Lezione 1: L'algoritmo di Gauss

In questa lezione vogliamo introdurre l'algoritmo di Gauss. Questo algoritmo si applica alle *matrici*, che come vedremo, sono semplicemente un modo di organizzare i numeri in un rettangolo. Per il momento vedremo soltanto un'applicazione del metodo di Gauss per la risoluzione dei sistemi lineari, tuttavia questo metodo risultera' fondamentale quando andremo a studiare gli spazi vettoriali in generale e i problemi di dipendenza e indipendenza lineare.

0.1 Sistemi lineari: primi esempi

Un *sistema lineare* è un insieme di equazioni lineari, cioè equazioni in cui le incognite appaiono con grado 1. Una soluzione di un sistema lineare in n incognite è una n-upla di valori che sostituiti alle incognite che soddisfano *tutte* le equazioni del sistema.

Ad esempio, consideriamo il sistema lineare nelle due incognite x, y :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 22 \\ 4x + 5y = 66 \end{cases}.$$

Se moltiplichiamo entrambi i membri di una equazione per un numero reale, oppure se sommiamo membro a membro due equazioni del sistema, otteniamo sempre una equazione lineare in due incognite e *le soluzioni del sistema non cambiano*. Cio' ci fornisce un metodo per calcolare le soluzioni del sistema in modo organizzato.

Infatti sommiamo alla seconda equazione la prima equazione moltiplicata per -2 in modo da eliminare dalla seconda equazione l'incognita x, ottenendo così :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 22 \\ \quad\ \ 11y = 22 \end{cases}.$$

Ora, dalla seconda equazione ricaviamo

$$y = 2;$$

sostituendo questo valore di y nella prima equazione otteniamo

$$2x - 6 = 22, \qquad \textit{da cui} \qquad x = 14.$$

Troviamo così che il sistema ha una ed una sola soluzione: $(14, 2)$.

Consideriamo un altro esempio, il sistema lineare nelle tre incognite x, y, z :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y + 6z = 1 \\ 7x + 8y + 8z = 1 \end{cases} .$$

Sommiamo alla seconda e alla terza equazione la prima equazione moltiplicata rispettivamente per -4 e per -7, in modo da eliminare dalla seconda e dalla terza equazione l'incognita x, ottenendo così

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ \quad - 3y - 6z = -3 \\ \quad - 6y - 13z = -6 \end{cases} .$$

Sommiamo alla terza equazione la seconda equazione moltiplicata per -2, in modo da eliminare dalla terza equazione l'incognita y, ottenedo così :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ \quad - 3y - 6z = -3 \\ \qquad\quad - z = 0 \end{cases} .$$

Ora, dalla terza equazione ricaviamo

$$z = 0;$$

sostituendo questo valore di z nella seconda equazione otteniamo

$$-3y = -3, \qquad \text{da cui} \qquad y = 1;$$

sostituendo questi valori di z ed y nella prima equazione otteniamo

$$x + 2 = 1, \qquad \text{da cui} \qquad x = -1;$$

Troviamo così che il sistema ha una ed una sola soluzione: $(-1, 1, 0)$.

Questi due esempi suggeriscono un metodo per la risoluzione dei sistemi lineari più generale. Prima di descriverlo, vogliamo introdurre il concetto di matrice.

Possiamo rappresentare sinteticamente i dati che caratterizzano il sistema del punto precedente con la matrice, cioè una tabella rettangolare in cui inserire i coefficienti del sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 8 & 1 \end{array}\right]$$

La matrice che abbiamo scritto ha nelle righe i coefficienti delle incognite e il termine noto della varie equazioni, mentre nelle colonne ha i coefficienti delle varie incognite e infine i termini noti.

Il processo con cui abbiamo ricavato le soluzioni puo' essere descritto nel modo seguente, dove "moltiplicare una riga per un numero reale p " significa "moltipicare ogni componente della riga per p", "sommare due righe" significa "sommare le componenti corrispondenti delle due righe", ...

Sommiamo alla seconda e alla terza riga la prima riga moltiplicata rispettivamente per -4 e per -7, in modo da annullare nella seconda e nella terza riga la prima componente, ottenendo così la matrice

$$\begin{array}{l} R_1 := R_1 \\ R_2 := R_2 - 4R_1 \\ R_3 := R_3 - 7R_1 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & -6 & -13 & -6 \end{array}\right]$$

Sommiamo alla terza riga la seconda riga moltiplicata per -2, in modo da eliminare nella terza riga la seconda componente, ottenedo così

$$\begin{array}{l} R_1 := R_1 \\ R_2 := R_2 \\ R_3 := R_3 - 2R_2 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

1 Matrici

Una *matrice* è una tabella di numeri reali. Ciascuna matrice viene pensata come un'unica entità e viene indicata con una lettere maiuscola. Se una matrice A possiede m righe ed n colonne si dice che A ha *tipo* $m \times n$. Il numero reale che compare in A nella riga $i-$ma e colonna $j-ma$ viene detto *elemento di posto* (i,j) di A.

