}(\sigma^2(X)+\sigma^2(Y))]$$

ce qui montre que la somme a une loi gaussienne d'espérance $m(X) + m(Y)$ et de variance $\sigma^2(X) + \sigma^2(Y)$.

Exercice 1.2.5 :

1. Si X est $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, sa densité est $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}$ et la v.a.

$Y = \frac{X-m}{\sigma}$ est $\mathcal{N}(0, 1)$. On peut le vérifier de plusieurs façons.

- En calculant la fonction de répartition de Y : Soit F_Y la fonction de répartition de Y . On a $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \leq m + y\sigma) = F_X(m + y\sigma)$. Il reste à dériver par rapport à y pour obtenir la densité de Y qui est $\sigma f(m + y\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{y^2}{2}$.
- On peut utiliser les fonctions caractéristiques. Soit $\phi(t) = E(e^{itX}) = e^{itm - \frac{t^2\sigma^2}{2}}$ la fonction caractéristique de X ; la fonction caractéristique de Y est

$$E(e^{itY}) = E(e^{it\frac{X-m}{\sigma}}) = e^{-\frac{itm}{\sigma}} \phi\left(\frac{t}{\sigma}\right) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Cette remarque permet de ramener des calculs sur $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ à des calculs sur $\mathcal{N}(0, 1)$.

La variable $X - m$ est gaussienne centrée. D'où en utilisant l'exercice 1, $E(|X - m|) = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}$.

2. On a $E(e^{\lambda X}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} \exp -\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} dx$.

On montre que $e^{\lambda x} \exp -\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} = \exp(\lambda m + \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2) \exp[-\frac{1}{2\sigma^2}(x - (m + \lambda\sigma^2))^2]$ et le résultat s'obtient facilement. item Soit X une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On a

$$E(\mathbb{1}_{X < b} e^{\lambda X}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^b e^{\lambda x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\lambda^2}{2}} \int_{-\infty}^{b-\lambda} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = e^{\frac{\lambda^2}{2}} \Phi(b-\lambda).$$

3. Soit U une variable gaussienne d'espérance m et de variance σ^2 . Pour calculer $E(\exp\{\lambda U^2 + \mu U\})$, on doit calculer

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda u^2 + \mu u} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(u-m)^2} du.$$

On montre que

$$\lambda u^2 + \mu u - \frac{1}{2\sigma^2}(u-m)^2 = -\frac{1}{2\Sigma^2} \left(u - \left(\mu + \frac{m}{\sigma^2}\right)\Sigma^2\right)^2 + \frac{\Sigma^2}{2} \left(\mu + \frac{m}{\sigma^2}\right)^2 - \frac{m^2}{2\sigma^2}$$

avec $\Sigma^2 = \frac{\sigma^2}{1-2\lambda\sigma^2}$.

Il vient

$$E(\exp\{\lambda U^2 + \mu U\}) = \frac{\Sigma}{\sigma} \exp\left(\frac{\Sigma^2}{2}\left(\mu + \frac{m}{\sigma^2}\right)^2 - \frac{m^2}{2\sigma^2}\right).$$

En particulier

$$E(\exp \lambda U^2) = \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda\sigma^2}} \exp \frac{m^2\lambda}{1-2\lambda\sigma^2}$$

4. Il est facile, par changement de variable, d'obtenir $E(e^{\theta X} f(X)) = e^{m\theta + \sigma^2\theta^2/2} E(f(X + \theta\sigma^2))$ pour f continue bornée.
5. Par dérivation par rapport à θ , on obtient pour f "régulière" $E(f(X)(X - m)) = \sigma^2 E(f'(X))$.
6. En dérivant $E(e^{aG} \mathcal{N}(bG + c))$ par rapport à b , on obtient le résultat.

Exercice 1.2.6 : Rappels:

la convergence L^2 implique la convergence L^1 : $\|X_n - X\|_2$ converge vers 0 implique $\|X_n - X\|_1$ converge vers 0, avec $\|X\|_1 = \int_{\Omega} |X| dP$. Ce résultat est évident compte tenu de l'inégalité $\|X\|_1 \leq \|X\|_2$ qui résulte de la positivité de la variance $\text{Var}(|X|) = \|X\|_2^2 - \|X\|_1^2$.

Si X_n converge vers X dans L^2 (resp. L^1), on a $E(X_n^2)$ converge vers $E(X^2)$ (resp $E(X_n)$ converge vers $E(X)$). (La réciproque est fausse)

Si X_n converge dans L^2 vers X , on a en particulier m_n converge vers m et σ_n^2 converge vers σ . La suite de fonctions caractéristiques $e^{itm_n - \frac{t^2\sigma_n^2}{2}}$ converge vers $e^{itm - \frac{t^2\sigma^2}{2}}$ et la loi de X est gaussienne.

Exercice 1.2.7 : Soit X un vecteur gaussien. Le vecteur $Y = AX$ est un vecteur gaussien, car toutes les combinaisons linéaires de composantes de Y sont des combinaisons linéaires de composantes de X , donc une variable gaussienne. Que le vecteur X soit gaussien ou non, on a $E(AX) = AE(X)$ et $\text{Var} AX = A^t(\text{Var} X)A$, où $\text{Var} X$ désigne la matrice de variance covariance du vecteur X . On obtient dans le cas $p = 1$ que $A^t(\text{Var} X)A \geq 0$, c'est-à-dire que les matrices de variance covariance sont semi définies positives.

Exercice 1.2.8 : La v.a. $\lambda X + \mu Y$ est gaussienne d'espérance $\lambda E(X) + \mu E(Y)$ et de variance $\lambda^2\sigma^2(X) + \mu^2\sigma^2(Y)$. On en déduit

$$\begin{aligned} E(\exp(\lambda X + \mu Y)) &= \exp \left[\lambda E(X) + \mu E(Y) + \frac{1}{2}(\lambda^2\sigma^2(X) + \mu^2\sigma^2(Y)) \right] \\ &= \exp \left[\lambda E(X) + \frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2(X) \right] \exp \left[\mu E(Y) + \frac{1}{2}\mu^2\sigma^2(Y) \right] = E(\exp \lambda X) E(\exp \mu Y) \end{aligned}$$

d'où l'indépendance.

Exercice 1.2.9 : Si (X, Y) est un vecteur gaussien, X et Y sont des vecteurs gaussiens.

Cas $d = 1$. La projection de X sur (Y_1, Y_2, \dots, Y_n) est de la forme $Pr X = \sum_{i=1}^n a_i Y_i$. C'est une v.a. gaussienne car Y est gaussien. Le vecteur $(X - Pr X, Y)$ est gaussien. Les vecteurs $X - Pr X$ et Y sont indépendants car $E((X - Pr X)Y_i) = 0$ par définition de la projection.

Exercice 1.2.10 : Toujours avec la transformée de Laplace.

On vérifie dans un premier temps que

$$\begin{aligned} E(\exp(\lambda X)) &= E[E(\exp(\lambda X)|Y)] = E[\exp(\lambda(aY + b) + \frac{\lambda^2}{2}\sigma^2)] \\ &= \exp[\lambda a E(Y) + \frac{\lambda^2 a^2}{2}\sigma^2(Y)] \exp[\lambda b + \frac{\lambda^2}{2}\sigma^2] \end{aligned}$$

donc, la v.a. X est gaussienne d'espérance $b + aE(Y)$ et de variance $\sigma^2 + a^2\sigma^2(Y)$.

On calcule de la même façon $E(Y e^{\lambda X}) = E(Y \exp(\lambda(aY + b) + \frac{\lambda^2}{2}\sigma^2))$ et en dérivant par rapport à λ , on trouve $E(XY) = aE(Y^2) + bE(Y)$.

D'autre part

$$\begin{aligned} E(\exp(\lambda X + \mu Y)) &= E[\exp(\mu Y)E(\exp(\lambda X|Y))] \\ &= E[\exp(\mu Y) \exp(\lambda(aY + b) + \frac{\lambda^2}{2}\sigma^2)] = E[\exp[(\lambda a + \mu)Y]] \exp(\lambda b + \frac{\lambda^2\sigma^2}{2}) \\ &= \exp[(\lambda a + \mu)E(Y) + \frac{(\lambda a + \mu)^2}{2}\sigma^2(Y)] \exp(\lambda b + \frac{\lambda^2\sigma^2}{2}) \end{aligned}$$

et on vérifie que ceci est

$$\exp(\lambda E(X) + \mu E(Y)) + \frac{1}{2} \text{Var}(\lambda X + \mu Y)$$

1.3 Espérance conditionnelle

Exercice 1.3.2 : Il suffit de calculer $E([X - Y]^2|\mathcal{G})$ qui vaut 0 (développer le carré) donc, en prenant l'espérance $E([X - Y]^2) = 0$.

Exercice 1.3.5 : Sous les hypothèses de l'exercice $E(X - Y|\mathcal{G}) = E(X|\mathcal{G}) - Y$ car Y est \mathcal{G} -mesurable et $E(X - Y|\mathcal{G}) = E(X - Y) = m$ par indépendance. D'où $E(X|\mathcal{G}) = m + Y$. De la même façon $E((X - Y)^2|\mathcal{G}) = E(X^2|\mathcal{G}) - 2YE(X|\mathcal{G}) + Y^2$ d'où $E(X^2|\mathcal{G}) = \sigma^2 + (Y + m)^2$.

Exercice 1.3.6 : Par définition de la projection $E(XZ) = E((Pr X)Z)$ pour tout Z combinaison linéaire des Y_i . Cela ne suffit pas à dire que $Pr X$ est l'espérance conditionnelle car il existe des v.a. qui sont Y -mesurable et qui ne sont pas combinaison linéaire des Y_i . Mais nous avons montré que $X - Pr X$ et Y sont indépendantes, d'où $E(X - Pr X|Y) = E(X - Pr X) = 0$. D'où

$E(X|Y) = Pr X$.

Si $n = 1$, $E(X|Y) = Pr X$ appartient à l'espace engendré par Y donc s'écrit αY , et on déduit de $E(X|Y) = \alpha Y$, après multiplication par Y et intégration $\alpha = \frac{E(XY)}{E(Y^2)}$.

Exercice 1.3.7 : Soit $X = X_1 + X_2$. On a $E(X|\mathcal{G}) = E(X_1|\mathcal{G}) + E(X_2|\mathcal{G}) = E(X_1) + X_2$. Puis $E(X^2|\mathcal{G}) = E(X_1^2) + X_2^2 + 2X_2E(X_1)$ et

$$\text{Var}(X|\mathcal{G}) = E(X^2|\mathcal{G}) - (E(X|\mathcal{G}))^2 = \text{Var} X_1.$$

$$E(e^{\lambda X}|\mathcal{G}) = E(e^{\lambda X_1} e^{\lambda X_2}|\mathcal{G}) = e^{\lambda X_2} E(e^{\lambda X_1}) = e^{\lambda X_2} \exp(\lambda E(X_1) + \frac{\lambda^2}{2} \text{Var}(X_1))$$

Exercice 1.3.8 : Il est facile de montrer la suite d'égalités

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Z_1, Z_2|\mathcal{G}) &= E(Z_1 Z_2|\mathcal{G}) - E(Z_1|\mathcal{G})E(Z_2|\mathcal{G}) \\ &= E(Z_1 Z_2|\mathcal{G}) - E(Z_2(E(Z_1|\mathcal{G})))|\mathcal{G}) \\ &= E((Z_1 - E(Z_1|\mathcal{G})) Z_2|\mathcal{G}) \end{aligned}$$

Exercice 1.3.9 : Le membre de droite, noté K est \mathcal{H} mesurable. Il suffit de vérifier que

$$E(X \mathbb{1}_H) = E(K \mathbb{1}_H)$$

pour tout $H \in \mathcal{H}$, ce qui se réduit à

$$E(X \mathbb{1}_C \mathbb{1}_A) = E(K \mathbb{1}_C \mathbb{1}_A), \text{ et } E(X \mathbb{1}_C \mathbb{1}_{A^c}) = E(K \mathbb{1}_C \mathbb{1}_{A^c})$$

ce qui est routine.

Exercice 1.3.10 : Par linéarité, $E(aX + b|Z) = aE(X|Z) + b$. La tribu engendrée par Z est composée des sous-ensembles de Ω de la forme $Z^{-1}(A)$ où A est un borélien de \mathbb{R} et $Z^{-1}(A) = \{\omega | Z(\omega) \in A\} = \{\omega | \alpha Y(\omega) + b \in A\} = \{\omega | Y(\omega) \in B\}$ où B est l'ensemble des nombres réels tels que $x \in B \iff \alpha x + b \in A$ et est un borélien (La preuve parfaite exigerait la démonstration de ce point, qui tient au fait que B est l'image réciproque de A par l'application $g : y \rightarrow \frac{1}{\alpha}y - b$, soit $B = g^{-1}(A)$ et que g est continue, donc borélienne)

Exercice 1.3.11 : La première question est directe en utilisant le résultat admis dans l'exercice 1.1.6. En utilisant cette question, on a que $E(X|\mathcal{G}) \mathbb{1}_{1 \leq \tau}$ est de la forme $h(1 \wedge \tau) \mathbb{1}_{1 \leq \tau} = h(1) \mathbb{1}_{1 \leq \tau}$. En prenant l'espérance des deux membres, on identifie la constante $h(1)$.

Exercice 1.3.12 : Trivial.

Exercice 1.3.13 : $E(X|\mathcal{F})$ est $\mathcal{G} \vee \mathcal{F}$ mesurable. Soit $F \in \mathcal{F}$ et $G \in \mathcal{G}$, on a alors, en utilisant l'indépendance

$$E(X \mathbb{1}_F \mathbb{1}_G) = E(X \mathbb{1}_F) E(\mathbb{1}_G)$$

et

$$E(\mathbb{1}_F \mathbb{1}_G E(X|\mathcal{F})) = E(\mathbb{1}_F E(X|\mathcal{F})) E(\mathbb{1}_G)$$

donc $E(X \mathbb{1}_F \mathbb{1}_G) = E(\mathbb{1}_F \mathbb{1}_G E(X|\mathcal{F}))$. Nous avons donc montré que $E(X \mathbb{1}_H) = E(\mathbb{1}_H E(X|\mathcal{F}))$ pour tout $H \in \mathcal{G} \vee \mathcal{F}$ de la forme $H = F \cap G$. Ces ensembles engendrent la tribu $\mathcal{G} \vee \mathcal{F}$ et forment une famille stable par intersection. L'application qui à H associe $E(X \mathbb{1}_H)$ (resp. $E(\mathbb{1}_H E(X|\mathcal{F}))$) définit une mesure positive sur cette tribu, les deux mesures, après normalisation par $E(X)$ sont des probabilités (c'est-à-dire l'application qui à H associe $E(X \mathbb{1}_H)/E(X)$ est une probabilité) qui coïncident sur les ensembles de la forme $F \cap G$, donc, par théorème de classe monotone, elles coïncident sur la tribu engendrée.

Exercice 1.3.14 : Seule la réciproque demande une démonstration. Si $E_Q(X|\mathcal{G}) = E_P(X|\mathcal{G})$ alors $E_P(LX|\mathcal{G}) = E_P(X|\mathcal{G})E_P(L|\mathcal{G}) = E_P(XE_P(L|\mathcal{G})|\mathcal{G})$. D'où $E_P(X(L - E_P(L|\mathcal{G}))|\mathcal{G}) = 0$ pour tout X . Il en résulte (prendre $X = L - E_P(L|\mathcal{G})$) que $L - E_P(L|\mathcal{G}) = 0$.

Exercice 1.3.15 : Soit $dQ = \Psi(X)dP$. On a $E_P(\phi(X)) = \int \phi(x)f(x)dx$, $E_Q(\phi(X)) = E_P(\Psi(X)\phi(X)) = \int \Psi(x)\phi(x)f(x)dx$. Il suffit de choisir Ψ telle que $\Psi(x)f(x) = g(x)$.

1.4 Martingales

Exercice 1.4.1 : Soit $s \geq t$ et $X_t = E(X|\mathcal{F}_t)$. On a, en utilisant $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$

$$E(X_s|\mathcal{F}_t) = E(X|\mathcal{F}_s|\mathcal{F}_t) = E(X|\mathcal{F}_t) = X_t.$$

Exercice 1.4.2 : Soit $X_t = M_t - A_t$. On a, pour $t \geq s$ $E(X_t|\mathcal{F}_s) = M_s - E(A_t|\mathcal{F}_s)$ et comme $A_s \leq A_t$ ou $-A_t \leq -A_s$, $E(X_t|\mathcal{F}_s) \leq M_s - E(A_s|\mathcal{F}_s) = M_s - A_s = X_s$.

Exercice 1.4.3 : C'est le lemme de Fatou: de l'inégalité

$$E(M_{t \wedge \tau_n}|\mathcal{F}_s) = M_{s \wedge \tau_n}$$

on en déduit l'inégalité de surmartingale en utilisant que $M_{s \wedge \tau_n}$ converge vers M_s et que

$$\lim E(M_{t \wedge \tau_n}|\mathcal{F}_s) \leq E(\lim M_{t \wedge \tau_n}|\mathcal{F}_s) = E(M_t|\mathcal{F}_s)$$

(le lemme de Fatou assure que $\lim E(X_n|\mathcal{G}) \leq E(\lim X_n|\mathcal{G})$ si les v.a. sont positives).

Soit $F \in \mathcal{F}$ et $G \in \mathcal{G}$ $E(X \mathbb{1}_F \mathbb{1}_G) = E(\mathbb{1}_F \mathbb{1}_G E(X|\mathcal{F}))$ car $E(X \mathbb{1}_F \mathbb{1}_G) = E(X \mathbb{1}_F)E(\mathbb{1}_G)$ et $E(\mathbb{1}_F \mathbb{1}_G E(X|\mathcal{F})) = E(\mathbb{1}_F E(X|\mathcal{F}))E(\mathbb{1}_G)$.

Exercice 1.4.4 : Par définition de la propriété de martingale, $X_t = E(X_T | \mathcal{F}_t)$. Cette propriété est à la base de tous les calculs d'évaluation en finance. En effet, ces formules reposent sur le fait qu'un certain processus est une martingale et donc que sa valeur à l'instant t est l'espérance conditionnelle de sa valeur terminale.

Exercice 1.4.7 : Soit $\mathbf{G} = (\mathcal{G}_t, t \geq 0)$ la filtration de M , c'est à dire $\mathcal{G}_t = \sigma(M_s, s \leq t)$. Par définition, $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t$ (La martingale M est \mathbf{F} adaptée, et la filtration de M est la plus petite filtration telle que la propriété d'adaptation soit vraie. On a alors $E(M_t | \mathcal{G}_s) = E(M_t | \mathcal{F}_s | \mathcal{G}_s) = E(M_s | \mathcal{G}_s) = M_s$ On peut aussi montrer que si M est une \mathbf{F} -martingale et $\mathcal{H}_t \subset \mathcal{F}_t$, $E(M_t | \mathcal{H}_t)$ est une \mathbf{H} -martingale.

Exercice 1.4.8 : Pour $s < t$, on a $(\tau \leq s) \subset (\tau < t)$, d'où

$$Z_t = E(\tau \leq t | \mathcal{F}_t) \geq E(\tau \leq s | \mathcal{F}_t)$$

et le résultat suit en prenant l'espérance conditionnelle par rapport à \mathcal{F}_s .

1.5 Temps d'arrêt

Exercice 1.5.1 : La seule difficulté est la stabilité par passage au complémentaire. Si $A \in \mathcal{F}_\tau$ on écrit

$$A^c \cap (\tau \leq t) = (\tau \leq t) - (A \cap (\tau \leq t)) \in \mathcal{F}_t$$

Exercice 1.5.2 : Par hypothèse sur X , pour tout a , $\{X \leq a\} \in \mathcal{F}_T$ Par définition de la tribu \mathcal{F}_T , $\{X \leq a\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Par suite $\{X \leq a\} \cap \{T \leq a\} \in \mathcal{F}_a$. Le premier membre de cette inclusion est $\{X \leq a\}$.

Exercice 1.5.4 : Il suffit d'écrire

$$A \cap (T \leq t) = A \cap (S \leq t) \cap (T \leq t)$$

et donc, si $A \in \mathcal{F}_S$ on a $A \cap (T \leq t) \in \mathcal{F}_t$.

Exercice 1.5.5: Il suffit d'écrire

$$(S \leq a) \cap (S \leq t) = (S \leq (a \wedge t)) \in \mathcal{F}_{a \wedge t}$$

Exercice 1.5.6: Montrons que $S \leq T \in \mathcal{F}_T$. pour cela , on écrit

$$(S \leq T) \cap (T \leq t) = (S \wedge t \leq T \wedge t) \cap (T \leq t) \cap (S \leq t)$$

et chacu des trois ensembles du membre de droite est dans \mathcal{F}_t (car $S \wedge t$ est plus petit que t donc \mathcal{F}_t mesurable).

On introduit $R = S \wedge T$. C'est un temps d'arrêt, \mathcal{F}_R mesurable avec $\mathcal{F}_R \subset \mathcal{F}_T$. Donc $(R = T) \in \mathcal{F}_T$, et $(R < T) \in \mathcal{F}_T$, par suite $(S < T) \in \mathcal{F}_T$ et $S = T \in \mathcal{F}_T$, ainsi que $T \leq S$ et $T < S$.

Exercice 1.5.7 : Soit ω fixé. La fonction $t \rightarrow Z_t(\omega)$ vaut 1 pour $t \in [S(\omega), T(\omega[$ et 0 sinon. Elle est continue sur les trois intervalles $[0, S(\omega)[$, $]S(\omega), T(\omega[$, $]T(\omega), \infty[$. Elle est continue à droite en $S(\omega)$ car si $t \rightarrow S(\omega)$ "par la droite" (soit $t > S(\omega)$), $Z_t(\omega) = 1$ tend vers $Z_{S(\omega)}(\omega) = 1$.

Exercice 1.5.11 : Utiliser le théorème d'arrêt et le temps d'arrêt T_y pour $y > a$. On a $E(M_{T_y \wedge t}) = a$. On fait alors tendre t vers l'infini $M_{T_y \wedge t}$ converge vers y sur $T_y < \infty$ et vers 0 sinon. (et est borné). D'où $P(T_y < \infty) = a/y$. Il reste à remarquer que $P(T_y < \infty) = P(\sup M_t \geq y)$.

1.6 Temps discret

Exercice 1.6.3 : L'égalité $E(X_{n+p}|\mathcal{F}_n) = X_n$ est vraie pour $p = 1$. En utilisant

$$E(X_{n+p}|\mathcal{F}_n) = E(X_{n+p}|\mathcal{F}_{n+p-1}|\mathcal{F}_n) = E(X_{n+p-1}|\mathcal{F}_n)$$

on démontre le résultat par récurrence.

