Análisis $\mathbb{R}$eal

Victor Ortega
Facultad de Economía, UNAM

11 de junio de 2024

Índice general

Capítulo 1

Espacios Métricos

1.1. Preámbulo

Las siguientes son notas de clase sobre el tema de Análisis Real, combinando recursos del curso de Cálculo Diferencial e Integral III del M. en C. Francisco Giovanni López Sánchez, y del curso de Análisis Matemático I del Dr. Fidel Casarrubias Segura, ambos impartidos en la Facultad de Ciencias de la UNAM, en el semestre 2024-1 y 2024-2 respectivamente.

1.2. Definición y Ejemplos

Definición 1.1 (Espacio Métrico)**.** Sea X un conjunto no vacío. Sea $d : X \times X \to \mathbb{R} \bigcup \{0\}$ una función. Decimos que d es una métrica o distancia en $X \Leftrightarrow d$ satisface las siguientes propiedades

(D_1) $\forall\, x, y \in X \Rightarrow d(x, y) \geqslant 0$

(D_2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(D_3) $\forall\, x, y \in X \Rightarrow d(x, y) = d(y, x)$

(D_4) $\forall\, x, y, z \in X \Rightarrow d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$

Un espacio métrico es una pareja ordenada (X, d) donde X es un conjunto no vacío y d es una métrica en X.

Observación. $d(x, y)$ se lee como la distancia de x a y

Ejemplo 1.1 (Métrica Euclidiana)**.** En $\mathbb{R}^n$, donde $n \in \mathbb{Z}^+$, la siguiente función $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

donde $x = (x_1, ..., x_n)$ y $y = (y_1, ..., y_n)$ es una métrica en $\mathbb{R}^n$

Proof. Por demostrar que la función anterior es una métrica en $\mathbb{R}^n$

(D_1) Por definición de raíz cuadrada de un número real, $d(x, y) \geqslant 0 \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$

(D_2) $\Longrightarrow$ Sea $x = (x_1, ..., x_n)$ y $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ P.D. (D_2)

Supongamos que $d(x, y) = 0$. Por definición de raíz cuadrada, notemos que $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x_i - y_i)^2 = 0$. Este termino es cero $\Leftrightarrow$ ambos elementos son el mismo vector en $\mathbb{R}^n$.

$\Longleftarrow$ Supongamos que $x = y$. Al ser vectores en $\mathbb{R}^n$, $x = y \Leftrightarrow (x_1 = y_1, ..., x_n = y_n)$

$$\Rightarrow d(x, y) = d(x, x)$$
$$\Rightarrow d(x, x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 0^2} = 0$$

(D_3) Sea $x = (x_1, ..., x_n)$ y $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ P.D. (D_3)

Notemos que

$$d(y, x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (-1)^2 (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = d(x, y)$$

(D_4) Sea $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$ y $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{R}^n$ P.D. (D_4)

Afirmación 1 (Young Patito). $\forall\, a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow ab \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$

Proof. Sean cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$

Como $(a - b)^2 \geqslant 0 \Rightarrow$
$$a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0$$
$$\Rightarrow 2ab \leqslant a^2 + b^2 \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{2} \geqslant ab$$

Afirmación 2 (Cauchy–Bunyakovsky–Schwarz). $\forall\, a = (a_1, ..., a_n)$ y $b = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2}$$

Proof. Sea $a = (a_1, ..., a_n)$ y $b = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$ elementos cualesquiera. Observe que para probar C-B-S es suficiente probar

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i||b_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2} \tag{1.1}$$

Esto porque
$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i||b_i|$$

Para probar esto último, consideremos los siguientes dos casos.

a) $a = \vec{0}$

Si $a = \vec{0} \Rightarrow$ cada $a_i = 0$. De donde

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i||b_i| = 0 \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2}$$

b) $b = \vec{0}$

Siguiendo un arguménto análogo al caso (1), s.t.q.

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i||b_i| = 0 \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2}$$

c) $a \neq \vec{0}$ y $b \neq \vec{0}$

Defina

$$\alpha = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2} \qquad \text{y} \qquad \beta = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2}$$

Note que como $a \neq \vec{0}$ y $b \neq \vec{0} \Rightarrow \alpha > 0$ y $\beta > 0$

Observe que (1.1) es equivalente a

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} |a_i||b_i|}{\alpha\beta} \leqslant 1 \tag{1.2}$$

Así, basta probar (1.2). Para demostrar (1.2), note que:

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} |a_i||b_i|}{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i|}{\alpha}\frac{|b_i|}{\beta}$$

Aplicando la Afirmación 2, obtenemos que:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|a_i|}{\alpha}\frac{|b_i|}{\beta} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\frac{|a_i|}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{|b_i|}{\beta}\right)^2}{2}$$

$$\frac{\frac{|a_1|^2}{\alpha^2} + \frac{|b_1|^2}{\beta^2} + ... + \frac{|a_n|^2}{\alpha^2} + \frac{|b_n|^2}{\beta^2}}{2}$$

$$\frac{\frac{|a_1|^2+...+|a_n|^2}{\alpha^2} + \frac{|b_1|^2+...+|b_n|^2}{\beta^2}}{2} = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Por lo tanto, (1.2) es verdadero.

Afirmación 3 (D_4). $\forall\, x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$ y $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{R}^n$ s.t.q.

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$$

Proof. Sean $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ arbitrarios. P.D. (D_4). Observe que probar (D_4) es equivalente a probar

$$d(x,z)^2 \leqslant (d(x,y)+d(y,z))^2$$

Definamos $a_i = x_i - y_i$ y $b_i = y_i - z_i \, \forall i = 1, ..., n$. Note que $\forall i = 1, ..., n \Rightarrow x_i - z_i = a_i + b_i$.

Tenemos lo siguiente

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i{}^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i{}^2$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i{}^2 + 2\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| + \sum_{i=1}^{n} b_i{}^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i{}^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i{}^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i{}^2} + \sum_{i=1}^{n} b_i{}^2$$

$$\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i{}^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i{}^2}\right)^2 = \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i - y_i{}^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i - z_i{}^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 \leqslant \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i - y_i{}^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i - z_i{}^2}\right)^2$$

Es decir

$$d(x,z)^2 \leqslant (d(x,y)+d(y,z))^2$$

Sacando la raíz cuadrado, s.t.q. (D_4) es verdadero.

$\therefore d$ es una métrica en $\mathbb{R}^n$ □

Ejemplo 1.2 (Métrica Discreta)**.** Sea X un conjunto arbitrario no vacío. En $X \times X$ la siguiente función es una métrica en X

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

Proof. (D_1) Sean cualesquiera $x, y \in X$. Tenemos los siguientes casos.

a) $x = y$

En este caso, por definición de d

$$d(x,y) = 0 \geqslant 0$$

Por propiedades de la igualdad, esto es verdadero.

b) $x \neq y$

En este caso, por definición de d

$$d(x,y) = 1 \geqslant 0$$

(D_2) Sean cualesquiera $x, y \in X$.

$\Rightarrow$

Si $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$, porque de lo contrario, por definición de d, $d(x,y) = 1$ y en consecuencia $d(x,y) \neq 0$

$\Leftarrow$

Por otro lado, si $x = y$, aplicando la definición de d, obtenemos que $d(x, y) = 0$

(D_3) Sean cualesquiera $x, y \in X$. Tenemos los siguientes casos.

a) $x = y$

En este caso, como $x = y \Rightarrow y = x$, s.t.q.

$$d(x, y) = 0 \qquad \text{y} \qquad d(y, x) = 0$$

$\Rightarrow d(x, y) = d(y, x)$

b) $x \neq y$

Primero, observemos que la implicación $y = x \Rightarrow x = y$ es equivalente a $x \neq y \Rightarrow y \neq x$. Consecuentemente, por definición de d

$$d(x, y) = 1 \qquad \text{y} \qquad d(y, x) = 1$$

$\Rightarrow d(x, y) = d(y, x)$

(D_4) Sean cualesquiera $x, y, z \in X$. Para x, z tenemos los siguientes casos.

a) $x = z$

Debido a que la suma de numeros reales no negativos es no negativa, y por (D_1)

$$d(x, y) \geqslant 0 \qquad \text{y} \qquad d(y, x) \geqslant 0$$

$$\Rightarrow d(x, z) = 0 \leqslant d(x, y) + d(y, z)$$

b) $x \neq z$

Observe que, como $x = y$ y $y = z \Rightarrow x = z$, no puede ocurrir que

$$x = y \qquad \text{y} \qquad y = z$$

Puesto que, por hipótesis, $x \neq z$

$$\Rightarrow x \neq y \qquad \text{o} \qquad y \neq z$$

Si $x \neq y \Rightarrow d(x, y) = 1$. Luego

$$d(x, z) = 1 = d(x, y) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$$

Por otro lado, si $y \neq z \Rightarrow d(x, z) = 1$. Luego

$$d(y, z) = 1 = d(y, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$$

Esto porque $d(x, y) \geqslant 0$ por (D_1).

$\therefore d$ es una métrica en X $\square$

Ejemplo 1.3. Sean $X = (X, d_x)$ y $X = (X, d_y)$ espacios métricos consideramos el producto cartesiano

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

Dados $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$, definimos

$$d_p[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = [d_x(x_1, x_2)^p + d_y(y_1, y_2)^p]^{\frac{1}{p}}$$

$$d_\infty[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = \text{máx}\{d_x(x_1, x_2) + d_y(y_1, y_2)\}$$

Proof. Supongamos que $p \in [0, \infty]$ es cualquier elemento. Tenemos los siguientes casos:

Proof. 1) $p \in [1, \infty)$ Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in X \times Y$ cualesquiera elementos.

(D_1) Notemos que, como d_x y d_y son métricas en X y Y respectivamente $\Rightarrow d_x(x_1, x_2) \geqslant 0$ y $d_y(y_1, y_2) \geqslant 0$. Esto implica $d_x(x_1, x_2)^p \geqslant 0$ y $d_y(y_1, y_2)^p \geqslant 0$. De esto se sigue que:

$$d_p[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = [d_x(x_1, x_2)^p + d_y(y_1, y_2)^p]^{\frac{1}{p}} \geqslant 0$$

(D_2) $\Rightarrow$

Supongamos que $d_p[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = 0$

$$\Rightarrow [d_x(x_1, x_2)^p + d_y(y_1, y_2)^p]^{\frac{1}{p}} = 0$$

Con lo cual, s.t.q

$$d_x(x_1, x_2)^p + d_y(y_1, y_2)^p = 0$$

Como d_x y d_y son métricas $\Rightarrow d_x(x_1, x_2) \geqslant 0$ y $d_y(y_1, y_2) \geqslant 0$.

Por ello, necesariamente que $d_x(x_1, x_2)^p + d_y(y_1, y_2)^p = 0 \Rightarrow$

$$d_x(x_1, x_2) = 0 \qquad \text{y} \qquad d_y(y_1, y_2) = 0$$

Nuevamente usando que d_x y d_y son métricas s.t.q

$$d_x(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \qquad \text{y} \qquad d_y(y_1, y_2) = 0 \Rightarrow y_1 = y_2$$

Es decir, $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$

$\Leftarrow$

Supongamos que $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$

Como d_x y d_y son métricas en X y Y respectivamente s.t.q

$$d_x(x_1, x_2) = 0 \qquad \text{y} \qquad d_y(y_1, y_2) = 0$$

$$[d_x(x_1, x_2)^p + d_y(y_1, y_2)^p]^{\frac{1}{p}} = 0$$

Es decir, $d_p[(x_1, y_1), (x_2, y_2)]$

(D_3) Notemos que, como $d_x(x_1, x_2) = d_x(x_2, x_1)$ y $d_y(y_1, y_2) = d_y(y_2, y_1)$ s.t.q.

$$[d_x(x_1, x_2)^p + d_y(y_1, y_2)^p]^{\frac{1}{p}} = [d_x(x_2, x_1)^p + d_y(y_2, y_1)^p]^{\frac{1}{p}}$$
$$\Rightarrow d_p[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = d_p[(x_2, y_2), (x_1, y_1)]$$

(D_4) Refiérase a los apuntes de clase

□

Proof. 2) $p = \infty$

Refiérase a los apuntes de clase

□

Ejemplo 1.4. Sea d una métrica en $\mathbb{R}^n$. Demuestra que la siguiente función es métrica en $\mathbb{R}^n$.

$$d_m(x, y) = \text{mín}(\{1, d(x, y)\})$$

Proof. (D_1) Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ P.D. $d_m(x, y) \geqslant 0$

Si $d(x, y) > 1 \Rightarrow d_m(x, y) = 1$. Si $d(x, y) \leqslant 1 \Rightarrow d_m(x, y) = d(x, y)$. Tenemos los siguientes casos.

a) $d(x, y) > 1 \Rightarrow d_m(x, y) = 1$

$$1 > 0 \Rightarrow d_m(x, y) \geqslant 0$$

b) $d(x, y) \leqslant 1 \Rightarrow d_m(x, y) = d(x, y)$ Por definición, $d(x, y) \geqslant 0$, $\Rightarrow d_m(x, y) \geqslant 0$

