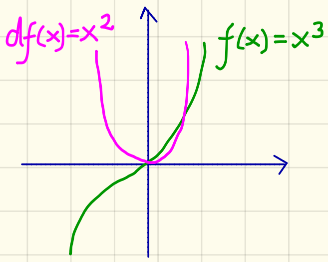
® Abreu
UNIBAS

Istituzioni di Matematiche

Lezione 28

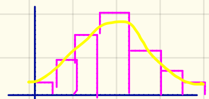
2013/2014

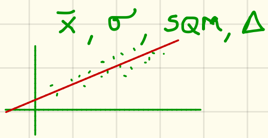
- Esercitazione Metodo di Gauss-Jordan



$$A \underline{x} = \underline{b}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$





18/03/2014

Metodo di Gauss-Jordan

- Abbiamo visto che effettuando successive operazioni di riga sulla matrice associata ad un sistema si ottengono, ad ogni passaggio, dei sistemi equivalenti ad esso.

- Se in qualche passaggio si ottiene l'equazione $0 = b_i$ (*) (riga con tutti zeri nella matrice incompleta)

  <u>Caso 1</u>: Se $b_i = 0$ $\Rightarrow$ l'equazione (*) è identicamente soddisfatta, si procede a cancellare l'equazione e si va avanti col sistema priva di essa

  <u>Caso 2</u>: Se $b_i \neq 0$ $\Rightarrow$ l'equazione (*) è sempre FALSA ed il sistema è INCOMPATIBILE

- Un gradino è un elemento a_{ij} della matrice incompleta tale che $a_{ij} \neq 0$

$$a_{it} = 0 \quad \forall \ t < j \quad (\text{se } i > 1)$$

$$a_{kj} = 0 \quad \forall \ k > i \quad (\text{se } j < m)$$

zeri in tutte le posizioni che precedono a_{ij} nella stessa riga e zeri in tutte le posizioni che seguono a_{ij} nella stessa colonna

Per ogni riga bisogna creare il primo gradino possibile rispetto alla riga precedente.

METODO DI GAUSS-JORDAN: per risolvere sistemi di equazioni lineari.

Si eseguono successive operazioni di riga sulla matrice completa associata al sistema per portarlo "a gradini"

Caso 1: Si ottiene una riga con tutti zeri nella matrice incompleta e $b_i \neq 0$

$\Rightarrow$ il sistema è INCOMPATIBILE

Caso 2: Se si ottiene una riga con tutti i zeri, si elimina e si prosegue con la riduzione a gradini.

Caso 3: Se il sistema è ridotto a gradini (c'è un gradino in ogni riga) allora è COMPATIBILE

ed è possibile scrivere la(e) soluzione(i) a ritroso dall'ultima alla prima riga.

N.B. Rimarranno come parametri tutte le variabili che non corrispondono ad un gradino.

Sia $A\underline{x} = \underline{b}$ un sistema con m equazioni ed n variabili

- Se $m > n$
  - ci sono righe ridondanti
    - unica soluzione
    - infinite soluzioni
  - e/o
  - sistema è incompatibile
- Se $m = n$
  - unica soluzione
  - infinite soluzioni per via di righe ridondanti
  - sistema incompatibile
- Se $m < n$
  - infinite soluzioni
  - sistema incompatibile

Esercizi:

(1)
$$\begin{cases} x-3y+5z=0 \\ 2x-4y+2z=0 \\ 5x-11y+9z=0 \end{cases}$$

tutti i termini noti sono nulli ⇒ SISTEMA OMOGENEO

è sempre COMPATIBILE perché almeno $(0,0,0)$ è una soluzione

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 5 & -11 & 9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 5R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 0 \\ 0 & 4 & -16 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{cccc} \cancel{2} & -4 & 2 & 0 \\ \cancel{-2} & 6 & -10 & 0 \\ \hline 0 & 2 & -8 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \cancel{5} & -11 & 9 & 0 \\ \cancel{-5} & +15 & -25 & 0 \\ \hline 0 & 4 & -16 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 0 & 4 & -16 & 0 \\ 0 & -4 & +16 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

® HGAbreu UNIBAS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 0 \end{array}\right)$$