Exercice 1.6.4 : On obtient

$$\begin{aligned} E((H \cdot M)_n|\mathcal{F}_{n-1}) &= \sum_{k=1}^n E(H_k(M_k - M_{k-1})|\mathcal{F}_{n-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} H_k(M_k - M_{k-1}) + E(H_n(M_n - M_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} H_k(M_k - M_{k-1}) + H_n E(M_n - M_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} H_k(M_k - M_{k-1}) \end{aligned}$$

1.7 Algèbre bêta-gamma

1.8 Divers

Exercice 1.8.1 :

$$E(\exp -\lambda M_\tau) = E(\theta \int_0^\infty dt e^{-\theta t} e^{-\lambda M_t}) = E(\theta \int_0^\infty dt e^{-\theta t} \lambda \int_{M_t}^\infty e^{-\lambda u} du)$$

$$\begin{aligned}
&= E(\theta \int_0^\infty dt \int_0^\infty du e^{-\theta t} \lambda \mathbb{1}_{u > M_t} e^{-\lambda u}) = E(\theta \int_0^\infty du \int_0^\infty dt e^{-\theta t} \lambda \mathbb{1}_{T_u > t} e^{-\lambda u}) \\
&= \theta E(\int_0^\infty du e^{-\lambda u} \lambda \int_0^{T_u} dt e^{-\theta t}) = \int_0^\infty du e^{-\lambda u} \lambda (1 - e^{-\theta T_u})
\end{aligned}$$

Exercice 1.8.2 : La partie directe est évidente, car $e^{\lambda X}$ et $e^{\lambda Y}$ sont indépendantes. La réciproque n'est pas vraie, comme le montre le contre exemple suivant: Soit X, Y telles que $P(X = i, Y = j) = a_{i,j}$ où les $a_{i,j}$ sont donnés par les coefficients de la matrice

$$\begin{bmatrix} 1/9 & 1/6 & 1/18 \\ 1/18 & 1/9 & 1/6 \\ 1/6 & 1/18 & 1/9 \end{bmatrix}$$

La loi de X est égale à celle de Y et $P(X = i) = 1/3 = P(Y = j)$. On vérifie que X et Y ne sont pas indépendantes (par exemple $P(X = 1, Y = 3) \neq 1/9$). La loi de $X + Y$ est égale à la loi de $X_1 + Y_1$ où X_1 a même loi que X , Y_1 a même loi que Y et X_1 et Y_1 sont indépendantes.

Cet exercice montre que la loi de la somme de deux v.a. dépend très fortement de la loi du COUPLE. Rappelons à ce sujet que si Z_1 et Z_2 sont gaussiennes, cela n'implique pas que $Z_1 + Z_2$ est gaussienne: Le contre exemple suivant dû à Nelson le prouve: Soit n la densité gaussienne réduite centrée et u une fonction impaire continue, nulle hors de $[-1, +1]$ telle que $|u(x)| < (2\pi e)^{-1/2}$. On vérifie que $f(x, y) = n(x)n(y) + u(x)u(y)$ est une densité, que les lois marginales sont normales, et la loi de la somme n'est pas normale.

Par contre, si le vecteur (X, Y) est gaussien, la somme $X + Y$ est gaussienne. Pour que le vecteur (X, Y) soit gaussien, il faut et il suffit que X soit gaussien et que la loi conditionnelle de Y à X soit gaussienne.

Chapter 2

Mouvement Brownien, Corrigés

2.1 Propriétés élémentaires

Exercice 2.1.1 : Trivial. Ceci constitue une caractérisation du mouvement Brownien comme processus gaussien.

Exercice 2.1.2 :

1. On a $E(B_s B_t^2) = E(E(B_s B_t^2 | \mathcal{F}_s))$. La variable B_s est \mathcal{F}_s -mesurable, d'où, si $t > s$, $E(B_s B_t^2) = E(B_s E(B_t^2 | \mathcal{F}_s))$.
On sait que $B_t^2 - t$ est une martingale, d'où $E(B_t^2 | \mathcal{F}_s) = B_s^2 - s + t$. En utilisant que B_t est centré et que $E(B_t^3) = 0$, on obtient que

$$E(B_s B_t^2) = E(B_s (B_s^2 - s + t)) = E(B_s^3) = 0.$$

Si $s > t$, on a $E(B_s B_t^2) = E(E(B_s B_t^2 | \mathcal{F}_t)) = E(B_t^2 E(B_s | \mathcal{F}_t)) = E(B_t^3) = 0$.

2. Le MB est une martingale, donc $E(B_t | \mathcal{F}_s) = B_s$ pour $t \geq s$ et $E(B_t | \mathcal{F}_s) = B_s$ pour $t < s$ car B_t est \mathcal{F}_s -mesurable dans ce cas. Si $s < t$, $E(B_t | B_s) = E(B_t - B_s + B_s | B_s) = E(B_t - B_s | B_s) + B_s = B_s$ car $B_t - B_s$ est indépendant de B_s et centré. Si $t < s$, on s'inspire du pont Brownien (voir ex suivant) pour écrire $E(B_t | B_s) = E(B_t - \frac{t}{s} B_s | B_s) + \frac{t}{s} B_s$. La v.a. $B_t - \frac{t}{s} B_s$ est centrée et indépendante de B_s : en effet, le couple $(B_t - \frac{t}{s} B_s, B_s)$ est un couple gaussien centré et sa covariance est nulle. On en déduit $E(B_t | B_s) = \frac{t}{s} B_s$.
On peut aussi utiliser les résultats sur le conditionnement d'un vecteur gaussien.

3. La variable $B_t + B_s$ est gaussienne (car B est un processus gaussien) centrée. On peut aussi écrire $(B_t + B_s)$ comme une somme de v.a. gaussiennes indépendantes: $B_t + B_s = B_t - B_s + 2B_s$. On en déduit que sa variance est $t + 3s$.

4. Soit θ_s une variable aléatoire bornée \mathcal{F}_s -mesurable. On a, pour $s \leq t$

$$E(\theta_s(B_t - B_s)) = E(E(\theta_s(B_t - B_s)|\mathcal{F}_s)) = E(\theta_s E((B_t - B_s)|\mathcal{F}_s)) = 0.$$

De même

$$E(\theta_s(B_t - B_s)^2) = E(E(\theta_s(B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_s)) = E(\theta_s E((B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_s)) = (t-s)E(\theta_s).$$

5. $E(\mathbb{1}_{B_t \leq a}) = \int_{\Omega} \mathbb{1}_{B_t \leq a} dP = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-\frac{x^2}{2t}) dx = \int_{-\infty}^{a/\sqrt{t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{y^2}{2}) dy = \mathcal{N}(\frac{a}{\sqrt{t}})$. On peut aussi écrire

$$E(\mathbb{1}_{B_t \leq a}) = P(B_t \leq a) = P(\sqrt{t}U \leq a) = P(U \leq a/\sqrt{t}) \text{ où } U \text{ est une v.a. de loi } \mathcal{N}(0, 1).$$

$$E(B_t \mathbb{1}_{B_t \leq a}) = \int_{-\infty}^a x \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-\frac{x^2}{2t}) dx = \sqrt{t} \int_{-\infty}^{a/\sqrt{t}} y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{y^2}{2}) dy$$

et la dernière intégrale se calcule facilement.

Exercice 2.1.3 :

Pour $t > u$, la propriété d'indépendance et de stationarité des accroissements conduit à

$$f(B_t) = f(B_t - B_u + B_u) \stackrel{\text{loi}}{=} f(\widehat{B}_{t-u} + B_u) \stackrel{\text{loi}}{=} f(\widehat{B}_{t-u} + \sqrt{u}G)$$

où $\widehat{B}_s = B_{s+u} - B_u$ est un MB indépendant de \mathcal{F}_u .

Exercice 2.1.4 :

On peut calculer la densité de B_{Θ}

$$P(B_{\Theta} \in dx) = \int P(B_t \in dx) \theta e^{-\theta t} \mathbb{1}_{t>0} dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-\frac{x^2}{2t}) \theta e^{-\theta t} dt$$

On trouve

$$P(B_{\Theta} \in dx) = \frac{\sqrt{2\theta}}{2} e^{-|x|\sqrt{2\theta}} dx$$

mais ce calcul d'intégrale n'est pas trivial. Cependant, on peut y arriver sans utiliser un attirail lourd de changement de variables. On sait que la transformée de Laplace du temps d'atteinte du niveau a par un mouvement Brownien est $e^{-|a|\sqrt{2\lambda}}$ et que la densité de ce temps d'atteinte est $\frac{|a|}{\sqrt{2\pi u^3}} e^{-a^2/2u}$. Ce qui s'écrit

$$e^{-|a|\sqrt{2\lambda}} = E(e^{-\lambda T_a}) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{|a|}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-a^2/2t} dt.$$

Par dérivation par rapport à λ , on obtient

$$\frac{|a|}{\sqrt{2\lambda}} e^{-|a|\sqrt{2\lambda}} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{|a|}{\sqrt{2\pi t}} e^{-a^2/2t} dt.$$

D'où

$$\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-a^2/2t} dt = \frac{\sqrt{2\lambda}}{2} e^{-|a|\sqrt{2\lambda}}.$$

Exercice 2.1.5 :

1. Le processus M est \mathbf{F} -mesurable. M_t est intégrable: $E(|B_t^3|) = Ct^{\frac{3}{2}}$ où C

est une constante et $E|\int_0^t B_s ds| \leq \int_0^t E(|B_s|) ds = \int_0^t \sqrt{\frac{2s}{\pi}} ds < \infty$.

En utilisant que, pour $t > s$, la v.a. $B_t - B_s$ est indépendante de \mathcal{F}_s , on obtient

$$E(B_t^3 | \mathcal{F}_s) = E((B_t - B_s + B_s)^3 | \mathcal{F}_s) = E((B_t - B_s)^3) + 3B_s E(B_t - B_s)^2 + 3B_s^2 E(B_t - B_s) + B_s^3$$

d'où $E(B_t^3 | \mathcal{F}_s) = 3B_s(t - s) + B_s^3$.

D'autre part

$$E\left(\int_0^t B_u du | \mathcal{F}_s\right) = \int_0^t E(B_u | \mathcal{F}_s) du = \int_0^s E(B_u | \mathcal{F}_s) du + \int_s^t E(B_u | \mathcal{F}_s) du = \int_0^s B_u du + B_s(t - s)$$

La propriété de martingale est alors facile à vérifier.

2. Des calculs analogues montrent que $B_t^3 - 3tB_t$ est une martingale. Il suffit de montrer que pour $s < t$, $E(B_t^3 - 3tB_t | \mathcal{F}_s) = B_s^3 - 3sB_s$. Or, en utilisant que $B_t - B_s$ est indépendant de \mathcal{F}_s , on obtient $E((B_t - B_s)^3 | \mathcal{F}_s) = E((B_t - B_s)^3) = 0$ car $E(X^3) = 0$ si X est une variable gaussienne centrée. Il reste à utiliser $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ pour obtenir

$$\begin{aligned} E(B_t - B_s)^3 | \mathcal{F}_s &= E(B_t^3 | \mathcal{F}_s) - 3B_s E(B_t^2 | \mathcal{F}_s) + 3B_s^2 E(B_t | \mathcal{F}_s) - B_s^3 \\ &= E(B_t^3 | \mathcal{F}_s) - 3B_s(B_s^2 - s + t) + 3B_s^2 B_s - B_s^3 \end{aligned}$$

Le processus $B_t^3 - 3tB_t$ est une martingale, donc par différence $tB_t - \int_0^t B_s ds$ est une martingale, égale (intégration par parties) à $\int_0^t s dB_s$.

3. La v.a. X_t est \mathcal{F}_t mesurable et intégrable : en effet $|X_t| \leq t|B_t| + \int_0^t |B_s| ds = Z$ et il est facile de vérifier que Z est intégrable (soit $E(Z) < \infty$, car $E(|B_t|) = \frac{2t}{\sqrt{2\pi}}$).

Soit $t > s$.

$$\begin{aligned} E(X_t | \mathcal{F}_s) &= E\left(tB_t - \int_0^t B_u du | \mathcal{F}_s\right) = tE(B_t | \mathcal{F}_s) - \int_0^t E(B_u | \mathcal{F}_s) du \\ &= tB_s - \int_0^s B_u du - \int_s^t B_s du = tB_s - \int_0^s B_u du - B_s(t - s) = - \int_0^s B_u du + B_s s = X_s \end{aligned}$$

le processus X est une martingale.

On peut aussi appliquer la formule d'Itô et vérifier que $dX_t = t dB_t$.

Comme $f(s) = s$ est de carré intégrable (soit $\int_0^t s^2 ds < \infty$), l'intégrale

de Wiener $\int_0^t s dB_s$ est une martingale. On peut aussi remarquer que, par

intégration par parties, $X_t = \int_0^t s dB_s$.

4. On verra plus tard que U n'est pas une martingale. On peut remarquer que $E(U_t)$ n'est sans doute pas constant.

5. Soit $t > s$. $E(Y_t | \mathcal{F}_s) = E(t^2 B_t - 2 \int_0^t B_u du | \mathcal{F}_s) = t^2 E(B_t | \mathcal{F}_s) - 2 \int_0^t E(B_u | \mathcal{F}_s) du =$
 $t^2 B_s - 2 \int_0^s B_u du - 2 \int_s^t B_s du = t^2 B_s - 2 \int_0^s B_u du - 2 B_s(t - s) = Y_s +$
 $(t^2 - s^2) B_s - 2 B_s(t - s)$ Pour que Y soit une martingale, il faudrait que
 $0 = (t^2 - s^2) B_s - 2 B_s(t - s) = (t - s) B_s(t + s - 2)$, ce qui n'est pas.

Exercice 2.1.6 : En écrivant $M_t = -(B_t^2 - t) + (a + b)B_t - ab$ et en utilisant que B et $(B_t^2 - t, t \geq 0)$ sont des martingales, le caractère martingale de M provient de la structure espace vectoriel de l'ensemble des martingales. Le processus $M_{t \wedge T_{a,b}}$ est une martingale de valeur initiale $-ab$, donc $E[M_{t \wedge T_{a,b}}] = -ab$. Le temps d'arrêt $T_{a,b}$, majoré par T_a est fini. Lorsque t converge vers l'infini $M_{t \wedge T_{a,b}} = (a - B_{t \wedge T_{a,b}})(B_{t \wedge T_{a,b}} - b) + t \wedge T_{a,b}$ converge vers $(a - B_{T_{a,b}})(B_{T_{a,b}} - b) + T_{a,b} = T_{a,b}$, car $(a - B_{T_{a,b}})(B_{T_{a,b}} - b) = 0$. La quantité $(a - B_{t \wedge T_{a,b}})(B_{t \wedge T_{a,b}} - b)$ est majorée par $(a - b)^2$ et la quantité $t \wedge T_{a,b}$ converge en croissant vers $T_{a,b}$ dont on ne sait pas qu'elle est intégrable. On peut conclure en appliquant le théorème de Lebesgue dominé pour la partie $E(a - B_{t \wedge T_{a,b}})(B_{t \wedge T_{a,b}} - b)$ et le théorème de convergence monotone pour la partie portant sur le temps d'arrêt. On en déduit $E(T_{a,b}) = -ab$.

Exercice 2.1.9 : Soit $t \geq s$. $E_x(f(B_t)g(B_s)) = E_x(f(\hat{B}_{t-s} + B_s)g(B_s)) =$
 $E \left[\int dy f(y) p_{t-s}(B_s, y) g(B_s) \right] = E(\Psi(X_s))$ avec $\Psi(z) = g(z) \int f(y) p_{t-s}(z, y) dy$.
D'où $E_x(f(B_t)g(B_s)) = \int p_s(x, z) \Psi(z) dz$.

Autre mode de raisonnement: On applique la propriété de Markov.

$$E_x(f(B_t)g(B_s)) = E_x(g(B_s)E((f(B_t)|\mathcal{F}_s))) = E_x(g(B_s)E((f(B_t)|B_s))) = E_x(g(B_s)\varphi(B_s))$$

avec $\varphi(z) = E_z(f(B_{t-s})) = \int f(y) p_{t-s}(z, y) dy$.

Exercice 2.1.11 :

$$E_x(\exp -\lambda(W_t)^2) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\lambda t}} \exp\left(-\frac{\lambda x^2}{1 + 2\lambda t}\right)$$

Exercice 2.1.13 : $E \left| \int_0^1 \frac{B_s}{s} ds \right| \leq \int_0^1 E \left| \frac{B_s}{s} \right| ds = c \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{s}} ds < \infty.$

Exercice 2.1.14 Utiliser que $\{B_t < 0\} \subset \{\tau \leq t\}.$

Exercice 2.1.16 La quantité $e^{-\lambda t} u(B_t)$ est majorée par $e^{-\lambda t} M$, qui est intégrable sur $[0, \infty]$, d'où l'existence de f et g .
La suite d'égalités

$$\begin{aligned} E_x \left(\int_{\tau}^{\infty} dt e^{-\lambda t} u(B_t) \right) &= E_x \left(E_x \left[\int_{\tau}^{\infty} dt e^{-\lambda t} u(B_t) \middle| \mathcal{F}_{\tau} \right] \right) \\ E_x \left[\int_{\tau}^{\infty} dt e^{-\lambda t} u(B_t) \middle| \mathcal{F}_{\tau} \right] &= e^{-\lambda \tau} E_x \left[\int_0^{\infty} dt e^{-\lambda t} u(B_{t+\tau} - B_{\tau} + B_{\tau}) \middle| \mathcal{F}_{\tau} \right] \\ E_x \left[\int_0^{\infty} dt e^{-\lambda t} u(B_{t+\tau} - B_{\tau} + B_{\tau}) \middle| \mathcal{F}_{\tau} \right] &= \int_0^{\infty} dt e^{-\lambda t} E_x(u(B_{t+\tau} - B_{\tau} + B_{\tau}) | \mathcal{F}_{\tau}) \\ E_x(u(B_{t+\tau} - B_{\tau} + B_{\tau}) | \mathcal{F}_{\tau}) &= E_{B_{\tau}}[u(\hat{B}_t)] \end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte de la propriété forte de Markov, \hat{B} étant le Brownien $(B_{t+\tau} - B_{\tau}, t \geq 0)$, indépendant de \mathcal{F}_{τ} , conduisent à

$$E_x \left(\int_{\tau}^{\infty} dt e^{-\lambda t} u(B_t) \right) = E_x(e^{-\lambda \tau} \psi(B_{\tau}))$$

avec $\psi(x) = \int_0^{\infty} dt e^{-\lambda t} E_x[u(\hat{B}_t)] = f(x)$ ce qui est le résultat souhaité.

Exercice 2.1.17 : Il suffit d'écrire

$$\sum \frac{\alpha^k}{k!} E(B_t^k | \mathcal{F}_s) = \sum \frac{\alpha^k}{k!} H_k(B_s, -(t-s))$$

Exercice 2.1.19 : $P(\text{au moins un zero dans }]s, t[| B_s = a) = T(T_a \leq t-s).$
Il reste à calculer

$$2 \int_0^{\infty} da \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-a^2/2s} \int_0^{t-s} dx (2\pi x^3)^{-1/2} a \exp\left(-\frac{a^2}{2x}\right)$$

On utilise Fubini et de la trigo.

2.2 Processus Gaussien

Exercice 2.2.1 : Soit $Y_t = \int_0^t B_u du$. Le processus Y est défini trajectoire par trajectoire, comme intégrale de Riemann d'une fonction continue. En particulier, on a $dY_t = B_t dt$. Le processus Y est un processus gaussien. Tout d'abord, Y_t est une gaussienne comme limite de sommes de Riemann qui sont des gaussiennes car B est un processus gaussien. Le caractère gaussien du processus s'obtient par un raisonnement analogue.

On a $E(Y_t) = \int_0^t E(B_u) du = 0$.

La covariance de Y est $E(Y_t Y_s) = \int_0^t du \int_0^s dv E(B_u B_v)$. Il reste à intégrer

$$\int_0^t du \left[\int_0^s dv (u \wedge v) \right].$$

On se place dans le cas $s < t$ et il vient

$$E(Y_t Y_s) = \int_0^s du \left[\int_0^s (v \wedge u) dv \right] + \int_s^t du \left[\int_0^s (v \wedge u) dv \right] = \int_0^s du \left[\int_0^u v dv + \int_u^s u dv \right] + \int_s^t du \left[\int_0^s v dv \right]$$

Tous calculs faits, pour $s < t$: $E(Y_t Y_s) = \frac{s^2}{6}(3t - s)$.

Exercice 2.2.2

La solution est

$$X_t = e^{-at} x + e^{-at} \int_0^t e^{(a+b)t} dB_t$$

On procède comme pour le processus d'OU. On peut aussi résoudre $dX_t = -aX_t dt$ ce qui donne $X_t = ce^{-at}$ et appliquer une méthode de variation de la constante. On cherche un processus c tel que $X_t = C_t e^{-at}$ vérifie l'équation (cette méthode ne prend toute sa signification que si on a vu le lemme d'Itô)

$$dX_t = -aC_t e^{-at} dt + e^{-at} dC_t = -aX_t dt + e^{bt} dB_t$$

d'où $e^{-at} dC_t = e^{bt} dB_t$ soit $dC_t = e^{(b+a)t} dB_t$. Il resterait à vérifier que l'on a bien trouvé une solution, car on ne dispose pas du lemme d'Itô et on ne sait pas justifier que la dérivée de $C_t e^{-at}$ est $-aC_t e^{-at} dt + e^{-at} dC_t$.

Exercice 2.2.4 :

1. Le processus $(Z_t = B_t - tB_1, 0 \leq t \leq 1)$ est un processus gaussien car pour tout choix de (a_i, t_i)

$$\sum a_i Z_{t_i} = \sum a_i B_{t_i} - \left(\sum a_i t_i \right) B_1$$

est une v.a.r. gaussienne (B est un processus gaussien). De la même façon, on obtient que le vecteur (Z_t, B_1) est gaussien. Ses deux composantes Z_t et B_1 sont indépendantes car $E(Z_t B_1) = E(B_t B_1) - tE(B_1^2) = 0$. La covariance de Z est

$$E(Z_t Z_s) = E(B_s B_t) - sE(B_1 B_t) - tE(B_s B_1) + tsE(B_1^2) = (s \wedge t) - st.$$

On appelle Z un pont Brownien.

2. Le processus $(Y_t = Z_{1-t}, 0 \leq t \leq 1)$ est gaussien centré. Sa covariance est, pour $s \leq t$,

$$E(Y_t Y_s) = (1-t) \wedge (1-s) - (1-s)(1-t) = (s \wedge t) - st = s(1-t).$$

3. Soit $Y_t = (1-t)B_{\frac{t}{1-t}}$. Le processus Y est un processus gaussien car $\sum a_i Y_{t_i} = \sum b_i B_{s_i}$. On a $E(Y_t) = 0$ et pour $s < t$

$$E(Y_s Y_t) = (1-t)(1-s)E(B_{\frac{t}{1-t}} B_{\frac{s}{1-s}}) = (1-t)(1-s)\frac{s}{1-s} = s(1-t)$$

Exercice 2.2.5 : Par définition de l'intégrale de Riemann, toute combinaison linéaire $\sum_i a_i Z_{t_i}$ est limite dans L^2 de sommes du type $\sum_j b_j B_{t_j}$, d'où le caractère gaussien. (Attention, il ne faut pas se contenter de dire que Z est la somme de deux processus gaussiens. La somme de deux v.a. gaussiennes n'est pas nécessairement une gaussienne. Cette propriété est vraie si les variables sont indépendantes) On utilise ici que $\int_0^t \frac{B_s}{s} ds = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{B_{t_i}}{t_i} (t_{i+1} - t_i)$.

Pour caractériser la loi du processus gaussien Z , il suffit de donner son espérance et sa covariance (sa variance s'en déduira). Il est immédiat de montrer que $E(Z_t) = 0$. Il reste à calculer la covariance. Soit $s < t$.

$$E(Z_s Z_t) = E(B_s B_t) - E\left[\int_0^t B_s \frac{B_u}{u} du\right] - E\left[B_t \int_0^s \frac{B_u}{u} du\right] + E\left[\int_0^t du \frac{B_u}{u} \int_0^s dv \frac{B_v}{v}\right]$$

On utilise que $E\left(\int_a^b f(B_u) du\right) = \int_a^b E[f(B_u)] du$ et que $E(B_u B_v) = u \wedge v$. Après quelques calculs d'intégration sur les intégrales doubles, il vient $E(Z_s Z_t) = s \wedge t$. Le processus Z est un processus gaussien d'espérance nulle et de covariance $s \wedge t$.