(D_2) Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ P.D. $d_m(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$$d_m(x, y) = 0 \Leftrightarrow \text{mín}(\{1, d(x, y)\}) = 0 \Leftrightarrow d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

(D_3) Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ P.D. $d_m(x, y) = d_m(y, x)$

$$d_m(x, y) = \text{mín}(\{1, d(x, y)\}) = \text{mín}(\{1, d(y, x)\}) = d_m(y, x)$$

(D_4) Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ P.D. $d_m(x, z) \leqslant d_m(x, y) + d_m(y, z)$. Tenemos los siguientes casos.

a) Si $d(x, y) > 1 \Rightarrow d_m(x, y) = 1$ o $d(y, z) > 1 \Rightarrow d_m(y, z) = 1$

Notemos que, por definición, $d_m(x, z) \leqslant 1$

$$d_m(x,y) + d_m(y,z) \geqslant 1$$
$$d_m(x,z) \leqslant 1 \leqslant d_m(x,y) + d_m(y,z) \Rightarrow$$
$$d_m(x,z) \leqslant d_m(x,y) + d_m(y,z)$$

b) Si $d(x,y) < 1 \Rightarrow d_m(x,y) = d(x,y)$ o $d(y,z) < 1 \Rightarrow d_m(y,z) = d(y,z)$

$$d_m(x,y) + d_m(y,z) = d(x,y) + d(y,z) \geqslant d(x,z) \geqslant d_m(x,z) \Rightarrow$$
$$d_m(x,z) \leqslant d_m(x,y) + d_m(y,z)$$

$\therefore d_m(x,y)$ es una métrica en $\mathbb{R}^n$ □

Ejemplo 1.5. Sea ρ una métrica en $\mathbb{R}^n$. Demuestra que la siguiente función es métrica en $\mathbb{R}^n$.

$$\rho_1(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$$

Proof. (D_1) Sean $x,y \in \mathbb{R}^n$ P.D. $\rho_1(x,y) \geqslant 0$.

Notemos que, $\rho(x,y) \geqslant 0$

$$\Rightarrow 1+\rho(x,y) \geqslant 0 \Rightarrow \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} \geqslant 0 \Rightarrow \rho_1(x,y) \geqslant 0$$

(D_2) Sean $x,y \in \mathbb{R}^n$ P.D. $\rho_1(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$$\rho_1(x,y) = 0 \Leftrightarrow \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} = 0$$

Si $b \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0$

$$\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} = 0 \Leftrightarrow \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

(D_3) Sean $x,y \in \mathbb{R}^n$ P.D. $\rho_1(x,y) = \rho_1(y,x)$

$$\rho_1(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} = \frac{\rho(y,x)}{1+\rho(y,x)} = \rho_1(y,x)$$

(D_4) Sean $x,y \in \mathbb{R}^n$ P.D. $\rho_1(x,z) \leqslant \rho_1(x,y) + \rho_1(y,z)$

$$\rho_1(x,z) = \frac{\rho(x,z)}{1+\rho(x,z)} = \frac{1+\rho(x,z)-1}{1+\rho(x,z)}$$

$$= \frac{1+\rho(x,z)}{1+\rho(x,z)} - \frac{1}{1+\rho(x,z)} = 1 - \frac{1}{1+\rho(x,z)}$$

$$\leqslant 1 - \frac{1}{1+\rho(x,y)+\rho(y,z)} = \frac{1+\rho(x,y)+\rho(y,z)-1}{1+\rho(x,y)+\rho(y,z)}$$

$$= \frac{\rho(x,y)+\rho(y,z)}{1+\rho(x,y)+\rho(y,z)} = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)+\rho(y,z)} + \frac{\rho(y,z)}{1+\rho(x,y)+\rho(y,z)}$$

$$\leqslant \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} + \frac{\rho(y,z)}{1+\rho(y,z)} = \rho_1(x,y)+\rho_1(y,z)$$

$$\Rightarrow \rho_1(x,z) \leqslant \rho_1(x,y)+\rho_1(y,z)$$

$\therefore \rho_1(x,y)$ es una métrica en $\mathbb{R}^n$. □

1.3. Espacios Normados

Definición 1.2 (Norma). Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una norma en V es una función $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ que tiene las siguientes propiedades

(N_1) $\forall\, x \in V \Rightarrow \|x\| \geqslant 0$

(N_2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$, donde $\vec{0}$ es el neutro aditivo de V

(N_3) $\forall\, x \in V$ y $\forall\, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$

(N_4) $\forall\, x, y \in V \Rightarrow \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Teorema 1.1. Si $\|\cdot\|$ es una norma en un espacio vectorial real $X \Rightarrow$ la función $f : X\times X \to \mathbb{R}$ definida por

$$d(x,y) = \big\|x+(-y)\big\|$$

Con $x, y \in X$ es una métrica en X ∍

a) $\forall\, x, y \in X$ y $\forall\, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \cdot d(x,y)$

b) $\forall\, x, y, z \in X \Rightarrow d(x+z, y+z) = d(x,y)$

Proof. (D_1) Por (N_1) si $x, y \in X$ son elementos arbitrarios $\Rightarrow d(x,y) = \big\|x+(-y)\big\| \geqslant 0$ ya que $x+(-y) \in X$

(D_2) Sean $x, y \in X$ elementos arbitrarios. Por (N_2)

$$\big\|x+(-y)\big\| = 0 \Leftrightarrow x+(-y) = \vec{0}$$

Luego $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(D_3) Sean $x, y \in X$ elementos arbitrarios. Notemos que

$$d(x,y) = \big\|x+(-y)\big\| = \big\|(-1)(-x)+(-1)(y)\big\|$$
$$= \big\|(-1)(y-x)\big\| = |1|\|y-x\| = \|y-x\| = d(y,x)$$

(D_4) Sean $x, y, z \in X$ elementos arbitrarios.

$$\begin{aligned} d(x,z) &= \left\|x + (-z)\right\| = \left\|(x+\vec{0}) + (-z)\right\| \\ &= \left\|(x + ((-y)+y)) + (-z)\right\| = \left\|(x-y)+(y-z)\right\| \\ &\leqslant \|x-y\| + \|y-z\| \end{aligned}$$

(D_5) Sean $x, y \in X$ arbitrarios.

$$d(\lambda x, \lambda y) = \left\|\lambda x + -(\lambda)y\right\| = \left\|\lambda(x-y)\right\| = |\lambda|\|x-y\| = |\lambda| \cdot d(x,y)$$

(D_6) Sean $x, y, z \in X$ elementos arbitrarios.

$$\begin{aligned} \Rightarrow d(x+z, y+z) &= \left\|(x+z)-(y+z)\right\| = \left\|(x+z)+(-1)(y+z)\right\| \\ &= \left\|(x+z)+(-1)y+(-1)z\right\| = \|x-y\| = d(x,y) \end{aligned}$$

$\therefore$ el Teorema 1.1 se cumple. □

Teorema 1.2. $\forall\, p \in [1, \infty)$ y con $n \in \mathbb{Z}^+$ la función $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

donde $x = (x_1, ..., x_n)$ es una norma en $\mathbb{R}^n$ llamada norma p. La métrica que indúce es la métrica

$$d_p(x,y) = \left\|x + (-y)\right\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Proof. (D_1) Sea $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ arbitrario. Tenemos los siguientes casos.

a) Si $x = \vec{0} \Rightarrow |x_i| = 0\, \forall\, i = 1, ..., n$

Luego $|x_i|^p = 0^p = 0\, \forall\, i = 1, ..., n$

$$\Rightarrow \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0^{\frac{1}{p}} = 0$$

b) Si $x \neq \vec{0} \Rightarrow x_{i_0} \neq 0$ para algún $i_0 \in \{1, ..., n\}$

Consecuentemente

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \geqslant |x_{i_0}|^p > 0$$

$$\Rightarrow \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} > 0$$

(D_2) Se sigue de la demostración del caso $a)$ de (N_1)

(D_3) Sean $x \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrarios. Tenemos los siguientes casos.

a) Si $\lambda = 0 \Rightarrow \lambda x = \vec{0}$ y $|\lambda| = 0$. Luego

$$\|\lambda x\|_p = \left\|\vec{0}\right\|_p = 0 = 0 \cdot \|x\|_p = \lambda \|x\|_p$$

b) Si $x = \vec{0} \Rightarrow \lambda x = \vec{0}$ y $\|x\|_p = 0$. Consecuentemente

$$\|\lambda x\|_p = \left\|\vec{0}\right\|_p = 0 = |\lambda| \cdot 0 = \lambda \|x\|_p$$

c) Finalmente si $\lambda \neq 0$ y $x \neq \vec{0} \Rightarrow \lambda x \neq 0$

Así, $\exists\, i_0 \in \{1, ..., n\} \ni \left|\|\lambda x_{i0}\|\right| < 0$

Luego

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i|^p \geqslant |\lambda x_{i_0}|^p > 0$$

$$\Rightarrow \|\lambda x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \exp\left(\ln\left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

$$= \exp\left(\frac{1}{p}\ln\left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i|^p\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{p}\ln\left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda|^p |x_i|^p\right)\right)$$

$$= \exp\left(\frac{1}{p}\ln\left(|\lambda|^p \cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{p}\ln\left(|\lambda|^p\right) + \frac{1}{p}\ln\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)\right)$$

$$\exp\Big(\frac{1}{p}\ln\left[|\lambda|^p\right]\Big) \cdot \exp\left(\frac{1}{p}\ln\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)\right) = \exp\Big(\ln\left[|\lambda|\right]\Big) \cdot \exp\left(\ln\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$

$$|\lambda| \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|x\|_p$$

(D_4) Para probar la desigualdad triangular, debemos antes probar algunos lemas.

$\square$

Lema 1.1 (Desigualdad de Young). Sean $p, q \in [1, \infty)$ elementos cualesquiera $\ni \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\Rightarrow ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{R} \qquad \text{con } \; a, b \geqslant 0$$

Proof. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a, b \geqslant 0$. Sin perder generalidad podemos suponer que $a > 0$ y $b > 0$. Tenemos los siguientes casos.

1. $a^p < b^q$

   Primero notemos que el número real

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \in [a^p, b^q]$$

   Ya que

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} = a^p(1 - t_0) + b^q t_0$$

   Donde $t_0 = \frac{1}{q} \in [0, 1]$

   Por otro lado, la ecuación de la línea recta en $\mathbb{R}^2$ que une a los puntos $(a^p, \ln(a^p))$, $(b^q, \ln(b^q))$ es

$$\frac{\ln(b^q) - \ln(a^p)}{b^q - a^p} \Rightarrow f(x) = \ln(a^p) + \frac{\ln(b^q) - \ln(a^p)}{b^q - a^p}(x - a^p)$$

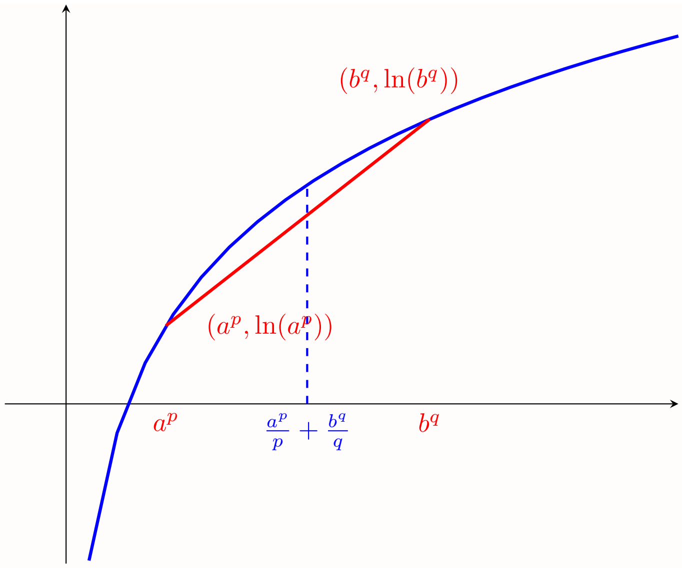
   Debido a que la segunda derivada de $\ln = -\frac{1}{x^2} < 0$ la función $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ es cóncava en $(0, \infty)$, lo que significa, geométricamente, que la gráfica de ln está por encima de la función f.

$$\Rightarrow \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \in [a^p, b^q] \Rightarrow f\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \leqslant \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right)$$

   Pero

$$f\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) = \ln(a^p) + \frac{\ln(b^q) - \ln(a^p)}{b^q - a^p}\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - a^p\right)$$
$$= \ln(a^p) + \frac{\ln(b^q) - \ln(a^p)}{b^q - a^p}\left(a^p\left(\frac{1}{p} - 1\right) + \frac{b^q}{q} - \right)$$
$$= \ln(a^p) + \frac{\ln(b^q) - \ln(a^p)}{b^q - a^p}\left(a^p\left(-\frac{1}{q}\right) + \frac{b^q}{q}\right)$$
$$= \ln(a^p) + \frac{\ln(b^q) - \ln(a^p)}{b^q - a^p}\left(\frac{1}{q}(b^q - a^p)\right)$$
$$= \ln(a^p) + \left(\frac{\ln(b^q) - \ln(a^p)}{q}\right) = \frac{\ln(a^p)}{q} + \frac{\ln(a^p)}{p} + \frac{\ln(b^q)}{q} - \frac{\ln(a^p)}{q}$$
$$\frac{\ln(a^p)}{p} + \frac{\ln(b^q)}{q} \leqslant \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) = \ln(ab) \leqslant \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right)$$
$$\Rightarrow ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

   Geométricamente, lo podemos ver de esta forma



2. $b^q < a^p$

   Observe que

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} = \frac{a^p}{p} + b^q\left(1 - \frac{1}{p}\right) \in [b^q, a^p]$$

   Así que,

$$f\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \leqslant \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right)$$

   Por tanto, análogamente al caso anterior

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

3. $a^p = b^q$

   Note que

$$\begin{aligned} ab &= (a^p)^{\frac{1}{p}} b = (b^q)^{\frac{1}{p}} b = (b^q)^{\frac{1}{p}} (b^q)^{\frac{1}{q}} = (b^q)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \\ &= b^q = b^q\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = \frac{b^q}{p} + \frac{b^q}{q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \end{aligned}$$

$\therefore$ el Lema 1.1 es verdadero. □

Lema 1.2 (Desigualdad de Hölder). $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$ s.t.q.

