® M.Abreu
UNIBAS

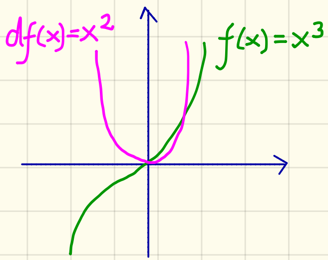
Istituzioni di Matematiche

Lezione 27

2013/2014

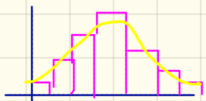
- Esempi Metodo di Gauss-Jordan

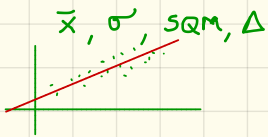
13/03/2014



$$A\,\underline{x}=\underline{b}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$





® ABREU

Esempio:

(Con infinite soluzioni)

$$\begin{cases} x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -1 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\boxed{0 = b_3 = 0}$$

Sempre vero

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

Ci sono infinite soluzioni

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \end{array} \longrightarrow -x_3 - 2x_4 = -3$$

$$x_3 = 3 - 2x_4 \quad , \quad x_4 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -1 & 2 & 7 \end{array} \longrightarrow 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 7$$

$$x_1 = \frac{7 - 4x_2 + x_3 - 2x_4}{2} = -2x_2 + \frac{(3-2x_4)}{2} - x_4 + \frac{7}{2} =$$

$$= -2x_2 - x_4 - x_4 + 5 = -2x_2 - 2x_4 + 5 \quad , \quad x_2 \in \mathbb{R}$$

$$x_2 = \alpha \in \mathbb{R}$$
$$x_4 = \beta \in \mathbb{R}$$

Esempi di soluzione

$$(1,1,1,1) \text{ e } (5,0,3,0)$$

$$S = \left\{ \left(\overset{x_1}{\overset{\shortparallel}{-2\alpha - 2\beta + 5}}, \overset{x_2}{\overset{\shortparallel}{\alpha}}, \overset{x_3}{\overset{\shortparallel}{3 - 2\beta}}, \overset{x_4}{\overset{\shortparallel}{\beta}} \right) : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

Esempio:

(Con un'unica soluzione)

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -4 & -1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{array}\right)$$

$0 \quad 0 \quad -4 \; \vdots \; -1 \Longrightarrow -4z = -1$

$z = 1/4$

$0 \quad 1 \quad -1 \; \vdots \; 0 \Longrightarrow y - z = 0$

$y = z = 1/4$

$1 \quad 1 \quad 2 \; \vdots \; 1 \Rightarrow x + y + 2z = 1$

$$x = 1 - y - 2z = 1 - \frac{1}{4} - \frac{2}{4} = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

$S = \{(1/4, 1/4, 1/4)\}$ UNICA SOLUZIONE

$x = 1/4$
$y = 1/4$
$z = 1/4.$

Esempio: (sistema incompatibile)

$$\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ -x + 2y - z = 1 \\ -x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + \frac{1}{2}R_1]{R_2 \to R_2 + \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3/2 & -3/2 & 3/2 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & 3/2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3/2 & -3/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & -3/2 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & 3/2 & -3/2 & 3/2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}$$

$0 = b_3 = 3 \neq 0$ sempre FALSA la 3^a equazione

$\Rightarrow$ SISTEMA INCOMPATIBILE

Esempio:
$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$
tutte uguali

$$\Rightarrow \left\{ 2x + 2y + 2z = 1 \right.$$

$$x = \frac{1 - 2y - 2z}{2} = \frac{1}{2} - y - z$$

y, z sono parametri ed il sistema ha infinite soluzioni

$y = \alpha \in \mathbb{R}$
$z = \beta \in \mathbb{R}$

$$S = \left\{ \left(\frac{1}{2} - \alpha - \beta, \alpha, \beta \right) : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

esempi di soluzione

$\alpha = 0, \beta = 0$
$(1/2, 0, 0)$

$\alpha = 1, \beta = 1$
$(-3/2, 1, 1)$

$\alpha = 1, \beta = -1$
$(1/2, 1, -1)$

La riduzione "a gradini" si può completare a una "forma canonica"

- Il coefficiente di ogni gradino è 1
- Tutti gli altri elementi della colonna corrispondente al gradino sono ZERO.

Esempio:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_2 \to R_2 - \frac{1}{2}R_1 \\ R_3 \to R_3 - \frac{1}{2}R_1}]{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 3/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 3/2 & 1/2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_1 \to R_1 - \frac{1}{3}R_2 \\ R_3 \to R_3 - \frac{1}{3}R_2}]{R_2 \to \frac{2}{3}R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 4/3 & 1/3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_1 \to R_1 - \frac{1}{4}R_3 \\ R_2 \to R_2 - \frac{1}{4}R_3}]{R_3 \to \frac{3}{4}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 \end{array}\right)$$

$x = 1/4$

$y = 1/4$

$z = 1/4$

METODO 2 per il calcolo dell'inversa di una matrice invertibile usando il metodo di Gauss-Jordan,

® HAbreu UNIBAS

Ricordiamo

<u>Teorema</u>: Sia A una matrice quadrata $(A \in \mathcal{M}_{n\times n} = \mathcal{M}_n)$. A è invertibile se e solo se il suo determinante è non nullo $(\det A \neq 0)$.