Le processus Z est donc un mouvement Brownien. Cependant le processus Z n'est pas une (\mathcal{F}_t) martingale: pour $s > t$

$$E(Z_s - Z_t | \mathcal{F}_t) = \int_t^s \frac{1}{u} B_s du \neq 0$$

On a ici l'exemple d'un processus qui est un MB (et une martingale par rapport à sa propre filtration), mais qui n'est pas un brownien, ni même une martingale par rapport à une filtration plus grosse. Le problème est connu sous le nom de grossissement de filtration. (Voir l'exercice sur l'agent initié, dans le chapitre compléments)

Exercice 2.2.6 : $B_u - \frac{u}{t}B_t = (B_u - \frac{u}{t+h}B_{t+h}) - \frac{u}{t}(B_t - \frac{t}{t+h}B_{t+h})$ montre la croissance et B_t est orthogonal à $B_u - \frac{u}{t}B_t$.

Exercice 2.2.7 : Rappel : soit X est une v.a. de loi $N(m; \sigma^2)$ et $Y = \exp\{\lambda(X - m) - \frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2\}$. Soit $dQ = YdP$. Sous Q , X est une v.a. de densité $N(m + \lambda\sigma^2, \sigma^2)$.

On montre alors que $\tilde{B}_t = B_t - mt$ a une loi gaussienne sous Q .

On vérifie ensuite l'indépendance des accroissements: il s'agit de montrer que

$$E_Q(\phi(\tilde{B}_{t+s} - \tilde{B}_s) \psi(\tilde{B}_s)) = E_Q(\phi(\tilde{B}_{t+s} - \tilde{B}_s)) E_Q(\psi(\tilde{B}_s))$$

pour toutes fonctions boréliennes bornées (ϕ, ψ) . On a, par changement de probabilité, avec $L_t = \exp(mB_t - \frac{m^2}{2}t)$

$$A = E_Q(\phi(\tilde{B}_{t+s} - \tilde{B}_s) \psi(\tilde{B}_s)) = E_P(L_{t+s} \phi(\tilde{B}_{t+s} - \tilde{B}_s) \psi(\tilde{B}_s)).$$

On a $\tilde{B}_{t+s} - \tilde{B}_s = B_{t+s} - B_s - mt$.

En utilisant l'indépendance de $B_{t+s} - B_s$ et de B_s (sous P) et la forme de L , on obtient

$$A = E_P[\exp(m(B_{t+s} - B_s) - \frac{1}{2}m^2t) \phi(B_{t+s} - B_s - mt)] E_P[\exp(mB_s - \frac{1}{2}m^2s) \psi(\tilde{B}_s)].$$

Sous P , $B_{t+s} - B_s$ et B_t ont même loi, d'où

$$\begin{aligned} A &= E_P[\exp(mB_t - \frac{1}{2}m^2t) \phi(B_t - mt)] E_P[\exp(mB_s - \frac{1}{2}m^2s) \psi(\tilde{B}_s)] \\ &= E_P[\exp(mB_t - \frac{1}{2}m^2t) \phi(\tilde{B}_t)] E_P[\exp(mB_s - \frac{1}{2}m^2s) \psi(\tilde{B}_s)] \end{aligned}$$

ce qui conduit à

$$A = E_Q(\phi(\tilde{B}_t)) E_Q(\psi(\tilde{B}_s)).$$

Exercice 2.2.8 :

$$\sup_t (|B_t| - \mu t^{p/2}) = \sup_s (|B_{\lambda^2 s}| - \mu (\lambda^2 s)^{p/2}) \stackrel{\text{loi}}{=} \sup_s (\lambda |B_s| - \mu (\lambda^2 s)^{p/2}) = \lambda \sup_s (|B_s| - s^{p/2})$$

$$E(|B_T|) \leq E((|B_T| - \mu T^{p/2}) + \mu T^{p/2}) \leq E(\sup_t (|B_t| - \mu t^{p/2})) + \mu E(T^{p/2})$$

2.3 Multidimensionnel

Exercice 2.3.2 : Si les coefficients σ_i sont des constantes, il suffit de définir $B_3(t) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}(\sigma_1 B_1(t) + \sigma_2 B_2(t))$. Ce processus est un Brownien car c'est une martingale telle que $(B_3^2(t) - t; t \geq 0)$ est une martingale. Si les σ sont

déterministes, on pose $dB_3 = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2(t) + \sigma_2^2(t)}}(\sigma_1(t)dB_1(t) + \sigma_2(t)dB_2(t))$.

Le processus

$$B_{(3)}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}}(B_{(2)}(t) - \rho B_{(1)}(t))$$

est une martingale

$$B_{(3)}^2(t) = \frac{1}{1 - \rho^2}(B_{(2)}^2(t) + \rho^2 B_{(1)}^2(t) - 2\rho B_{(1)}(t)B_{(2)}(t))$$

Par définition de la corrélation, $B_{(1)}(t)B_{(2)}(t) - \rho t$ est une martingale. Il s'en suit que $B_{(3)}^2(t) - t$ est une martingale, donc $B_{(3)}$ est un MB. Il reste à montrer que $B_{(3)}$ est indépendant de $B_{(1)}$. On peut utiliser le théorème de RP pour établir que si le coefficient de corrélation de deux MB est nul, ces processus sont indépendants.

2.4 Temps d'atteinte

Exercice 2.4.1 : Soit $\lambda > 0$. Le processus M défini par $M_t = \exp(\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t)$ est une martingale. On applique le théorème d'arrêt de Doob. Si $a > 0$, la martingale $M_{t \wedge T_a}$ est uniformément intégrable, car majorée par $\exp(\lambda a)$. Donc $E(\exp(\lambda B_{T_a} - \frac{1}{2}\lambda^2 T_a)) = 1$, soit $E(\exp(\lambda a - \frac{1}{2}\lambda^2 T_a) \mathbb{1}_{T_a < \infty}) = 1$. D'où $E(\exp(-\frac{1}{2}\lambda^2 T_a) \mathbb{1}_{T_a < \infty}) = \exp -\lambda a$. Pour $\lambda = 0$; on obtient $P(T_a < \infty) = 1$, puis $E(\exp(-\frac{1}{2}\lambda^2 T_a)) = \exp -\lambda a$. En dérivant par rapport à λ^2 , et en prenant $\lambda = 0$, on en déduit l'espérance de T_a .

Exercice 2.4.2 : La propriété de Markov fort montre que $\hat{B}_t = B_{T_a+t} - B_{T_a} = B_{T_a+t} - a$ est indépendant de \mathcal{F}_{T_a} , donc de T_a . Comme $b > a$, on a

$$T_b = \inf\{t : B_t = b\} = \inf\{t \geq T_a : B_t = b\} = T_a + \inf\{t : \hat{B}_t = b - a\}$$

On en déduit que la v.a. $T_b - T_a$ est indépendante de T_a et que $T_b - T_a \stackrel{loi}{=} T_{b-a}$. Le processus T_a est donc à accroissements indépendants et stationnaires. C'est donc un processus de Lévy.

Exercice 2.4.3 : Appliquer le théorème d'arrêt de Doob à la martingale B_t et à $B_{T \wedge n}^2 - (T \wedge n)$.

Exercice 2.4.5 : On note $S_t = \max_{s \leq t} W_s$. En remarquant que $S_T = \max_{s \leq t} W_s \vee \max_{t < s \leq T} W_s$ on en déduit

$$P(\tau > T | \mathcal{F}_t) = P(S_T < a | \mathcal{F}_t) = \mathbb{1}_{S_t < a} P(\max_{t < s \leq T} W_s - W_t < a - W_t | \mathcal{F}_t)$$

Le processus $\tilde{W}_u = W_{t+u} - W_t$ est un MB indépendant de \mathcal{F}_t . D'où $P(\max_{t < s < T} W_s - W_t < a - W_t | \mathcal{F}_t) = \Psi(a - W_t)$ avec

$$\Psi(x) = P\left(\max_{0 < u < T-t} \tilde{W}_u < x\right) = P(|\tilde{W}_{T-t}| < x) = P(|\sqrt{T-t}G| < x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{T-t}}} e^{-u^2/2} du.$$

Exercice 2.4.6 : Des calculs simples montrent que $E(e^{-\lambda T^d}) = E(\exp(-|B_d|\sqrt{2\lambda})e^{-\lambda d})$. De même, $E(\mathbb{1}_{B_d \leq \alpha} e^{-\lambda T^d}) = E(\mathbb{1}_{B_d \leq \alpha} \Phi(B_d))e^{-\lambda d}$ avec $\Phi(x) = E_x(e^{-\lambda T_0}) = E_0(e^{-\lambda T_x}) = \exp(-|x|\sqrt{2\lambda})$. D'où

$$E(\mathbb{1}_{B_d \leq \alpha} e^{-\lambda T^d}) = E(\mathbb{1}_{B_d \leq \alpha} \exp(-|B_d|\sqrt{2\lambda})e^{-\lambda d}) = E(\mathbb{1}_{G \leq \alpha/\sqrt{d}} \exp(G\sqrt{2d\lambda})e^{-\lambda d})$$

Exercice 2.4.9 : Par définition $P(I \leq x) = P(\inf_{s \leq T_1} B_s \geq -x) = P(T_1 \leq T_{-x})$. En utilisant le théorème d'arrêt $E(B_{T_1 \wedge T_{-x}}) = E(B_0) = 0$, d'où

$$P(T_1 \leq T_{-x}) - xP(T_1 \geq T_{-x}) = 0 = P(T_1 \leq T_{-x}) - x(1 - P(T_1 \leq T_{-x}))$$

$$\text{et } P(T_1 \leq T_{-x}) = \frac{x}{1+x}.$$

Exercice 2.4.10 : On regarde la martingale $\exp \theta X_t - \lambda t$ pour un θ . Ensuite, on montre que

$$(e^{\beta b} - e^{\beta a})e^{\alpha X_t - \lambda t} + (e^{\alpha a b} - e^{\alpha b})e^{\beta X_t - \lambda t}$$

est une martingale pour $\beta = \sqrt{\nu^2 + 2\lambda} - \nu$, $\alpha = -\sqrt{\nu^2 + 2\lambda} - \nu$.

Exercice 2.4.11 : On utilise que $(M_{T_a^*} < y) = (\sup_{u < v} B_u < y)$.

$$\begin{aligned} P(M_{T_a^*} - y > x | M_{T_a^*} > y) &= P(T^* > T_{x+y} | T_a^* > T_y) \\ &= P(M_u - B_u \leq a, T_y < u < T_{x+y} | M_u - B_u < a, \forall u < T_y) \\ &= P(\tilde{M}_u - \tilde{B}_u \leq a, \forall u, 0 < u < \tilde{T}_x) = P(\tilde{M}_{T_a^*} \geq x) \end{aligned}$$

Pour obtenir le paramètre, on calcule l'espérance

$$0 = E(B_{T^* \wedge n}) = E(M_{T_a^* \wedge n}) - E(M_{T_a^* \wedge n} - B_{T_a^* \wedge n})$$

et on passe à la limite $E(M_{T_a^* \wedge n}) = a$.

Exercice 2.4.12 : Le processus $\exp[-2\mu X_t/\sigma^2]$ est une martingale, en effet il est facile de mettre ce processus sous la forme $\exp(\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t)$. On en déduit que $h(X_t)$ est une martingale et que $E(h(X_{\tau \wedge t})) = h(0)$. L'inégalité $|h(X_{\tau \wedge t})| \leq \sup_{x \in [-B, A]} (h(x))$ permet d'appliquer le théorème de convergence dominée.

Exercice 2.4.18 : On sait que (poly, Lambertson et Lapeyre 2nd edition, page 96, Musiela et Rutkowski p. 49, Voir aussi Karatzas et Shreve, page 95) si $M_t = \sup_{s \leq t} W_s$

$$P(W_t \leq x, M_t \leq y) = P(W_t \leq x) - P(W_t \geq 2y - x)$$

pour $0 \leq y, x \leq y$. On en déduit, par dérivation

$$P(W_t \in dx, M_t \leq y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(2y-x)^2}{2t}\right)$$

et

$$P(M_t \leq y | W_t = x) = \frac{P(W_t \in dx, M_t \leq y)}{P(W_t \in dx)} = 1 - \exp\left(-\frac{(2y-x)^2}{2t} + \frac{x^2}{2t}\right)$$

Si le MB est issu de x , on utilise

$$P(\sup_{s \leq t} W_s + x \leq y | W_t + x = z) = P(M_t \leq y - x | W_t = z - x)$$

2.5 Scaling

Exercice 2.5.2 : La partie a) résulte de

$$(T_1 > t) = (1 > S_t) \stackrel{loi}{=} (1 > \sqrt{t}S_1) = \left(\frac{1}{S_1^2} > t\right)$$

La partie c) résulte de

$$\begin{aligned} d_{\Delta_a} &= \inf\{t \geq \Delta_a : B_t = 0\} = \inf\left\{t : \frac{1}{a}A_t \geq 1, \frac{1}{\sqrt{a}}B_t = 0\right\} \\ &\stackrel{loi}{=} \inf\{t : A_{t/a} \geq 1, B_{t/a} = 0\} = ad_{\Delta_1} \end{aligned}$$

et

$$(A_g \leq a) = (g \leq \Delta_1) = (1 \leq d_{\Delta_a} \stackrel{loi}{=} (1 \leq ad_{\Delta_1}) = \left(\frac{1}{d_{\Delta_1}} \leq a\right)$$

La partie d) est facile. Dans ce cas $\Delta_1 \stackrel{loi}{=} T_1^* = \inf\{t : \sup_{s \leq t} |B_s| \geq 1\}$.

Exercice 2.5.3 :

$$P\left(\sup_{1 \leq t \leq 1} |W_t| \leq x\right) = P\left(\sup_{1 \leq t \leq (1/x^2)} |W_t| \leq 1\right) = P(M_1 \geq \frac{1}{x^2})$$

2.6 Compléments

Exercice 2.6.1 : On calcule $E((B_t - \hat{B}_t)^2)$

$$\begin{aligned} E((B_t - \hat{B}_t)^2) &= E(B_t^2) + E(\hat{B}_t^2) - 2E(B_t \hat{B}_t) \\ &= 2t - 2E(B_t \hat{B}_t) \end{aligned}$$

Il reste à calculer

$$E(B_t \hat{B}_t) = E[E((B_t \hat{B}_t) | \mathcal{G}_t)] = E(\hat{B}_t^2) = t$$

d'où $E((B_t - \widehat{B}_t)^2) = 0$; il s'en suit l'égalité souhaitée.

Exercice 2.6.4 : Soit $s < t$. Nous devons montrer que pour $u \leq s$, $\beta_u^{(s)} \stackrel{\text{def}}{=} B_u - \frac{u}{s}B_s \in \Pi_t$. Il suffit d'écrire $\beta_u^{(s)} = B_u - \frac{u}{t}B_t + \frac{u}{s}(\frac{s}{t}B_t - B_s) = \beta_u^{(t)} - \frac{u}{s}\beta_s^{(t)}$. Le processus $(\beta_u^{(t)}; u \leq t)$ est indépendant de la variable $\frac{u}{t}B_t$ (calculer les covariances), et $B_u = (\beta_u^{(s)} + \frac{u}{t}B_t)$ est la décomposition orthogonale de B , la projection de F_t est donc $\int_0^t f(s)ds\beta_s^{(t)}$. Le processus \widehat{B} est un processus gaussien centré de covariance $t \wedge s$, c'est un MB (On peut aussi le voir en utilisant des résultats d'unicité en loi de solution d'équa diff) Il est facile de montrer que

$$\widehat{B}_s = \beta_s^{(t)} - \int_0^s \frac{du}{u} \beta_u^{(t)}$$

et que, en particulier

$$\widehat{B}_t = - \int_0^t \frac{du}{u} \beta_u^{(t)}$$

D'où l'égalité des tribus. Il en résulte, en notant $\bar{F}(t) = \int_0^t f(s)ds$ et en utilisant une intégration par partie que

$$\int_0^t f(s)dB_s = \int_0^t f(s)d\widehat{B}_s - \frac{B_t}{t}\bar{F}(t) + \int_0^t \frac{\bar{F}(s)}{s}d\widehat{B}_s.$$

Exercice 2.6.7 : On utilisera le théorème de représentation prévisible pour représenter $W_t^{(1)}, W_t^{(2)}$ en terme de $W^{(3)}$. Si l'égalité était possible, on aurait $W_t^{(i)} = \int_0^t \Phi_s^{(i)}dW_s$ avec $\int_0^t E[\Phi_s^{(i)}]^2 ds = t$ et $E(W_t^{(1)}W_t^{(2)}) = E(\int_0^t \Phi_s^{(1)}\Phi_s^{(2)}ds) = 0$.

Exercice 2.6.8 : Les premières questions se traitaient en utilisant des formules d'intégration par parties, ou la formule d'Itô. A la main, on calcule

$$\begin{aligned} B_t + \int_0^t \frac{W_s - X_s}{1-s} ds &= B_t + \int_0^t \frac{W_s}{1-s} ds - \int_0^t ds \int_0^s \frac{W_u}{(1-u)^2} du - \int_0^t ds \int_0^s \frac{1}{1-u} dB_u \\ &= B_t - \int_0^t \frac{t-u}{1-u} dB_u + \int_0^t \frac{W_s}{1-s} (1 - \frac{t-s}{1-s}) ds \\ &= \int_0^t (1 - \frac{t-u}{1-u}) dB_u + \int_0^t \frac{W_s}{1-s} (1 - \frac{t-s}{1-s}) ds \\ &= (1-t) \int_0^t \frac{1}{1-u} dB_u + (1-t) \int_0^t \frac{W_s}{(1-s)^2} ds \end{aligned}$$

Par différentiation

$$dX_t = (1-t) \frac{W_t}{(1-t)^2} dt - dt \int_0^t \frac{W_s}{(1-s)^2} ds + (1-t) \frac{1}{1-t} dB_t - dt \int_0^t \frac{1}{1-s} dB_s$$

$$= \frac{W_t}{1-t} dt + dB_t - \frac{1}{1-t} X_t dt$$

Le calcul de la covariance du processus Gaussien X s'obtenait en appliquant plusieurs fois le résultat d'isométrie

$$E\left(\int_0^t f(u) dW_u \int_0^s g(u) dW_u\right) = \int_0^{t \wedge s} f(u) g(u) du$$

et en remarquant que les v.a. $\int_0^t f(u) dW_u$ et $\int_0^s g(v) dB_v$ sont indépendantes.

On trouvait pour $s < t$

$$E(X_s X_t) = s + 2s(1-t) + (2-s-t) \ln(1-s)$$

2.7 Finance

Exercice 2.7.1 : On calcule séparément $E(S_t \mathbb{1}_{S_t < K})$ et $E(\mathbb{1}_{S_t < K})$. On trouve

$$E(e^{-rt}(S_t - K)^+) = x\mathcal{N}(d_1(t)) - Ke^{-rt}\mathcal{N}(d_2(t))$$

avec

$$d_1(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}}\left(\ln\left(\frac{x}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 t + rt\right), d_2(t) = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

En appliquant la propriété de Markov, on en déduit

$$E(e^{-r(t-s)}(S_t - K)^+ | \mathcal{F}_s) = x\mathcal{N}(d_1(t-s)) - Ke^{-r(t-s)}\mathcal{N}(d_2(t-s)).$$

Exercice 2.7.2 : Nous présentons le calcul pour deux dates. Il s'agit de calculer l'espérance de

$$(S_T - S_{t_1})^+ \mathbb{1}_{S_{t_1} < K} + (S_T - K)^+ \mathbb{1}_{K < S_{t_1}}$$

On utilise la formule de BS.

$$\begin{aligned} E[(S_T - S_{t_1})^+ \mathbb{1}_{S_{t_1} < K}] &= E[\mathbb{1}_{S_{t_1} < K} E((S_T - S_{t_1}^+ | \mathcal{F}_{t_1}))] \\ E((S_T - S_{t_1}^+ | \mathcal{F}_{t_1})) &= E((S_T - S_{t_1}^+ | \mathcal{F}_{t_1})) \\ &= S_{t_1} \mathcal{N}(d_1) - S_{t_1} e^{-r(T-t_1)} \mathcal{N}(d_2) \end{aligned}$$

avec

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t_1}}\left(\frac{1}{2}\sigma^2(T-t_1) + r(T-t_1)\right)$$

Il vient

$$E[(S_T - S_{t_1}^+ \mathbb{1}_{S_{t_1} < K} = aE(S_{t_1} \mathbb{1}_{S_{t_1} < K})$$

avec

$$\begin{aligned} a &= \mathcal{N}(d_1) - \mathcal{N}(d_2)e^{-r(T-t_1)} \\ E[(S_T - K)^+ \mathbb{1}_{\{K < S_{t_1}\}}] &= E[\mathbb{1}_{\{K < S_{t_1}\}}(S_{t_1} \mathcal{N}(d_1^*) - Ke^{-r(T-t_1)} \mathcal{N}(d_2^*))] \\ d_1^* &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t_1}}\left(\ln\left(\frac{S_{t_1}}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t_1) + r(T-t_1)\right) \end{aligned}$$

Chapter 3

Intégrale d'Itô, Corrigés

3.1 Intégrale de Wiener

Exercice 3.1.1 : On a $tB_t = \int_0^t s dB_s + \int_0^t B_s ds$ (en utilisant la formule d'intégration par parties) et $E(Y_t) = 0$, $E(Y_s Y_t) = ts(t \wedge s)$. Le processus Y est un processus gaussien (c'était d'ailleurs évident par définition de Y). On peut aussi utiliser la formule d'Itô (voir plus loin) qui conduit à $dY_t = t dB_t + B_t dt$.

Exercice 3.1.2 : La v.a. $X_t = \int_0^t (\sin s) dB_s$ est définie, car $\int_0^t \sin^2 s ds < \infty$, pour tout t . Le processus X est gaussien d'espérance nulle et de covariance $E(X_s X_t) = \int_0^{s \wedge t} \sin^2 u du$. Il vient alors $E(X_t X_s) = \frac{s \wedge t}{2} - \frac{1}{4} \sin 2(s \wedge t)$. Le processus X est une martingale, d'où, pour $s < t$, on a $E(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$. La dernière égalité résulte d'une IP.

Exercice 3.1.3 : La v.a. $Y_t = \int_0^t (\tan s) dB_s$ est définie, car $\int_0^t \tan^2 s ds < \infty$ pour $t < \frac{\pi}{2}$. Le processus Y est gaussien, centré de covariance $E(Y_t Y_s) = \int_0^{s \wedge t} \tan^2 u du = \tan(s \wedge t) - (s \wedge t)$. Le processus Y est une martingale.

Exercice 3.1.4 : Soit

$$X_t = (1-t) \int_0^t \frac{dB_s}{1-s}; 0 \leq t < 1$$

En appliquant le Lemme d'Itô (ou une I.P.) à $f(t, y) = (1-t)y$ et $Y_t = \int_0^t \frac{dB_s}{1-s}$

(donc $dY_t = \frac{dB_t}{1-t}$) il vient $dX_t = (-dt) \int_0^t \frac{dB_s}{1-s} + (1-t) \frac{dB_t}{1-t}$, d'où

$$\begin{cases} dX_t &= \frac{X_t}{t-1} dt + dB_t; 0 \leq t < 1 \\ X_0 &= 0 \end{cases}$$

On admet l'unicité de la solution. Le processus X est gaussien car $\int_0^t \frac{dB_s}{1-s}$ est une intégrale de Wiener, et on a $E(X_t) = 0$ et pour $s < t$

$$E(X_s X_t) = (1-t)(1-s)E\left(\int_0^t \frac{dB_u}{1-u} \int_0^s \frac{dB_u}{1-u}\right) = (1-t)(1-s) \int_0^s \frac{du}{(1-u)^2} = (1-t)s$$

En particulier $E(X_t^2) = t(1-t)$ d'où X_t tend vers 0 quand t tend vers 1. Le processus X est un pont Brownien.