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

donde $p, q \in [1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $x = (x_1, ..., x_n)$ y $y = (y_1, ..., y_n)$

Proof. Sean $x = (x_1, ..., x_n)$ y $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ cualesquiera elementos. Tenemos los siguientes casos.

1. $x = \vec{0}$

   Como $x = \vec{0} \Rightarrow x_i = 0 \,\forall\, i = 1, ..., n$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| = 0 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

2. $y = \vec{0}$

   Como $y = \vec{0} \Rightarrow y_i = 0 \,\forall\, i = 1, ..., n$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| = 0 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

3. $x \neq \vec{0} \neq y$

   Como $x \neq \vec{0} \neq y$, definamos $\alpha = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} > 0$ y $\beta = \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} > 0$

   Definamos ahora a $a_i = \frac{|x_i|}{\alpha}$ y $b_i = \frac{|y_i|}{\beta}$. Por el Lema 1.1 s.t.q.

$$a_i b_i \leqslant \frac{{a_i}^p}{p} + \frac{{a_i}^q}{q} \qquad \forall\, i = 1, ..., n$$

   Es decir

$$\frac{|x_i|}{\alpha}\frac{|y_i|}{\beta} \leqslant \frac{1}{p} \cdot \frac{|x_i|^p}{\alpha^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|y_i|^q}{\beta^q} \qquad \forall\, i = 1, ..., n$$

$$\Rightarrow \sum_{i_1}^{n} \frac{|x_i|}{\alpha}\frac{|y_i|}{\beta} \leqslant \sum_{i_1}^{n} \left(\frac{1}{p} \cdot \frac{|x_i|^p}{\alpha^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|y_i|^q}{\beta^q}\right)$$

   Consecuentemente

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i|}{\alpha\beta} \leqslant \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{\alpha^p} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p + \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{\beta^q} \sum_{i=1}^{n} |y_i|^q = 1$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i|}{\alpha\beta} \leqslant 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| \leqslant \alpha\beta$$

$\therefore$ el Lema 1.2 es verdadero $\square$

Lema 1.3 (Desigualdad de Minkowski).

$$\forall\, x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \|x + y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$$

Proof. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ arbitrarios. Tenemos los siguientes casos.

1. $x = \vec{0}$

   Si $x = 0 \Rightarrow x + y = y \Rightarrow \|x\|_p = 0$. Así que

$$\|x + y\|_p = \|y\|_p = 0 + \|y\|_p = \|x\|_p + \|y\|_p$$

2. $x \neq \vec{0}$

   Definamos a $\zeta = ((|x_i| + |y_i|)^{p-1}, ..., (|x_n| + |y_n|)^{p-1})$

   Aplicando el Lema 1.2 a los vectores $x = (x_1, ..., x_n)$, a ζ y a $q = \frac{p}{p-1}$ s.t.q.

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|\big(|x_i| + |y_i|\big)^{p-1} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} \Big(\big(|x_i| + |y_i|\big)^{p-1}\Big)^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

   De igual manera, aplicando el Lema 1.2 a los vectores $y = (y_1, ..., y_n)$, y a ζ s.t.q.

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i|\big(|x_i| + |y_i|\big)^{p-1} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} \Big(\big(|x_i| + |y_i|\big)^{p-1}\Big)^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

   Note ahora que

$$\xi = \left(\sum_{i=1}^{n} \Big(\big(|x_i| + |y_i|\big)^{q(p-1)}\Big)\right)^{\frac{1}{q}} > 0$$

   Así, s.t.q.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \big(|x_i| + |y_i|\big)^p &= \sum_{i=1}^{n} \big(|x_i| + |y_i|\big)\big(|x_i| + |y_i|\big)^{p-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} |x_i|\big(|x_i| + |y_i|\big)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i|\big(|x_i| + |y_i|\big)^{p-1} \\
&\leqslant \xi \cdot \left(\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) = \xi \cdot (\|x\|_p + \|y\|_p)
\end{aligned}$$

Pero

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p}{\xi} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p}{\left(\sum_{i=1}^{n}\left((|x_i|+|y_i|)^p\right)\right)^{\frac{1}{q}}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}\left((|x_i|+|y_i|)^p\right)\right)^{1-\frac{1}{q}} = \left(\sum_{i=1}^{n}\left((|x_i|+|y_i|)^p\right)\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$$

Finalmente

$$\|x+y\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n}\left((|x_i+y_i|)^p\right)\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}\left((|x_i|+|y_i|)^p\right)\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$$

$\therefore \|\cdot\|_p$ es una norma y se cumple el Teorema 1.2 □

Teorema 1.3. Veamos que $\|x\|_\infty = \text{máx}\{|x_i| \mid i = 1, ..., n\}$ donde $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ es una norma en $\mathbb{R}^n$

Lema 1.4. Probaremos que, en general, $\forall\, \varepsilon > 0$ y $y_1, ..., y_n \in \mathbb{R}^n$ s.t.q. $\text{máx}\{\varepsilon \cdot y_i \mid i = 1, ..., n\} = \varepsilon \cdot \text{máx}\{y_i \mid i = 1, ..., n\}$

Proof. Supongamos que $\varepsilon \cdot y_j = \text{máx}\{\varepsilon \cdot y_i \mid i = 1, ..., n\}$ para algún índice $j \in \{1, ..., n\} \Rightarrow \forall\, i = 1, ..., n$ s.t.q.

$$y_i \leqslant \varepsilon \cdot y_i \leqslant \varepsilon \cdot y_j$$

Como $\varepsilon > 0 \Rightarrow y_i \leqslant y_j \;\forall\, i = 1, ..., n$, es decir que

$$y_j = \text{máx}\{y_i \mid i = 1, ..., n\}$$

Así que, como $y_i \leqslant y_j \leqslant \varepsilon \cdot y_i \leqslant \varepsilon \cdot y_j$, s.t.q.

$$\varepsilon \cdot \text{máx}\{y_i \mid i = 1, ..., n\} \leqslant \text{máx}\{\varepsilon \cdot y_i \mid i = 1, ..., n\}$$

Por otra parte, como $y_j = \text{máx}\{y_i \mid i = 1, ..., n\} \Rightarrow \;\forall\, i = 1, ..., n$ s.t.q.

$$\varepsilon \cdot y_i \leqslant \varepsilon \cdot y_j$$

Como $\varepsilon > 0 \Rightarrow$

$$\text{máx}\{\varepsilon \cdot y_i \mid i = 1, ..., n\} \leqslant \varepsilon \cdot y_j$$
$$\text{máx}\{\varepsilon \cdot y_i \mid i = 1, ..., n\} \leqslant \varepsilon \cdot \text{máx}\{y_i \mid i = 1, ..., n\}$$

$$\Rightarrow max\{\varepsilon \cdot y_i \mid i = 1, ..., n\} = \varepsilon \cdot \max\{y_i \mid i = 1, ..., n\}$$

□

Proof. Podemos ahora demostrar el Teorema 1.3

(N_1) $\forall\,(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ arbitrario s.t.q. $|x_i| \geqslant 0\,\forall\, i = 1, ..., n$

$$\Rightarrow \max\{|x_i| \mid i = 1, ..., n\} = \|x\|_\infty \geqslant 0$$

(N_2)

$$\|x\|_\infty = 0 = \max\{|x_i| \mid i = 1, ..., n\} \Leftrightarrow |x_i| = 0\,\forall\, i = 1, ..., n \Leftrightarrow x_i = (0, ..., 0)$$

(N_3) Sea $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrarios

$$\Rightarrow \|\lambda x\|_\infty = \max\{|\lambda x_i| \mid i = 1, ..., n\} = \max\{|\lambda||\lambda x_i| \mid i = 1, ..., n\}$$

Para $\lambda \in \mathbb{R}$ tenemos los siguientes casos

a) $\lambda = 0$

En este caso $\lambda \cdot x = \vec{0}$ y por (N_2) s.t.q.

$$\|\lambda x\|_\infty = 0 = 0 \cdot \|x\|_\infty$$

b) $\lambda \neq 0 \Rightarrow |\lambda| > 0$

Por el Lema 1.4 anterior s.t.q.

$$\max\{|\lambda||\lambda x_i| \mid i = 1, ..., n\} = |\lambda| \max\{|\lambda x_i| \mid i = 1, ..., n\} = |\lambda|\|x\|_\infty$$

(N_4) Sean $x = (x_1, ..., x_n)$ y $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ arbitrarios. Por definición de $\|\cdot\|_\infty$ s.t.q.

$$\|x + y\|_\infty = \max\{|x_i + y_i| \mid i = 1, ..., n\}$$

Supongamos que $|x_j + y_j| = \max\{|x_i + y_i| \mid i = 1, ..., n\}$

Como $|x_j + y_j| \leqslant |x_j| + |y_j|$

$$\max\{|x_i + y_i| \mid i = 1, ..., n\} \leqslant |x_j| + |y_j|$$

$$|x_j| \leqslant \max\{|x_i| \mid i = 1, ..., n\} \qquad \text{y} \qquad |y_j| \leqslant \max\{|y_i| \mid i = 1, ..., n\}$$

Por lo cual, por transitividad de $\leqslant$

$$\max\{|x_i + y_i| \mid i = 1, ..., n\} \leqslant \max\{|x_i| \mid i = 1, ..., n\} + \max\{|y_i| \mid i = 1, ..., n\}$$
$$\Rightarrow \|x + y\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

$\therefore \|x\|_\infty = \max\{|x_i| \mid i = 1, ..., n\}$ es una norma en $\mathbb{R}^n$ □

1.4. Espacios Con Producto Interior

Definición 1.3 (Espacios con producto interior)**.** Recordemos que un espacio con producto interior es un espacio vectorial real V, en el cual se define una función $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ llamada producto interior de V, que tiene las siguientes propiedades

(P_1) $\forall\, x, y \in V \Rightarrow \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

(P_2) $\forall\, x, y, z \in V \Rightarrow \langle x + z, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle$

(P_3) $\forall\, x, y \in V$ y $\forall\, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$

(P_4) $\forall\, x \in V \Rightarrow \langle x, x\rangle \geqslant 0$

(P_5) $\forall\, x \in V \Rightarrow \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$

De manera formal, un espacio con producto interior es una pareja $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ donde V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto interior en V.

Teorema 1.4 (Desigualdad de Cauchy - Schwarz)**.** Sea $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio con producto interior, $\Rightarrow \forall\, x, y \in V$ s.t.q.

$$\big|\langle x, y\rangle\big| \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle}$$

Proof. Sean $x, y \in V$ Para y tomamos los siguientes casos

1. $y = \vec{0}$

$$\Rightarrow \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle = \langle 0 \cdot \vec{0}\rangle = 0\langle y, z\rangle = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \big|\langle x, y\rangle\big| = 0 \Rightarrow \big|\langle x, y\rangle\big| = 0 \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle} = \sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{0} = 0$$

En este caso, se cumple la desigualdad.

2. $y \neq \vec{0}$

Resolvamos para λ la siguiente ecuación

$$\langle x - \lambda y, \lambda y\rangle = 0$$

Note que

$$\langle x - \lambda y, \lambda y\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle x, \lambda y\rangle - \langle \lambda y, \lambda y\rangle = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda\langle x, y\rangle - \lambda^2\langle y, y\rangle = 0 \Leftrightarrow \lambda[\langle x, y\rangle - \lambda\langle y, y\rangle] = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 0 \qquad \text{o} \qquad \langle x, y\rangle - \lambda\langle y, y\rangle = 0$$

Debido a que $\lambda \neq 0$ s.t.q

$\lambda_0 = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$ es una solución no cero de lo anterior.

