®HAbreu
UNIBAS

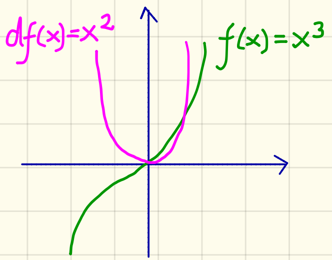
Istituzioni di Matematiche

Lezione 26

2013/2014

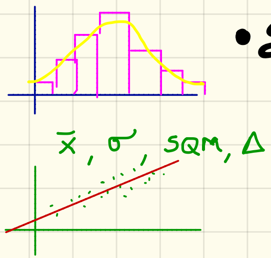
- Determinante
- Sistemi di eq. lineari

11/03/2014



$A\,\underline{x} = \underline{b}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$



Coffattori

Dato l'elemento a_{ij} di una matrice $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ il suo coffattore o complemento algebrico A_{ij}

è $\quad (-1)^{i+j} \det\big(A(\underbrace{1 \cdots \hat{i} \cdots n \,|\, 1 \cdots \hat{j} \cdots n}_{\text{si elimina la i-esima riga di A e la sua j-esima colonna}})\big)$

Ⓡ MGAbreu
UNIBAS

Sviluppo del determinante per riga (o per colonna)

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$ per riga

$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$ per colonna

$$A = \begin{pmatrix} \\ \boxed{a_{i1} \quad \cdots \quad a_{in}} \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \boxed{\begin{matrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{matrix}} & \end{pmatrix}$$

® HGAbreu
UNIBAS

Esercizio:

$$\begin{vmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&2\\0&2&1&3\\1&0&0&4\end{vmatrix} =$$

$$= 1\begin{vmatrix}1&0&2\\2&1&3\\0&0&4\end{vmatrix} - \cancelto{0}{0\begin{vmatrix}0&0&3\\2&1&3\\0&0&4\end{vmatrix}} + \cancelto{0}{0\begin{vmatrix}0&0&3\\1&0&2\\0&0&4\end{vmatrix}} - 1\cdot\begin{vmatrix}0&0&3\\1&0&2\\2&1&3\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix}1&0&2\\2&1&3\\0&0&4\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}0&0&3\\1&0&2\\2&1&3\end{vmatrix} = -\cancelto{0}{0\cdot\begin{vmatrix}2&3\\0&4\end{vmatrix}} + 1\cdot\begin{vmatrix}1&2\\0&4\end{vmatrix} - \cancelto{0}{0\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}}$$

$$-\left(\cancelto{0}{0\cdot\begin{vmatrix}0&2\\1&3\end{vmatrix}} - \cancelto{0}{0\cdot\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}} + 3\cdot\begin{vmatrix}1&0\\2&1\end{vmatrix}\right) = 4 - 3(1) = 4 - 3 =$$

$$= \boxed{1}$$

® HGAbreu
UNIBAS

Con i cofattori di una matrice A è possibile costruire un'altra matrice chiamata **matrice dei cofattori**

$$\mathrm{cof}(A) = (A_{ij}) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

<u>Esempio:</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$A_{11} = \underline{2}$ $\quad A_{12} = 5$ $\quad A_{13} = -1$

$A_{21} = -8$ $\quad A_{22} = 0$ $\quad A_{23} = 4$

$A_{31} = 18$ $\quad A_{32} = -5$ $\quad A_{33} = 1$

$$\mathrm{cof}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -8 & 0 & 4 \\ 18 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

® H. Abreu
UNIBAS

METODO 1 per il calcolo dell'inversa di una matrice invertibile:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \left(cof(A)\right)^T$$

Teorema: Una matrice quadrata è invertibile se e solo se il suo determinante è non nullo. $\blacksquare$

Esempio: $\det(A) = 20$ $\quad cof(A) = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -8 & 0 & 4 \\ 18 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

$cof(A)^T = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 18 \\ 5 & 0 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/10 & -2/5 & 9/10 \\ 1/4 & 0 & -1/4 \\ -1/20 & 1/5 & 1/20 \end{pmatrix}$

® H. Abreu
UNIBAS

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/10 & -2/5 & 9/10 \\ 1/4 & 0 & -1/4 \\ -1/20 & 1/5 & 1/20 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/10 & -2/5 & 9/10 \\ 1/4 & 0 & -1/4 \\ -1/20 & 1/5 & 1/20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$1 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{20}\right) = \frac{1}{10} + 1 - \frac{1}{10} = 1$$

® HAbreu UNIBAS

Sistemi di Equazioni Lineari

Un sistema di equazioni è un insieme di equazioni nelle stesse variabili che devono essere soddisfatte simultaneamente.