Exercice 3.1.5 : Formule évidente en écrivant $B_t = \int_0^t dB_s$ et en utilisant l'isométrie.

Exercice 3.1.6 : $E\left(\int_{t_1}^{t_2} (B_t - B_{t_1}) dt | \mathcal{F}_{t_1}\right) = \int_{t_1}^{t_2} E((B_t - B_{t_1}) | \mathcal{F}_{t_1}) dt = 0$.

Par intégration par parties $\int_{t_1}^{t_2} B_t - B_{t_1} dt = t_2(B_{t_2} - B_{t_1}) - \int_{t_1}^{t_2} t dB_t = \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - t) dB_t$ On en déduit que la variance cherchée est $\int_{t_1}^{t_2} (t_2 - t)^2 dt$.

3.2 Formule d'Itô

Exercice 3.2.1 : 1. Soit $X_t = B_t^2$. On a, en posant $f(x) = x^2$

$$dX_t = f'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}f''(B_t)dt = 2B_t dB_t + dt.$$

2. Soit $X_t = t + \exp B_t$. En posant $f(t, x) = t + e^x$, on a

$$dX_t = dt + \exp B_t dB_t + \frac{1}{2} \exp B_t dt.$$

3. Soit $X_t = B_t^3 - 3tB_t$. En posant $f(t, x) = x^3 - 3tx$ on obtient

$$dX_t = 3B_t^2 dB_t - 3t dB_t - 3B_t dt + \frac{1}{2} 3 2B_t dB_t dB_t = (3B_t^2 - 3t) dB_t.$$

On retrouve le caractère martingale de X établi au chapitre précédent.

Exercice 3.2.2 : Soit $X_t = \exp \int_0^t a(s) ds$ et $Y_t = Y_0 + \int_0^t [b(s) \exp(-\int_0^s a(u) du) dB_s]$, où a et b sont des fonctions déterministes. En utilisant la notation différentielle

$dX_t = a(t) \left(\exp \int_0^t a(s) ds \right) dt$ et $dY_t = b(t) \exp(-\int_0^t a(u) du) dB_t$, d'où $dX_t dY_t = 0$. On pose $Z_t = X_t Y_t$. Par la formule d'Itô, on a

$$dZ_t = X_t dY_t + Y_t dX_t = b(t) dB_t + a(t) X_t Y_t dt$$

soit $dZ_t = a(t) Z_t dt + b(t) dB_t$. Le processus $(Z_t \exp - \int_0^t a(s) ds = Y_t; t \geq 0)$ est une martingale locale.

Exercice 3.2.3 : La formule d'Itô donne (nous omettons les indices t)

$$\begin{aligned} dY &= X_1 X_2 dt + t(X_1 dX_2 + X_2 dX_1 + d\langle X_1, X_2 \rangle) \\ &= X_1 X_2 dt + t(X_2 f'(t) + \sigma_1 \sigma_2) dt + t(X_1 \sigma_2 + X_2 \sigma_1) dB \end{aligned}$$

Exercice 3.2.4 : La formule d'Itô appliquée à $\sin B_t$ donne

$$\sin B_t = 0 + \int_0^t \cos B_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sin B_s ds,$$

d'où $Y_t = \int_0^t \cos B_s dB_s$. C'est une martingale, car $E(\int_0^t \cos^2 B_s ds) < \infty$, pour tout t . On a $E(Y_t) = 0$ et $\text{var } Y_t = E(\int_0^t \cos^2 B_s ds)$.

Exercice 3.2.5 : En appliquant la formule d'Itô, on obtient

$$d(X_t^2 + Y_t^2) = 2X_t dX_t + 2Y_t dY_t + d\langle X \rangle_t + d\langle Y \rangle_t = 2X_t Y_t dB_t - 2X_t Y_t dB_t + (X_t^2 + Y_t^2) dt$$

En posant $Z_t = X_t^2 + Y_t^2$ on montre que le processus Z vérifie $dZ_t = Z_t dt$ ce qui s'intègre en $Z_t = ze^t$.

Exercice 3.2.6 : Il est évident que $dZ_t = Y_t dB_t$. On calcule facilement

$$E(Y_s^2) = \int_0^s e^{2s} ds. \text{ Par suite l'intégrale stochastique est une martingale car}$$

$$E\left(\int_0^t Y_s^2 ds\right) = \int_0^t E(Y_s^2) ds < \infty$$

$$\text{et } E(Z_t) = 0, E(Z_t^2) = E\left(\int_0^t Y_s^2 ds\right).$$

Exercice 3.2.7 : Soit $dX_t = a(K_t - X_t) dt + \sigma dB_t$. On voudrait que $X_t = f(K_t)$. La formule d'Itô appliquée à $f(K_t)$ donne

$$dX_t = f'(X_t) dK_t + \frac{1}{2} f''(K_t) \sigma^2 dt$$

soit

$$dX_t = (f'(K_t)b + \frac{1}{2} f''(K_t) \sigma^2) dt + f'(K_t) \sigma dB_t$$

Si on identifie les deux drifts, on obtient

$$a(K_t - f(K_t)) = f'(K_t)b + \frac{1}{2} f''(K_t) \sigma^2$$

d'où f est solution de

$$\frac{1}{2}\sigma^2 f''(x) + bf'(x) + af(x) = ax.$$

On résout cette EDO et on montre que f est de la forme

$$\alpha e^{\lambda_1 x} + \beta e^{\lambda_2 x} + \left(x - \frac{b}{a}\right)$$

avec λ_1 et λ_2 solutions de $\frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + b\lambda + a = 0$.

Exercice 3.2.8 : Soit $X_t = \int_0^t \sigma(s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(s) ds$. On a

$$dX_t = \sigma(t) dB_t - \frac{1}{2} \sigma^2(t) dt.$$

Soit $Y_t = \exp X_t$. On applique la formule d'Itô avec $f(x) = e^x$.

$$\begin{aligned} dY_t &= \exp(X_t) dX_t + \frac{1}{2} \exp(X_t) \sigma^2(t) dt \\ &= Y_t \left(-\frac{1}{2} \sigma^2(t) dt + \sigma(t) dB_t \right) + \frac{1}{2} Y_t \sigma^2(t) dt \\ &= Y_t \sigma(t) dB_t. \end{aligned}$$

Le processus Y est une martingale locale. C'est une martingale si

$$E \left(\int_0^t Y_t^2 \sigma^2(t) dt \right) < \infty.$$

Ce critère n'est pas très bon, nous en verrons d'autres par la suite.

Si σ est une constante, Y est un brownien géométrique avec drift nul. En particulier,

$$Y_t = \exp(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t)$$

est une (vraie) martingale:

Vérifions à titre d'exercice dans ce cas les conditions d'intégrabilité:

$$Y_t = \exp X_t = \exp(\sigma B_t - \frac{1}{2} \sigma^2 t)$$

d'où

$$E(|Y_t|) = E(Y_t) = E(\exp(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma x - \frac{1}{2} \sigma^2 t} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx = 1$$

$$E(Y_t^2) = E(\exp(2\sigma B_t - \sigma^2 t)) = \exp(\sigma^2 t).$$

En particulier, si $\sigma = 1$ le processus $\exp(B_t - \frac{t}{2})$ est une martingale.

Soit $Z_t = \frac{1}{Y_t}$. Pour calculer dZ_t , on peut utiliser la formule d'Itô

$$dZ_t = -\frac{Y_t \sigma(t)}{Y_t^2} dB_t + \frac{1}{2} \frac{2Y_t^2 \sigma^2(t)}{Y_t^3} dt = Z_t(-\sigma(t)dB_t + \sigma^2(t)dt)$$

ce qui va s'écrire

$$Z_t = Z_0 \exp\left(-\int_0^t \sigma(s)dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(s)ds\right)$$

formule que l'on peut obtenir directement en inversant l'exponentielle.

Exercice 3.2.9 : Par simple application de la formule d'Itô

$$dZ_t = (aZ_t + b)dt + cZ_t dW_t$$

Exercice 3.2.10 : Dans le cas $h = 0$, on a

$$S_t = S_0 e^{(r-q)t} e^{\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t} = e^{(r-q)t} M_t.$$

Donc $M_t = M_0 e^{\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}$ est une martingale positive, d'espérance 1 et on peut l'utiliser comme densité de RN. Sous Q , le processus $\widehat{W}_t = W_t - \sigma t$ est un MB. Dans le cas général

$$S_t = S_0 e^{(r-q)t} e^{\int_0^t h_s ds} e^{\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}.$$

On en déduit $e^{-\int_0^t h_s ds} = \frac{1}{S_t} M_t e^{-(r-q)t}$. Donc

$$e^{-rT} E(e^{-\int_0^T h(S_s) ds} \Psi(S_T)) = e^{-rT} E\left(\frac{1}{S_T} M_T e^{-(r-q)T} \Psi(S_T)\right) = e^{-qT} E_Q\left(\frac{1}{S_T} \Psi(S_T)\right).$$

On se place dans le cas $h_t = S_t^{-p}$ et on pose $Z_t = S_t^p$. Le calcul d'Ito conduit à

$$\begin{aligned} dZ_t &= pS_t^p \sigma dW_t + (r-q)pS_t^p dt + p dt + \frac{1}{2} p(p-1) S_t^{p-2} \sigma^2 dt \\ &= pZ_t \sigma dW_t + \left(\left[(r-q)p + \frac{1}{2} p(p-1) \sigma^2 \right] Z_t + p \right) dt \\ &= (aZ_t + b)dt + cZ_t dW_t \end{aligned}$$

Le processus $f(Z_t)$ est une martingale locale si

$$f'(z)(az + b) + \frac{1}{2} f''(z)c^2 z^2 = 0.$$

On pose $g = f'$. L'équation

$$g(z)(az + b) + \frac{1}{2} g' c^2 z^2 = 0$$

a pour solution $g(z) = \alpha \exp\left(\frac{2b}{c^2 z}\right) z^{-1/c^2}$. Les fonctions f recherchées (ce que l'on appelle les fonctions d'échelle) sont les primitives de g .

Exercice 3.2.11 : Le processus Z est une martingale locale car $dZ_t = cX_t Z_t dB_t$. On a

$$\begin{aligned} dU_t &= 2X_t dX_t + d\langle X \rangle_t \\ &= 2X_t(a - bX_t)dt + 2X_t dB_t + dt \end{aligned}$$

soit $U_t = U_0 + 2 \int_0^t X_s dB_s + \int_0^t (2X_s(a - bX_s) + 1)ds$ On en déduit

$$\frac{1}{2}(X_t^2 - X_0^2 - t) = \int_0^t X_s dB_s + a \int_0^t X_s ds - b \int_0^t X_s^2 ds$$

Exercice 3.2.12 : Pour montrer que Z est une martingale locale, on calcule dZ et on vérifie que son drift est nul. On a $Z_t = f(t, B_t)$ avec $f(t, x) = \frac{1}{\sqrt{1-t}} \exp - \frac{x^2}{2(1-t)}$ Il en résulte que

$$dZ_t = -\frac{B_t}{(1-t)^{3/2}} \exp - \frac{B_t^2}{2(1-t)} dB_t$$

Le processus $(Z_t, t < 1)$ est une martingale locale. C'est une vraie martingale si pour tout $T \leq 1$

$$E\left[\int_0^T \frac{B_t^2}{(1-t)^3} \exp - \frac{B_t^2}{2(1-t)} dt\right] < \infty$$

Le terme de gauche est majoré par $E\left[\int_0^T \frac{B_t^2}{(1-t)^3} dt\right] = \int_0^T \frac{t}{(1-t)^3} dt < \infty$.

Exercice 3.2.13 : Soit $Z_t = (L_t)^a \exp(-\Gamma(a)t)$. Alors

$$dZ_t = dM_t + e^{-\Gamma(a)t} (L_t)^a (-\Gamma(a) + a(a-1)\phi)$$

où M est une martingale.

Exercice 3.2.14 : Il est facile d'établir que

$$dY_t = -Y_t[(2X_t a_t + \sigma_t^2(1 + 2X_t^2))dt + 2X_t \sigma_t dW_t]$$

et, en utilisant que $X_t = 0$ et $Y_t = 1$ on obtient $0 = -\sigma_t^2 dt$.

Exercice 3.2.22 : La fonction d'échelle de $X_t = \exp(B_t + \nu t)$ est $s(x) = x^{-2\nu}$.

Le processus croissant de $s(X)$ est $A_t = \int_0^t (s' \sigma)^2(X_s) ds$.

Exercice 3.2.26 : On obtient facilement

$$E(f(B_1)|\mathcal{F}_t) = E(f(B_1 - B_t + B_t)|\mathcal{F}_t) = E(f(\hat{B}_{1-t} + B_t)|\mathcal{F}_t) = \psi(t, B_t)$$

avec

$$\psi(t, x) = E(f(x + B_{1-t})). \quad (3.1)$$

D'autre part, la formule d'Itô et la propriété de martingale de $\psi(t, B_t)$ conduisent à $\psi(t, B_t) = E(f(B_1)) + \int_0^t \partial_x \psi(s, B_s) dB_s$. On écrit (grâce à 3.1)

$$\partial_x \psi(t, x) = E(f'(x + B_{1-t}))$$

et un raisonnement analogue au précédent montre que si on pose $\varphi(t, x) = E(f'(x + B_{1-t}))$ on obtient

$$\varphi(t, B_t) = E(f'(B_1) | \mathcal{F}_t)$$

3.3 Cas multidimensionnel

Exercice 3.3.1 : De façon évidente, on a

$$dS_3(t) = \frac{1}{2} [dS_1(t) + dS_2(t)] = \frac{1}{2} [r(S_1(t) + S_2(t)) dt + \sigma_1 S_1(t) dB_1(t) + \sigma_2 S_2(t) dB_2(t)].$$

On peut remarquer que

$$\sqrt{\sigma_1^2 S_1^2(t) + \sigma_2^2 S_2^2(t)} dB^3(t) = (\sigma_1 S_1(t) dB_1(t) + \sigma_2 S_2(t) dB_2(t))$$

définit un Brownien B_3 qui permet d'écrire

$$dS_3(t) = r S_3(t) dt + \sigma(t) S_3(t) dB_t^3$$

où $\sigma(t) = \frac{\sqrt{\sigma_1^2 S_1^2(t) + \sigma_2^2 S_2^2(t)}}{S_1(t) + S_2(t)}$ est un processus.

En utilisant le lemme d'Itô, on obtient

$$dS_4(t) = S_4(t) \left(r dt - \frac{1}{8} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) dt + \frac{\sigma_1}{2} dB_1(t) + \frac{\sigma_2}{2} dB_2(t) \right),$$

ce que l'on peut écrire

$$dS_4(t) = S_4(t) \left(r dt - \frac{1}{8} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) dt + \sigma dB_4(t) \right).$$

Pour vérifier que B_3 et B_4 sont des browniens, on peut procéder de différentes façons (voir aussi les exercices sur le Brownien)

- $B_i(t+s) - B_i(t)$ a même loi que $B_i(s)$, cette loi est $\mathcal{N}(0, s)$ et les accroissements sont indépendants
- B_i et $(B_i^2(t) - t, t \geq 0)$ sont des martingales et B_i est un processus continu
- pour tout λ , le processus $\exp(\lambda B_i(t) - \frac{\lambda^2}{2} t)$ est une martingale.

3.4 Compléments

Exercice 3.4.1 : En utilisant le théorème de Fubini pour les intégrales doubles

$$F(x) = \int_{-\infty}^x dz \int_{-\infty}^z dy f(y) = \int_{-\infty}^x dy f(y) \int_y^x dz = \int_{-\infty}^x dy f(y) (x - y)^+$$

Par dérivation par rapport à la borne supérieure

$$F'(x) = \int_{-\infty}^x dy f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \mathbb{1}_{x > y} dy$$

Le lemme d'Itô conduit alors au résultat. La formule finale s'écrit aussi

$$\int_0^t f(B_s) ds = 2 \int_{-\infty}^{\infty} L^B(t, y) f(y) dy$$

avec $L^B(t, y) = \left((B_t - y)^+ - (B_0 - y)^+ - \int_0^t \mathbb{1}_{B_s > y} dB_s \right)$ et est connue sous le nom formule de temps d'occupation. Le processus $L^B(\cdot, y)$ est le temps local de B au point y entre 0 et t . La difficulté est de vérifier que le processus $L(\cdot, y)$ est un processus croissant.

Exercice 3.4.2 : On a, en exprimant X_t comme le produit de $\exp W_1(t)$ et de $U_t = \int_0^t \exp[-W_1(s)] dW_2(s)$ qui vérifie $dU_t = \exp[-W_1(t)] dW_2(t)$

$$\begin{aligned} dX_t &= \exp W_1(t) (\exp -W_1(t)) dW_2(t) + U_t (\exp[W_1(t)] dW_1(t) + \frac{1}{2} \exp[W_1(t)] dt) \\ &= dW_2(t) + X_t dW_1(t) + \frac{1}{2} X_t dt \end{aligned}$$

Soit $f(x) = \sinh x$, alors, $f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x$ et $f''(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x$. On applique le lemme d'Itô:

$$dZ_t = \cosh(W_1(t)) dW_1(t) + \frac{1}{2} \sinh(W_1(t)) dt = \sqrt{1 + Z_t^2} dW_1(t) + \frac{1}{2} Z_t dt$$

$M_t \stackrel{def}{=} W_2(t) + \int_0^t X_s dW_1(s)$ est une martingale locale comme somme de deux martingales locales. Son crochet est $t + \int_0^t X_s^2 ds = \int_0^t (1 + X_s^2) ds$, d'où $\gamma_s = \sqrt{1 + X_s^2}$. En regroupant les résultats $X_t = \int_0^t \sqrt{1 + X_s^2} dW_3(t) + \frac{1}{2} \int_0^t X_t dt$ et $Z_t = \int_0^t \sqrt{1 + Z_s^2} dW_1(s) + \frac{1}{2} \int_0^t Z_s ds$. On obtient donc l'égalité en loi de X et de Z .

Exercice 3.4.4 : (voir Brownien) Le processus Z est une martingale, et le lemme d'Itô conduit à

$$dZ_t = \mathbb{1}_{S_t < a} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{a - W_t}{\sqrt{T-t}} \exp - \frac{(a - W_t)^2}{2} dW_t.$$

3.5 Brownien géométrique et extensions

Exercice 3.5.1 : Soit $dS_t = S_t(b dt + \sigma dB_t)$ un brownien géométrique et $\tilde{S}_t = e^{-bt} S_t$. La formule d'Itô montre que

$$d(\tilde{S}_t) = e^{-bt} dS_t - b e^{-bt} S_t dt = e^{-bt} \sigma S_t dB_t = \tilde{S}_t \sigma dB_t.$$

D'après les exercices précédents

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 \exp(\sigma B_t - \frac{1}{2} \sigma^2 t)$$

et \tilde{S} est une martingale. Il en résulte

$$S_t = S_0 \exp((b - \frac{1}{2} \sigma^2)t + \sigma B_t)$$

ou encore

$$S_t = S_s \exp((b - \frac{1}{2} \sigma^2)(t-s) + \sigma(B_t - B_s)), s \leq t$$

On obtient

$$E(S_t) = S_0 \exp((b - \frac{1}{2} \sigma^2)t) E(\exp \sigma B_t) = S_0 \exp bt$$

en utilisant la transformée de Laplace de la gaussienne B_t , et en utilisant les propriétés de l'espérance conditionnelle

$$E(S_t | \mathcal{F}_s) = S_s E\left(\exp((b - \frac{1}{2} \sigma^2)(t-s) + \sigma(B_t - B_s)) | \mathcal{F}_s\right)$$

Le calcul de $E(\exp((b - \frac{1}{2} \sigma^2)(t-s) + \sigma(B_t - B_s)) | \mathcal{F}_s)$ se fait aisément à partir de celui de $E(\exp(\sigma(B_t - B_s)) | \mathcal{F}_s) = E(\exp(\sigma(B_t - B_s)))$ pour lequel il suffit d'utiliser la transformée de Laplace de la v.a. gaussienne $B_t - B_s$. On obtient

$$E(S_t | \mathcal{F}_s) = \exp(b(t-s)) S_s.$$

Cette dernière formule s'obtient aussi directement en utilisant que \tilde{S} est une martingale.

Si $Z_t = (\tilde{S}_t)^{-1}$, on a $dZ_t = Z_t((\sigma^2 - b) dt - \sigma dB_t)$.

Ces calculs se généralisent. Soit $dS_t = S_t(b dt + \sigma_t dB_t)$ et $Y_t = S_t \exp(-\int_0^t b_s ds)$. On a $d(\exp(-\int_0^t b_s ds)) = -b_t \exp(-\int_0^t b_s ds) dt$. Le processus Y vérifie

$$dY_t = \exp(-\int_0^t b_s ds) dS_t - S_t b_t \exp(-\int_0^t b_s ds) dt = \exp(-\int_0^t b_s ds) S_t \sigma_t dB_t = Y_t \sigma_t dB_t$$

et est une martingale locale.

La solution de $dL_t = -L_t\theta_t dB_t$ est une martingale locale, qui s'écrit

$$L_t = L_0 \exp\left(-\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds\right).$$

On pose $Y_t = S_t L_t$. On a

$$dY_t = S_t dL_t + L_t dS_t + d\langle S, L \rangle_t.$$

Par définition $d\langle S, L \rangle_t = -S_t \sigma_t L_t \theta_t dt$, d'où

$$dY_t = Y_t((b_t - \theta_t \sigma_t) dt + \sigma_t dB_t).$$

En finance, on utilise souvent le cas $\theta_t = -\frac{r(t)-b_t}{\sigma_t}$. Il vient alors

$$dY_t = Y_t(r(t) dt + \sigma_t dB_t).$$

Soit $R_t = \exp(-\int_0^t r(s) ds)$. Le processus $YR = LRS$ est une martingale locale qui vérifie $d(LRS) = LRS\sigma dB$.

Exercice 3.5.2 : Soit

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dB_t)$$

et $A_t = \frac{1}{t} \int_0^t \ln S_s ds$. On a $S_t = S_0 \exp(\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + rt)$ et

$$\ln S_t = \ln S_s + \sigma(B_t - B_s) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(t - s)$$

Le processus $\ln S_t$ est un processus gaussien, d'où A_t est une variable gaussienne.