Observe que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(\lambda) = \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle \geqslant 0$$

Sustituyendo a λ_0 en $f(\lambda)$ s.t.q. $f(\lambda_0) \geqslant 0$

Note ahora que

$$0 \leqslant f(\lambda_0) = \langle x - \lambda_0 y, x - \lambda_0 y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, -\lambda_0 y \rangle + \langle -\lambda_0 y, x \rangle + \langle -\lambda_0 y, -\lambda_0 y \rangle$$
$$= \langle x, x \rangle - 2\lambda_0 \langle x, y \rangle + \lambda_0^2 \langle y, y \rangle = \langle x, x \rangle - 2\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}\langle x, y \rangle + \frac{\langle x, y \rangle^2}{\langle y, y \rangle^2}\langle y, y \rangle$$
$$= \langle x, x \rangle - 2\frac{\langle x, y \rangle^2}{\langle y, y \rangle} + \frac{\langle x, y \rangle^2}{\langle y, y \rangle} = \langle x, x \rangle - \frac{\langle x, y \rangle^2}{\langle y, y \rangle}$$
$$\Rightarrow \frac{\langle x, y \rangle^2}{\langle y, y \rangle} \leqslant \langle x, x \rangle \Rightarrow \langle x, y \rangle^2 \leqslant \langle y, y \rangle \langle x, x \rangle$$
$$\Rightarrow \left|\langle x, y \rangle\right| \leqslant \sqrt{\langle x, x \rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

$\therefore$ el Teorema 1.4 es cierto. □

Teorema 1.5 (Desigualdad de Minkowski). Sea $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio con producto interior, $\Rightarrow \forall\, x, y \in V$ s.t.q.

$$\sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \leqslant \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

Proof. Sean $x, y \in V$ cualesquiera elementos. Note que

$$\sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \leqslant \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle} \Leftrightarrow \langle x + y, x + y \rangle \leqslant (\sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle})^2$$
$$\Leftrightarrow \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \leqslant \langle x, x \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y \rangle} + \langle y, y \rangle$$
$$\langle x, y \rangle \leqslant \sqrt{\langle x, x \rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

$\Rightarrow$ para probar Teorema 1.5 basta probar $\langle x, y \rangle \leqslant \sqrt{\langle x, x \rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y \rangle}$

Notemos que

$$\langle x, y \rangle \leqslant \left|\langle x, y \rangle\right|$$

Por el Teorema 1.4 s.t.q.

$$\left|\langle x, y \rangle\right| \leqslant \sqrt{\langle x, x \rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y \rangle} \Rightarrow \langle x, y \rangle \leqslant \sqrt{\langle x, x \rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

□

Definición 1.4. Sea $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio con producto interior. Definimos a la norma de $x \in V$ como el número $\in \mathbb{R} \ni$

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Note que $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ es una función.

Teorema 1.6. Sea $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ es un espacio vectorial real con producto interior $\Rightarrow$ la norma definida en la Definición 1.4 es una norma en V.

Proof. (N_1) Si $x \in V$ es un elemento arbitrario $\Rightarrow \langle x, x\rangle \geqslant 0$. Así que $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \geqslant 0$

(N_2) Debido a que $\forall\, x \in V \Rightarrow \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$, podemos concluir que $\forall\, x \in V \Rightarrow \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ puesto que

$$\sqrt{\langle x, x\rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

(N_3) Supongamos que $x \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrarios $\Rightarrow$ usando propiedades de $\langle\ ,\ \rangle$ s.t.q.

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda\langle x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda\langle \lambda x, x\rangle} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\lambda|\|x\|$$

(N_4) Sean $x, y \in V$ arbitrarios. Por el Teorema 1.5 s.t.q.

$$\sqrt{\langle x+y, x+y\rangle} \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle}$$

Es decir

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

□

Corolario. Sea $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ es un espacio vectorial real sobre el campo $\mathbb{R}$ con producto lineal con producto interior $\Rightarrow$ la función $d : V \times V \to \mathbb{R}$ definida por

$$d(x, y) = \big\|x + (-y)\big\| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$$

es una métrica en $(V, \langle\ ,\ \rangle)$

Observación. Sabemos que toda norma induce a una métrica y sabemos que todo producto interior induce una norma. Sin embargo, ni toda métrica proviene de una norma, ni toda norma proviene de producto interior. De hecho, recordemos que si d es inducida por norma, cumple las propiedades (D_5) y (D_6) o a) y b) del Teorema 1.1.

Podemos notar que la métrica discreta definida en $\mathbb{R}^n$ con $n \in \mathbb{Z}^+$ no viene de una norma en $\mathbb{R}^n$ porque para $x = (1, 0, ..., 0), y = (0, 1, ..., 0)$ y $\lambda = 10 \in \mathbb{R}$ s.t.q.

$$d(\lambda x, \lambda y) = 1 \neq 10 = 10 \cdot 1 = 10 \cdot d(x, y) = \lambda \cdot d(x, y)$$

Teorema 1.7. Sea $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ es un espacio vectorial real y $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ una norma en $V \Rightarrow$ son equivalentes

1. $\|\cdot\|$ satisface la identidad del paralelogramo

$$\forall\, x, y \in V \Rightarrow \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2 \cdot \|x\|^2 + 2 \cdot \|y\|^2$$

2. $\exists$ un producto interior $\langle\ ,\ \rangle$ en $V \ni$

$$\forall\, x \in V \Rightarrow \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Proof. 1. $\Rightarrow$ 2.

Hint $= \langle x, y\rangle = \frac{1}{4} \cdot (\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2)$

2. $\Rightarrow$ 1.

Sea $x, y \in V$. Por definición de $V \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \sqrt{\langle x+y, x+y\rangle}^2 + \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}^2 \\ = \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle &= \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle + \langle x, x-y\rangle - \langle y, x-y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\ &= 2\langle x,x\rangle + 2\langle y,y\rangle = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \end{aligned}$$

$\therefore$ se cumple la identidad del paralelogramo

$\square$

Observación. Usando el Teorema 1.7 podemos probar que $\|x\|_\infty$ definida en $\mathbb{R}^n$ con $n \in \mathbb{Z}^+$ no proviene d un producto interior de $\mathbb{R}^n$

En efecto, $\|\cdot\|_\infty$ no satisface la identidad del paralelogramo, porque para $x = (1, 0, ..., 0), y = (0, 1, ..., 0)$ s.t.q.

$$x + y = (1, 1, 0, ..., 0) \qquad \text{y} \qquad x - y = (1, -1, 0, ..., 0)$$

$$\|x+y\|_\infty{}^2 + \|x-y\|_\infty{}^2 = 2 \cdot \|x\|_\infty{}^2 + 2 \cdot \|y\|_\infty{}^2$$
$$|1| + |1| = 2 \neq 2 \cdot 1^2 + 2 \neq 2 \cdot 1^2 = 4$$

Ejemplo 1.6. En $\mathbb{R}^n$ la siguiente función es un producto interior llamado comunmente producto punto $\langle \ , \ \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definido por

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

donde $x = (x_1, ..., x_n)$ y $y = (y_1, ..., y_n)$

Note que las desigualdades del Teorema 1.4 y Teorema 1.5 toman en este caso la siguiente forma

1. $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$ Desigualdad C-S
2. $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$ Desigualdad de Minkowski

Observación. Como ya demostramos estas desigualdades para espacios vectoriales reales con producto interior en el Teorema 1.4 y Teorema 1.5, no es necesario volverlo a hacer.

Ejemplo 1.7. Definimos al conjunto

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n \in \mathbb{R}\}$$

$(\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+)$. En $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ podemos definir las siguientes operaciones si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y si además $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}} := (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \lambda \cdot (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Con estas dos operaciones, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$

Definamos a

$$\ell_2 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \text{ es convergente } \}$$

Notación. Una serie se denota como

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

mientras que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

son sus sumas parciales

Observación. Una serie converge $\Leftrightarrow$ $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\mathbb{R}$, en especifico, a

$$\sup\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i \mid n \in \mathbb{N}\right\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

Para una definición más formal, refierase a la Definición 2.13

Teorema 1.8. Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$ y $W \subseteq V \Rightarrow (W, + \restriction_W, \cdot \restriction_W)$ es un subespacio vectorial de $V \Leftrightarrow$ se cumplen

I) $\vec{0}_V \in W$ — Cero en Subespacio

II) $\forall\, \vec{v}, \vec{u} \in W \Rightarrow \vec{v} + \vec{u} \in W$ — Cerrado Bajo Suma

III) $\forall\, \vec{v} \in W$ y $\forall\, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda \cdot \vec{v} \in W$ — Cerrado Bajo Producto

Proof. Refiérase a los apuntes de Algebra Lineal □

Afirmación 4. ℓ_2 es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Proof. I) Primero notemos que la sucesión $\vec{0} = (0_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde $0_n = 0 \,\forall\, n \in \mathbb{N}$ pertenece a ℓ_2, ya que

$$\sum_{n=1}^{\infty} 0_n^2 = 0 < \infty$$

Así $\vec{0} \in \ell_2$

II) Efectivamente, es suficiente probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \cdot |y_n| < \infty$$

Para probar esto último, aplicamos el Lema 1.1 cuando $p = q = \frac{1}{2}$

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot |y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}[x_i^2 + y_i^2]$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot |y_i| \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}[x_i^2 + y_i^2]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} y_n^2$$

Este último elemento es el supremos. Así, por el teorema del emparedado, o del sandwich, o de la hamburguesa, etc, s.t.q.

$$\exists \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot |y_i| \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n < \infty$$

Verifiquemos ahora que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)^2 < \infty$. Para ello, nótese que

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n^2 = \alpha < \infty$$

$\left(\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona creciente acotada superiormente por $\alpha \Rightarrow$

$$\exists \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 \mid n \in \mathbb{N} \right\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)^2$$

$\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2$

III) Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrarios.

Sea $m \in \mathbb{N}$ arbitrario

$$\sum_{i=1}^{m} (\lambda x_i)^2 \leqslant \lambda^2 \sum_{i=1}^{m} {x_i}^2 \leq \lambda^2 \cdot \sup \left\{ \sum_{i=1}^{m} {x_i}^2 \mid n \in \mathbb{N} \right\} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda x_n)^2 = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i)^2 \mid n \in \mathbb{N} \right\} < \infty \Rightarrow \lambda (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2$$

Así ℓ_2 es un subespacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ □

Afirmación 5. La función $\langle\ ,\ \rangle : \ell_2 \times \ell_2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

es una función bien definida

Proof. Debemos probar que $\langle \, , \, \rangle$ es un producto interior

1. Sean $\overline{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $\overline{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2$ arbitrarios

$$\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} x_n y_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} y_n x_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n = \langle \overline{y}, \overline{x} \rangle$$

2. Sean $\overline{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \overline{z} = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $\overline{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2$ arbitrarios

$$\begin{aligned}\langle \overline{x} + \overline{y}, \overline{z} \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n) z_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} (x_n + y_n) z_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} (x_n z_n + y_n z_n) \\ &= \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{m} x_n z_n + \sum_{n=1}^{m} y_n z_n \right) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} x_n z_n + \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} y_n z_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} x_n z_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n z_n = \langle \overline{x}, \overline{z} \rangle + \langle \overline{y}, \overline{z} \rangle\end{aligned}$$

3. Suponga ahora que $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrario

$$\begin{aligned}\langle \lambda\overline{x}, \overline{y} \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda x_n)(y_n) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} (\lambda x_n)(y_n) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \lambda (x_n y_n) \\ &= \lim_{m\to\infty} \lambda \sum_{n=1}^{m} (x_n y_n) = \lambda \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} (x_n y_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = \lambda \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle\end{aligned}$$

4. Es claro que

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n^2 \geqslant 0 \Rightarrow \langle \overline{x}, \overline{x} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \geqslant 0$$

Además

$$\begin{aligned}\langle \overline{x}, \overline{x} \rangle = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 = 0 &\Leftrightarrow \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} x_n^2 = 0 \Leftrightarrow \forall\, m \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow \sum_{n=1}^{m} x_n^2 = 0 \Leftrightarrow x_n^2 = 0 \Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n = 0\end{aligned}$$

$\therefore \langle \, , \, \rangle$ es un producto interior en ℓ_2 □

Observación. Como sabemos $(\ell_2, \langle \, , \, \rangle)$ es un espacio vectorial con producto interior. La norma inducida se define como $\|\cdot\|_2 : \ell_2 \to [0, \infty)$ definida como

$$\left\| (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \right\|_2 = \sqrt{\langle (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2}$$

La métrica $d_2 : \ell_2 \times \ell_2 \to [0, \infty)$ inducida por $\|\cdot\|_2$ está definida por la siguiente regla de asociación

$$d_2((x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \left\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}} - (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-y_n)^2}$$

Note que las desigualdades del Teorema 1.4 y Teorema 1.5 toman en este caso la siguiente forma

1. $\forall\, x,y\in\ell_2 \Rightarrow \left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n\right| \leqslant \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2}\sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n^2}$ Desigualdad C-S

2. $\forall\, x,y\in\ell_2 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n+y_n)^2 \leqslant \sum\limits_{n=1}^{n} x_n^2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n^2$ Desigualdad de Minkowski

   Estas desigualdades también pueden ser expresadas como normas.