<u>Metodo</u> 1 per il calcolo dell'inversa $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}(\mathrm{cof}(A))^T$

Quest'altro metodo, è basato sul metodo di Gauss-Jordan e prevede d'eseguire operazioni di riga sulla matrice $(A \mid I_n)$ per portarla alla forma $(I_n \mid B)$ e allora $B = A^{-1}$,

® HAbreu
UNIBAS

Esempi:

① $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & -8 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_1 \to R_1 + \frac{2}{3} R_2 \\ R_3 \to R_3 - 3R_2}]{R_2 \to -\frac{1}{3} R_2} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 5/3 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{R_1 \to R_1 + \frac{5}{6} R_3 \\ R_2 \to R_2 + \frac{1}{3} R_3}]{R_3 \to -\frac{1}{2} R_3} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 13/6 & -11/6 & 5/6 \\ 0 & 1 & 0 & 5/3 & -4/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right) \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 13/6 & -11/6 & 5/6 \\ 5/3 & -4/3 & 1/3 \\ -3/2 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

<u>Esercizio</u>: verificare che questa è l'inversa di A.

② $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Trovare l'inversa di B (se esiste)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 4R_2]{R_1 \to R_1 - 4R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -18 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{20} R_3}$$

$R_1 \to R_1 + \frac{9}{10} R_3$

$R_2 \to R_2 - \frac{1}{4} R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/10 & -2/5 & 9/10 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/20 & 1/5 & 1/20 \end{array}\right)$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/10 & -2/5 & 9/10 \\ 1/4 & 0 & -1/4 \\ -1/20 & 1/5 & 1/20 \end{pmatrix}$$

Ⓡ HGAbreu
UNIBAS

③ $$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} \underline{0} & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2}$$

calcolare l'inversa di C

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2 + R_3]{R_1 \to R_1 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

® HGAbreu
UNIBAS

④ $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ⓡ HAbreu
UNIBAS

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

non è possibile creare gradino

$\Rightarrow D$ non è invertibile

Esercizio: Fare questa verifica usando il determinante.

Metodo di Gauss-Jordan

- Abbiamo visto che effettuando successive operazioni di riga sulla matrice associata ad un sistema si ottengono, ad ogni passaggio, dei sistemi equivalenti ad esso.

- Se in qualche passaggio si ottiene l'equazione $0 = b_i$ (*) (riga con tutti zeri nella matrice incompleta)

<u>Caso 1</u>: Se $b_i = 0 \Rightarrow$ l'equazione (*) è identicamente soddisfatta, si procede a cancellare l'equazione e si va avanti col sistema priva di essa

<u>Caso 2</u>: Se $b_i \neq 0 \Rightarrow$ l'equazione (*) è sempre FALSA ed il sistema è INCOMPATIBILE

® HGAbreu
UNIBAS

- Un gradino è un elemento a_{ij} della matrice incompleta tale che

$$a_{ij} \neq 0$$
$$a_{it} = 0 \quad \forall \; t < j \qquad (\text{se } i > 1)$$
$$a_{kj} = 0 \quad \forall \; k > i \qquad (\text{se } j < m)$$

Per ogni riga bisogna creare il primo gradino possibile rispetto alla riga precedente.

® M. Abreu
UNIBAS

METODO DI GAUSS-JORDAN: per risolvere sistemi di equazioni lineari.

Si eseguono successive operazioni di riga sulla matrice completa associata al sistema per portarlo "a gradini"

Caso 1: Si ottiene una riga con tutti zeri nella matrice incompleta e $b_i \neq 0$

$\Rightarrow$ il sistema è INCOMPATIBILE

® H. Abreu
UNIBAS

Caso 2: Se si ottiene una riga con tutti i zeri, si elimina e si prosegue con la riduzione a gradini.

Caso 3: Se il sistema è ridotto a gradini (c'è un gradino in ogni riga) allora è COMPATIBILE

ed è possibile scrivere la(e) soluzione(i) a ritroso dall'ultima alla prima riga.

N.B. Rimarranno come parametri tutte le variabili che non corrispondono ad un gradino.

Sia $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema con m equazioni ed n variabili

- Se $m > n$
  - ci sono righe ridondanti
    - unica soluzione
    - infinite soluzioni
  - e/o
  - sistema è incompatibile
- Se $m = n$
  - unica soluzione
  - infinite soluzioni per via di righe ridondanti
  - sistema incompatibile
- Se $m < n$
  - infinite soluzioni
  - sistema incompatibile

® HG Abreu
UNIBAS