Soit $G(t, T) = \frac{1}{T} \int_t^T (B_s - B_t) ds$. Le processus $s \rightarrow B_s - B_t$ est gaussien, d'où $G(s, T)$ est une variable gaussienne. Le processus $(B_s - B_t, s \geq t)$ est indépendant de \mathcal{F}_t donc $G(t, T)$ aussi, d'où $E(G(t, T)|\mathcal{F}_t) = \frac{1}{T} \int_t^T E(B_s - B_t) ds = 0$.

$$\text{Var}(G(t, T)|\mathcal{F}_t) = E(G^2(t, T)) = \frac{1}{T^2} \int_t^T \int_t^T E((B_s - B_t)(B_u - B_t)) ds du.$$

$E((B_s - B_t)(B_u - B_t)) = (s \wedge u) - t$. Tous calculs faits

$$\text{Var}(G(t, T)|\mathcal{F}_t) = \frac{1}{T^2} \left(\frac{1}{3} T^3 - \frac{1}{3} t^3 + tT(t - T) \right)$$

En écrivant $A_T = \frac{1}{T} \left(\int_0^t \ln S_s ds + \int_t^T \ln S_s ds \right)$ et en remarquant que

$$\int_t^T \ln S_s ds = (T - t) \ln S_t + \frac{1}{2} \frac{r - \sigma^2}{2} (T - t)^2 + \sigma G(t, T)$$

on obtient

$$A_T = \frac{t}{T} A_t + (1 - \frac{t}{T}) [\ln S_t + \frac{1}{2} (r - \frac{\sigma^2}{2} (T - t)) + \sigma G(t, T)].$$

Exercice 3.5.4 : Soit $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$. On a vu déjà plusieurs fois que \tilde{S}_t est une martingale (par exemple vérifier, en utilisant le lemme d'Itô, que $d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \sigma dB_t$). Soit X_t défini par

$$e^{-rt} X_t = E[\frac{e^{-rT}}{h} \int_{T-h}^T S_u^\sigma du | \mathcal{F}_t].$$

On a, $X_T = V_T$ et si $t \leq T - h$

$$e^{-rt} X_t = e^{-rT} \frac{1}{h} \int_{T-h}^T E(S_u | \mathcal{F}_t) du$$

soit

$$e^{-rt} X_t = S_t^\sigma e^{-rt} \frac{1 - e^{-rh}}{rh}$$

et si $T - h \leq t \leq T$

$$\begin{aligned} e^{-rt} X_t &= e^{-rT} \frac{1}{h} \int_{T-h}^T E(S_u | \mathcal{F}_t) du \\ &= e^{-rT} \frac{1}{h} \int_{T-h}^t E(S_u | \mathcal{F}_t) du + \frac{1}{h} \int_t^T E(S_u | \mathcal{F}_t) du = \frac{e^{-rT}}{h} \int_{T-h}^t S_u^\sigma du + S_t^\sigma e^{-rt} \frac{1 - e^{-r(T-t)}}{rh}. \\ \frac{dX_t}{X_t} &= rdt + \frac{\sigma S_t^\sigma}{X_t} \left\{ 1_{\{t < T-h\}} \frac{1 - e^{-rh}}{rh} + 1_{\{T-h < t < T\}} \frac{1 - e^{-r(T-t)}}{rh} \right\} dW_t \\ &= rdt + \sigma \left\{ 1_{t < T-h} + 1_{T-h < t < T} \frac{S_t^\sigma}{X_t} \frac{1 - e^{-r(T-t)}}{rh} \right\} dW_t. \end{aligned}$$

Exercice 3.5.5: Soit $Z_t = e^{-rt} S_t + \int_0^t \delta(s) e^{-rs} S_s ds$. On a alors

$$\begin{aligned} dZ_t &= -r e^{-rt} S_t dt + e^{-rt} dS_t + \delta_t e^{-rt} S_t dt \\ &= S_t e^{-rt} \sigma dW_t \end{aligned}$$

Le processus Z est une martingale locale. On peut expliciter S qui est la solution d'une équation du type $dS_t = S_t(a(t)dt + \sigma dW_t)$ par

$$S_t = S_0 \exp(rt - \Delta(t) + \sigma W_t)$$

avec $\Delta(t) = \int_0^t \delta(s) ds$. En écrivant

$$S_t = S_0 \exp(rt - \Delta(t)) \exp(\sigma W_t - \frac{1}{2} \sigma^2 t)$$

et en utilisant que $\exp(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$ est une martingale d'espérance 1, on obtient

$$E(S_t) = S_0 \exp(rt - \Delta(t)).$$

On montre que S est de carré intégrable : en effet

$$S_t^2 = S_0^2 \exp(2rt - 2\Delta(t) + 2\sigma W_t) = S_0^2 \exp(2rt - 2\Delta(t) + \frac{1}{2}(2\sigma)^2 t) \exp(2\sigma W_t - \frac{1}{2}(2\sigma)^2 t)$$

et l'on sait que $\exp(2\sigma W_t - \frac{1}{2}(2\sigma)^2 t)$ est une martingale égale à 1 en $t = 0$, d'où

$$E(S_t^2) = S_0^2 \exp(2rt - 2\Delta(t) + \frac{1}{2}(2\sigma)^2 t)$$

et $E(\int_0^t S_s^2 e^{-2rs} ds) < \infty$, ce qui établit le caractère martingale de la martingale locale Z .

On sait que (formule de Black et Scholes en changeant de nom les paramètres) si $dS_t = S_t(ad_t + \sigma dW_t)$, $S_0 = x$ alors

$$E(e^{-aT}(S_T - K)^+) = x\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-aT}\mathcal{N}(d_2)$$

avec $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln(\frac{x}{Ke^{-aT}}) + \frac{1}{2}\sigma^2 T$. Le calcul demandé est alors facile.

3.6 Le crochet

3.7 Finance

Exercice 3.7.3 : Pour $g(x) = (x - K)^+$

$$C_t^{Am} \geq C_t = E(e^{-rT}(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t) = E(e^{-rT}g(S_T) | \mathcal{F}_t)$$

et aussi

$$\begin{aligned} e^{-ru}g(S_u) \leq e^{-rT}g(S_u e^{r(T-u)}) &= e^{-rT}g(e^{rT}E(S_T e^{-rT} | \mathcal{F}_u)) = e^{-rT}g(E(e^{rT}S_T e^{-rT} | \mathcal{F}_u)) \\ &= e^{-rT}g(E(S_T | \mathcal{F}_u)) \leq E(e^{-rT}g(S_T) | \mathcal{F}_t) \end{aligned}$$

$P \leq P^{Am}$ et la propriété de sous martingale de $(K - S_t e^{-rt})$ permet de conclure.

Exercice 3.7.11 : On écrit la formule d'intégration par parties

$$d(\frac{X_t}{Y_t}) = X_t d(\frac{1}{Y_t}) + \frac{1}{Y_t} dX_t + d\langle X, \frac{1}{Y} \rangle_t.$$

En particulier (on omet les indices t) ($X = Y$)

$$d(\frac{X}{X}) = d(1) = 0 = X d(\frac{1}{X}) + \frac{1}{X} dX + d\langle X, \frac{1}{X} \rangle.$$

Soit $dV = \pi_1 dS^1 + \pi_2 dS^2$. On a donc

$$d\langle V, \frac{1}{S^1} \rangle = \pi_1 d\langle S^1, \frac{1}{S^1} \rangle + \pi_2 d\langle S^2, \frac{1}{S^1} \rangle.$$

Par suite, si $V^1 = V/S^1$, on peut écrire la suite d'égalités (on utilise $V = \pi^1 S^1 + \pi^2 S^2$)

$$\begin{aligned} dV_t^1 &= V d(\frac{1}{S^1}) + \frac{1}{S^1} dV + d\langle V, \frac{1}{S^1} \rangle \\ &= (\pi^1 S^1 + \pi^2 S^2) d(\frac{1}{S^1}) + \frac{1}{S^1} (\pi_1 dS^1 + \pi_2 dS^2) + \pi_1 d\langle S^1, \frac{1}{S^1} \rangle + \pi_2 d\langle S^2, \frac{1}{S^1} \rangle \\ &= \pi_1 \left(S^1 d(\frac{1}{S^1}) + \frac{1}{S^1} dS^1 + d\langle S^1, \frac{1}{S^1} \rangle \right) + \pi^2 \left(S^2 d(\frac{1}{S^1}) + \frac{1}{S^1} dS^2 + d\langle S^2, \frac{1}{S^1} \rangle \right) \\ &= \pi^2 d(\frac{S^2}{S^1}) \end{aligned}$$

Exercice 3.7.12 : On remarque que

$$\mathcal{F}_T = \sigma(W_s, s \leq t) = \sigma(S_s^1, s \leq t) = \sigma(S_s^2, s \leq t)$$

Le marché est complet: en effet, toute v.a. \mathcal{F}_T mesurable s'écrit comme valeur terminale d'un portefeuille auto-finançant composé des actifs sans risque et de l'actif 1, donc le marché composé d'un actif supplémentaire (avec les mêmes actifs contingents) est également complet. La seule probabilité équivalente à la probabilité P telle que l'actif sans risque et l'actif 1, actualisés, sont des martingales est Q définie par $dQ|_{\mathcal{F}_t} = \exp(-\theta W_t - \frac{1}{2}\theta^2 t) dP|_{\mathcal{F}_t}$ avec $\theta = \frac{\mu_i - r}{\sigma}$. L'actif 2, actualisé n'est pas une martingale sous Q , il n'existe donc pas de probabilité équivalente à la probabilité P telle que TOUS les actifs actualisés soient des martingales. Le marché présente des opportunités d'arbitrage. Supposons $\mu_1 > \mu_2$. Si, à la date 0, on achète une part de l'actif 1 et on vend une part de l'actif 2 (capital initial investi nul) et que l'on maintient cette position jusqu'en T , on a un portefeuille de valeur

$$S_T^1 - S_T^2 = [\exp(\mu^1 T) - \exp(\mu^2 T)] \exp(\sigma W_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T) > 0$$

ce qui constitue un arbitrage.

Chapter 4

Equations différentielles stochastiques, Corrigés

4.1 Equation Linéaire

Exercice 4.1.4 : L'équation a une solution unique car $b(t, x) = a + \alpha x$ et $\sigma(t, x) = b + \beta x$ sont lipschitziennes et ont une croissance linéaire. On a

$$X_t = x + \int_0^t (a + \alpha X_s) ds + \int_0^t (b + \beta X_s) dB_s$$

L'intégrale stochastique est une martingale car $E(\int_0^t (b + \beta X_s)^2 ds) \leq E(\int_0^t 2(b^2 + \beta^2 X_s^2) ds)$ et la solution de l'équation vérifie $E(\sup_{s \leq t} X_s^2) < \infty$. D'où en prenant l'espérance de X_t et en posant $m(t) = E(X_t)$

$$m(t) = x + \int_0^t (a + \alpha m(s)) ds.$$

La fonction m est dérivable et vérifie $m'(t) = a + \alpha m(t)$. Compte tenu de la condition initiale $m(0) = x$, la solution est

$$m(t) = (x + \frac{a}{\alpha})e^{\alpha t} - \frac{a}{\alpha}$$

La formule d'Itô conduit à

$$d(X_t^2) = 2X_t(a + \alpha X_t) dt + 2X_t(b + \beta X_t) dB_t + (b + \beta X_t) dt.$$

En admettant que l'intégrale stochastique est une martingale et en posant $M(t) = E(X_t^2)$

$$M(t) = x^2 + 2 \int_0^t (am(s) + \alpha M(s)) ds + \int_0^t (b^2 + \beta^2 + 2b\beta m(s)) ds$$

soit

$$\begin{cases} M'(t) - (2\alpha + \beta^2)M(t) &= 2(a + b\beta)m(t) = b^2 \\ M(0) &= x^2 \end{cases}$$

la solution est

$$\begin{cases} M(t) &= Ce^{2\alpha + \beta^2}t + ke^{\alpha t} + c \\ k(-\alpha - \beta^2) &= 2(a + b\beta)(x + \frac{a}{\alpha}) \\ c &= (b^2 - 2(a + b\beta)\frac{a}{\alpha})\frac{1}{2\alpha + \beta^2} \\ K + k + c &= x^2 \end{cases}$$

Exercice 4.1.5 : On a $dY_t = Y_t(\alpha dt + \beta dB_t)$ dont la solution est (cf brownien géométrique)

$$Y_t = \exp[(\alpha - \frac{1}{2}\beta^2)t + \beta B_t]$$

On a (cf propriété de martingale du Brownien)

$$E(Y_t | \mathcal{F}_s) = \exp(\alpha t) E(\exp[-\frac{1}{2}\beta^2 t + \beta B_t] | \mathcal{F}_s) = \exp(\alpha t) \exp[-\frac{1}{2}\beta^2 s + \beta B_s]$$

D'où, si $\alpha \geq 0$, on a $E(Y_t | \mathcal{F}_s) \geq Y_s$. Le processus Y est une martingale si on a égalité soit si $\alpha = 0$.

c. Le processus Y ne s'annule pas. Le processus Z_t est un processus d'Itô car Y_t^{-1} est de carré intégrable (voir brownien géométrique) et

$$dZ_t = (a - b\beta)Y_t^{-1} dt + bY_t^{-1} dB_t$$

On a ainsi $d\langle Y, Z \rangle_t = bY_t^{-1} Y_t \beta = b\beta$.

Soit $U_t = Y_t Z_t$. La formule d'Itô conduit à

$$dU_t = (a - b\beta) dt + b dB_t + U_t(\alpha dt + \beta dB_t) + b\beta dt = (a + \alpha U_t) dt + (b + \beta U_t) dB_t$$

et comme $U_0 = x$ on a par unicité $X_t = U_t$.

Exercice 4.1.6: Soit $dX_t = \alpha X_t dt + b dB_t$. On sait (ex précédents) que cette équation admet une solution unique. En posant $Z_t = e^{-\alpha t} X_t$ on voit que $dZ_t = e^{-\alpha t} dB_t$ d'où

$$X_t = e^{\alpha t} x + e^{\alpha t} \int_0^t e^{-\alpha s} b dB_s$$

Il en résulte que X est un processus gaussien de moyenne $E(X_t) = e^{\alpha t} x$ et de variance

$$V(X_t) = b^2 e^{2\alpha t} \frac{1 - e^{-2\alpha t}}{2\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma^2(t).$$

Si $Y_t = \phi(X_t)$, la formule d'Itô conduit à

$$dY_t = \phi'(X_t) dX_t + \frac{1}{2} \phi''(X_t) b^2 dt.$$

Dans le cas particulier de l'énoncé,

$$dY_t = \exp(-\frac{\alpha}{b^2} X_t^2) (b dB_t)$$

soit

$$Y_t = b \int_0^t \exp(-\frac{\alpha}{b^2} X_s^2) dB_s$$

C'est une martingale car $E(\int_0^t \exp(-\frac{2\alpha}{b^2} X_s^2) ds) < \infty$ (faire le calcul en utilisant ce qui suit) de carré intégrable.

En utilisant le calcul de $E(e^{\lambda U^2})$ quand U est une gaussienne, on trouve, en posant $m(t) = e^{\alpha t}$

$$E(e^{\lambda X_t^2}) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\lambda\sigma^2(t)}} \exp \frac{\lambda m^2(t)x^2}{1 - 2\lambda\sigma^2(t)} = \Phi(t, x)$$

et

$$E(e^{\lambda X_t^2} | \mathcal{F}_s) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\lambda\sigma^2(t-s)}} \exp \frac{\lambda m^2(t-s)X_s^2}{1 - 2\lambda\sigma^2(t-s)} = \Phi(t-s, X_s)$$

Soit t fixé. Par définition, le processus d'Itô V défini par $V_s = \Phi(t-s, X_s)$ est une martingale, donc son drift est nul. On a donc

$$-\partial_1 \Phi(t-s, x) + \alpha x \partial_2 \Phi(t-s, x) + \frac{1}{2} b^2 \partial_{22} \Phi(t-s, x) = 0$$

$$\partial_1 \Phi(u, x) + \alpha x \partial_2 \Phi(u, x) + \frac{1}{2} b^2 \partial_{22} \Phi(u, x) = 0$$

En posant $\Psi = \ln \Phi$ et en recherchant Ψ sous la forme

$$\Psi(t, x) = x^2 a(t) + b(t)$$

on a (voir la forme de Φ) les conditions de l'énoncé sur les fonctions a et b .
Exercice 4.1.13 : Dans un premier temps, on pose $Y_t = e^{\alpha t} X_t$. Ce processus vérifie

$$dY_t = e^{\alpha t} (\mu - \gamma V_t) dt + e^{\alpha t} \sqrt{V_t} dW_{1,t}$$

Calculer $\varphi(\lambda) = E(\exp(\lambda X_T))$ revient à calculer $\psi(\lambda) = E(\exp(\lambda Y_T))$. On a en effet $\varphi(\lambda) = \psi(\lambda e^{\alpha T})$. Le calcul des espérances conditionnelles se réduit à un calcul d'espérance par la propriété de Markov. On a

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t e^{\alpha s} (\mu - \gamma V_s) ds + \int_0^t e^{\alpha s} \sqrt{V_s} dW_{1,s}$$

On est donc ramené à calculer

$$A = E \left(\exp \left(-\gamma \int_0^t e^{\alpha s} V_s ds + \int_0^t e^{\alpha s} \sqrt{V_s} dW_{1,s} \right) \right)$$

En décorrélant $W_{1,t}$, le terme sous l'exponentielle est

$$-\gamma \int_0^t e^{\alpha s} V_s ds + \rho \int_0^t e^{\alpha s} \sqrt{V_s} W_{2,s} + \sqrt{1-\rho^2} \int_0^t e^{\alpha s} \sqrt{V_s} dW_s$$

En utilisant l'indépendance entre W et V

$$A = E \left(\exp \left(-\gamma \int_0^t e^{\alpha s} V_s ds + \rho \int_0^t e^{\alpha s} \sqrt{V_s} W_{2,s} + \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{2} \int_0^t e^{2\alpha s} V_s \right) \right)$$

Il reste un calcul du type espérance de l'exponentielle de

$$\int_0^t f(s) V_s ds + \int_0^t g(s) \sqrt{V_s} dW_{2,s}$$

Cette expression s'écrit

$$\begin{aligned} \int_0^t f(s) V_s ds + \int_0^t g(s) (dV_s - k(\theta - V_s) ds) &= \int_0^t F(s) V_s ds + \int_0^t G(s) dV_s \\ &= \int_0^t F(s) V_s ds + G(t) V_t - G(0) V_0 - \int_0^t G'(s) V_s ds \\ &= G(t) V_t + \int_0^t H(s) V_s ds \end{aligned}$$

ou f, g, F, G, H sont des fonctions déterministes. (remarque: pour un Ornstein-Uhlenbeck, ce type de calcul est standard)

Exercice 4.1.10 : On pose $Y_t = e^{at} X_t$. On a

$$dY_t = abe^{at} dt + \sigma e^{at/2} \sqrt{Y_t} dW_t$$

et $E(Y_t) = x + b(e^{at} - 1)$ En utilisant

$$\begin{aligned} Y_t &= x + \int_0^t abe^{as} ds + \sigma e^{as/2} \sqrt{Y_s} dW_s \\ &= E(Y_t) + \sigma e^{as/2} \sqrt{Y_s} dW_s \end{aligned}$$

on obtient $Y_t - E(Y_t) = \int_0^t \sigma e^{as/2} \sqrt{Y_s} dW_s$ par suite

$$Var(Y_t) = \int_0^t \sigma^2 e^{as} E(Y_s) ds$$

Exercice ?? : Si α et β existent, le processus $M_t = e^{\alpha(t) + \beta(t)S_t} \exp \left(- \int_0^t \psi(S_s) ds \right)$ est une martingale, donc $E(M_T | \mathcal{F}_t) = M_t$ ce qui conduit à

$$E \left(e^{\theta S_T} \exp \left(- \int_0^T \psi(S_s) ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right) = e^{\alpha(t) + \beta(t)S_t} \exp \left(- \int_0^t \psi(S_s) ds \right).$$

D'où le résultat en remarquant que $\exp(-\int_0^t \psi(S_s) ds)$ est \mathcal{F}_t adapté. Pour que M soit une martingale, il faut que sa partie à variation bornée soit nulle. Il est facile de voir que

$$d(e^{\alpha(t)+\beta(t)S_t}) = e^{\alpha(t)+\beta(t)S_t}(\alpha' + \beta')dt + \beta dS_t + \beta^2 \sigma(S_t)^2 dt$$

Ce qui conduit à

$$\alpha' + \beta' S_t - \psi(S_t) + \beta \mu(S_t) + \beta^2 \sigma(S_t)^2 = 0$$

soit

$$\alpha' + \beta' x - \psi(x) + \beta(\mu_0 + \mu_1 x) + \beta^2(\sigma_0 + \sigma_1 x) = 0$$

Cette équation doit être vérifiée pour tout (t, x) d'où (cours élémentaire sur les ED)

$$\begin{aligned} \alpha' - \psi_0 + \beta\mu_0 + \beta^2\sigma_0 &= 0 \\ \beta' - \psi_1 + \beta\mu_1 + \beta^2\sigma_1 &= 0 \end{aligned}$$

La seconde équation est une équation de Ricatti

4.2 Finance

Exercice 4.2.1 : Soit S_t solution de

$$dS_t = S_t (r dt + \sigma dB_t).$$

On a pour $t \leq u$

$$S_u = S_t \exp \left(r(u-t) + \sigma(B_u - B_t) - \frac{\sigma^2}{2}(u-t) \right) \quad (4.1)$$

Le processus S est à valeurs positives (si $S_0 > 0$) et ne s'annule pas.

1. Le processus $M_t = E \left(\left[\frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K \right]^+ | \mathcal{F}_t \right)$ est une martingale, car il s'écrit $E(Z | \mathcal{F}_t)$.

2. En utilisant que $s(a-b)^+ = (sa-sb)^+$ si $s > 0$ et la \mathcal{F}_t -mesurabilité de S_t , on obtient $M_t = S_t E \left(\left[\frac{1}{T} \int_0^T \frac{S_u}{S_t} du - \frac{K}{S_t} \right]^+ | \mathcal{F}_t \right)$ ce qui s'écrit de façon évidente

$$S_t E \left(\left[\frac{1}{T} \int_t^T \frac{S_u}{S_t} du - \zeta_t \right]^+ | \mathcal{F}_t \right)$$

avec $\zeta_t = S_t^{-1} (K - \frac{1}{T} \int_0^t S_u du)$, variable \mathcal{F}_t -mesurable.

3. On rappelle que, si X est indépendante de \mathcal{G} et Y est \mathcal{G} -mesurable,

$$E(f(X, Y) | \mathcal{G}) = [E(f(X, y))]_{y=Y}.$$

Les variables $(\frac{S_u}{S_t}, u \geq t)$ sont indépendantes de \mathcal{F}_t (utiliser (4.1)), et ζ_t est \mathcal{F}_t mesurable. Il en résulte

$$M_t = S_t \Phi(t, \zeta_t)$$

avec

$$\Phi(t, x) = E \left(\frac{1}{T} \int_t^T \frac{S_u}{S_t} du - x \right)^+.$$

4. En utilisant que $\frac{S_u}{S_t}$ est indépendant de \mathcal{F}_t , on obtient le résultat.

5. On a (appliquer Itô à $f(x) = \frac{1}{x}$)

$$dS_t^{-1} = -\frac{1}{S_t^2} dS_t + \frac{1}{2} \frac{2}{S_t^3} d\langle S, S \rangle_t = \left(\frac{\sigma^2}{S_t} - \frac{r}{S_t} \right) dt - \frac{\sigma}{S_t} dB_t.$$

on en déduit les égalités suivantes

$$\begin{aligned} d\zeta_t &= -S_t^{-1} \frac{S_t}{T} dt + \left(K - \frac{1}{T} \int_0^t S_u du \right) dS_t^{-1} = -\frac{1}{T} dt + \zeta_t (-\sigma dB_t - r dt + \sigma^2 dt) \\ d\langle \zeta, \zeta \rangle_t &= \zeta_t^2 \sigma^2 dt \\ d\Phi(t, \zeta_t) &= \Phi'_t dt + \Phi'_x d\zeta_t + \frac{1}{2} \Phi''_{xx} d\langle \zeta, \zeta \rangle_t = (\dots) dt - \sigma \zeta_t \Phi'_x dB_t \\ d\langle S, \Phi \rangle_t &= -S_t \sigma^2 \zeta_t \Phi'_x \end{aligned}$$

La formule d'Itô appliquée à M_t est alors (écriture volontairement simplifiée)

$$dM_t = \Phi dS + S d\Phi + dS d\Phi$$

ce qui s'écrit

$$\Phi(t, \zeta_t) dS_t + S_t [\Phi'_t(t, \zeta_t) dt + \Phi'_x(t, \zeta_t) d\zeta_t + \frac{1}{2} \Phi''_{xx}(t, \zeta_t) d\langle \zeta, \zeta \rangle_t] + d\langle S, \Phi \rangle_t$$

Soit

$$dM_t = S_t \left(r\Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \left(\frac{1}{T} + r\zeta \right) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \zeta^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) dt + dN_t$$

où N est une martingale du type $(\dots) dB_t$. Le processus M étant une martingale, on doit avoir la partie processus à variation finie nulle, soit

$$0 = r\Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \left(\frac{1}{T} + r\zeta \right) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \zeta^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$$

Exercice 4.2.2 :

$$S_t = S_0 \exp \left(rt + \int_0^t \sigma(s) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(s) ds \right)$$

est solution de l'équation proposée. Il suffit d'appliquer la formule d'Itô.