Ejemplo 1.8. Sen $a,b\in\mathbb{R}$ con $a<b$. Definimos

$$C([a,b]) := \{f:[a,b]\to\mathbb{R} \mid\ f \text{ es continua }\}$$

Es conocido que $C([a,b])$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Más aún, si $f,g\in C([a,b]) \Rightarrow fg: [a,b]\to\mathbb{R}$ definida por

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

con $x\in X$ es también una función continua. También es bien conocido que $C([a,b])\subseteq R([a,b])$, es decir, toda función continua $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es Riemann integrable

Bajo estas condiciones, veamos que la función

$$\langle\ ,\ \rangle : C([a,b])\times C([a,b])\to\mathbb{R}$$

definida por

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

es un producto interior

Proof.

1. Sea $f,g\in C([a,b])$ arbitrarios

$$\Rightarrow \langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b g(x)f(x)\,dx = \langle g,f\rangle$$

2. Sean $f,g,h\in C([a,b])$ cualesquiera funciones

$$\Rightarrow \langle f+g,h\rangle = \int_a^b (f(x)+g(x))h(x)\,dx = \int_a^b f(x)h(x)+g(x)h(x)\,dx$$

$$= \int_a^b f(x)h(x)\,dx + \int_a^b g(x)h(x)\,dx = \langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle$$

3. Sean $f, g \in C([a,b])$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrarios

$$\Rightarrow \langle \lambda f, g\rangle = \int_a^b (\lambda f)(x)h(x)\,dx = \int_a^b \lambda(f(x)h(x))\,dx = \lambda \int_a^b f(x)h(x)\,dx = \lambda\langle f, g\rangle$$

4. Sea $f \in C([a,b])$ arbitrario. Debido a que $f^2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua y $\forall\, x \in [a,b] \Rightarrow f^2(x) \geqslant 0$. Así, como la función es una funcional lineal no negativa

$$\langle f, f\rangle = \int_a^b f^2(x)\,dx \geqslant \int_a^b 0\,dx = 0$$

Ahora, notemos que

$$\langle f, f\rangle = 0 \Leftrightarrow \int_a^b |f(x)|^2\,dx = 0 \overset{\text{por continuidad}}{\Longleftrightarrow} |f(x)|^2 = 0 \text{ en } [a,b] \Leftrightarrow f(x) = 0$$

$\therefore \langle\ ,\ \rangle$ es un producto interior en $C([a,b])$ $\square$

Observación. Así, $(C([a,b]), \langle\ ,\ \rangle)$ es un espacio con producto interior. Note que las desigualdades del Teorema 1.4 y Teorema 1.5 toman en este caso la siguiente forma

1. $\forall\, f, g \in C([a,b]) \Rightarrow \left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$ C-S

2. $\forall\, f, g \in C([a,b]) \Rightarrow \left(\int_a^b (f(x)+g(x))^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$

   $\leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$ Mink.

1.5. Isometrías

Definición 1.5 (Isometría)**.** Una isometría entre espacios métricos es una función $f : (X,d) \to (Y,\rho)$ tal que

$$\forall\, x, y \in X \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) = d(x,y)$$

Es claro que toda isometría es continua porque es Lipschitz continua. Observe que toda isometría es siempre una función inyectiva, esto por (D_2) de la Definición 1.1. Sin embargo, no siempre son funciones suprayectivas.

Definición 1.6 (Subespacio Métrico)**.** Supongamos que (X,d) es un subespacio métrico y que $\varnothing \neq Y \subseteq X$. Debido a que d es métrica, la función

$$d_Y := d\restriction_{Y\times Y} : Y \times Y \to \mathbb{R}$$

también es métrica en Y. Recuerde que

$$d_Y(x,y) = d\restriction_{Y\times Y}(x,z) = d(x,z)\,\forall\, x,z \in Y\times Y$$

El espacio métrico (Y, d_Y) es llamado subespacio métrico de (X, d)

Observación. Resulta ser que la función inclusión $i : Y \to X$ es isometría

$$d(i(x), i(y)) = d(x,y) = d_Y(x,y)$$

Así, si elegimos a $\varnothing = Y \subsetneq X \Rightarrow$ la función inclusión $i(Y, d_Y) \to (X, d)$ es una isometría que no es suprayectiva. Tomemos $a \in X$ y $a \in Y \Rightarrow\ \exists\, y \in Y\ \ni i(y) = a$, porque de lo contrario $a = y$, lo cual sería una contradicción.

Capítulo 2

Funciones Continuas

2.1. Definición y Ejemplos

Definición 2.1 (Función Continua)**.** Sea (X, d) y (Y, ρ) espacios métricos cualesquiera. Supongamos que

$$f : X \to Y$$

es una función cualquiera

1. Se dice que f es continua en $x_0 \in X$ respecto de las métricas d y $\rho \Leftrightarrow$ la siguiente proposición es verdadera

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \ni \forall\, x \in X \Rightarrow d(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

2. Diremos que f es continua (o continua en todo X) si f es continua en cada $x \in X$

Notación. $f : (X.d) \to (Y, \rho)$ es continua en x_0

Ejemplo 2.1. Considere a $X = [0, 1), Y = \mathbb{R}, f : X \to Y$ es la función $f(x) = x$, y además

$$d(x, y) = |x - y| \qquad\qquad d_1(x, y) = \text{mín}\{|x - y|, 1 - |x - y|\}$$

Resulta ser que $f : (X, d) \to (Y, d)$ es continua en $x_0 = 0$, pero $f : (X, d_1) \to (Y, d)$ no lo es

Observación. d es métrica tanto en $\mathbb{R}$ como en X, mientras que d_1 solo es métrica en X

Proof.

1. Veamos que $f : (X, d) \to (Y, d)$ es continua en $x_0 = 0$

   Sea $\varepsilon > 0$. Definamos a $\delta = \varepsilon$. Por lo tanto, $\delta > 0$. Además, si $x \in X$ es cualquier elemento tal que $d(x, x_0 = 0) = d(x, 0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) = d(x, 0) < \delta = \varepsilon \Rightarrow \therefore$ $f : (X, d) \to (Y, d)$ es continua.

2. Veamos que $f : (X, d_1) \to (Y, d)$ no es continua en $x_0 = 0$

   En efecto, debemos probar que la proposición que niega a 1. de Definición 2.1, es decir

$$\exists\, \varepsilon < 0 \quad \forall\, \delta < 0 \ni \exists\, x_\delta \in X \Rightarrow d_1(x_\delta, 0) < \delta \text{ y } d(f(x), f(x_0)) = d(x_\delta, 0) \geqslant \varepsilon$$

es verdadera. Por ello, conseremos a $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Sea $\delta < 0$ arbitrario. Debido a que

$$1 - \delta, \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \exists\, x_\delta \in \mathbb{Q} \ni 1 - \delta < x_\delta < 1 \wedge \frac{1}{2} < x_\delta < 1$$

Note que para algún $x_\delta \in [0, 1)$ sucede que

$$d_1(x_\delta, 0) = \text{mín}\{|x_\delta|, 1 - |x_\delta|\} < \delta \quad \text{ y } \quad d(f(x_\delta), f(0)) = |x_\delta - 0| = |x_\delta| = x_\delta > \frac{1}{2}$$

$\therefore f : (X, d_1) \to (Y, d)$ no es continua en $x_0 = 0$

□

Ejemplo 2.2. La función identidad

$$\text{id}_{\mathbb{R}^n} : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$$

es una función continua en cada $x \in \mathbb{R}^n\ \forall\, p, q \in [1, \infty)$. Se usará el siguiente Lema.

Lema 2.1. Las siguientes proposiciónes son verdaderas

1. Si $a_1, ..., a_n \geqslant 0$ y $s \in [1, \infty) \Rightarrow [\text{máx}\{a_1^s, ..., a_m^s\}]^{\frac{1}{s}} = \text{máx}\{a_1, ..., a_m\}$
2. $\forall\, s \in [1, \infty)\, \forall\, x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \|x\|_s \leqslant n^{\frac{1}{s}} \|x\|_\infty$
3. $\forall\, s \in [1, \infty)\, \forall\, x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_s$
4. $\forall\, s, t \in [1, \infty)\, \forall\, x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \|x\|_s \leqslant n^{\frac{1}{s}} \|x\|_t$

Proof. Vamos a demostrar cada inciso del Lema 2.1

1. Supongamos que

$$a_i^s = \text{máx}\{a_1^s, ..., a_m^s\} \Rightarrow a_i = (a_i^s)^{\frac{1}{s}} = [\text{máx}\{a_1^s, ..., a_m^s\}]^{\frac{1}{s}}$$

Sea $j \in \{1, ..., m\}$ arbitrario. Como $a_j^s \in \{a_1^s, ..., a_m^s\}$

$$\Rightarrow a_j^s \leqslant a_i^s \Rightarrow \forall\, j = 1, ..., m \Rightarrow a_j = (a_j^s)^{\frac{1}{s}} \leqslant a_i = (a_i^s)^{\frac{1}{s}}$$

Así, como $\forall j = 1, ..., m \Rightarrow a_j \Rightarrow a_j \leqslant a_i \Rightarrow a_i = \text{máx}\{a_1, ..., a_m\}$

$\therefore [\text{máx}\{a_1^s, ..., a_m^s\}]^{\frac{1}{s}} = (a_i^s)^{\frac{1}{s}} = a_i = \text{máx}\{a_1, ..., a_m\}$

2. Sean $s \in [1, \infty)$ y $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ arbitrarios

$$\|x\|_s = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^s\right)^{\frac{1}{s}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \text{máx}\{|x_1|, ..., |x_n|\}^s\right)^{\frac{1}{s}}$$

Ya que $|x_i| \leqslant \max\{|x_1|, ..., |x_n|\}\ \forall\, i = 1, ..., n$. Pero

$$\left(\sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \max\{|x_1|, ..., |x_n|\}^s\right)^{\frac{1}{s}} = \left(\max\{|x_1|, ..., |x_n|\}^s \sum_{i=1}^{n} \cdot 1\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$= n^{\frac{1}{s}} (\|x\|_\infty^s)^{\frac{1}{s}} = n^{\frac{1}{s}} \|x\|_\infty$$

3. Sean $s \in [1, \infty)$ y $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ arbitrarios Supongamos qu $\|x\|_\infty = |x_i|$

$$\|x\|_\infty^s = |x_i|^s \leqslant \sum_{j=1}^{n} |x_j|^s$$

Luego, se tiene que

$$\|x\|_\infty = (\|x\|_\infty^s)^{\frac{1}{s}} \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^s\right)^{\frac{1}{s}} = \|x\|_s$$

4. Sean $s, t \in [1, \infty)$ y $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ arbitrarios. Por el inciso 2. de esta demostración

$$\|x\|_s \leqslant n^{\frac{1}{s}} \|x\|_\infty$$

Por el inciso 3. s.t.q.

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_s$$

Así

$$\|x\|_s \leqslant n^{\frac{1}{s}} \|x\|_t$$

□

Proof. Podemos ahora demostrar el ejemplo. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ f.p.a. Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Definimos a $\delta = \frac{\varepsilon}{n^{\frac{1}{q}}}$. Resulta que, por 3. del Lema 2.1, si $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow$

$$\left\|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}(x) - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}(x_0)\right\|_q = \|x - x_0\|_q \leqslant n^{\frac{1}{q}} \|x - x_0\|_p < n^{\frac{1}{q}} \cdot \delta = \varepsilon$$

$\therefore \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ es continua en x_0 □

Definición 2.2 (Lipschitz Continua). Sean $(X.d)$ y (Y, ρ) espacios métricos cualesquiera. Diremos que una función $f : X \to Y$ es Lipschitz continua si existe una constante de Lipschitz $c < 0$ tal que

$$\forall\, x, z \in X \Rightarrow \rho(f(x).f(z)) \leqslant c \cdot d(x, z)$$

Corolario. Sean $(X.d)$ y (Y, ρ) espacios métricos. Si $f : X \to Y$ es Lipschitz continua $\Rightarrow f$ es continua

Proof. Sea $x_0 \in X$ arbitrario. Sea $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ cualquiera. Definamos $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$. Donde $c > 0$ es tal que

$$\rho(f(x).f(y)) \leqslant c \cdot d(x,y) \,\forall\, x, y \in X$$

Resulta que

$$\forall\, x \in X \Rightarrow d(x,x_0) < \delta \Rightarrow \rho(f(x).f(x_0)) < \varepsilon$$

Efectivamente, sea $x \in X \ni d(x,x_0) < \delta \Rightarrow$

$$\rho(f(x).f(x_0)) \leqslant c \cdot d(x,x_0) < c \cdot \delta = \varepsilon$$

$\therefore f$ es continua en x_0. Como x_0 es arbitrario, es continua en el espacio. □

Ejemplo 2.3. La función identidad

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$$

es una función Lipschitz continua con $p, q \in [1, \infty]$.

