Metodo di Gauss-Jordan [1]

Nota Bene: Questo materiale non debe essere considerato come sostituto delle lezioni.

Argomenti svolti:

- Riduzione per righe e matrici equivalenti per righe.
- Forma echelon e sistemi gia' risolti.
- Il metodo di Gauss-Jordan e la forma echelon.
- Scrittura della soluzione generale.
- Il teorema di Steinitz.

Riduzione per righe e matrici echelon.

Due matrici A, B se dicono *equivalenti per righe* se una si ottiene dall'altra usando le operazioni elementari per righe.

Teorema 0.1. *Due sistemi lineari omogenei sono equivalenti se e solo se le loro matrici sono equivalenti per righe.*

Dunque per decidere se due sistemi sono equivalenti dobbiamo vedere se le loro matrici sono equivalenti per righe. Ci serve allora la cosiddetta forma *echelon*.

0.1 Forma echelon e sistemi gia' risolti.

L'idea di base da avere in mente e' che una matrice e' **echelon** se rappresenta un sistema gia' risolto, ossia che non dobbiamo risolvere poiche' la sua soluzione e' evidente.

Definizione 0.2. *Una matrice A si dice* ***echelon*** *se:*

(i) *Tutte le righe nulle (se ci sono) si trovano (tutte insieme) dopo le righe non nulle.*

(ii) *In ogni riga non nulla il primo elemento non nullo e' un 1 e nella sua colonna e' lui l'unico elemento non nullo, cioe' sotto e sopra di questo 1 ci sono solo degli 0. Questo 1 si chiama <u>speciale</u> e la colonna dove si trova si chiama anche lei <u>speciale</u>.*

(iii) *L'uno d'una riga non nulla si trova a destra dell'uno della riga precedente.*

[1] Matematici tedeschi, Wilhelm Jordan (1842-1899) e Carl F. Gauss (1777-1855).

Dunque le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{11} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{24}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{11} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sono echelon.

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ non e' echelon poiche' la condizione (i) non e' soddisfatta.

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{11} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{24}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{11} \end{pmatrix}$ non e' echelon poiche' la condizione (ii) non e' soddisfatta.

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{11} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{24}{11} \end{pmatrix}$ non e' echelon poiche la condizione (iii) non e' soddisfatta.

Ecco un esempio importante di matrice echelon:

Esempio 0.3. *La matrice* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *e' echelon.*

Il metodo di Gauss-Jordan e la forma echelon.

Il metodo di Gauss-Jordan e' un algoritmo che, partendo da una matrice arbitraria A e usando le operazioni elementari, produce una matrice echelon E equivalente ad A.

Per ricordare facilmente il metodo conviene dividirlo in due tappe, **Gauss** e **Jordan**:

Tappa Gauss: consiste sostanzialmente nel mettere degli zeri sotto gli elementi uguali a 1. Iniziando dalla prima colonna della matrice A si identifica (muovendosi a destra) la prima colonna non nulla. [2] Nella prima colonna non nulla si identifica il primo (da sopra a sotto) elemento non nullo; sia $a_{i_0 j_0} \neq 0$ questo numero. Allora si applica

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & a_{i_0 j_0} & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * & * & * & \cdots & * \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{R_{i_0}}{a_{i_0 j_0}}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{*}{a_{i_0 j_0}} & \frac{*}{a_{i_0 j_0}} & \cdots & \frac{*}{a_{i_0 j_0}} \\ 0 & 0 & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * & * & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

Usando l' 1 della riga i_0 si ottengono degli 0 al di sotto di esso tramite la operazione combinata $R_i + cR_{i_0}$. Dopodiche' si ottiene una matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{*}{a_{i_0 j_0}} & \frac{*}{a_{i_0 j_0}} & \cdots & \frac{*}{a_{i_0 j_0}} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

Adesso si scambia la riga i_0 con la prima riga usando l'operazione $R_{i_0 \Leftrightarrow 1}$:

[2] Di solito e' la stessa prima colonna quella non nulla, cioe' con un elemento non nullo $a_{i\,1} \neq 0$, altrimenti la variable x_1 non e' splicitamente coinvolta nel sistema che si sta cercando di risolvere.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{*}{a_{i_0j_0}} & \frac{*}{a_{i_0j_0}} & \cdots & \frac{*}{a_{i_0j_0}} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

Abbiamo dunque sistemato la colonna j_0.