2. $\int_0^t \sigma(s)dB_s$ est une variable gaussienne (intégrale de Wiener) centrée de variance $\int_0^t \sigma^2(s)ds$. Il en résulte que $\int_0^t \sigma(s)dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(s)ds$ est une variable gaussienne car d'espérance $-\frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(s)ds$ et de variance $\int_0^t \sigma^2(s)ds$.

3. La formule de valorisation d'une option revient à calculer $E_Q(S_T - K)^+$. Dans le cas où $S_T = S_0 e^U$ où U est une variable d'espérance rT et de variance $V^2 = \sigma^2 T$, on a

$$C(0, x) = x\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-rT}\mathcal{N}(d_2)$$

avec

$$d_1 = \frac{1}{V} \left(\ln\left(\frac{x}{K}\right) + Tr + \frac{V^2}{2} \right), d_2 = d_1 - V$$

Il suffit donc de remplacer $\sigma^2 T$ par $\Sigma^2 = \int_0^T \sigma^2(s)ds$

$$C(0, x) = x\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-rT}\mathcal{N}(d_2)$$

avec

$$d_1 = \frac{1}{\Sigma} \left(\ln\left(\frac{x}{K}\right) + Tr + \frac{\Sigma^2}{2} \right), d_2 = d_1 - \Sigma$$

4.3 Equations différentielles

Exercice 4.3.4 : Nous vérifions que

$$X_t = tN + (1-t) \int_0^t \frac{1}{1-s} dB_s \quad (4.2)$$

est solution de $dX_t = dB_t + \frac{N - X_t}{1-t}dt$. Par différentiation de (4.2)

$$\begin{aligned} dX_t &= Ndt - 1 \int_0^t \frac{1}{1-s} dB_s + dB_t \\ &= Ndt - \frac{1}{1-t} (X_t - tX_1)dt + dB_t \\ &= dB_t + \frac{1}{1-t} (-X_t + N)dt \end{aligned}$$

Le processus X est donc gaussien, centré, de covariance ($s < t$)

$$\begin{aligned} E(X_s X_t) &= ts + (1-t)(1-s)E\left(\int_0^t \frac{1}{1-u} dB_u \int_0^s \frac{1}{1-v} dB_v\right) \\ &= ts + (1-t)(1-s) \int_0^s \frac{1}{(1-u)^2} du = s \end{aligned}$$

Chapter 5

Exemples, Corrigés

5.1 Processus de Bessel

Exercice 5.1.3 :

La formule d'Itô conduit à

$$dZ_t = -\frac{1}{R_t^2}dR_t + \frac{1}{2} \frac{2}{R_t^3}d\langle R \rangle_t = -\frac{1}{R_t^2}dB_t - \frac{1}{R_t^3}dt + \frac{1}{R_t^3}dt = -\frac{1}{R_t^2}dB_t$$

Soit $V_t = \frac{\sinh \lambda R_t}{\lambda R_t}$. On pose $f(x) = \frac{\sinh \lambda x}{\lambda x}$, d'où

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{\sinh \lambda x}{\lambda x^2} + \frac{\cosh \lambda x}{x} \\ f''(x) &= +2\frac{\sinh \lambda x}{\lambda x^3} - \frac{\lambda \cosh \lambda x}{x^2} - \frac{\cosh \lambda x}{x^2} + \frac{\lambda \sinh \lambda x}{x}. \end{aligned}$$

La formule d'Itô conduit à

$$dU_t = e^{-\frac{t\lambda^2}{2}} \left[-\frac{\lambda^2}{2} V_t dt + dV_t \right]$$

et on vérifie que les termes en dt s'annulent.

Il suffit d'appliquer le théorème d'arrêt de Doob à la martingale U_t et au temps d'arrêt T_b . On obtient $E(\exp(-\frac{\lambda^2 T_b}{2}) (\frac{\sinh \lambda b}{\lambda b})) = 1$, d'où $E(\exp(-\frac{\lambda^2 T_b}{2})) = \frac{\lambda b}{\sinh \lambda b}$.

Exercice 5.1.4 :

1. On applique Itô

$$d(\ln R_t) = \frac{1}{R_t}dR_t - \frac{1}{2(R_t)^2}dR_t dR_t = \frac{1}{R_t}dW_t - \frac{1}{R_t} \frac{1}{2R_t}dt + \frac{1}{2(R_t)^2}dt = \frac{1}{R_t}dW_t.$$

2. Toujours en appliquant Itô

$$\begin{aligned} dR_t^\nu &= \nu R_t^{\nu-1} dR_t + \frac{\nu(\nu-1)}{2} R_t^{\nu-2} dR_t dR_t = \nu R_t^{\nu-1} dW_t + \nu R_t^{\nu-1} \frac{1}{2R_t} dt + \frac{\nu(\nu-1)}{2} R_t^{\nu-2} dt. \\ &= \nu R_t^{\nu-1} dW_t + \frac{\nu^2}{2} R_t^{\nu-2} dt \end{aligned}$$

3. On pose $Z_t = \exp(-\frac{\nu^2}{2} \int_0^t \frac{ds}{R_s^2})$ et on applique le lemme d'Itô.

$$\begin{aligned} dZ_t &= d \exp(-\frac{\nu^2}{2} \int_0^t \frac{ds}{R_s^2}) = Z_t (-\frac{\nu^2}{2}) \frac{1}{R_t^2} dt \\ dL_t &= Z_t dR_t^\nu + R_t^\nu dZ_t = Z_t \left[\nu R_t^{\nu-1} dW_t + \nu R_t^{\nu-1} \frac{1}{2R_t} dt + \frac{\nu(\nu-1)}{2} R_t^{\nu-2} dt - \frac{\nu^2}{2} \frac{1}{R_t^2} R_t^\nu dt \right] \\ &= Z_t \nu R_t^{\nu-1} dW_t \end{aligned}$$

Exercice 5.1.5 :

$$dY_t = 2\sqrt{Y_t} dW_t + \delta dt$$

La formule d'Itô conduit à

$$dZ_t = Z_t (-\mu \sqrt{Y_t}) dW_t$$

Sous Q $\widetilde{W}_t \stackrel{def}{=} W_t + \mu \int_0^t \sqrt{Y_u} du$ est un MB et $dY_t = 2\sqrt{Y_t} d\widetilde{W}_t + (\delta - 2\mu Y_t) dt$.

Exercice 5.2.2 : Par application de la formule d'Itô à $Z_t = W_t^2$

$$dZ_t = 2W_t dW_t + dt = 2\sqrt{Z_t} dW_t + dt$$

on a alors

$$\begin{aligned} dZ_t &= 2W_t dW_t + 2W_t^1 dW_t^1 + 2dt = \frac{2}{\sqrt{(W_t)^2 + (W_t^1)^2}} \sqrt{(W_t)^2 + (W_t^1)^2} (W_t dW_t + W_t^1 dW_t^1) \\ &= 2\sqrt{Z_t} dW_t^3 + 2dt \end{aligned}$$

Avec n Browniens on obtient $\mu = n$.

Si $\rho_t \stackrel{def}{=} \sqrt{R_t}$, la formule d'Itô conduit à

$$d\rho_t = \frac{1}{2\rho_t} (\mu - 1) dt + dW_t$$

$$dX_t = dR_t^{(\mu)} + dR_t^{(\nu)} = (\mu + \nu) dt + 2\sqrt{R_t^{(\mu)} + R_t^{(\nu)}} dZ_t$$

où Z est un MB. On en déduit que la somme de deux Bessels carrés indépendants est un Bessel carré.

Exercice 5.1.6 : $P_x(\inf_{s \leq t} X_s) = P_x(T_a > t)$ et on connaît la transformée de

Laplace de T_a $E^{(\nu)}(\exp - \frac{\lambda^2}{2} T_a)$.

Dans le cas du BES(3) $P_x^{(3)}|_{\mathcal{F}_t} = (\frac{X_{t \wedge \tau}}{x}) W_x|_{\mathcal{F}_t}$ d'où pour $a < x$ $P_x^{(3)}(\phi(T_a) \mathbb{1}_{T_a < \infty}) = \frac{a}{x} W_x(\phi(T_a))$ D'où $P_x^{(3)}(T_a > t) = P_x^{(3)}(\infty > T_a > t) + (1 - \frac{a}{x})$ et $P_x^{(3)}(\infty > T_a > t) = \frac{a}{x} P_0(T_{(x-a)} > t) = \frac{a}{x} P_0((x-a) > |N|\sqrt{t})$.
Voir Borodin pour l'autre cas

5.2 Processus de Bessel carré

Exercice 5.2.4 : Remarquer que $E(R_1^{(2)}) = E\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$.

Exercice 5.2.5 : On part de

$$W^{(\nu)}|_{\mathcal{F}_t} = \exp(\nu W_t - \frac{\nu^2}{2} t) W|_{\mathcal{F}_t}$$

On sait que $(R_t; t \geq 0) \stackrel{loi}{=} x \exp(B_{C_t} + \nu C_t)$

$$P^{(\nu)}(F(R_s), s \leq t) = W^{(\nu)}(F(xB_u), u \leq C_t)$$

$$W^{(\nu)}(F(xB_u), u \leq C_t) = W(\exp(B_{C_t} + \nu C_t) F(xB_u), u \leq C_t) = P^{(0)}(\frac{R_t}{x})^\nu \exp - \frac{\nu^2}{2C_t} F(R_s), s \leq t)$$

car sous $P^{(0)}$

$$\exp \nu B_{C_t} = (\exp B_{C_t})^\nu, R_t = x \exp B_{C_t}$$

5.3 Autres processus

Exercice 5.3.3 :

La première question résulte d'une application du lemme d'Itô: $f(t, X_t)$ est une martingale locale si $\mathcal{G}f(t, X_t) = 0$ avec $\mathcal{G}f(t, x) = \partial_t f + x(1-x)(\mu - x)\partial_x f + \frac{1}{2}x^2(1-x)^2\partial_{xx}f$. Dire que $h_0(X)$ est une martingale locale revient à vérifier que h_0 est solution de $x(1-x)(\mu - x)h' + \frac{1}{2}x^2(1-x)^2h'' = 0$. Montrer que $h_1(X_t) - t$ est une martingale locale revient à vérifier que h_1 satisfait

$$-1 + x(1-x)(\mu - x)h' + \frac{1}{2}x^2(1-x)^2h'' = 0.$$

En appliquant le théorème d'arrêt de Doob (la fonction h_0 est bornée sur $[a, b]$, la martingale locale $h_0(X_{t \wedge \tau})$ est uniformément intégrable) $E(h_0(X_\tau)) = h_0(x)$ soit

$$h_0(x) = E(h_0(X_\tau)) = h_0(a)P(X_\tau = a) + h_0(b)P(X_\tau = b) = h_0(a)P(X_\tau = a) + h_0(b)(1 - P(X_\tau = a)).$$

On applique ensuite le théorème de Doob à $h_1(X_t) - t$

$$\begin{aligned} h_1(x) &= E[(h_1(a) - \tau)\mathbb{1}_{X_\tau=a}] + E[(h_1(b) - \tau)\mathbb{1}_{X_\tau=b}] \\ &= h_1(a)P(X_\tau = a) + h_1(b)(1 - P(X_\tau = a)) - E(\tau) \end{aligned}$$

5.4 Des Calculs

Exercice 5.4.2 : For $t \leq 1$ and $a > 0$, the events $\{Y_t \leq a\}$ and $\{T_a \geq t\}$ are equal, where $T_a = \inf\{t \geq 0, X_t = a\}$.

Then, $P(Y_t \leq a) = P(T_a \geq t)$. Let $\tilde{X} = X/\sigma$ and $T_\alpha(\tilde{X}) = \inf\{t \geq 0, \tilde{X}_t = \alpha\}$. Then, $T_a = T_\alpha(\tilde{X})$ where $\alpha = a/\sigma$.

It is well known (the proof follows, from example from inversion of Laplace transform) that

$$P_0(T_\alpha(\tilde{X}) \in dt) = \frac{|\alpha|}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp - \frac{(\alpha - \tilde{\mu}t)^2}{2t}$$

where $\tilde{\mu} = \mu/\sigma$ (see Borodin-Salminen p. 223, formula 2.0.2. or Revuz Yor, second edition, page 320, ex. 1.21).

Therefore, you get the cumulative function of Y for $t \leq 1$.
Let us denote $\Phi(t, a, \mu, \sigma) = P(\sup_{0 \leq s \leq t} (\mu s + \sigma W_s) \leq a)$.

Suppose now that $2 > t > 1$. Then

$$X_t = X_1 + \mu_1(t-1) + \sigma_1(W_t - W_1) = X_1 + \mu_1(t-1) + \sigma_1\tilde{W}_{t-1}$$

where \tilde{W} is a BM independent of $\sigma(W_s, s \leq 1)$.

Then,

$$\begin{aligned} P(Y_t \leq a) &= P(Y_1 \leq a, \max_{1 \leq s \leq t} (X_1 + \mu_1(s-1) + \sigma_1\tilde{W}_{s-1}) \leq a) \\ &= P(Y_1 \leq a, P[\max_{1 \leq s \leq t} (X_1 + \mu_1(s-1) + \sigma_1\tilde{W}_{s-1}) \leq a | \mathcal{F}_1]) \\ &= E(\mathbb{1}_{(Y_1 \leq a)} \Psi(t-1, X_1)) \end{aligned}$$

where

$$\Psi(u, x) = E(\max_{0 \leq s \leq u} (x + \mu_1 s + \sigma_1 \tilde{W}_s) \leq a) = E(\max_{0 \leq s \leq u} (\mu_1 s + \sigma_1 \tilde{W}_s) \leq a - x)$$

and this quantity is known from step 1: $\Psi(u, x) = \Phi(u, a - x, \mu_1, \sigma_1)$.

Then, it remains to know the law of the pair Y_1, X_1 . This is the reflection principle in the case $\mu = 0$ (Revuz Yor, page 105 ex. 3.14) and the general result follows from Girsanov's theorem. For example Borodin-Salminen, page 198, formula 1.18 in the case where $\sigma = 1$

$$P(Y_1 \geq y, X_1 \in dz) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp[\mu y - \frac{\mu^2 t}{2} - \frac{(|z - y| + y)^2}{2t}] dz$$

References:

Borodin, A. and Salminen, P.: *Handbook of Brownian Motion. Facts and Formulae*, Birkhäuser, 1996.

Exercice 5.4.3 : On écrit $dS = D(rdt + \sigma_t d\tilde{W}_t)$. Si \tilde{C} est la valeur de C actualisé, alors $dC = Cm\sigma d\tilde{W}_t$. Il suffit de résoudre et d'identifier

$$C_t = C_0 \left(\frac{S_t}{S_0} \exp\left[-\frac{m-1}{m} \left[\int_0^t r_s ds + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_s^2 ds \right] \right] \right)^m$$

Exercice 5.4.4 : On remarque que $Y_t = e^{\lambda t} X_t$ est un MB changé de temps: $Y_t = B_{\Lambda(t)}$ avec $\Lambda(t) = \sigma^2 \int_0^t e^{2\lambda u} du = \sigma^2 \frac{e^{2\lambda t} - 1}{2\lambda}$. Par suite $\tau = \inf\{t : |Y_t| > e^{\lambda y} g(t)\}$. D'où la suite d'égalités

$$\begin{aligned} \{\tau > t\} &= \{|B_{\Lambda(u)}| < e^{\lambda u} g(u), \forall \Lambda(u) < \Lambda(t)\} \\ &= \{|B_v| < e^{\lambda C(v)} g(C(v)), \forall v < \Lambda(t)\} = \{\tau^* > \Lambda(t)\} \end{aligned}$$

avec

$$\tau^* = \inf\{t : |W_t| > e^{\lambda C(t)} g(C(t))\}$$

Chapter 6

Girsanov, Corrigés

6.1 Résultats élémentaires

Exercice 6.1.2 : Par changement de proba, le processus H étant une martingale positive d'espérance 1, en posant $dQ = H_t dP$, on définit une nouvelle probabilité Q et $E_P(H_T \ln H_T) = E_Q(\ln H_T)$. Or,

$$H_t = \exp\left(-\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds\right)$$

D'où

$$E_Q(\ln H_T) = E_Q\left(-\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds\right)$$

Le processus $\tilde{W}_t = W_t + \int_0^t \theta_s ds$ est un Q mouvement Brownien, et $-\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds = -\int_0^t \theta_s d\tilde{W}_s + \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds$, d'où le résultat.

Exercice 6.1.4 : On a $\Gamma_t = \exp\left(\int_0^t \beta_s ds\right) \exp\left(\int_0^t \gamma_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \gamma_s^2 ds\right)$, d'où $\Gamma_t \exp\left(-\int_0^t \beta_s ds\right)$ est une martingale. L'écriture $d\Gamma_t = \Gamma_t \gamma_t (dW_t + \frac{\beta_t}{\gamma_t} dt)$ montre que sous Q défini par $dQ = L_t dP$, avec $dL_t = L_t \frac{\beta_t}{\gamma_t} dW_t$, le processus \tilde{W}_t défini par $d\tilde{W}_t = dW_t + \frac{\beta_t}{\gamma_t} dt$ est un mouvement Brownien.

Le processus Γ vérifiant $d\Gamma_t = \Gamma_t \gamma_t d\tilde{W}_t$ est une Q -martingale locale. On obtient facilement $d(\Gamma_t^{-1}) = -\Gamma_t^{-1} \gamma_t (dW_t - \frac{\gamma_t^2 - \beta_t}{\gamma_t} dt)$ et le choix de R s'en suit.

6.2 Crochet

Exercice 6.2.1 : Soit $Z = N - \langle N, M \rangle$ et $L_t = \exp(M_t - \frac{1}{2}\langle M \rangle_t)$. On a $d(ZL) = ZdL + LdZ + d\langle Z, L \rangle = \text{mart} + d\langle Z, L \rangle - Ld\langle M, N \rangle = \text{mart}$

Exercice 6.2.2 : On vérifie que $Z_t = h(X_t)M_t - \int_0^t \frac{h'(X_s)}{h(X_s)} d\langle M, X \rangle$ est une P -martingale.

6.3 Processus

Exercice 6.3.4 :

1. La question 1 a déjà été traitée dans l'exercice 1.2.3.
2. On se place dans le cas d'un Brownien issu de a . Soit

$$dP^b = \exp\left\{-b \int_0^T B_s dB_s - \frac{b^2}{2} \int_0^T B_s^2 ds\right\} dP.$$

En posant $\theta_s = -bB_s$ et en appliquant Girsanov, on montre que sous P^b le processus $B_t + b \int_0^t B_s ds$ est un brownien issu de a que l'on note W_t . L'égalité

$$B_t = - \int_0^t b B_s ds + W_t$$

qui s'écrit $dB_t = -bB_t dt + dW_t$ montre que le processus $(B_t, t \geq 0)$ est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck sous P^b . D'où (cf. cours) B_t est une variable gaussienne sous P^b , d'espérance ae^{-bt} et de variance $\frac{1 - e^{-2tb}}{2b}$.

Soit $x = a^2$. En utilisant que, sur \mathcal{F}_t ,

$$dP = \exp\left\{b \int_0^t B_s dB_s + \frac{b^2}{2} \int_0^t B_s^2 ds\right\} dP^b$$

on a, pour tout Z , \mathcal{F}_t -mesurable P -intégrable,

$$E_P(Z) = E_b\left(Z \exp\left\{b \int_0^T B_s dB_s + \frac{b^2}{2} \int_0^T B_s^2 ds\right\}\right)$$

d'où

$$E_P(\exp\{-\alpha B_t^2 - \frac{b^2}{2} \int_0^t B_s^2 ds\}) = E_b(\exp\{-\alpha B_t^2 + b \int_0^t B_s dB_s\})$$

La formule d'Itô montre que

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - a^2 - t)$$

(sous P et sous P_b).

On obtient, en posant $x = a^2$

$$E_P(\exp\{-\alpha B_t^2 - \frac{b^2}{2} \int_0^t B_s^2 ds\}) = E_b(\exp\{-\alpha B_t^2 + \frac{b}{2}(B_t^2 - x - t)\})$$

Sous P^b , B_t est une gaussienne. On applique le résultat de la question 1 et on trouve (calculs)

$$E_P(\exp\{-\alpha B_t^2 - \frac{b^2}{2} \int_0^t B_s^2 ds\}) = (\cosh bt + 2\frac{\alpha}{b} \sinh bt)^{-\frac{1}{2}} \exp[-\frac{xb}{2} \frac{1 + \frac{2\alpha}{b} \coth bt}{\coth bt + \frac{2\alpha}{b}}]$$

On note $\Phi(\alpha, b)$ l'expression de droite.

Exercice 6.3.3 : Soit $dX_t = -\lambda X_t dt + dW_t$ un processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

Sous P_λ , X est un Brownien car $X_t = -\lambda \int_0^t X_s ds + W_t$. On a

$$\begin{aligned} E_P(\exp - \frac{b^2}{2} \int_0^T X_s^2 ds) &= E_{P_\lambda}(L_T^{-1} \exp - \frac{b^2}{2} \int_0^T X_s^2 ds) \\ &= E_{P_\lambda} \left(\exp \left(-\lambda \int_0^T X_s dX_s - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^T X_s^2 ds - \frac{b^2}{2} \int_0^T X_s^2 ds \right) \right) \\ &= E_{P_\lambda} \left(\exp \left(-\frac{\lambda}{2} (X_T^2 - T) - \frac{\lambda^2 + b^2}{2} \int_0^T X_s^2 ds \right) \right) \\ &= \left(\exp \frac{\lambda T}{2} \right) \Phi\left(\frac{\lambda}{2}, \sqrt{\lambda^2 + b^2}\right) \end{aligned}$$

(On comparera cet exercice au précédent)

Exercice 6.3.5 : Soit S solution de

$$dS_t = S_t (\mu dt + \sigma dB_t), S_0 = s.$$

$$S_t = S_0 \exp(\mu t + \sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t).$$

1. Soit $dQ = L_t dP$ avec $L_t = \exp(\theta B_t - \frac{1}{2} \theta^2 t)$. Le théorème de Girsanov montre que W est un Q -mouvement Brownien.