$2y-8z=0$

$2y=8z$

$y=4z$

$x-3y+5z=0$

$x-3(4z)+5z=0$

$x-12z+5z=0$

$x=7z$

$z=k$

$S=\{(7k,4k,k): k\in\mathbb{R}\}$

$(0,0,0)$ $k=0$

$(7,4,1)$ $k=1$

Sistema compatibile con ∞ soluzioni

$$\textcircled{2}\ \begin{cases} x_2 - x_3 = -1 \\ x_3 + x_1 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 + 3x_1 + 2x_3 = 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \phantom{x_1 +{}} x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4 \to R_4 - 3R_1]{R_3 \to R_3 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_2]{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} 0 = b_3 = 1 \neq 0 \\ 0 = b_4 = -2 \neq 0 \end{array} \Longrightarrow \text{SISTEMA INCOMPATIBILE}$$

passaggio non tanto necessario

basta uno di questi due.

® M. G. Abreu
UNIBAS

③ $\begin{cases} x_1 + 2x_3 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -9 & -8 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_2]{R_2 \to -R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to -\frac{1}{2}R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$x_3 = 1$

$3x_2 + 2x_3 = 0$

$3x_2 = -2x_3 = -2$

$x_2 = -2/3$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$

$x_1 + 2\left(-\frac{2}{3}\right) + 3(1) = 1$

$x_1 = 1 - 3 + \frac{4}{3} = \frac{3 - 9 + 4}{3} =$

$= -\frac{2}{3}$

$\mathcal{S} = \{(-2/3, -2/3, 1)\}$

UNICA SOLUZIONE

® HAbreu
UNIBAS

Questo era un sistema con $m = n = 3$ $\quad$ $m = \#$ di eq.
$n = \#$ di var.

$\Rightarrow$ la matrice incompleta è quadrata

$$\begin{vmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ 2 \quad 1 \quad 4 \\ 3 \quad -3 \quad 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(1+12) - 2(2-12) + 3(-6-3) = 13 + 20 - 27 = 6 \neq 0$$

<u>Teorema</u>: I sistemi $A\underline{x} = \underline{b}$ con A matrice quadrata di ordine n sono compatibili con un unica soluzione se e solo se $\det(A) \neq 0$.

Ⓡ HAbreu UNIBAS

$$④ \Longrightarrow \begin{cases} x - 3y + 4z + t = -1 \\ 10y - 11z - 2t = 18 \\ 22t = 22 \end{cases}$$

z sarà un parametro $\quad z = k$

perché non c'è gradino in questa colonna

$$22t = 22$$

$$t = 1$$

$$10y - 11z - 2t = 18$$

$$10y - 11z - 2 = 18$$

$$10y = 20 + 11z$$

$$y = \left(\frac{20 + 11z}{10}\right) = \frac{20}{10} + \frac{11}{10}z = 2 + \frac{11}{10}z$$

$$x - 3y + 4z + t = -1$$

$$x - 3\left(\frac{20 + 11z}{10}\right) + 4z + 1 = -1$$

$$x = -1 - 1 - 4z + \frac{60 + 33z}{10} = \frac{-20 - 40z + 60 + 33z}{10}$$

$$= \frac{40 - 7z}{10} = \frac{40}{10} - \frac{7z}{10} = 4 - \frac{7z}{10}$$

$$S = \left\{ \left(-\frac{7}{10}k + 4, \frac{11}{10}k + 2, k, 1\right) : k \in \mathbb{R} \right\}$$

Esercizi degli esoneri/esame del 2011

① $\begin{cases} x - 3y + 4z + t = -1 \\ 3x + y + z + t = 15 \\ 2x + 4y - 3z = 16 \\ x + 7y - 7z + 21t = 39 \end{cases}$

③ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ -18x_1 + 12x_2 - 26x_3 = -12 \\ 14x_1 + 2x_2 + 24x_3 = 32 \\ 10x_1 + 19x_2 + 23x_3 = 63 \end{cases}$

② $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 6x_4 = 5 \\ x_2 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 20x_4 = -24 \end{cases}$

④ $\begin{cases} -3x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 3 \\ -x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

Ⓡ HGAbreu
UNIBAS

5

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 8 \\
x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\
x_1 + x_3 = 2 \\
x_1 - x_2 = 0 \\
x_4 + x_5 = 2
\end{cases}
$$

® HGAbreu
UNIBAS