Il metodo si ripete allora dall'inizio, applicato ora alla (sotto)matrice

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

E' chiaro che dopo un certo tempo ci si arriva oppure all'ultima riga della matrice o a una sottomatrice nulla. A questo punto la tappa di Gauss e' terminata e ci si trova una matrice in cui:

(i) Tutte le righe nulle (se ci sono) si trovano (tutte insieme) dopo le righe non nulle. Altrimenti si potrebbe continuare il metodo di Gauss nel punto in cui si e' sistemata l'ultima colonna.

(ii) In ogni riga non nulla il primo elemento non nullo e' un 1 e nella sua colonna ci sono zeri sotto di lui.

(iii) Il primo 1 di una riga non nulla si trova a destra dell'uno della riga precedente.

Terminata la tappa di Gauss parte la tappa di Jordan:

Tappa Jordan: La tappa di Jordan e' come una retromarcia: iniziando dall' 1 dell'ultima riga non nulla si ottengono degli zeri sopra di esso usando l'operazione $R_i + cR_j$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & * & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & * & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * & * & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & * & * & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & * & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & * & * & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & * & * & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * & * & 0 & \cdots & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & * & * & 0 & \cdots & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & * & 0 & \cdots & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Cosi' si e' sistemata l'ultima colonna e l' 1 e' diventato l'unico elemento non nullo della sua colonna, esattamente come nella condizione (iii) della definizione di matrice echelon. Si continua cosi' fino ad arrivare all' 1 della prima colonna non nulla, cioe' a quello nella colonna j_0, righa i_0.

Questo conclude la tappa di Jordan e la matrice ottenuta e' echelon.

0.2 Scrittura della soluzione generale d'un sistema omogeneo.

Se la matrice di un sistema e' echelon allora il sistema e' gia risolto. Infatti tutte le x associate con le colonne speciali (i.e. quelle dove c'e' un 1 da solo) sono *variabili dipendenti* dalle altre x, che si chiamano invece libere o parametri. Dunque le incognite $x_1, x_2, \cdots, x_n$ si divideno in due gruppi, dove un gruppo di incognite e' messo in evidenza (dal sistema) in funzione dell'altro. Ecco un esempio:

Esempio 0.4. *Sia $\mathcal{S}$ il seguente sistema:*

$$\mathcal{S} = \begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 4x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Ecco la matrice di $\mathcal{S}$: $\begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Il metodo di Gauss-Jordan ci procura la seguente matrice echelon: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Dunque il sistema $\mathcal{S}$ e' equivalente a: $\begin{cases} x_1 + \frac{7}{8}x_4 = 0 \\ x_2 + \frac{-3}{8}x_4 = 0 \\ x_3 + \frac{3}{8}x_4 = 0 \end{cases}$

Allora e' chiaro che x_1, x_2, x_3 sono funzioni di x_4.
Ecco tutte le soluzioni del sistema $\mathcal{S}$:

$$\begin{pmatrix} x_4\frac{-7}{8} \\ x_4\frac{3}{8} \\ x_4\frac{-3}{8} \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Notare che tutte le soluzioni sono multipli della colonna $\begin{pmatrix} \frac{-7}{8} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{-3}{8} \\ 1 \end{pmatrix}$

Esempio 0.5. *Ecco un altro esempio:*
Sia $\mathcal{S}$ il seguente sistema:

$$\mathcal{S} \ = \left\{ \begin{array}{r} x_1 + 4x_2 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 8x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right.$$

Questa e' la matrice di $\mathcal{S}$*:* $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -2 \\ 2 & 8 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Il metodo di Gauss-Jordan ci procura la seguente matrice echelon: $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-5}{2} \end{pmatrix}$.