2. Soit $d\tilde{P} = Z_t dQ$ avec $Z_t = \exp(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t)$

Le théorème de Girsanov montre que $(\tilde{B}_t = W_t - \sigma t, t \geq 0)$ est un \tilde{P} -mouvement brownien. On a alors

$$dS_t = S_t ((r + \sigma^2) dt + \sigma d\tilde{B}_t)$$

3. Soit $P_t = P_0 e^{rt}$. Le processus $(Y_t = \frac{S_t}{P_t}, t \geq 0)$ est une Q -martingale, car

$$Y_t = Y_0 \exp(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t) \text{ (ou parce que (Itô) } dY_t = \frac{d(S_t e^{-rt})}{P_0} = Y_t dW_t.)$$

Le processus $Z_t = \frac{P_t}{S_t}$ est une \tilde{P} -martingale car $Z_t = Z_0 \exp(-\sigma \tilde{B}_t - \frac{\sigma^2}{2}t)$

4. Soit $F_t = e^{-\lambda t} \left(\int_0^t S_u du + sA \right)$ où A, λ sont des constantes

$$\text{Soit } \Psi_t = \frac{F_t}{P_t} e^{\lambda t}. \text{ On a } d\Psi_t = (1 - r\Psi_t) dt - \sigma\Psi_t d\tilde{B}_t$$

Exercice 6.3.7 : Let $B_t^Y = Yt + B_t$ and F be a functional on $C([0, t], \mathbb{R})$. Using the independance between Y and B , and Cameron-Martin theorem, we get

$$\begin{aligned} E[F(B_s^Y, s \leq t)] &= E[F(sY + B_s, s \leq t)] = \int \nu(dy) E[F(sy + B_s, s \leq t)] \\ &= \int \nu(dy) E[F(B_s, s \leq t) \exp(yB_t - \frac{y^2}{2}t)] = E[F(B_s; s \leq t) h(B_t, y)] \\ &= E^h(F(X_s, s \leq t)) \end{aligned} \quad (6.1)$$

where $h(x, t) = \int \nu(dy) \exp(yx - \frac{y^2}{2}t)$ and $P^h|_{\mathcal{F}_t} = h(B_t, t)W|_{\mathcal{F}_t}$. Therefore,

$$B_t^h \stackrel{\text{def}}{=} B_t - \int_0^t ds \frac{h'_x}{h}(B_s, s)$$

is a P^h -martingale, more precisely a P^h Brownian motion and B_t is solution of

$$X_t = B_t^h + \int_0^t ds \frac{h'_x}{h}(X_s, s)$$

Under P^h , B has the same law as B^Y under P . Then, $B_t^Y = \tilde{B}_t^h + \int_0^t ds \frac{h'_x}{h}(B_s^Y, s)$.

Let us remark that

$$E(Y|\mathcal{B}_t^Y) = \frac{h'_x}{h}(B_t^Y, s)$$

where $\mathcal{B}_t^Y = \sigma(B_s^Y, s \leq t)$. On a

$$\begin{aligned} E_Q(f(Y)F(B_s^Y, s \leq t)) &= E_P(e^{-YB_t - \frac{1}{2}Y^2t} F(B_s^Y, s \leq t)) \\ &= \int \nu(dy) f(y) E_P(e^{-yB_t - \frac{1}{2}y^2t} F(B_s + ys, s \leq t)) \\ &= \int \nu(dy) f(y) E(F(B_s, s \leq t)) = E(F(B_s, s \leq t)) E_P(f(Y)) \end{aligned}$$

et la loi de Y est la même sous P et sous Q . **Exercice gi:4 :** On remarque que $e^{-2W_t} - 1 = -2 \int_0^t e^{-2W_s} dW_s + 2 \int_0^t e^{-2W_s} ds$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} (e^{-2W_t} - 1) + \frac{1}{2} \int_0^t \left(e^{-2W_s} - \frac{1}{4} e^{-4W_s} \right) ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t e^{-2W_s} dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t e^{-2W_s} ds + \frac{1}{2} \int_0^t \left(e^{-2W_s} - \frac{1}{4} e^{-4W_s} \right) ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t e^{-2W_s} dW_s - \frac{1}{4} \int_0^t e^{-4W_s} ds \end{aligned}$$

et on sait que $\exp\left(\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds\right)$ est une martingale locale. On peut vérifier que la condition de Novikov est satisfaite Sous Q , le processus $\widehat{W} = W - \frac{1}{2} \int_0^t e^{-2W_s} ds$ est un MB.

6.4 Cas multidimensionnel

6.5 Temps d'arrêt

Exercice 6.5.1 : Soit $dP_\mu = L_t dP$ où $L_t = \exp\left(-\frac{\mu}{\sigma} B_t - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} t\right)$. Sous P_μ ,

$(\tilde{B}_t = B_t + \frac{\mu}{\sigma} t = \frac{X_t}{\sigma}, t \geq 0)$ est un Brownien et $X_t = \sigma \tilde{B}_t$.

De l'égalité $T_a = \inf\{t | \tilde{B}_t = \frac{a}{\sigma}\}$, on en déduit le résultat qui figure dans le cours en procédant comme suit:

On a $dP = L_t^{-1} dP_\mu$ avec

$$L_t^{-1} = \exp\left(\frac{\mu}{\sigma} B_t + \frac{\mu^2}{2\sigma^2} t\right) = \exp\left(\frac{\mu}{\sigma} \tilde{B}_t - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} t\right)$$

et pour tout temps d'arrêt T , on a

$$E_P(\exp(-\lambda(T \wedge t))) = E_{P_\mu}(L_{T \wedge t} e^{-\lambda(T \wedge t)}) = E_{P_\mu}\left(\exp\left(\frac{\mu}{\sigma} \tilde{B}_{T \wedge t} - \frac{\mu^2 + 2\lambda\sigma^2}{2\sigma^2} (T \wedge t)\right)\right)$$

On en déduit

$$E_P(\exp(-\lambda T_a) \mathbb{1}_{T_a < \infty}) = \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2} a\right) E_{P_\mu}\left(\exp\left(-\frac{\mu^2 + 2\lambda\sigma^2}{2\sigma^2} T_a\right) \mathbb{1}_{T_a < \infty}\right)$$

Le passage à la limite quand $t \rightarrow \infty$ est licite pour $a \geq 0$, car d'une part $e^{-\lambda(T \wedge t)} \leq 1$ et d'autre part $\tilde{B}_{T_a \wedge t} \leq a$, d'où $\exp\left(\frac{\mu}{\sigma} \tilde{B}_{T \wedge t} - \frac{\mu^2 + 2\lambda\sigma^2}{2\sigma^2} (T \wedge t)\right)$ est borné. On utilise aussi $\tilde{B}_{T_a} \mathbb{1}_{T_a < \infty} = \frac{a}{\sigma}$.

Exercice 6.5.2 :

$$E(\mathbb{1}_{T<\infty} \exp(\lambda B_T - \frac{\lambda^2}{2} T)) = P^{(\lambda)}(T < \infty) =$$

and use that

$$T = \inf\{t : B_t - t/2 > \ln a\} = \inf\{t : W_t + (\lambda - 1/2)t > \ln a\}$$

Exercice 6.5.3 : Le processus $(M_t = \exp(\theta \tilde{B}_t - \frac{\theta^2 t}{2}), t \geq 0)$ est une P_μ -martingale et si a et θ sont positifs $(M_{t \wedge T_a}, t \geq 0)$ est uniformément intégrable, car majorée par $\exp(\theta a)$. On en déduit $E_{P_\mu}(M_{T_a}) = 1$ d'où

$$E_P(e^{-\lambda T_a} \mathbb{1}_{T_a < \infty}) = \exp\left(\frac{a\mu}{\sigma^2} - \frac{a\sqrt{\mu^2 + 2\lambda\sigma^2}}{\sigma^2}\right)$$

et on vérifie que T_a est fini (faire $\lambda = 0$).

Exercice 6.5.4 : L est une martingale exponentielle d'espérance 1, en utilisant que $dF_t^2 = 2F_t f(t) dW_t + f^2(t) dt$ on obtient la première égalité. Une intégration par partie montre que

$$\int_0^T \frac{h(s)}{2f(s)} dF_s^2 dW_s = \frac{h(T)}{f(T)} F_T^2 - \frac{h(0)}{f(0)} F_0^2 - \int_0^T F_t^2 d\left(\frac{h(t)}{f(t)}\right)$$

ce qui donne le résultat. On prend ensuite $h(t) = \frac{u'}{u(t)f(t)}$ et on utilise que

$$E\left(\exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{u'(T)}{u(T)f^2(T)}\right)F_T^2 - \int_0^T F_t^2 \left(\frac{u''(t) - 2u'(t)f'(t)/f(t)}{u(t)f^2(t)}\right) dt\right]\right) = \exp\left(\int_0^T \frac{u'(t)}{u(t)} dt\right)$$

Pour calculer l'expression avec Ψ , on fait un changement de probabilité en posant $dQ = L_T dP$. On a

$$K = \left(\frac{u(T)}{u(0)}\right)^{1/2} E_Q\left(\Psi(A + BF_T + \int_0^T \phi(t) F_t^2 dt)\right)$$

et en appliquant Girsanov,

$$K = \left(\frac{u(T)}{u(0)}\right)^{1/2} E_Q\left(\Psi(A + Bu(T) \int_0^T \frac{u(t)}{f(t)} dB_t + \int_0^T dt \phi(t) u(t) \int_0^t dB_s \frac{f(s)}{u(s)})\right)$$

On peut calculer le membre de droite, car c'est l'exponentielle d'une gaussienne.

Exercice 6.6.16 : On a $dr = 2\sqrt{\sigma(t)r_t} dW_t + ([2\beta(t) + \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}]r_t + \delta\sigma(t))dt$.

L'étude de Z se fait par une IP.

Exercice 6.5.5 :

1. Utiliser Girsanov et Bayes.
2. C'est le théorème de Girsanov appliqué sur l'espace produit.
3. Appliquer Itô. Les termes en dt sont nuls car π est une martingale.

6.6 Finance

Exercice 6.6.14 : Il s'agit de calculer $A = E \left(e^{-rT} \left(\frac{1}{T} \int_0^T S_u du - S_T \right)^+ \right)$ que l'on écrit

$$A = \frac{1}{T} E(e^{-rT} S_T (Y_T - K)^+)$$

avec $Y_t = \frac{1}{S_t} \int_0^t S_u du$ et $K = T$. Par un changement de probabilité (le processus $e^{-rt} \frac{S_t}{S_0}$ est une Q -martingale positive d'espérance 1), on obtient $A = \frac{S_0}{T} \tilde{E}((Y_T - K)^+)$ avec, sous \tilde{Q}

$$dY_t = (1 - rY_t)dt + Y_t \sigma d\tilde{W}_t.$$

On peut utiliser que $Y_t = U_t + V_t$ avec U solution de

$$dU_t = -rU_t dt - \sigma U_t d\tilde{W}_t, U_0 = 1$$

et $V_t = y + \int_0^t (U_s)^{-1} ds$, ce qui ne nous avance pas beaucoup.

Exercice 6.6.15 :

1. On a $dr_t = \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} r_t dt + \sigma(t)(dW_t + h(t)dt)$.
2. On reconnaît une exponentielle de Doleans Dade, et une intégration par parties donne le résultat.
3. En appliquant Girsanov, et en utilisant que $r_t = \sigma(t)Y_t$

$$E \left(\exp \left[- \int_0^T r_s ds \right] \right) = E \left(\exp \left(\int_0^T h(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T h^2(s) ds - \int_0^T \sigma(s) W_s ds \right) \right)$$

Une intégration par parties permet de conclure.

4. La quantité

$$A = E \left(\exp \left(h(T)W_T - \int_0^T W_s (h'(s) + \sigma(s)) ds \right) \right)$$

se calcule en recherchant une fonction g telle que $g'(s) = \sigma(s) + h'(s)$, $g(T) = h(T)$. On obtient alors

$$E \left(\exp \left[- \int_0^T r_s ds \right] \right) = \exp \left(- \frac{1}{2} \int_0^T h^2(s) ds \right) A = \exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T (g^2(s) - h^2(s)) ds \right)$$

On peut aussi remarquer que

$$h(T)W_T - \int_0^T W_s(h'(s) + \sigma(s))ds$$

est une variable gaussienne centrée dont on identifie la variance.

Exercice 6.6.17 : $S_t = x + mart + 2(\nu + 1) \int_0^t S_u du$. Utiliser que $\frac{1 - e^{-b}}{b} \geq e^{-b}$. On en déduit que $E((\frac{1}{T} \int_0^T \exp(2(W_s + \nu s))ds - K)^+) \geq E((\exp 2(W_T + \nu T) - k)^+)$ pour k assez petit.

Exercice 6.6.7 Pour évaluer $E_P(h(S_T)|\mathcal{F}_t)$ dans le cas $h(x) = (x^\alpha - K)^+$, on utilise ce qui précède en écrivant S_T^α sous la forme $x \exp((a - \frac{b^2}{2})t + bW_t)$. Il est facile de vérifier que sous Q ,

$$dZ_t = -\sigma Z_t d\tilde{W}_t$$

et comme \tilde{W} donc $-\tilde{W}$ est un MB, Z a même dynamique sous Q que S sous P . Par suite

$$\forall \varphi, E_P(\varphi(S_T)) = E_Q(\varphi(Z_T)).$$

Par définition de Q

$$\frac{1}{x} E_P(S_T f(\frac{x^2}{S_T})) = E_Q(f(\frac{x^2}{S_T})).$$

Par définition de Z ,

$$E_Q(S_T f(\frac{x^2}{S_T})) = E_Q(f(Z_T)) = E_P(f(S_T)).$$

Si S^a est une martingale, le même raisonnement conduit à la formule souhaitée. Un peu d'algèbre permettait décrire $x^\beta(x - K)^+$ comme

$$(x^{\beta+1} - K^{\beta+1})^+ - K(x^\beta - K^\beta)^+.$$

Chapter 7

Compléments, Corrigés

7.1 Théorème de Lévy.

Exercice 7.1.1 : Soit $S_t = \sup_{0 \leq s \leq t} W_s$ et

$$\begin{aligned} D &= \sup_{0 \leq s \leq t \leq 1} (W_s - W_t) = \sup_{0 \leq t \leq 1} \sup_{0 \leq s \leq t} (W_s - W_t) \\ &= \sup_{0 \leq t \leq 1} (S_t - W_t) \stackrel{loi}{=} \sup_{0 \leq t \leq 1} |W_t| \end{aligned}$$

Grace au théorème de Lévy

$$(S_t - W_t, S_t, W_t; \theta \leq t \leq 1) \stackrel{loi}{=} (|W_t|, L_t, L_t - |W_t|; g \leq t \leq 1)$$

D'où

$$W_\theta, \sup_{\theta \leq t \leq 1} (S_t - W_t - S_t) \stackrel{loi}{=} L_g - |B_g|, \sup_{g \leq t \leq 1} (|W_t| - L_t) = (L_g, \sup_{g \leq t \leq 1} (|W_t| - L_g))$$

Thus

$$D_1 = W_\theta + \sup_{\theta \leq t \leq 1} (S_t - W_t - S_t) \stackrel{loi}{=} L_g + \sup_{g \leq t \leq 1} |W_t| - L_g$$

Exercice 7.1.2 : La premiere égalité provient du théorème de Lévy et de la connaissance de la loi du couple (S_t, B_t) . La seconde égalité en loi provient de la symétrie de la loi du couple. Pour le semi groupe, on utilise la formule de Lévy et l'indépendance de $(B_u, u \leq t)$ et de $\tilde{B}_v = B_{t+v} - B_t$

$$\begin{aligned} E(f(S_{t+s} - B_{t+s}, S_{t+s} | \mathcal{F}_s)) &= E(f((S_s - B_s) \vee \tilde{S}_t - \tilde{B}_t, B_s + (S_s - B_s) \vee \tilde{S}_t S_{t+s}) | \mathcal{F}_s) \\ &= \int \mu_t(da, d\ell) f(\alpha \vee \ell - (\ell - a), (\lambda - \alpha) + \alpha \vee \ell) \end{aligned}$$

Les résultats concernant l'indépendance de $S_t(S_t - B_t)$ et B_t sont dus à Seshadri.

7.2 Equations rétrogrades

Exercice 7.2.1 : Il s'agit d'appliquer la formule d'Itô et le théorème de représentation. La propriété de martingale de X provient de $X_t = E(e^\zeta H_T | \mathcal{F}_t)$ et le théorème de représentation établit l'existence de z . Puis, en utilisant la formule d'Itô

$$\begin{aligned} d(1/H_t) &= -\frac{1}{H_t^2} dH_t + \frac{1}{H_t^3} d\langle H \rangle_t = \frac{1}{H_t} [(r + \theta^2)dt + \theta dW_t] \\ d(Z_t/H_t) &= \frac{Z_t}{H_t} [(r + \theta^2)dt + \theta dW_t] + H_t z_t dW_t + \frac{z_t}{H_t} \theta dt \\ dX_t &= \left(\frac{z_t}{H_t} + \theta \right) dW_t + \left((r + \theta^2) + \frac{z_t}{H_t} \theta - \frac{1}{2} \left(\frac{z_t}{H_t} + \theta \right)^2 \right) dt \\ &= \hat{X}_t dW_t + (r + \theta \hat{X}_t - \frac{1}{2} \hat{X}_t^2) dt \end{aligned}$$

7.3 Théorèmes de représentation

Exercice 7.3.1 : On utilisera le théorème de représentation prévisible pour représenter $W_t^{(1)}, W_t^{(2)}$ en terme de $W^{(3)}$. Si l'égalité était possible, on aurait $W_t^{(i)} = \int_0^t \Phi_t^{(i)} dW_t$ avec $\int_0^t E[\Phi_t^{(i)}]^2 dt = t$ et $E(W_t^{(1)} W_t^{(2)}) = E(\int_0^t \Phi_t^{(1)} \Phi_t^{(2)} dt) = 0$.

Exercice 7.3.2 : M est une intégrale stochastique, l'intégrand est borné donc de carré intégrable, M est une martingale. Par propriété de l'intégrale stochastique

$$\left[\int_0^t \mathbb{1}_{W_s > 0} dW_s \right]^2 - \int_0^t (\mathbb{1}_{W_s > 0})^2 ds$$

est une martingale. Une autre méthode consiste à appliquer la formule d'Itô à Y_t^2 avec $Y_t = \int_0^t \mathbb{1}_{W_s > 0} dW_s$. Le processus $A_t = \int_0^t \mathbb{1}_{W_s > 0} ds$ est un processus croissant.

Le processus M_{C_t} est une $\mathcal{G}_t \stackrel{def}{=} \mathcal{F}_{C_t}$ martingale et

$$M_{C_t}^2 - A_{C_t} = M_{C_t}^2 - t$$

est une martingale.

7.4 Temps local.

Exercice 7.4.1 : On ne peut pas appliquer Itô car $x \rightarrow |x|$ n'est pas de classe C^2 . Un calcul fait en pensant qu'un point ne compte pas et que l'on peut négliger le point où la dérivée n'existe pas conduirait à (la dérivée de $|x|$ est égale à sgn

sauf en 0 et la dérivée seconde est nulle sauf en 0) $|B_t| = \int_0^t \text{sgn}(B_s) dB_s$ et l'intégrale du membre de droite n'est pas positive (nous verrons plus loin que c'est un mouvement Brownien).

Le processus β est une martingale de crochet $\int_0^t f^2(B_s) ds = t$, c'est un MB. Il est évident que pour $u \geq t$

$$S_u = \sup_{s \leq u} W_s \geq S_t = \sup_{s \leq t} W_s$$

La première décomposition exprime que $|W_t|$ est égal à un MB plus un processus croissant, la seconde décomposition dit que $S_t - W_t$ a la même propriété. On peut montrer, grâce au lemme de Skohorod (voir poly) que $(S_t - W_t, t \geq 0) \stackrel{\text{loi}}{=} (|W_t|, t \geq 0)$ et que $(L_t, t \geq 0) \stackrel{\text{loi}}{=} (S_t, t \geq 0)$.

Exercice 7.4.2 : $|B_s| + L_s \geq L_t = L_{d_t}$ for $s \geq t$, and $|B_{d_t}| + L_{d_t} = L_{d_t}$.

Exercice 7.4.3 : $(\theta \leq u) = \sup_{s \geq u} B_s \leq \sup_{s \leq u} B_s = \sup_{1 \geq s \geq u} (B_s - B_u) + B_u \leq \sup_{s \leq u} B_s$ d'où $P(\theta \leq u) = P(\widehat{S}_{1-u} \leq S_u - B_u)$ On trouve finalement que θ a une loi Arc Sinus.

Exercice 7.4.4 : On utilise la formule d'Itô

$$dY_t = f'_x(X_t, S_t, \langle X \rangle_t) dX_t + f'_s(X_t, S_t, \langle X \rangle_t) dS_t + (f'_t + \frac{1}{2} f''_{xx})(X_t, S_t, \langle X \rangle_t) d\langle X \rangle_t$$

Or $f'_s(X_t, S_t, \langle X \rangle_t) = f'_s(S_t, S_t, \langle X \rangle_t) dS_t$ presque sûrement. Si $\frac{1}{2} f''_{xx} + f'_t = 0$ et $f'_s(s, s, t) = 0$, Y est une martingale locale.

$$\begin{aligned} g(S_t) - (S_t - X_t)g'(S_t) &= g(S_t) - \int_0^t g'(S_s) dS_s + \int_0^t g'(S_s) dX_s + \int_0^t (S_s - X_s)g''(S_s) dS_s \\ &= \int_0^t g'(S_s) dX_s \end{aligned}$$

Exercice 7.4.5 : On utilise le scaling du MB pour écrire

$$\int_0^{\lambda^2 t} f(B_s) ds \stackrel{\text{loi}}{=} \lambda^2 \int_0^t f(\lambda B_u) du = \lambda^2 \int da f(\lambda a) L_t^a$$

Exercice 7.4.7 : From the occupation formula and change of time $\int_0^t d\langle M \rangle_s f(M_s) =$

$$\int_0^t d\langle M \rangle_s f(\beta_{\langle M \rangle_s}) = \int_0^{\langle M \rangle_t} du f(\beta_u) = \int dy f(y) L_{\langle M \rangle_t}^y(\beta).$$

7.5 Lois

Exercice 7.5.1 : Soit $Y_t = f(X_t)$. On en déduit

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{X_t}{b(X_t)} dX_t + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b(X_t)} - \frac{X_t b'(X_t)}{b^2(X_t)} \right) b^2(X_t) dt \\ &= X_t \left(\frac{a(X_t)}{b(X_t)} dt + dW_t \right) + \frac{1}{2} (b(X_t) - X_t b'(X_t)) dt \end{aligned}$$

Le résultat souhaité en découle.

$$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \left[X_s \frac{a(X_s)}{b(X_s)} + \frac{1}{2} (b(X_s) - X_s b'(X_s)) \right] ds = \int_0^t X_s dW_s$$

Exercice 7.5.2 : Let V be a standard Brownian motion starting at v , that is, $V_t = v + W_t$. In this case, the two events $\{\tau_a(V) \leq t\}$ and $\{\sup_{s \leq t} W_s \geq \alpha\}$, where $\alpha = a - v$ are equal. The reflection principle implies that the r.v. $\sup_{s \leq t} W_s$ is equal in law to the r.v. $\|W_t\|$. Therefore,

$$P(\tau_\alpha(W) \leq t) = P(\sup_{s \leq t} W_s \geq \alpha) = P(\|W_t\| \geq \alpha) = P(W_t^2 \geq \alpha^2) = P(tG^2 \geq \alpha^2)$$

where G is a Gaussian variable, with mean 0 and variance 1. It follows that $\tau_\alpha(W) \stackrel{\text{loi}}{=} \frac{\alpha^2}{G^2}$, and the probability density function of $\tau_a(V)$ is

$$f(t) = \frac{a-v}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(v-a)^2}{2t}\right).$$

The computation of

$$E(\mathbb{1}_{\{T < \tau_a(V)\}} h(V_T)) = E(h(V_T)) - E(\mathbb{1}_{\{T \geq \tau_a(V)\}} h(V_T))$$

can be done using Markov property:

$$E(\mathbb{1}_{\{T \geq \tau_a(V)\}} h(V_T)) = E(\mathbb{1}_{\{T \geq \tau_a(V)\}} E(h(V_T) | \mathcal{F}_{\tau_a(V)})) = E(\mathbb{1}_{\{T \geq \tau_a(V)\}} h(\tilde{V}_{T-\tau_a(V)} + a)),$$

where \tilde{V} is a Brownian motion independent of $\tau_a(V)$.

