® HAbreu
UNIBAS

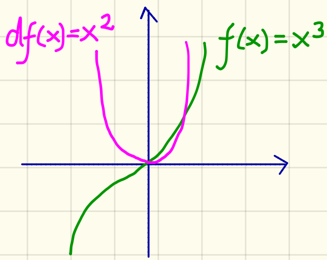
Istituzioni di Matematiche

LEZIONE 25

2013/2014

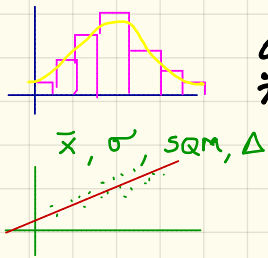
- Algebra Lineare: Matrici e operazioni fra matrici

06/03/2014



$$A\,\underline{x} = \underline{b}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$



® ABREU

Algebra Lineare

Matrici e operazioni tra matrici

Definizione:

Siano m, n interi positivi

Una matrice $m \times n$ è una tabella rettangolare

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

di mn elementi disposti in m righe ed n colonne.

Si dice che la A ha dimensione $m \times n$

e scriveremo $A = (a_{ij})_{m \times n}$

indice di riga (i)

indice di colonna (j)

$A^{(i)} = (a_{i1}, \cdots, a_{in})$ è una matrice $1 \times n$
che denota la i-esima riga di A.
(vettore riga)

$$A_{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$ è una matrice $m \times 1$

che denota la j-esima colonna di A
(vettore colonna).

Se $m = n$ si dice A è una matrice quadrata
di ordine n

__Esempio:__

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4/5 \\ \sqrt{2} & \pi & 183 \end{pmatrix}$$

$\dim A = 2 \times 3$

$A^{(1)} = (3, -2, 4/5)$

$A^{(2)} = (\sqrt{2}, \pi, 183)$

$A_{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

$A_{(2)} = \begin{pmatrix} -2 \\ \pi \end{pmatrix}$

$A_{(3)} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 183 \end{pmatrix}$

L'elemento $a_{2,1} = \sqrt{2}$

$a_{1,3} = 4/5$

Operazioni tra Matrici

- Somma
- Prodotto per uno scalare
- Prodotto "riga per colonna"
- Inversa
- Trasposta

SOMMA:

l'insieme di tutte le matrici $m \times n$

Siano $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$

la somma $A+B = (a_{ij}+b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$

è una matrice $m\times n$ i cui elementi sono le somme degli elemnti di A e B coordina a coordinata

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

$$A+B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Proprietà:

- Commutativa $A+B = B+A$
- Associativa $(A+B)+C = A+(B+C)$
  (permette di sommare tre o più matrici)
- Elemento neutro $\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ matrice di zeri
- Elemento opposto $-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$

Prodotto per uno scalere

Sia $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ e $k \in \mathbb{R}$ (scalare)

si definisce $kA = (ka_{ij})$ il prodotto di A per lo scalare k (ogni elemento di $A = (a_{ij})$ è moltiplicato per lo scalare k).

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad k = 2$

$$kA = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 2 \\ 6 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Proprietà:

$$k(A+B) = kA + kB$$

$$k(\lambda A) = (k\lambda)A$$

$$(k+\lambda)A = kA + \lambda A$$

Prodotto tra matrici: "riga per colonna"

Per moltiplicare due matrici le loro dimensioni devono essere "compatibili"

Sia $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ e $B \in \mathcal{M}_{n\times p}$

(il numero di colonne della matrice A deve essere uguale al numero di righe della matrice B).

Si definisce $AB = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times p}$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

dove $A = (a_{ik})_{m\times n}$ e $B = (b_{kj})_{n\times p}$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 3} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

$$c_{11} = \sum_{k=1}^{3} a_{1k} b_{k1} = 2\cdot 3 + 3\cdot 0 + 1\cdot 1$$

$$\begin{array}{r} 2\cdot 3 = 6 \\ 3\cdot 0 = 0 \\ 1\cdot 1 = 1 \\ \hline 7 \end{array}$$

$$AB = \begin{pmatrix} \boxed{7} & \boxed{10} & 21 & 15 \\ 2 & 6 & 10 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 4}$$

c_{12}

Proprietà:

NON è commutativo, inoltre se AB è definito, non è detto che BA lo sia

ES: ① $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}$ e $B \in \mathcal{M}_{3\times 4}$

AB è definito e BA non è definito

② $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}$ e $B \in \mathcal{M}_{3\times 2}$

$AB \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ e $BA \in \mathcal{M}_{3\times 3}$

$AB \neq BA$

(3) $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 8 & 4 & 3 \\ 6 & 4 & 15 \end{pmatrix} \\ \\ BA = \begin{pmatrix} 12 & 11 & 1 \\ 10 & 5 & 0 \\ 16 & 15 & 4 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \quad AB \neq BA$$