Si chiamano "lineari" le equazioni in cui tutte le variabili hanno esponente 1 e non compaiono prodotti di variabili

<u>ES</u>: $2x + 3y + 7z = 5$ è un eq. lineare

$2x^2 + 7xy = 6$ non lo è

$\operatorname{sen} x + \log x + 7y = 25$ non lo è

Ⓡ HGAbreu
UNIBAS

1. Capire quale è l'insieme di variabili

2. Identificare l'insieme dal quale possono essere prese le soluzioni

3. Determinare se il sistema è "lineare" o di grado superiore.

Nel seguito studieremo sistemi di equazioni lineari a più variabili con soluzioni reali.

Dato un sistema di eq. può accadere
- 1. Esiste un'unica soluzione
- 2. Esistono infinite soluzioni
- 3. Non esistono sol.

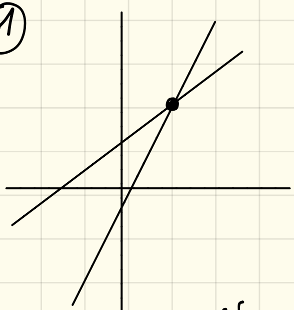
I sistemi lineari più semplici sono quelli a due equazioni in due incognite (variabili)

® HAbreu
UNIBAS

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} \longrightarrow$$

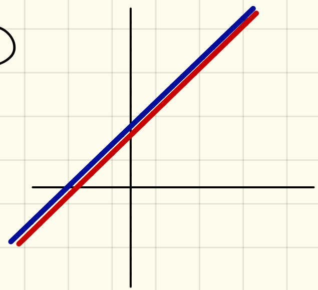
geometricamente rappresentano l'intersezione di due rette nel piano (ogni equazione corrisponde a una retta).

1



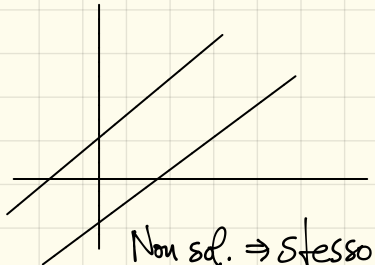
Unica sol. → coefficienti angolari diversi

2



Infinite soluzioni → stesso coeff. angolare ed un punto in comune ⇒ siano la stessa retta

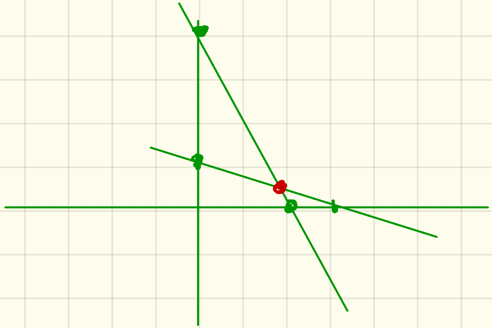
3



Non sol. ⇒ stesso coeff. angolare ma nessun punto in comune ⇒ rette parallele dist.

Esempi:

① $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 3y = 3 \end{cases}$



$$
\begin{array}{r}
\cancel{2x} + y = 4 \\
-\cancel{2x} - 6y = -6 \\
\hline
-5y = -2
\end{array}
$$

$$y = 2/5$$

$$x = 3 - 3y = 3 - \frac{6}{5} = \frac{9}{5}$$

Soluzione unica $\left(\frac{9}{5}, \frac{2}{5}\right)$

$$x = 9/5 \qquad y = 2/5$$

Verificare la soluzione

$$2\left(\frac{9}{5}\right) + \left(\frac{2}{5}\right) = \frac{20}{5} = 4$$

$$\frac{9}{5} + 3\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{15}{5} = 3$$

② $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases}$

$y = 4 - 2x$

Infinite soluzioni

$S = \{(x,y) : y = 4 - 2x, x \in \mathbb{R}\} = \{(x, 4-2x) : x \in \mathbb{R}\}$

Per esempio $(0,4) \in S$

$$\left.\begin{array}{r} 4x + 2y = 8 \\ -4x - 2y = -8 \\ \hline 0 + 0 = 0 \end{array}\right\}$$

sempre vero $\boxed{0 = 0}$

$2x + y = 4$ $\quad y = -2x + 4$

$m = -2$

$4x + 2y = 8$ $\quad y = \dfrac{-4x + 8}{2} = -2x + 4$

$m = -2$

$(0,4) \in \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases}$

Sono la stessa eq. a meno di un multiplo (2)

® HGAbreu UNIBAS

®HAbreu UNIBAS

3

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x + 2y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 4x + 2y = 7 \\ -4x - 2y = -8 \\ \hline 0 + 0 = -1 \end{array}$$

$\boxed{0 \neq -1}$ sempre falso.

$S = \emptyset$ (vuoto) si dice che il sistema è

INCOMPATIBILE.