Proof. Supongamos $x, y \in \mathbb{R}^n$ arbitrarios. Si $p = q$. es claro que es Lipschitz continua. Supongamos que $p \neq q$. Tenemos los siguientes casos.

1. $p \in [1, \infty), q = \infty$

   Definimos $c = 1$, y por el inciso 3. del Lema 2.1, s.t.q.

   $$\left\|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}(x) - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}(y)\right\|_\infty \leqslant 1 \cdot \|x-y\|_p$$

2. $q \in [1, \infty), p = \infty$

   En este caso, definimos a $c = n^{\frac{1}{q}} > 0$, por el inciso 2. del Lema 2.1 s.t.q

   $$\|x-y\|_q = \left\|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}(x) - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}(y)\right\|_q \leqslant c \cdot \|x-y\|_\infty$$

3. $p \neq q \in [1, \infty]$

   Una vez más, definimos a $c = n^{\frac{1}{q}} > 0$ y por el inciso 4. del Lema 2.1 s.t.q.

   $$\|x-y\|_q = \left\|\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}(x) - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}(y)\right\|_q \leqslant c \cdot \|x-y\|_p$$

$\therefore \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ es una función Lipschitz continua □

Observación. En el ejemplo anterior, las funciones identidad son biyectivas, y por lo tanto existe su función inversa. Lo notable de esto, es que las inversas son Lipschitz continua. Estas se llaman equivalencias.

Definición 2.3 (Equivalencia)**.** Sean (X, d) y (Y, ρ) dos espacios métricos. Una función $f : X \to Y$ es una equivalencia si es biyectiva, si es Lipschitz continua, y si su inversa también lo es. Debido a que las funciones Lipschitz continuas son continuas, cualquier función $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ que sea una equivalencia es biyectiva, y tanto ella como su función inversa son continuas. Las funciones de este tipo se llaman homeomorfismos.

Definición 2.4 (Homeomorfismo)**.** Una función $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ es un homeomorfismo si

1. f es biyectiva
2. f es continua
3. f^{-1} es continua

Se dice que X y Y son homeomorfos si existe un homeomorfismo entre ellos.

Observación. La función $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ es un homeomorfismo porque es equivalencia. La noción de equivalencia nos permite definir cuando dos métricas son equivalentes.

Definición 2.5 (Métricas Equivalentes)**.** Sean d y ρ dos métricas en un conjunto X. Diremos que la métrica de d es equivalente a la métrica ρ si la función identidad

$$\mathrm{id}_X : (X, d) \to (X, \rho)$$

es una equivalencia

Observación. Si d y ρ son métricas equivalentes en un conjunto $X \Rightarrow \exists$ constantes $\in \mathbb{R}^+ c, k \ni \forall\, x, y \in X$

$$k \cdot \rho(x, y) \leqslant d(x, y) \leqslant c \cdot \rho(x, y)$$

Ejemplo 2.4. En el conjunto $X = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+\}$ consideramos

$$d_1\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) = |n - m| \qquad \text{y} \qquad d_2\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|$$

Estas métricas no son equivalentes. Se tiene que

$$d_2\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) \leqslant 1 \cdot d_1\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right)$$

Pero no existe una constante $k > 0$ tal que

$$k \cdot d_2\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) \leqslant d_1\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right)$$

Observación. De esta manera, podemos decir que dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ en un espacio vectorial V son equivalentes si existen dos constantes $c, k > 0 \ni \forall\, \vec{v} \in V$

$$k \cdot \|\vec{v}\|_2 \leqslant \|\vec{v}\|_1 \leqslant c \cdot \|\vec{v}\|_2$$

Corolario. Las desigualdades del Lema 2.1 muestran que $\forall\, p, q \in [1, \infty]$ las normas $\|\cdot\|_p$ y $\|\cdot\|_q$ son equivalentes en $\mathbb{R}^n$

2.2. Conjuntos Abiertos y Cerrados

Definición 2.6 (Bolas). Sea (X, d) un espacio métrico cualquiera.

1. La bola abierta de centro $x \in X$ y radio $r > 0$ en (X, d) es el subconjunto

$$B_d(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

2. La bola cerrada de centro $x \in X$ y radio $r > 0$ en (X, d) es el subconjunto

$$\overline{B}_d(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) \leqslant r\}$$

Teorema 2.1. Las siguientes son propiedades básicas de las bolas abiertas en cualquier espacio métrico.

1. Si $0 < r < s \Rightarrow$

$$B(x, r) \subseteq \overline{B}(x, r) \subseteq B(x, s)$$

2. $\forall x \in X \Rightarrow$

$$\bigcap_{r \in \mathbb{R}^+} B(x, r) = \{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} B\left(x, \frac{1}{n}\right)$$

3. $\forall x \in X \Rightarrow$

$$X = \bigcup_{r \in \mathbb{R}^+} B(x, r) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(x, n)$$

Ejemplo 2.5. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. En el conjunto

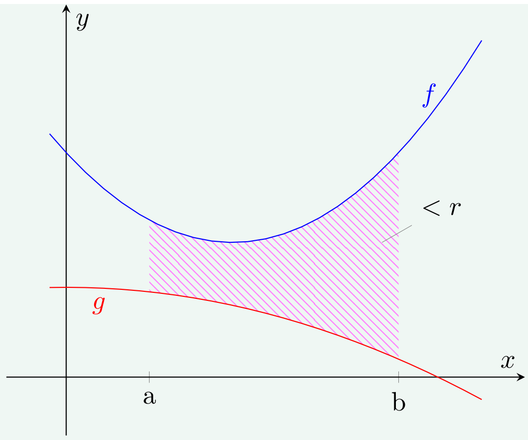
$$C([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua }\}$$

La función $\|\cdot\|_1 : C([a, b]) \to \mathbb{R}$ dada pr

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

es una norma en $C([a, b])$. Observe que si $f \in C([a, b])$ y $r > 0 \Rightarrow$

$$B_{d_1} = \{g \in C([a, b]) \mid \|f - g\|_1 < r\}$$
$$\Rightarrow B_{d_1} = \{g \in C([a, b]) \mid \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx < r\}$$



B_{d_1} se puede interpretar geométricamente como el conjunto de todas las funciones continuas $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tales que la región determinada por las gráficas de f y de g tiene área $< r$

Ejemplo 2.6. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. la función $\|\cdot\|_\infty : C([a, b]) \to \mathbb{R}$ dada pr

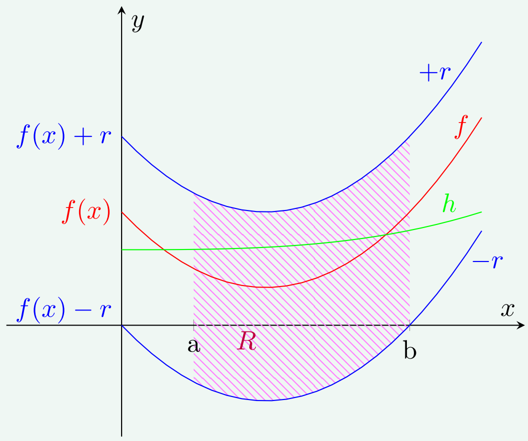
$$\|f\|_\infty = \sup\{\left|f(x)\right| \mid x \in [a, b]\}$$

es una norma en $C([a, b])$. Como $C([a, b])$ es cerrado y acotado es compacto[a], por lo que alcanza su máximo y su mínimo

$$\Rightarrow \|f\|_\infty = \max\{\left|f(x)\right| \mid x \in [a, b]\}$$

En este espacio normado de centro f y radio $r > 0 \Rightarrow$

$$B_{d_\infty} = \{g \in C([a, b]) \mid \|f - g\|_\infty < r\}$$
$$\Rightarrow B_{d_\infty} = \{g \in C([a, b]) \mid \sup\{\left|f(x)\right| \mid x \in [a, b]\} < r\}$$



Donde el área sombrada de color magenta la denotamos como

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b \text{ y } f(x) - r < y < f(x) + r\}$$

Sea $h \in B_{d_\infty}(f, r)$. Si $x \in [a, b]$ es cualquier elemento

$$\Rightarrow \left|f(x) - h(x)\right| \leqslant \sup\{\left|f(y) - h(y)\right| \mid y \in [a,b]\} = \|f-h\|_\infty < r$$

Así que

$$\forall\, x \in [a,b] \Rightarrow f(x) - r < h(x) < f(x) + r$$

Luego

$$\forall\, x \in [a,b] \Rightarrow (x, h(x)) \in R$$

Por lo tanto

$$\operatorname{graf}(h) = \{(x, h(x)) \mid x \in [a,b]\} \subseteq R$$

Así $h \in R \therefore B_{d_\infty}(f,r) \subseteq R$. Esta es una forma potencial de hablar del infinito que hay en R. Es decir, podríamos llenar a R.

[a]El Teorema de Heine-Börel se verá más adelante, de donde se obtiene esta propiedad

Definición 2.7 (Conjunto Abierto)**.** Sea (X,d) un espacio métrico. Diremos que $A \subseteq X$ es abierto en (X,d) si ocurre lo siguiente:

$$\forall\, x \in A\ \exists\, r_x > 0 \ni B(x, r_x) \subseteq A$$

Teorema 2.2. En cualquier espacio métrico (X,d) cualquier bola abierta es un conjunto abierto en (X,d)

Proof. Sea $x \in X$ y $r \in \mathbb{R}^+$ cualesquiera elementos. Supongamos $y \in B_d(x,r)$ es arbitrario.

$$\Rightarrow d(x,y) < r$$

Luego, $t = r - d(x,y) > 0$. Resulta ser que

$$B_d(y,t) \subseteq B_d(x,r)$$

Efectivamente, si $x \in B_d(y,t)$ es arbitrario

$$\Rightarrow d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + t = r$$

Así $z \in B_d(x,r) \therefore B_d(x,r)$ es un conjunto abierto en (X,d) □

Corolario. El conjunto $A = \{f \in C([a,b]) \Rightarrow\ \forall\, t \in [a,b]\left|f(t)\right| < r\}$ es un conjunto abierto en $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ con $a < b$

Proof. Observe que $A = B_{d_\infty}(\vec{0}, 1)$

$$B_{d_\infty} = \{g \in C([a,b]) \mid \sup\{\left|g(x) - \vec{0}\right| \mid x \in [a,b]\} < r\}$$

Como es una bola es abierto. Es interesante ver que como es continua alcanza su máximo, por lo que máx = sup y sup < 1 $\square$

Corolario. En $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ el intervalo (a,b) con $a < b$ es un conjunto abierto

Proof. En efecto, observe que

$$(a,b) = B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$$

Así (a,b) es un conjunto abierto en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ $\square$

Definición 2.8 (Punto Interior)**.** Sea $A \subseteq X$ y $x_o \in A$. Si x_0 es punto interior de $A \Rightarrow$

$$\exists\, r > 0 \ni B(x_0, r) \subseteq A$$

Observación. Esta definición es idéntica a la Definición 2.7

Teorema 2.3.

1. $\varnothing$, X son abiertos.
2. Si $\{\mathcal{F}_\alpha \mid \alpha \in J\}$ es una familia de conjuntos abiertos $\Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in J} \mathcal{F}_\alpha$ es abierto.
3. Si $\{\mathcal{F}_i \mid i = 1, ..., k\}$ es una familia finita de conjuntos abiertos $\Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{k} \mathcal{F}_i$ es un conjunto abierto.

Proof.

1. P.D. X es abierto.

   Sea $x_0 \in X$ fijo pero arbitrario. Tomando $r = 1$

   $$B(x_0, 1) \subseteq X$$

   Como x_0 fue arbitrario $\Rightarrow$ todos los puntos son interiores.

   $\therefore X$ es abierto.

   P.D. $\varnothing$ es abierto (por vacuidad)

   Si $\varnothing$ no fuera abierto $\Rightarrow \exists\, x_0 \in \varnothing \ni x_0$ no es punto interior del $\varnothing$. Sin embargo, no se puede exhibir dicho punto.

   $\therefore \varnothing$ es abierto.

2. Sea $\{\mathcal{F}_\alpha \mid \alpha \in J\}$ es una familia de conjuntos abiertos P.D. que $\bigcup\limits_{\alpha \in J} \mathcal{F}_\alpha$ es abierto.