La generica matrice A di tipo $m \times n$ viene rappresentata

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

oppure, più brevemente,

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}},$$

o $A = [a_{ij}]$ quando il tipoè chiaro dal contesto. Si noti che i e j non hanno alcun particolare significato, potrebbero essere sostituiti da altri due simboli, come h e k.

Per indicare che una matrice A ha tipo $m \times n$ si usa scrivere anche

$$\underset{m \times n}{A}.$$

Una volta scelto un simbolo, nel nostro caso A, per indicare una matrice, si usa il simbolo $a_{i,j}$ per indicare l'elemento di posto (i, j) in A.

Ad esempio, per

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix},$$

si ha:

$$a_{2,3} = 7, \qquad a_{2,.} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}, \qquad a_{.,3} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Se le righe di una matrice A hanno lo stesso numero di elementi delle colonne di una matrice B, allora possiamo fare il prodotto scalare di ciascuna riga di A per ciascuna colonna di B, ed organizzare questi prodotti in una tabella, otteniamo così una matrice detta prodotto (righe per colonne) di A per B, ed indicata con AB.

Ad esempio, si ha

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 \end{array}\right]\left[\begin{array}{r|r|r} 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1\cdot 9+2\cdot 12 & 1\cdot 10+2\cdot 13 & 1\cdot 11+2\cdot 14 \\ 3\cdot 9+4\cdot 12 & 3\cdot 10+4\cdot 13 & 3\cdot 11+4\cdot 14 \\ 5\cdot 9+6\cdot 12 & 5\cdot 10+6\cdot 13 & 5\cdot 11+6\cdot 14 \\ 7\cdot 9+8\cdot 12 & 7\cdot 10+8\cdot 13 & 7\cdot 11+8\cdot 14 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 33 & 36 & 39 \\ 75 & 82 & 89 \\ 117 & 128 & 139 \\ 159 & 174 & 189 \end{bmatrix}$$

La moltiplicazione di matrici puo' essere utilizzata per rappresentare sinteticamente i sistemi lineari. Ad esempio, il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & = & 3 \\ 4x_1 + 5x_2 & = & 6 \\ x_1 + x_2 & = & 0 \end{cases},$$

cioè

$$\begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 4x_1 + 5x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix},$$

puo' essere scritto come

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

In generale, il sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

cioè

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

puo' essere scritto come

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

e rappresentato sinteticamente come

$$A\underline{x} = \underline{b},$$

dove A è la matrice di tipo $m \times n$ dei coefficienti, $\underline{x}$ è la colonna delle n incognite, e $\underline{b}$ è la colonna degli m termini noti.

Esempi

- $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 10 \\ 12 & 15 \end{bmatrix},$

  $\begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ non'e definito;

- $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix},$

  $\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 11;$

- $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 3b \\ 2c & 3d \end{bmatrix},$

  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 3c & 3d \end{bmatrix}.$

2 Sistemi lineari: soluzione con l'algoritmo di Gauss

Un *sistema di m equazioni lineari* in n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$è un insieme di m equazioni lineari

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

dove $a_{11}, a_{12}, \ldots, b_1, \ldots, a_{mn}, b_m$ sono costanti reali; gli a_{ij} sono i *coefficienti* e i b_j sono i *termini noti* del sistema. Una *soluzione* di questo sistemaè una $n-$pla $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ di numeri reali soluzione di ciscuna equazione del sistema:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}s_j = b, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Il sistema si dice

- *impossibile* se non possiede alcuna soluzione;
- *determinato* se possiede una ed una sola soluzione;
- *indeterminato* se possiede più di una soluzione.

Vedremo in seguito che un sistema indeterminato in realtà possiede infinite soluzioni.

Diciamo che due sistemi lineari sono equivalenti quando hanno lo stesso insieme delle soluzioni.

Possiamo rappresentare i dati che caratterizzano il sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

con una matrice avente nelle prima riga i coefficienti e il termine noto della prima equazione, nelle seconda riga i coefficienti e il termine noto della seconda equazione, ...