Exercice 7.5.3 : Soit $y > a$. On admettra que M est uniformément intégrable.

$$a = E[M_{T_y}] = yP(T_y < \infty) = yP(\sup M_t \geq y)$$

$$\text{Soit } \frac{a}{y} = P(\sup M_t \geq y) = P\left(\frac{a}{y} \geq U\right) = P\left(\frac{a}{U} \geq y\right).$$

7.6 Filtrations

Exercice 7.6.2 : $M_t = E(W_t | \mathcal{H}_t)$ est un processus \mathbf{H} -adapté. Pour montrer que c'est une \mathbf{H} -martingale, il suffit d'écrire la suite d'égalités suivantes, pour

$t \geq s$

$$\begin{aligned} E(M_t|\mathcal{H}_s) &= E(W_t|\mathcal{H}_t|\mathcal{H}_s) = E(W_t|\mathcal{H}_s) \\ &= E(W_t|\mathcal{G}_s|\mathcal{H}_s) = E(W_s|\mathcal{H}_s) \end{aligned}$$

Pour montrer que Z est une \mathbf{F}^X -martingale, on écrit (en justifiant chaque égalité, ce que je ne fais pas)

$$\begin{aligned} E(Z_t|\mathcal{F}_s^X) &= E(X_t|\mathcal{F}_s^X) - E\left(\int_0^t \hat{Y}_u du|\mathcal{F}_s^X\right) \\ &= E\left(W_t + \int_0^t Y_u du|\mathcal{F}_s^X\right) - E\left(\int_0^t \hat{Y}_u du|\mathcal{F}_s^X\right) \\ &= E(W_t|\mathcal{F}_s^X) + E\left(\int_0^s Y_u du|\mathcal{F}_s^X\right) + E\left(\int_s^t Y_u du|\mathcal{F}_s^X\right) - \int_0^s \hat{Y}_u du - E\left(\int_s^t \hat{Y}_u du|\mathcal{F}_s^X\right) \\ &= E(W_s|\mathcal{F}_s^X) + E\left(\int_0^s Y_u du|\mathcal{F}_s^X\right) + E\left(\int_s^t Y_u du|\mathcal{F}_s^X\right) - \int_0^s \hat{Y}_u du - E\left(\int_s^t \hat{Y}_u du|\mathcal{F}_s^X\right) \\ &= E(X_s|\mathcal{F}_s^X) + \int_s^t E(Y_u|\mathcal{F}_s^X) du - \int_0^s \hat{Y}_u du - E\left(\int_s^t \hat{Y}_u du|\mathcal{F}_s^X\right) \\ &= X_s + \int_s^t \hat{Y}_u du - \int_0^s E(\hat{Y}_u|\mathcal{F}_s^X) du - E\left(\int_s^t \hat{Y}_u du|\mathcal{F}_s^X\right) \\ &= X_s - \int_0^s \hat{Y}_u du \end{aligned}$$

on a utilisé que $E(W_t|\mathcal{F}_s^X) = E(W_s|\mathcal{F}_s^X)$ et que, pour $u > s$

$$E(Y_u|\mathcal{F}_s^X) = E(Y_u|\mathcal{F}_u^X|\mathcal{F}_s^X) = E(\hat{Y}_u|\mathcal{F}_s^X)$$

7.7 Options barrières

Exercice 7.7.1 : Soit $\Phi_t(x) = P(B_t < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^x \exp(-\frac{u^2}{2t}) du$. on a $\Phi_t(x) = 1 - \Phi_t(-x)$ d'où, $P(B_t < x) = P(B_t > -x)$.

Soit $T = \inf\{t \geq 0 | B_t = y\}$. Par définition $P(B_t \leq x, M_t > y) = P(T < t, B_{t-T}^* < x - y)$. Si $M_t > y$, c'est que l'on a dépassé y avant t : Si $M_t > y$, on a $T < t$. De plus $B_{t-T}^* = B_t - B_T = B_t - y$. Par indépendance, $P(T < t, B_{t-T}^* < x - y) = \int_0^t P(T \in du, B_{t-u}^* < x - y) = \int_0^t P(T \in du)P(B_{t-u}^* < x - y)$. D'après 1, $P(B_{t-u}^* < x - y) = P(B_{t-u}^* > -x + y)$, d'où

$$\int_0^t P(T \in du)P(B_{t-u}^* < x - y) = \int_0^t P(T \in du)P(B_{t-u}^* > y - x)$$

et par indépendance

$$\int_0^t P(T \in du)P(B_{t-u}^* > y - x) = \int_0^t P(T \in du, B_{t-u}^* > y - x) = P(T < t, B_t > 2y - x)$$

En tenant compte du fait que si $B_t > 2y - x$ et $y > x$, alors $B_t > y$, donc $T < t$ on en déduit $P(T < t, B_t > 2y - x) = P(B_t > 2y - x)$ d'où

$$P(B_t \leq x, M_t > y) = P(B_t > 2y - x)$$

En utilisant

$$P(B_t \leq x, M_t < y) = P(B_t \leq x) - P(B_t \leq x, M_t > y)$$

on obtient

$$P(B_t \leq x, M_t < y) = \mathcal{N}\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - \mathcal{N}\left(\frac{x - 2y}{\sqrt{t}}\right)$$

3. La loi de T s'obtient en écrivant $P(T < t) = P(M_t < y)$ et la densité du couple (B_t, M_t) en dérivant $P(B_t \leq x, M_t < y)$.

4. Soit $X_t = \mu t + B_t$, $Y_t = \sup(X_s, 0 \leq s \leq t)$. Soit $dQ = \zeta dP$ avec $\zeta = \exp(-\mu X_t + \frac{1}{2}\mu^2 t)$. En utilisant le théorème de Girsanov, on a

$$P(X_t < x, Y_t < y) = E_Q(\exp(\mu X_t - \frac{1}{2}\mu^2 t) \mathbb{1}_{X_t < x} \mathbb{1}_{Y_t < y})$$

que l'on peut calculer car sous Q , X est un mouvement Brownien et on connaît la loi du couple (x, Y) sous Q .

7.8 Méandres, ponts, excursions

Exercice 7.8.1: Let V be a standard Brownian motion starting at v , that is, $V_t = v + W_t$. In this case, the two events $\{\tau_a(V) \leq t\}$ and $\{\sup_{s \leq t} W_s \geq \alpha\}$, where $\alpha = a - v$ are equal. The reflection principle implies that the r.v. $\sup_{s \leq t} W_s$ is equal in law to the r.v. $\|W_t\|$. Therefore,

$$P(\tau_a(W) \leq t) = P(\sup_{s \leq t} W_s \geq \alpha) = P(\|W_t\| \geq \alpha) = P(W_t^2 \geq \alpha^2) = P(tG^2 \geq \alpha^2)$$

where G is a Gaussian variable, with mean 0 and variance 1. It follows that $\tau_a(W) \stackrel{\text{loi}}{=} \frac{\alpha^2}{G^2}$, and the probability density function of $\tau_a(V)$ is

$$f(t) = \frac{a - v}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(v - a)^2}{2t}\right).$$

The computation of

$$E(\mathbb{1}_{\{T < \tau_a(V)\}} h(V_T)) = E(h(V_T)) - E(\mathbb{1}_{\{T \geq \tau_a(V)\}} h(V_T))$$

can be done using Markov property:

$$E(\mathbb{1}_{\{T \geq \tau_a(V)\}} h(V_T)) = E(\mathbb{1}_{\{T \geq \tau_a(V)\}} E(h(V_T) | \mathcal{F}_{\tau_a(V)})) = E(\mathbb{1}_{\{T \geq \tau_a(V)\}} h(\tilde{V}_{T - \tau_a(V)} + a)),$$

where \tilde{V} is a Brownian motion independent of $\tau_a(V)$.

For $t < 1$, the set $\{g \leq t\}$ is equal to $\{d_t > 1\}$.

$$d_t^a(W) = t + \inf \{u \geq 0 : W_{u+t} - W_t = a - W_t\} = t + \widehat{\tau}_{a-W_t}^{loi} \stackrel{loi}{=} t + \frac{(a - W_t)^2}{G^2}.$$

$$P\left(\frac{a^2}{G^2} > 1 - t\right) = \Phi\left(\frac{\|a\|}{\sqrt{1-t}}\right).$$

Then, the Itô-Tanaka formula combined with the identity $x\Phi'(x) + \Phi''(x) = 0$ lead to

$$\begin{aligned} P(g \leq t | \mathcal{F}_t) = \Phi\left(\frac{|W_t|}{\sqrt{1-t}}\right) &= \int_0^t \Phi'\left(\frac{|W_s|}{\sqrt{1-s}}\right) d\left(\frac{|W_s|}{\sqrt{1-s}}\right) + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{ds}{1-s} \Phi''\left(\frac{|W_s|}{\sqrt{1-s}}\right) \\ &= \int_0^t \Phi'\left(\frac{|W_s|}{\sqrt{1-s}}\right) \frac{\operatorname{sgn}(W_s)}{\sqrt{1-s}} dW_s + \int_0^t \frac{dL_s}{\sqrt{1-s}} \Phi'\left(\frac{|W_s|}{\sqrt{1-s}}\right) \\ &= \int_0^t \Phi'\left(\frac{|W_s|}{\sqrt{1-s}}\right) \frac{\operatorname{sgn}(W_s)}{\sqrt{1-s}} dW_s + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t \frac{dL_s}{\sqrt{1-s}}. \end{aligned}$$

Exercise 7.4.6 : The occupation time formula leads to

$$E \int_0^{T_a(X)} f(X_s) ds = \int_{-\infty}^a f(x) E[L_{T_a}^x] dx$$

It remains to compute $\phi(x) = E[L_{T_a}^x]$. Tanaka's formula reads

$$\begin{aligned} (X_{T_a} - x)^+ &= (-x)^+ + \int_0^{T_a} \mathbb{1}_{(X_s > x)} dX_s + \frac{1}{2} L_{T_a}^x \\ (a - x)^+ &= (-x)^+ + \int_0^{T_a} \mathbb{1}_{(X_s > x)} (dW_s + \nu ds) + \frac{1}{2} L_{T_a}^x \end{aligned}$$

Then, taking expectation of both sides

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} E[L_{T_a}^x] &= (a - x)^+ - (-x)^+ - \nu E\left[\int_0^{T_a} \mathbb{1}_{(X_s > x)} ds\right] \\ &= (a - x)^+ - (-x)^+ - \nu E\left[\int_x^a L_{T_a}^y dy\right] \end{aligned}$$

Therefore, if $\phi(x) = E[L_{T_a}^x]$

$$\frac{1}{2} \phi(x) = (a - x)^+ - (-x)^+ - \nu \int_x^a \phi(y) dy, \quad \phi(a) = 0$$

which gives

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\nu} (1 - \exp(2\nu(x - a))) & \text{for } 0 \leq x \leq a \\ \frac{1}{\nu} (1 - \exp(-2\nu a)) \exp(2\nu x) & \text{for } x \leq 0 \end{cases}$$

Exercice 7.8.2 : Il suffit d'écrire

$$B_t = m_1 \sqrt{t - g_t} (\text{sgne} B_t)$$

On a alors $E(B_t | \mathcal{F}_{g_t}) = E(m_1 \sqrt{t - g_t} (\text{sgne} B_t) | \mathcal{F}_{g_t}) = \sqrt{t - g_t} (\text{sgne} B_t) E(m_1) = \sqrt{t - g_t} (\text{sgne} B_t) \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. On note $\mu_t = \sqrt{t - g_t} (\text{sgne} B_t)$, c'est une martingale. Des calculs analogues conduisent à

$$E(B_t^2 - t | \mathcal{F}_{g_t}) = E(m_1^2) \mu_t^2 - t$$

$$E(e^{\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2} t} | \mathcal{F}_{g_t}) = h(\alpha \mu_t) e^{-\frac{\alpha^2}{2} t}$$

avec $h(x) = E(e^{xm_1})$.

Chapter 8

Sauts, Corrigés.

8.1 Processus de Poisson

Exercice 8.1.2 :

$$E(N_t - N_s | \mathcal{F}_s \wedge \sigma(N_1)) = E(N_t - N_s | (N_s - N_1))$$

Il est bien connu (ou tout au moins facile de vérifier) que si X et Y sont deux variables de Poisson, indépendantes, de paramètre μ et ν

$$P(X = k | X + Y = n) = \binom{n}{k} \alpha^k (1 - \alpha)^{n-k}$$

avec $\alpha = \frac{\mu}{\mu + \nu}$. On en déduit

$$E(N_t - N_s | \mathcal{F}_s \wedge \sigma(N_1)) = \frac{t-s}{1-s} (N_1 - N_s)$$

La vérification de la propriété de martingale est alors facile.

Exercice 8.1.4 : Si N est un processus de Poisson, $P(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{\lambda^n t^n}{n!}$
d'où

$$\psi(z, t) = e^{-\lambda t} e^{-\lambda t z}$$

Si N un processus à accroissements indépendants tel que $N_{t+s} - N_t \stackrel{loi}{=} N_s$

$$\begin{aligned} \psi(z, t+s) &= \sum_n z^n P(N_{t+s} = n) = E(z^{N_{t+s}}) = E(z^{N_{t+s} - N_t + N_t}) \\ &= E(z^{N_{t+s} - N_t}) E(z^{N_t}) = E(z^{N_s}) E(z^{N_t}) = \psi(z, t) \psi(z, s) \end{aligned}$$

On en déduit

$$\psi(z, t+h) - \psi(z, t) = \psi(z, t) [\psi(z, h) - 1]$$

ce qui conduit à une EDO en utilisant les propriétés de ψ données dans l'énoncé.
En tenant compte de $\psi(z, 0) = 1$, on montrait que $\psi(z, t) = e^{-\lambda t} e^{-\lambda t z}$, ce qui

caractérise le processus de Poisson (cette égalité caractérise la loi de N_t , ce qui avec N un processus à accroissements indépendants tel que $N_{t+s} - N_t \stackrel{\text{loi}}{=} N_s$ caractérise le processus de Poisson.)

Exercice 8.1.5 : Le processus de Poisson composé est un processus à accroissements indépendants, donc pour $s < t$

$$E(Y_t - Y_s | \mathcal{F}_s) = E(Y_t - Y_s) = E(X_t - X_s) - \mu\lambda(t - s) = 0$$

On peut le démontrer à la main, sans utiliser que le processus de Poisson composé est un PAI

$$E(X_t - X_s | \mathcal{F}_s) = E\left(\sum_{i=N_s+1}^{N_t} Y_i | \mathcal{F}_s\right) = E\left(\sum_{i=N_s+1}^{N_t-N_s+N_s} Y_i | \mathcal{F}_s\right) = \Psi(N_s)$$

avec

$$\begin{aligned} \Psi(n) &= E\left(\sum_{i=n+1}^{n+N_{t-s}} Y_i\right) = \sum P(N_{t-s} = k) E\left(\sum_{i=n+1}^{n+k} Y_i\right) \\ &= \sum P(N_{t-s} = k) k E(Y_1) = E(Y_1) E(N_{t-s}) = E(Y_1) \lambda(t - s) \end{aligned}$$

Exercice 8.1.6 : Si X et \tilde{X} sont deux solutions,

$$Z_t \stackrel{\text{def}}{=} X_t - \tilde{X}_t = -c \int_0^t (X_s - \tilde{X}_s) ds = -c \int_0^t Z_s ds$$

et Z est solution de l'équation différentielle ordinaire $Z'_t = -cZ_t$ avec condition initiale nulle. Donc $Z = 0$.

Soit $X_t = e^{-ct}x + \int_0^t e^{-c(t-s)} dN_s$. On calcule

$$\int_0^t X_s ds = \int_0^t e^{-cs} x ds + \int_0^t ds \int_0^s e^{-c(s-u)} dN_u.$$

L'intégrale double se calcule en employant Fubini (pour des intégrales de Stieltjes)

$$\begin{aligned} \int_0^t ds \int_0^s e^{-c(s-u)} dN_u &= \int_0^t dN_u \int_u^t ds e^{-c(s-u)} = \frac{1}{c} \int_0^t dN_u (1 - e^{-c(t-u)}) \\ &= \frac{1}{c} (N_t - \int_0^t e^{-c(t-s)} dN_s). \end{aligned}$$

En utilisant que M et Y sont des martingales

$$E(M_t Y_t | \mathcal{F}_s) = E(M_t(Y_t - Y_s) | \mathcal{F}_s) + M_s Y_s = E((M_t - M_s)(Y_t - Y_s) | \mathcal{F}_s) + M_s Y_s$$

Le calcul de $E((M_t - M_s)(Y_t - Y_s) | \mathcal{F}_s)$ se fait comme le précédent. **Exercice**

8.1.8 : Si j'écris la formule d'ito $d(tN_t) = N_t dt + t dN_t$ D'où

$$\int_0^t N_s ds = tN_t - \int_0^t s dN_s = \int_0^t (t-s) dN_s$$

Pour calculer la TL, il suffit d'utiliser que pour toute fonction h (ici, pour t fixé $h(s) = -\lambda(t-s)$) si c est l'intensité de N

$$E(\exp(\int_0^t h(s) dN_s)) = \exp(-c \int_0^t (1 - e^{h(s)}) ds)$$

8.2 Poisson composé

Exercice 8.2.1 : From the independence of Y_k , one gets

$$E(\lambda \sum_{k=1}^n Y_k + \mu \sum_{k=n+1}^m) = E(\lambda Y_1)^n E(\mu Y_1)^m$$

Then, the independence and stationarity of the increments of N follows from

$$E(\lambda X_s + \mu(X_t - X_s)) = E(\psi(\lambda, N_s) \psi(\mu, N_t - N_s)) = E(\psi(\lambda, N_s)) E(\psi(\mu, N_t - N_s))$$

where $\psi(\lambda, n) = E(\lambda Y_1)^n$. From the independence of N and the r.v. $(Y_k, k \geq 1)$ and using the Poisson law of N_t , we get

$$\begin{aligned} P(X_t \leq x) &= \sum_n P(N_t = n, \sum_{k=1}^n Y_k \leq x) \\ &= \sum_n P(N_t = n) P(\sum_{k=1}^n Y_k \leq x) \\ &= e^{-\lambda t} \sum_n \frac{(\lambda t)^n}{n!} F^*(x). \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} E(X_t) &= \sum_{n=1}^{\infty} E(\sum_{k=1}^n Y_k \mathbb{1}_{N_t=n}) = \sum_{n=1}^{\infty} n E(Y) P(N_t = n) \\ &= E(Y) \sum_{n=1}^{\infty} n P(N_t = n) = \lambda t E(Y_1). \end{aligned}$$

The computation of the variance can be done with the same method, however, it is more convenient to use the Laplace transform of X_t and the fact that the second moment is obtained from the second derivative of the Laplace transform.

Exercice 8.2.2 : From the independence of increments, we obtain that $(X_t - t\lambda E(Y), t \geq 0)$ is a martingale. More generally, for any bounded Borel function f , we denote by $\mu(f) = \int f(x) \mu(dx)$ the expectation $E(f(Y))$. From the definition of M^f ,

$$E(M_t^f) = \sum_n E(f(Y_n)) P(T_n < t) - t\lambda \mu(f) = \sigma(f) \sum_n P(T_n < t) - t\lambda \mu(f) = 0$$

The proof of the proposition is now standard and results from the computation of conditional expectation which lead to, for $s > 0$

$$E(M_{t+s}^f - M_t^f | \mathcal{F}_t) = E \left(\sum_{t < u \leq t+s} f(\Delta X_u) \mathbb{1}_{\Delta X_u \neq 0} - s\lambda\mu(f) | \mathcal{F}_t \right) = 0.$$

For the reciprocal, write

$$\begin{aligned} e^{iuX_t} &= 1 + \sum_{s \leq t} e^{iuX_s} (e^{iuX_s} - 1) \\ &= + \int_0^t e^{iuX_{s-}} dM_s^f + \sigma(f) \int_0^t e^{iuX_{s-}} ds \end{aligned}$$

where $f(x) = e^{iux} - 1$. Hence,

$$E(e^{iuX_{t+s}} | \mathcal{F}_t) = e^{iuX_t} + \sigma(f) \int_t^{t+s} dr E(e^{iuX_{t+r}} | \mathcal{F}_t)$$

Setting $\varphi(s) = E(e^{iuX_{t+s}} | \mathcal{F}_t)$ one get $\varphi(s) = \varphi(0) + \sigma(f) \int_0^s \varphi(r) dr$, hence

$$E(e^{iuX_{t+s}} | \mathcal{F}_t) = e^s \lambda \int \mu(dx) (e^{iux} - 1)$$

where $\lambda = \sigma(1)$ and $\mu = \sigma/\lambda$.

Exercice 8.2.3 : From the independence between the r.v. $(Y_k, k \geq 1)$ and the process N ,

$$E(e^{-\alpha X_t}) = E \left(\exp \left(-\alpha \sum_{k=1}^{N_t} Y_k \right) \right) = E(\Phi(N_t))$$

where $\Phi(n) = E \left(\exp \left(-\alpha \sum_{k=1}^n Y_k \right) \right) = [\Psi_Y(\alpha)]^n$, with $\Psi_Y(\alpha) = E(\exp -\alpha Y)$.

Now, $E(\Phi(N_t)) = \sum_n [\Psi_Y(\alpha)]^n e^{-\lambda t} \frac{\lambda^n t^n}{n!}$.

8.3 Marché complets, incomplets

Exercice 8.5.1 : We shall now restrict our attention to the simple case of a complete market where

$$dS_t = S_{t-} [\mu dt + \phi dM_t]$$

and $r = 0$. Here, M is the compensated martingale associated with a poisson process with deterministic intensity.

The non-arbitrage condition is equivalent to the existence of γ such that $\gamma > -1$ and $\mu + \lambda\phi\gamma = 0$. This implies that $\frac{\lambda\phi - \mu}{\lambda\phi} > 0$.

The unique equivalent martingale measure Q is defined by $\frac{dQ}{dP}|_{\mathcal{F}_t} = L_t$ where L is the strictly positive martingale

$$L_t = \left(\frac{\lambda\phi - \mu}{\lambda\phi} \right)^{N_t} \exp(t\mu/\phi)$$

which satisfies $dL_t = -L_t - \frac{\mu}{\lambda\phi} dM_t$.

Under the measure Q , $\tilde{M}_t \stackrel{def}{=} M_t + t\mu/\phi$ is a martingale.

Exercice 8.5.2 : Les m.m.e. sont définies par leur densité L vérifiant

$$dL_t = L_t(-\psi_t dW_t + \gamma_t dM_t)$$

avec

$$\sigma\psi(t) = b - r + \lambda\phi\gamma(t) \quad , \quad dP \otimes dt.p.s.$$

Elles sont indexées par un processus $\gamma > -1$. Sous P^γ , le processus W^γ défini par

$$W^\gamma(t) \stackrel{def}{=} W(t) - \int_0^t \psi(s) ds$$

est un mouvement Brownien $M^\gamma(t) \stackrel{def}{=} M(t) - \int_0^t \lambda\gamma(s) ds$ est une martingale.

On utilisera

$$W^\gamma(t) = W(t) + t\theta + \int_0^t \lambda\phi \frac{\gamma(s)}{\sigma} ds = W^0(t) + \int_0^t \lambda\phi \frac{\gamma(s)}{\sigma} ds$$

avec $\theta = \frac{b-r}{\sigma}$.

Bibliography