   Sea $x_0 \in \bigcup\limits_{\alpha \in J} \mathcal{F}_\alpha$

$$\Rightarrow \exists\, \alpha_0 \in J \ni x_0 \in \mathcal{F}_{\alpha_0}$$

Como $\mathcal{F}_{\alpha_0}$ es abierto $\Rightarrow x_0$ es punto interior de $\mathcal{F}_{\alpha_0}$.

$$\Rightarrow \exists\, r > 0 \ni B(x_0, r) \subseteq \mathcal{F}_{\alpha_0}$$

Como $\mathcal{F}_{\alpha_0} \subseteq \bigcup\limits_{\alpha \in J} \mathcal{F}_\alpha$, por transitividad:

$$\Rightarrow B(x_0, r) \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} \mathcal{F}_\alpha$$

$\Rightarrow x_0$ es punto interior de $\bigcup\limits_{\alpha \in J} \mathcal{F}_\alpha$. Como x_0 fue arbitrario en $\bigcup\limits_{\alpha \in J} \mathcal{F}_\alpha$,

$\therefore \bigcup\limits_{\alpha \in J} \mathcal{F}_\alpha$ es abierto. (la unión arbitraria de abiertos es abierta)

3. Sea $\{\mathcal{F}_i \mid i = 1, ..., k\}$ una familia finita de conjuntos abiertos P.D. $\bigcap\limits_{i=1}^{k} \mathcal{F}_i$ es un conjunto abierto.

   Sea $x_0 \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} \mathcal{F}_i \Rightarrow \forall\, i = 1, ..., k \;\; x_0 \in \mathcal{F}_i$.

   $$\Rightarrow \forall\, i = 1, ..., k \;\; \exists\, r_i > 0 \ni B(x_0, r_i) \subseteq \mathcal{F}_i$$

   Definimos a $r = \text{mín}(\{r_1, ..., r_k\}) > 0$

   Veamos que $B(x_0, r) \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{k} \mathcal{F}_i$

   $\forall\, i = 1, ..., k$ tenemos que $r = \text{mín}(\{r_1, ..., r_k\}) \leq r_i$

   $$\Rightarrow \forall\, i = 1, ..., k \;\; B(x_0, r) \subseteq B(x_0, r_i) \subseteq \mathcal{F}_i$$

   $A \subseteq B_1, A \subseteq B_2, ..., A \subseteq B_k \Rightarrow A \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{k} B_i$

   $$\Rightarrow B(x_0, r) \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{F}_i$$

   $\Rightarrow x_0$ es punto interior de $\bigcap\limits_{i=1}^{k} \mathcal{F}_i$.

$\therefore \bigcap\limits_{i=1}^{k} \mathcal{F}_i$ es abierto. (la intersección finita de abiertos es abierta) □

Definición 2.9 (Punto de Acumulación)**.** Sea $A \subseteq X$ donde X es un espacio métrico. Un punto $x \in X$ se llama punto de acumulación de A si toda bola abierta con centro en x tiene un punto de A distinto de x. Es decir

$$\forall\, r > 0 \Rightarrow (B(x,r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing$$

Teorema 2.4. Si x es punto de acumulación de un cojunto A es un espacio métrico (X, d) $\Rightarrow$ toda bola abierta con centro en x tiene una cantidad infinita de elementos de A

Proof. Sea $r > 0$ arbitrario y supongamos, para generar una contradicción, que $(B(x,r) \setminus \{x\}) \cap A$ es un conjunto finito, es decir, que $B(x,r) \setminus \{x\}$ tiene una cantidad finita de elementos de A

$$\Rightarrow (B(x,r) \setminus \{x\}) \cap A = \{x_1, ..., x_n\}$$

Definamos a $\delta = \min\{d(x, x_i) \mid i = 1, ..., n\} < r$. Resulta ser que

$$(B(x,\delta) \setminus \{x\}) \cap A = \varnothing$$

En efecto, si ocurriera que

$$y \in (B(x,\delta) \setminus \{x\}) \cap A$$

$\Rightarrow$ como $\delta < r$ s.t.q.

$$y \in (B(x,r) \setminus \{x\}) \cap A = \{x_1, ..., x_n\}$$

$\Rightarrow$ $\exists$ un índice $j = 1, ..., n$ tal que $y = x_j$

Luego $\delta \leqslant d(x, x_j) = d(x, y)$ y como $y \in B(x, \delta)$ también se tiene que $d(x, y) < \delta \Rightarrow\Leftarrow$

$\therefore$ $(B(x,\delta) \setminus \{x\}) \cap A = \varnothing$, lo cual contradice la hipótesis, es decir, que x es un punto de acumulación $\square$

Corolario. Si A es un subconjunto finito de un espacio métrico $\Rightarrow$ A no tiene puntos de acumulación.

Notación. Al conjunto de puntos de acumulación de A se denota como $\operatorname{der}(A)$

Observación. Diremos que un subconjunto de un espacio métrico es cerrado si contiene a todos sus puntos de acumulación

Definición 2.10 (Conjunto Cerrado). Sea (X, d) un espacio métrico. Diremos que $A \subseteq X$ es cerrado en (X, d) si $\operatorname{der}(A) \subseteq$

Observación. Si A es finito $\Rightarrow$ $\operatorname{der}(A) = \varnothing$, por lo que se sigue que A es un subcojunto cerrado

Corolario. Todo conjunto finito es un espacio métrico es un conjunto cerrado

Teorema 2.5. Sea (X, d) un espacio métrico y $F \subseteq X$. F es cerrado en X $\Leftrightarrow$ $X \setminus F$ es abierto

Proof. $\Rightarrow$ Supongamos que F es cerrado $\Rightarrow$ $\operatorname{der}(F) \subseteq F$

Si $X \setminus F = \varnothing \Rightarrow X = F$, el cual ya es abierto[a]. Así que, supongamos que $X \setminus F \neq \varnothing$ y que $x \in X \setminus F$ es abitrario

$$\begin{aligned} &\Rightarrow x \notin \operatorname{der}(F) \Rightarrow \exists\, r > 0 \ni (B(x,r) \setminus \{x\}) \cap F = \varnothing \\ &\Rightarrow B(x,r) \cap F = \varnothing \end{aligned}$$

$\therefore B(x,r) \subseteq X \setminus F \Rightarrow X \setminus F$ es abierto

Supongamos ahora que $X \setminus F$ es abierto. Si $\operatorname{der}(F) = \varnothing \Rightarrow F$ es cerrado. Supongamos que $\operatorname{der}(F) \neq \varnothing$. Sea $y \in \operatorname{der}(F)$ es cualquier elemento. Supongamos, para generar una contradicción, que $y \notin F \Rightarrow y \in X \setminus F$, que por hipótesis es abierto

$$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 \ni B(y,\varepsilon) \subseteq X \setminus F$$

Esto implica

$$(B(y,\varepsilon) \setminus \{y\}) \subseteq X \setminus F \Rightarrow\Leftarrow$$

Esto contradice que $y \in \operatorname{der}(F) \Rightarrow y \in F \therefore \operatorname{der}(F) \subseteq F$ □

[a] Este hecho se demostrará en el Corolario inmediato a este Teorema

Corolario.

1. $\varnothing$, X son cerrados.
2. Si $\{\mathcal{F}_\alpha \mid \alpha \in J\}$ es una familia de conjuntos cerrados $\Rightarrow \bigcap\limits_{\alpha \in J} \mathcal{F}_\alpha$ es cerrado.
3. Si $\{\mathcal{F}_i \mid i = 1, ..., k\}$ es una familia finita de conjuntos cerrados $\Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{k} \mathcal{F}_i$ es un conjunto cerrado.

Proof.

1. $\varnothing$ es cerrado, ya que el complemento $X \setminus \varnothing = X$ es abierto.

   X es cerrado ya que $X \setminus X = \varnothing$ es abierto.

2. Sea $\{\mathcal{F}_\alpha \mid \alpha \in J\}$ una familia arbitraria de conjuntos cerrados. Sea $\{\mathcal{A}_\alpha \mid \alpha \in J\}$ una familia arbitraria de conjuntos abiertod. Veamos que $\bigcap\limits_{i=1}^{k} \mathcal{F}_i$ es cerrado.

   Por el Teorema 2.3 sabemos que la unión arbitraria de abiertos es abierta.

   Por definición $\bigcup\limits_{\alpha \in J} \mathcal{A}_\alpha$ es abierto $\Leftrightarrow X \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in J} \mathcal{A}_\alpha$ es cerrado.

   Por leyes de De Morgan s.t.q $A^c \cup X = A \cap X$. Se sigue que:

$$X \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in J} \mathcal{A}_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in J} (X \setminus \mathcal{A}_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in J} \mathcal{F}_\alpha$$

   $\therefore \bigcap_{\alpha \in J} \mathcal{F}_\alpha$ es cerrrado, porque es el complemento de la unión arbitraria de abiertos, que sabemos que es abierto.

3. Sea $\{\mathcal{F}_i \mid i = 1, ..., k\}$ una familia finita de conjuntos cerrados. Veamos que $\bigcup\limits_{i=1}^{k} \mathcal{F}_i$ es cerrado.

Por definición $\bigcup\limits_{i=1}^{k} \mathcal{F}_i$ es cerrado $\Leftrightarrow X \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k} \mathcal{F}_i$ es abierto.

Por leyes de De Morgan s.t.q $A^c \cup X = A \cap X$. Se sigue que:

$$X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{F}_i \right) = \bigcap_{i=1}^{k} (X \setminus \mathcal{F}_i)$$

Por otra parte, por hipótesis $\forall\, 1, ..., k \;\; X \setminus \mathcal{F}_i$ es abierto.

$\Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{k} (X \setminus \mathcal{F}_i)$ es abierto.

$\Rightarrow X \setminus \left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} \mathcal{F}_i \right)$ es abierto.

$\therefore \bigcup\limits_{i=1}^{k} \mathcal{F}_i$ es cerrado.

$\square$

Teorema 2.6. En todo espacio métrico (X, d) cualquier bola cerrada $\overline{B}(x, r)$ es siempre un conjunto cerrado.

Proof. Veamos que $X \setminus \overline{B}(x, r)$ es un subconjunto abierto de (X, d). Sea $y \in X \setminus \overline{B}(x, r)$ arbitrario $\Rightarrow d(x, y) > r$.

Defina a $s = d(x, y) - r$. Note que $s > 0$. Además $B(y, s) \subseteq X \setminus \overline{B}(x, r)$

Nuevamente, sea $z \in B(y, s)$ un elemento cualquiera $\Rightarrow$

$$d(z, y) < s = d(x, y) - r \leqslant d(xz) + d(z, y) - r$$

Consecuentemente

$$r < d(x, z) + d(z, y) - d(z, y) = d(x, z)$$

Así, $z \in X \setminus \overline{B}(x, r) \therefore \overline{B}(y, s) \subseteq X \setminus \overline{B}(x, r)$ $\square$

Observación. Si d es la métrica discreta en un conjunto no vacío $X \Rightarrow$

$$B(x, r) = \begin{cases} \{x\} & \text{si } 0 < r \leqslant 1 \\ X & \text{si } r > 1 \end{cases}$$

$\forall\, x \in X$, y $\forall\, r \in \mathbb{R}^+$

Si $0 < r \leqslant 1$, y sea $y \in B(x, r)$. Resulta que $y = x$, puesto que si $y \neq x \Rightarrow d(x, y) = 1$ lo que implica $1 < r$, lo cual es imposible.

Si $r > 1$ y $y \in X$ es un elemento cualquiera $\Rightarrow d(y, x) \leqslant 1 < r$. Luego $y \in B(x, r)$

Note también que si $x \in X$ y $r \in \mathbb{R}^+$ arbitrarios $\Rightarrow y \in B(x, r) \Rightarrow$

$$\overline{B}(x,r) = \begin{cases} \{x\} & \text{si } x0 < r < 1 \\ X & \text{si } r \geqslant 1 \end{cases}$$

Todo subconjunto $A \subseteq X$ es un subconjunto cerrado. En efecto, sea $A \subseteq X$ arbitrario. Sea $x \in X$ cualquier momento. Consideremos a $B\left(x, \frac{1}{2}\right)$. Note que

$$\left(B\left(x, \frac{1}{2}\right) \setminus \{x\}\right) \cap A = (\{x\} \setminus \{x\}) = \varnothing \cap A = \varnothing.$$

$\therefore x$ no es punto de acumulacion de A. Además, $\operatorname{der}(A) = \varnothing$. Como $\varnothing \subseteq A$, s.t.q. $\operatorname{der}(A) \subseteq A$ $\therefore A$ es cerrado en (X,d)

Ahora, todo subconjunto de $B \subseteq X$ es abierto en (X,d). Recordemos que $X \setminus B$ es cerrado $\Leftrightarrow B$ es abierto. Pero $X \setminus B$ es un subconjunto de X, por lo que es cerrado y B es abierto.