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

detta *matrice completa* del sistema; nella prima colonna di questa matrice compaiono i coefficienti della prima incognita x_1 nelle varie equazioni, nella seconda colonna di questa matrice compaiono i coefficienti della seconda incognita x_1 nelle varie equazioni, ... nell'ultima colonna di questa matrice compaiono i termini noti delle varie equazioni. La matrice

$$\left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array}\right]$$

viene detta matrice dei coefficienti del sistema.

Consideriamo un generico sistema lineare di m equazioni in n incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

nel quale la incognita x_1 compaia effettivamente, cioè compaia con un coefficiente $\neq 0$ in almeno una equazione; a meno di uno scambio di equazioni, possiamo supporre che x_1 compaia effettivamente nella prima equazione, cioè che sia $a_{11} \neq 0$.

Possiamo eliminare la stessa incognita x_1 dalla seconda equazione, sommando alla seconda equazione la prima moltiplicata per $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$:

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n - \frac{a_{21}}{a_{11}}\left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n\right) = b_1 - \frac{a_{21}}{a_{11}}\left(b_2\right)$$

ottenendo così un'equazione del tipo

$$a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2.$$

Analogamente, possiamo eliminare la stessa incognita x_1 dalla terza equazione, sommando alla terza equazione la prima moltiplicata per $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$, ottenendo così un'equazione del tipo

$$a'_{32}x_2 + \cdots + a'_{3n}x_n = b'_3;$$

... e così fino ad eliminare x_1 dall'ultima equazione, ottenendo così un sistema lineare del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad\quad \vdots \\ \qquad\quad a'_{m2}x_2 + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases}.$$

Questo sistemaè equivalente al sistema originario.

Abbiamo così sostanzialmente ricondotto la soluzione del sistema originario di m equazioni lineari nelle n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ alla soluzione di un sistema di $m-1$ equazioni lineari nelle $n-1$ incognite $x_2, \ldots, x_n$.

L'iterazione di questo processo porta ad un metodo di risoluzione dei sistemi lineari, detto *metodo di eliminazione di Gauss.*

In termini matriciali, il processo di eliminazione puo' essere descritto nel modo seguente. Consideriamo una matrice di m righe ed $n+1$ colonne

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

nella quale la prima colonna non sia completamente nulla; a meno di uno scambio di righe, possiamo supporre che $a_{11} \neq 0$.

Possiamo annullare il primo elemento della seconda riga, sommando alla seconda riga la prima riga moltiplicata per $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$:

$$(a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, b_2) - \frac{a_{21}}{a_{11}}(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, b_1)$$

ottenendo così una riga del tipo

$$(0, a'_{22}, \ldots, a'_{2n}, b'_2),$$

... e così fino ad annullare il primo elemento dell'ultima riga, ottenendo così una matrice del tipo

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} & b'_m \end{array}\right] \qquad (1)$$

L'elemento non nullo a_{11} si dice il *pivot* della prima riga, e nella colonna al di sotto di esso vi sono tutti zeri.

A questo punto la prima riga rimane invariata, e si applica nuovamente l'algoritmo di Gauss alle righe successive. Se almeno uno degli a'_{2i}è diverso da zero, a meno di uno scambio di righe,è possibile supporre $a'_{22} \neq 0$. In tal caso, a'_{22}è il pivot della seconda riga, e possiamo lavorare come sopra in modo da ottenere una matrice con tutti zeri nella colonna al di sotto di a'_{22}.

Se invece tutti gli a'_{2i} sono nulli, e se almeno un a'_{3i}è diverso da zero, a meno di uno scambio di righe,è possibile supporre $a'_{32} \neq 0$ ne allora il il pivot della seconda rigaè a'_{32}, e procedendo come sopra otteniamo una matrice con tutti zeri nella colonna al di sotto di a'_{32}.