④ $$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

(Il metodo di sostituzione non è adatto e dobbiamo generalizzare il metodo di eliminazione)

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{3\times 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{3\times 1}$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{A_{m\times n}}_{\text{matrice dei coeff}} \cdot \underbrace{\underline{x}_{n\times 1}}_{\text{vettore di variabili}} = \underline{b}_{m\times 1}$$

vettore termini noti

m eq.

n variabili

Ⓡ HAbreu
UNIBAS

Un sistema di equazioni lineari può essere modellato in forma matricciale come $A\underline{x} = \underline{b}$

dove $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ matrice dei coefficienti → matrice incompleta del sistema

$\underline{x} \in \mathcal{M}_{n\times 1}$ vettore delle variabili

$\underline{b} \in \mathcal{M}_{m\times 1}$ vettore dei termini noti

$(A \,\vdots\, b)$ ⟶ matrice completa del sistema

Es
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

® HAbreu
UNIBAS

Il metodo che studieremo prevede la "riduzione a gradini" della matrice completa del sistema che permette di "leggere" più facilmente le soluzioni del sistema (se esistono).

Operazioni di Riga

Operazioni sulle righe di una matrice che producono una matrice ad essa equivalente

① Scambiare due righe $\quad R_i \longleftrightarrow R_j$

Ovviamente questo non cambia le soluzioni del sistema associato alla matrice perché corrisponde a un riordino delle equazioni del sistema

② Moltiplicare una riga per uno scalare NON NULLO $\quad R_i \longrightarrow \lambda R_i$

Neanche questo cambia le soluzioni perché un multiplo di una equazione non cambia le soluzioni dell'eq. stessa.

③ Sostituire una riga per se stessa più un multiplo di un'altra $R_i \to R_i + \lambda R_j$

Se $(x_1, \dots, x_n)$ soddisfa $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$ $\quad R_i$

e anche $a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n = b_j$ $\quad R_j$

allora per qualsiasi $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \lambda a_{j1}x_1 + \lambda a_{j2}x_2 + \dots + \lambda a_{jn}x_n = \lambda b_j$
continua ad essere soddisfatta da $(x_1, \dots, x_n)$ e anche

$$\underbrace{(a_{i1} + \lambda a_{j1})x_1 + (a_{i2} + \lambda a_{j2})x_2 + \dots + (a_{in} + \lambda a_{jn})x_n = b_i + \lambda b_j}_{R_i + \lambda R_j}$$

è soddisfatta da $(x_1, \dots, x_n)$

Ⓡ HGAbreu
UNIBAS

Effettuando successive operazioni di riga sulla matrice completa associata ad un sistema si ottengono matrici ad essa equivalenti che ad ogni passo corrispondo a sistemi equivalenti a quello originale (ovvero con lo stesso insieme di soluzioni).

® HGAbreu
UNIBAS

Se in qualche momento si ottiene $0 = b_i$

se $b_i = 0 \longrightarrow \boxed{0=0}$ sempre vero e quindi si può eliminare la R_i (i-esima riga) perché non apporta niente

se $b_i \neq 0 \longrightarrow \boxed{0=b_i\neq 0}$ sempre falso, quindi il sistema è INCOMPATIBILE

Il Metodo di Gauss-Jordan

per risolvere sistemi di equazioni lineari consiste in eseguire operazioni di riga sulla matrice completa associata al sistema per portarla "a gradini"

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 & \text{con } a_{11} \neq 0 \\ 0 \quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_n & \text{con } a_{22} \neq 0 \\ \vdots \qquad\quad 0 \\ \qquad\quad\ \vdots \\ 0 \qquad\quad 0 \end{cases}$$

Un gradino è un valore a_{ij} della matrice completa tale che $a_{ij} \neq 0$

$a_{it} = 0 \quad \forall \quad t < j$

$a_{kj} = 0 \quad \forall \quad k > i$

Lo scopo è costruire un gradino in ogni riga.

Esempio:

$$\begin{cases} x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -1 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

$$\boxed{0 = b_3 = 0}$$

Sempre vero

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

Ci sono infinite soluzioni

®HAbreu UNIBAS

$$0 \quad 0 \quad -1 \quad -2 \ \vdots\ -3 \longrightarrow -x_3 - 2x_4 = -3$$

$$x_3 = 3 - 2x_4 \,, \quad x_4 \in \mathbb{R}$$

$$2 \quad 4 \quad -1 \quad 2 \ \vdots\ 7 \longrightarrow 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 7$$

$$x_1 = \frac{7 - 4x_2 + x_3 - 2x_4}{2} = -2x_2 + \frac{(3 - 2x_4)}{2} - x_4 + \frac{7}{2} =$$

$$= -2x_2 - x_4 - x_4 + 5 = -2x_2 - 2x_4 + 5 \,, \quad x_2 \in \mathbb{R}$$

$$x_2 = \alpha \in \mathbb{R}$$
$$x_4 = \beta \in \mathbb{R}$$

Esempi di soluzione
$(1,1,1,1)$ e $(5,0,3,0)$

$$S = \{(-2\alpha - 2\beta + 5, \alpha, 3 - 2\beta, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$