Dunque il sistema $\mathcal{S}$ *e' equivalente a:* $\left\{ \begin{array}{r} x_1 + 4x_2 - 2x_4 = 0 \\ x_3 + \frac{-5}{2}x_4 = 0 \end{array} \right.$

Allora e' chiaro che x_1, x_3 *sono funzioni di* x_2, x_4*.*
Ecco tutte le soluzioni del sistema $\mathcal{S}$*:*

$$\begin{pmatrix} -4x_2 + 2x_4 \\ x_2 \\ \frac{5}{2}x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Notare che tutte le soluzioni sono combinazioni lineari di due colonne, cioe'

$$\begin{pmatrix} -4x_2 + 2x_4 \\ x_2 \\ \frac{5}{2}x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dunque se un sistema omogeneo ha n incognite $x_1, x_2, \cdots, x_n$ e m equazioni allora dopo aver usato il metodo di Gauss-Jordan le incognite si separano in due gruppi:

- le $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_r}$ associate alle colonne speciali $i_1, i_2, \cdots, i_r$,
- le restanti $x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_{n-r}}$ non speciali.

il sistema associato alla matrice echelon (l'output di Gauss-Jordan) sara':

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{i_1} = c_{i_1,1}x_{j_1} + c_{i_1,2}x_{j_2} + \cdots + c_{i_1,2}x_{j_{n-r}} \\ x_{i_2} = c_{i_2,1}x_{j_1} + c_{i_2,2}x_{j_2} + \cdots + c_{i_2,2}x_{j_{n-r}} \\ \vdots \\ x_{i_r} = c_{i_r,1}x_{j_1} + c_{i_r,2}x_{j_2} + \cdots + c_{i_r,2}x_{j_{n-r}} \end{array} \right. \tag{1}$$

Dove i $c_{i,j}$ sono coefficienti, i.e., numeri.

Osservare che le incognite speciali sono dipendenti dalle incognite non speciali.

Ecco la soluzione generale scritta come **combinazione lineare** di colonne:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_{j_1} \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{bmatrix} + x_{j_2} \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + x_{j_{n-r}} \begin{bmatrix} c_{1\,n-r} \\ c_{2\,n-r} \\ \vdots \\ c_{n\,n-r} \end{bmatrix}$$

L'insieme delle soluzione si denota $L(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \cdots, \mathrm{C}_{n-r})$ dove C_i e la colonna

$$\mathrm{C}_i = \begin{bmatrix} c_{1\,i} \\ c_{2\,i} \\ \vdots \\ c_{n\,i} \end{bmatrix}.$$

Dunque $L(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \cdots, \mathrm{C}_{n-r})$ e' l'insieme di **tutte** le combinazioni lineari delle colonne $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \cdots, \mathrm{C}_{n-r}$.

Notare che la colonna C_i ha sempre un 1 al posto j_i, cioe' $c_{j_i i} = 1$.

Inoltre vediamo che due combinazioni lineari delle colonne $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \cdots, \mathrm{C}_{n-r}$ sono uguali se e solo se i coefficienti sono uguali. Cioe', se

$$a_1\mathrm{C}_1 + a_2\mathrm{C}_2 + \cdots + a_{n-r}\mathrm{C}_{n-r} = b_1\mathrm{C}_1 + b_2\mathrm{C}_2 + \cdots + b_{n-r}\mathrm{C}_{n-r}$$

allora $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_{n-r} = b_{n-r}$.

Infatti, non e' molto difficile osservare che $a_{j_1} = b_{j_1}, a_{j_2} = b_{j_2}, \cdots, a_{j_r} = b_{j_r}$ poich i coefficenti i coefficienti sono le $x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_{n-r}}$ non speciali. Allora anche tutti gli altri coincidono dal momento che soddisfano (1).

Insomma, c'e' correspondeza biunivoca tra l'insieme $L(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \cdots, \mathrm{C}_{n-r})$ e le colonne di coefficienti

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-r} \end{bmatrix} \Rightarrow a_1\mathrm{C}_1 + a_2\mathrm{C}_2 + \cdots + a_{n-r}\mathrm{C}_{n-r}$$

1 Il teorema di Steinitz.

Ricordiamo che per soluzione non banale di un sistema si intende una soluzione diversa da quella nulla. Come conseguenza del metodo di Gauss-Jordan risulta il seguente teorema di Steinitz [3].

Teorema 1.1. *Un sistema omogeneo di equazioni lineari con piu' incognite di equazioni ha sempre una soluzione non banale.*

Dimostrazione. Osservare che la matrice echelon che risulta applicando Gauss-Jordan ha sempre colonne non speciali poiche' $n > m$. Dunque la soluzione generale si scrive come combinazione lineare di almeno una colonna non nulla C_1. □

[3] Matematico tedesco (1871-1928).