Poi si cerca il pivot della terza riga, e si continua così sino ad ottenere una matrice *a scala*. A questo punto si torna al sistema associato e lo si risolve per sostituzione. Possono succedere tre cose:

- il sistema è *impossibile*: in tal caso il numero di righe non nulle della matrice a scala incompletaè minore del numero di righe non nulle della matrice a scala ompleta;

- il sistema è *determinato*: ha soluzione e il numero di pivots è uguale al numero delle incognite;

- il sistema è *indeterminato*: ha soluzione ma il numero r di pivots è minore del numero n delle incognite. In tal caso diciamo in breve che il sistema ha ∞^{n-r} soluzioni, cioè le soluzioni dipendono da $n - r$ parametri. Le incognite che si ricavano sono quelle corrispondenti ai pivots, le altre possono assumere un valore (parametro) a piacere.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & 0 & \dots & a''_{2n} & b''_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a''_{mn} & b''_m \end{array}\right].$$

Esempio 1

Consideriamo il sistema lineare di quattro equazioni nelle cinque incognite u, v, w, x, y, con la corrispondente matrice completa

$$\left\{\begin{array}{rrrrrcr} u & +2v & +3w & +x & +y & = & 4 \\ u & +2v & +3w & +2x & +3y & = & -2 \\ u & +v & +w & +x & +y & = & -2 \\ -3u & -5v & -7w & -4x & -5y & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & -7 & -4 & -5 & 0 \end{array}\right].$$

Di seguito riportiamo i passi del metodo di eliminazione di Gauss, descritti sia sul sistema che sulla corrispondente matrice. Svolgiamo i passi cercando di essere il più possibile sistematici, come li potrebbe svolgere un elaboratore.

$$\left\{\begin{array}{rrrrrcr} u & +2v & +3w & +x & +y & = & 4 \\ & & & x & +2y & = & -6 \\ & -v & -2w & & & = & -6 \\ & v & +2w & -x & -2y & = & 12 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 12 \end{array}\right].$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrrcr} u & +2v & +3w & +x & +y & = & 4 \\ & -v & -2w & & & = & -6 \\ & & & x & +2y & = & -6 \\ & v & +2w & -x & -2y & = & 12 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 12 \end{array}\right].$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrrcr} u & +2v & +3w & +x & +y & = & 4 \\ & -v & -2w & & & = & -6 \\ & & & x & +2y & = & -6 \\ & & & -x & -2y & = & 6 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 6 \end{array}\right].$$

$$\begin{cases} u & +2v & +3w & +x & +y & = & 4 \\ & -v & -2w & & & = & -6 \\ & & & x & +2y & = & -6 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

L'ultima equazioneèdiventata un'identita'.

Ora, dalla terza equazione ricaviamo la prima incognita che in essa compare, la x, in funzione della y :

$$x = -2y - 6.$$

(Osserviamo che la xè proprio l'incognita corrispondente al pivot della terza riga) Nella seconda equazione sostituiamo la x con la sua espressione in funzione della y e ricaviamo la prima incognita che in essa compare, la v, in funzione della w e della y :

$$v = -2w + 6.$$

(Osserviamo che la vè proprio l'incognita corrispondente al pivot della seconda riga) Nella prima equazione sostituiamo la x con la sua espressione in funzione della y, sostituiamo la v con la sua espressione in funzione della w e della y, e ricaviamo la prima incognita che in essa compare, la u, in funzione della w e della y :

$$\begin{aligned} u &= -2v - 3w - x - y + 4 \\ &= -2(-2w + 6) - 3w - (-2y - 6) - y + 4 \\ &= w + y - 2. \end{aligned}$$

Dunque il sistemaè indeterminato, ha infinite soluzioni del tipo

$$\begin{array}{rcl} u & = & p + q - 2 \\ v & = & -2p + 6 \\ w & = & p \\ x & = & -2q - 6 \\ y & = & q \end{array},$$

che dipendono da due parametri liberi p, q in R. In altri termini, le soluzioni del sistema sono le quintuple di numeri reali del tipo

$$(p + q - 2, -2p + 6, p, -2q - 6, q),$$

ottenute al variare di p, q in R.

Esempio 2

Consideriamo il sistema lineare di quattro equazioni nelle quattro incognite x, y, z, t con la corrispondente matrice completa

$$\begin{cases} x & -2y & & & = & 5 \\ -x & +2y & -3z & & = & -2 \\ & -2y & +3z & -4t & = & -11 \\ & & -3z & +4t & = & 15 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 15 \end{array}\right].$$

Di seguito riportiamo i passi del metodo di eliminazione di Gauss, descritti sia sul sistema che sulla corrispondente matrice.

$$\begin{cases} x & -2y & & & = & 5 \\ & & -3z & & = & 3 \\ & -2y & +3z & -4t & = & -11 \\ & & -3z & +4t & = & 15 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 15 \end{array}\right].$$

$$\begin{cases} x & -2y & & & = & 5 \\ & -2y & +3z & -4t & = & -11 \\ & & -3z & & = & 3 \\ & & -3z & +4t & = & 15 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 15 \end{array}\right].$$

$$\begin{cases} x & -2y & & & = & 5 \\ & -2y & +3z & -4t & = & -11 \\ & & -3z & & = & 3 \\ & & & +4t & = & 12 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 12 \end{array}\right].$$