(R) HAbreu UNIBAS

• **Associativa:** Siano $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}$, $C \in \mathcal{M}_{p\times q}$

$$\underbrace{(AB)C}_{m\times q} = \underbrace{A(BC)}_{m\times q} = ABC$$

$$\underbrace{m\times p \quad p\times q}_{m\times q} \qquad \underbrace{m\times n \quad n\times q}_{m\times q}$$

(*) Se $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$

$$I_m \cdot A = A$$

$$A \cdot I_n = A$$

• **Elemento neutro:** $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrice identità

(ha zeri dappertutto tranne sulla diagonale principale che degli 1). $I_n \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A \quad (*)$$

Inversa: Non tutte le matrici possiedono un'inversa.
In primo luogo, una matrice, per avere un'inversa deve essere quadrata $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ e se esiste $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tale che $A \cdot B = B \cdot A = I_n$ si dice che A è INVERTIBILE e si denota $B = A^{-1}$.

Trasposta: Se $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ si definisce la sua trasposta $A^T \in \mathcal{M}_{n\times m}$ le cui righe sono le colonne di A (scambiamo le righe e le colonne)

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 4} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}_{4\times 2}$$

Proprietà:

- $(A^T)^T = A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(kA)^T = kA^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

$A \in \mathcal{M}_{m\times n}$

$B \in \mathcal{M}_{n\times p}$

$AB \in \mathcal{M}_{m\times p}$

$A^T \in \mathcal{M}_{n\times m}$

$B^T \in \mathcal{M}_{p\times n}$

ESERCIZIO: Verificare queste proprietà con degli esempi scegliendo matrici appropriate.

Determinante

Il determinante è un numero che può essere definito per ogni matrice quadrata.

si denota $\det(A) = \det(a_{ij}) = |A|$

Per $n=2$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 =$

$= 6 - 5 = 1$

$\det(A) = 1.$

Per $n=3$ (esiste la regola di Sarrus per il calcolo del determinante)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Questa regola serve SOLO per matrici 3x3

Esempio: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot 1 + (-1)(-1)\cdot 1 + (1\cdot 1\cdot -1)$
$- (1\cdot 2\cdot 1) - (1\cdot(-1)\cdot 2) - (1\cdot(-1)\cdot 1) =$

$= 4 + 1 + 1 \cancel{-2} \cancel{+2} + 1 = 7$

In generale il determinante per matrici di ordine superiore si calcola attraverso degli sviluppi ricorsivi riducendolo a determinanti di matrici di ordine minore.

Ma cosa è il determinante?

Per capirlo servono le permutazioni

Una permutazione è un riordino di n numeri

$n=3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \text{identità} \longrightarrow +$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2\ 3) \longrightarrow -$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2) \longrightarrow -$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 3) \longrightarrow -$$

$$(1\ 2)(2\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3) \longrightarrow +$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 2) \longrightarrow +$$

Il determinante è $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{seg}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$

S_n = l'insieme delle permutazioni di n elementi

se $\sigma \in S_n$, $\operatorname{seg}(\sigma)$ = segno di σ

Siccome S_n ha $n!$ elementi, già per $n=4$ dovremmo trovare le 24 permutazioni in S_4 per poter calcolare il determinante di una matrice 4×4 (questo non è molto fattibile).

Coffattori

Dato l'elemento a_{ij} di una matrice $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ il suo coffattore o complemento algebrico A_{ij}

è $$(-1)^{i+j} \det\Big(A(\underbrace{1 \cdots \hat{i} \cdots n \,|\, 1 \cdots \hat{j}}_{\text{si elimina la i-esima riga di A e la sua j-esima colonna}} \cdots n)\Big)$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$a_{11} \rightarrow A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$ è un numero

$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-5) = 5$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$

Esercizio: calcolare gli altri coffattori di A.

Sviluppo del determinante per riga (o per colonna)

$$\det(A) = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} A_{in}$$ per riga

$$\det(A) = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \cdots + a_{nj} A_{nj}$$ per colonna

$$A = \begin{pmatrix} \\ \boxed{a_{i1} \quad \cdots \quad a_{in}} \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \boxed{\begin{matrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{matrix}} & \end{pmatrix}$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 4 \quad 2} \\ 0 \quad 1 \quad 5 \\ 1 \quad 0 \quad 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$A_{11} = 2$

$A_{12} = 5$

$A_{13} = -1$

$$= a_{11} A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot (-1) = 2 + 20 - 2 = \boxed{20}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \cancelto{0}{0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 + 20 - 2 = \boxed{20}$$

Esercizio:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} =$$