A questo punto dalla quarta equazione possiamo ricavare la t :

$$t = 3;$$

nella terza equazione eventualmente sostituire questo valore di t e ricavare la z :

$$z = -1;$$

nella seconda equazione eventualmente sostituire questi valori di t e di z e ricavare la y :

$$-2y - 3 - 12 = -11, \qquad y = -2;$$

nella prima equazione eventualmente sostituire questi valori di t, z, y e ricavare la x :

$$x + 4 = 5, \qquad x = 1.$$

Dunque il sistemaè determinato ed ha come unica soluzione la quaterna $(1, -2, -1, 3)$.

<u>Esempio</u> 3

Consideriamo il seguente sistema lineare di tre equazioni nelle cinque incognite x_1, x_2, x_3, x_4, x_5

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +3x_3 & & +x_5 & = & 2 \\ 2x_1 & +x_2 & +8x_3 & -4x_4 & +2x_5 & = & 3 \\ x_1 & +2x_2 & +5x_3 & -3x_4 & +4x_5 & = & 1 \end{cases}$$

La matrice completa associata al sistema è:

$$[A|\underline{b}] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 8 & -4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & -3 & 4 & 1 \end{array}\right].$$

che ridotta a scala diventa:

$$[A'|\underline{b}'] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right].$$

Sia la matrice completa che la matrice incompleta hanno $r = 3$ righe non nulle, quindi il sistema ??? risolubile, e le soluzioni dipendono da $n - r = 5 - 3 = 2$ parametri.

I pivots non nulli della matrice sono quelli relativi a x_1, x_2 e x_4, quindi possiamo ricavare queste incognite in funzione delle rimanenti x_3 e x_5.

Il sistema associato alla matrice a scala $[A'|\underline{b}']$???:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_5 = 2 \\ 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -1 \\ x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Posto $x_3 = s$, $x_5 = t$ otteniamo: $x_4 = -3t$, $x_2 = -\frac{2}{3}s - 4t - \frac{1}{3}$, $x_1 = -\frac{11}{3}s - 5t + \frac{5}{3}$.

Le soluzioni sono quindi $\left\{\left(-\frac{11}{3}s - 5t + \frac{5}{3}, -\frac{2}{3}s - 4t - \frac{1}{3}, s, -3t, t\right) |s, t \in \mathrm{R}\right\}$.

Esempio 4

Consideriamo il seguente sistema lineare di tre equazioni nelle tre incognite x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & = & -1 \\ x_1 & & +2x_3 & = & 1 \end{cases}$$

La matrice completa associata al sistema é:

$$[A|\underline{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right].,$$

che ridotta a scala diventa:

$$[A'|\underline{b}'] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right].$$

Il sistema non ammette soluzioni, perché A' ha 2 righe non nulle, mentre $[A'|\underline{b}']$ ha 3 righe non nulle. Infatti il sistema associato a $[A'|\underline{b}']$ é

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 = -5 \\ 0 = 4 \end{cases}$$

che chiaramente non ammette soluzioni.

Esercizi

Risolvere i seguenti sistemi:

1. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + z = 1 \\ 3y + z = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x - y + 4z = 10 \\ 3x + y + 5z = 15 \\ x + 3y - 3z = 6 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x - y + 2z - 3w = 0 \\ 2x + y - w = 3 \\ 2y + z + w = -3 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + y - z + w = 0 \\ 2x - z - w = 0 \\ x - y - 2w = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + z + w = 7 \\ x + y = 2 \\ 4x + 12y + z - 3w = 1 \\ 5x + 6y + 2z - 5w = -1 \end{cases}$

Studiare i seguenti sistemi al variare del parametro reale k:

6. $\begin{cases} x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ kx_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = k \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + y + (k-1)z = 1 \\ 2x + ky + kz = k \\ kx + 2(k-1)y + 2z = 4 - k \end{cases}$

8. $\begin{cases} x + y + (2k-1)z = 8 \\ kx + y + z = 1 \\ x + ky + 4z = 3(k+1) \end{cases}$

9. $\begin{cases} kx_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -x_2 + kx_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + 2x_4 = 4 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 = -2 \\ 3x_1 - kx_2 + 2x_3 = 0 \\ kx_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$

11. $\begin{cases} kx_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + kx_3 = k - 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$