Definición 2.11 (Imagen Inversa)**.** La imagen inversa de $B \subseteq Y$ bajo la función $f : X \to Y$ es el conjunto

$$f^{\leftarrow}[B] := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

Teorema 2.7. Sean (X,d) y (Y,ρ) espacios métricos y $f : X \to X$ una función. Son equivalentes

1. f es continua
2. $\forall\, W$ abierto en $(Y,\rho) \Rightarrow f^{\leftarrow}[W]$ es abierto en (X,d)
3. $\forall\, \mathcal{F}$ cerrado en $(Y,\rho) \Rightarrow f^{\leftarrow}[\mathcal{F}]$ es cerrado en (X,d)

Proof. 1. $\Rightarrow$ 2.

Sea W un abierto cualquiera de Y. Sea $x \in f^{\leftarrow}[W]$. Como W es abierto, $\exists\, \varepsilon > 0 \ni B_\rho(f(x),\varepsilon) \subseteq W$

Como supusimos f es continua en x

$$\exists\, \delta > 0 \ni \forall\, z \in X \Rightarrow d(x,z) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(z)) < \varepsilon$$

Observe que $B_d(x,\delta) \subseteq f^{\leftarrow}[W]$. Tomemos $z \in B(x,\delta)$, lo que implica

$$f(z) \in B_\rho(f(x),\varepsilon) \subseteq W$$

$\therefore z \in f^{\leftarrow}[W]$

2. $\Rightarrow$ 3.

Supongamos que $F \subseteq Y$ es cualquier cerrado $\Rightarrow Y \setminus F$ es abierto en Y. Por el inciso anterior s.t.q. $f^{\leftarrow}[Y \setminus F]$ es abierto en en X. Además, notemos que

$$f^{\leftarrow}[Y \setminus F] = f^{\leftarrow}[Y] \setminus f^{\leftarrow}[F] = X \setminus f^{\leftarrow}[F]$$

Pero este es abierto, por lo que su complemento $f^{\leftarrow}[F]$ es cerrado en X

3. $\Rightarrow$ 1.

Supongamos que $x \in X$ es cualquier elemento y que $\varepsilon > 0$ es arbitrario. Consideremos a $B(f(x), \varepsilon)$, que es un abierto de Y, como todas las bolas son abiertas, por lo que

$$Y \setminus B(f(x), \varepsilon)$$

es un cerrado de Y. Por el inciso anterior s.t.q.

$$f^{\leftarrow}[Y \setminus B(f(x), \varepsilon)]$$

es cerrado en X y además

$$f^{\leftarrow}[Y \setminus B(f(x), \varepsilon)] = f^{\leftarrow}[Y] \setminus f^{\leftarrow}[B(f(x), \varepsilon)] = X \setminus f^{\leftarrow}[B(f(x), \varepsilon)]$$

$\Rightarrow f^{\leftarrow}[B(f(x), \varepsilon)]$ es abierto en X. Además $x \in f^{\leftarrow}[B(f(x), \varepsilon)]$, y por ser abierto $\exists\, \delta > 0 \ni$

$$B(x, \delta) \subseteq f^{\leftarrow}[B(f(x), \varepsilon)]$$

Resulta que

$$f[B(x, \delta)] \subseteq f^{\leftarrow}[B(f(x), \varepsilon)]$$

En efecto, supongamos que $z \in f[B(x, \delta)]$ es arbitrario

$$\Rightarrow\ \exists\, y \in B(x, \delta) \ni z = f(y) \Rightarrow y \in f^{\leftarrow}[B(f(x), \varepsilon)]$$

Luego $f(y) \in B(f(x), \varepsilon)$ pero $f(y) = z$, lo que prueba la contención

$$f[B(x, \delta)] \subseteq f^{\leftarrow}[B(f(x), \varepsilon)]$$

$\Rightarrow f$ es continua en x.

Como fue arbitrario, s.t.q. f es continua en todo X. $\square$

Observación. Para que f sea continua en $x \in X$ s.t.q. probar

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 \text{ tal que si} d_X(x, z) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(z)) < \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow z \in B(x, \delta) \Rightarrow f(z) \in B(f(x), \varepsilon) \Leftrightarrow f[B(x, \delta)] \subseteq B(f(x), \varepsilon)$$

Si $a \in f[B(x, \delta)] \Rightarrow\ \exists\, b \in B(x, \delta) \ni f(b) = a \Rightarrow a = f(b) \in B(f(x), \varepsilon)$

Ejemplo 2.7. Las funciones constantes son continuas. Sean X y Y dos espacios métricos, y $y_0 \in Y$. Definimos a $f : X \to Y$ como

$$\forall\, x \in X \Rightarrow f(x) = y_0$$

si $U \subseteq$ es cualquier abierto $\Rightarrow$

$$f^{\leftarrow}[U] = \begin{cases} X & \text{si } y_0 \in U \\ \varnothing & \text{si } y_0 \notin U \end{cases}$$

Por 2. de Teorema 2.7 como en ambos casos $f^{\leftarrow}[U]$ es abierto en $X \Rightarrow f$ es continua.

Ejemplo 2.8. La función identidad es continua. Si (X, d) es un espacio métrico y $\mathrm{id}_X : (X, d) \to (X, d)$ definida como

$$f(x) = x \,\forall\, x \in X \Rightarrow$$

Si $U \subseteq X$ es cualquier abierto $\Rightarrow f^{\leftarrow}[U] = \mathrm{id}_X^{\leftarrow}[U] = U$ es abierto. $\therefore f$ es continua

Ejemplo 2.9. Toda función con dominio en un espacio discreto es una función continua. Sean (X, d) y (Y, ρ) espacios métricos con d la métrica discreta y $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ cualquier función.

Se probó en la Observación inmediata al Teorema 2.6 que para un conjunto con la métrica discreta (espacio discreto), todo subconjunto del espacio es abierto y cerrado.

Si $V \subseteq Y$ es abierto $f^{\leftarrow}[V] \subseteq X$ es abierto en X por ser discrerto. Esto por el simple hecho de ser un subconjunto del espacio. $\therefore f$ es continua.

Teorema 2.8. Sean X, Y, Z espacios métricos y las funciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ continuas $\Rightarrow g \circ f : X \to Z$ es continua.

Proof. Usaremos 2. del Teorema 2.7. Supongamos que $U \subseteq Z$ es cualquier abierto en Z. Como g es continua $g^{\leftarrow}[U]$ es abierto en Y. Como f es continua $\Rightarrow f^{\leftarrow}[g^{\leftarrow}[U]]$ es abierto en X. Note que

$$(g \circ f)^{\leftarrow}[U] = f^{\leftarrow}[g^{\leftarrow}[U]]$$

$\therefore g \circ f$ es continua □

2.3. Convergencia de Sucesiones

Definición 2.12 (Sucesiones). Si X es un conjunto $\Rightarrow$ una sucesión de elementos de X es cualquier función

$$x : \mathbb{N} \to X$$

El valor $x(n)$ es llamado n-ésimo término de la sucesión.

Una cola de X es cualquier conjunto del tipo

$$\{x(m) \mid m \geqslant n\}$$

donde $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\} = \mathbb{Z}^+$

Notación. $(x(n))_{n\in\mathbb{N}}$ o $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o (x_n)

Definición 2.13 (Convergencia)**.** Sean (X,d) un espacio métrico arbitrario, $X:\mathbb{N}\to X$ una sucesión y $x\in X$. Diremos que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x en X si ocurre lo siguiente

$$\forall\,\varepsilon>0\,\exists\,m\in\mathbb{N}\,\forall\,n\geqslant m\Rightarrow d(x_n,x)<\varepsilon$$

Como es común, escribiremos $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

Observación. Podemos ver que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x en $(X,d)\Leftrightarrow\ \forall\,r>0\,\exists\,m\in\mathbb{N}\Rightarrow\{x_m\mid m\geqslant n\}\subseteq B(x,r)$

Teorema 2.9. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x en $(X,d)\Rightarrow(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sólo puede converger a x.

Proof. En efecto. Sean $y\in X\setminus\{x\}\Rightarrow r=d(x,y)>0$

Luego $B(x,\delta)\cap B(y,\delta)=\varnothing$ donde $\delta=\frac{r}{2}$

Supongamos, para generar una contradicción, que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x y a otro elemento y.

Debido a esto $\exists\,m,k\in\mathbb{N}\ni$

$$\{x_n\mid m\geqslant n\}\subseteq B(x,\delta)\qquad\qquad \text{y }\{x_n\mid k\geqslant n\}\subseteq B(y,\delta)$$

Note que, por lo visto en educación primaria, $x_{k+m+1}\in\{x_n\mid k\geqslant n\}\cap\{x_n\mid m\geqslant n\}$

Así $x_{k+m+1}\in B(x,\delta)\cap B(y,\delta)$, lo cual no es posible, ya que por construcción $B(x,\delta)\cap B(y,\delta)=\varnothing$

$\therefore(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ solo converge a x en (X,d) $\square$

Observación. En espacios topológicos esto no siempre pasa.

Corolario. En cursos de análisis podemos poner $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, mientras que en Topología se escribe $x\in\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

Teorema 2.10. Sea $(X,\|\cdot\|)$ un espacio normado real. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X y $x\in X$. Son equivalentes

1. La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x en (X,d) donde d es la métrica $\Rightarrow d(x,y)=\|x-y\|$
2. La sucesión $(\|x_n-x\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 en $(\mathbb{R},|\cdot|)$

Proof. 1. $\Rightarrow$ 2.

Sea $\varepsilon>0$ arbitrario. Debido a que $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

$$\forall\,\varepsilon>0\,\exists\,N\in\mathbb{N}\ni d(x_n,x)=\|x_n-x\|<\varepsilon\,\forall\,n\geqslant N$$

Como $\|x_n - x\| = \big|\|x_n - x\| - 0\big|$, podemos concluir que

$$\forall\, n \geqslant N \Rightarrow \big|\|x_n - x\| - 0\big| < \varepsilon$$

Pero hemos probado

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N} \ni \big|\|x_n - x\| - 0\big| < \varepsilon\, \forall\, n \geqslant N$$

$\therefore (\|x_n - x\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

2. $\Rightarrow$ 1.

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Debido a que $(\|x_n - x\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N} \ni \big|\|x_n - x\| - 0\big| < \varepsilon\, \forall\, n \geqslant N$$

Como $\big|\|x_n - x\| - 0\big| = \|x_n - x\|$, podemos concluir que

$$\forall\, n \geqslant N \Rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon$$

Pero hemos probado

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N} \ni \|x_n - x\| < \varepsilon\, \forall\, n \geqslant N$$

Como $\|x_n - x\| = d(x, y)$

$\therefore$ la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x en (X, d) □

Definición 2.14. Sea (X, d) un espacio métrico cualquiera. Diremos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de X es eventualmente constante $\Leftrightarrow$ $\exists\, x_0 \in X$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que

$$x_n = x_0\, \forall\, n \geqslant m$$

x_0 se llama constante de enventualidad de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cuando $m = 1$, la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es llamada sucesión constante de valor x_0

Teorema 2.11. En cualquier espacio métrico, cualquier sucesión eventualmente constante converge.

Proof. Sean (X, d) un espacio métrico y supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión eventualmente constante. Sean $x_0 \in X$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que

$$x_n = x_0\, \forall\, n \geqslant N$$

Suponga un $\varepsilon > 0$ arbitrario $\Rightarrow$

$$d(x_n, x_0) = d(x_0, x_0) = 0 < \varepsilon\, \forall\, n \geqslant N$$

$\therefore (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x_0. □

Ejemplo 2.10. Sea $X \neq \varnothing$ y d la métrica discreta. Las siguientes afirmaciones son equivalentes para cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de X.

1. La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.
2. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es eventualmente constante

Es decir, con la métrica discreta, las únicas sucesiones que convergen son las eventualmente constantes.

Proof. 2. $\Rightarrow$ 1. Inmediato por el teorema Teorema 2.11

1. $\Rightarrow$ 2. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en (X, d) $\exists\, x \in X$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Entonces, sea $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow\ \exists\, N \in \mathbb{N} \ni$ si $n \geqslant N \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon = \frac{1}{2}$ Por el espacio métrico $x = x_n$ necesariamente, por definición de métrica discreta. $\square$

Ejemplo 2.11. En $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ la sucesión $x_n = \frac{1}{n^p}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ y $p \in \mathbb{Z}^+$ f.p.a es convergente y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

Proof. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario, como $\mathbb{N}$ no es un conjunto acotado superiormente en $\mathbb{R}$, podemos fijar $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > \frac{1}{\sqrt[p]{\varepsilon}} \Rightarrow N^p > \frac{1}{\varepsilon}$ y en consecuencia que $\frac{1}{N^p} < \varepsilon$

Si $m \geqslant N \Rightarrow$

$$|x_m - 0| = |x_m| = \left|\frac{1}{m^p}\right| \leqslant \frac{1}{N^p} < \varepsilon$$

$\therefore (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ $\square$

Teorema 2.12. Sea X un espacio normado. Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x \Leftrightarrow$ la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $y_n = x_n - x$ converge a 0

Proof. $\Rightarrow$ Sea $\varepsilon > 0$ cualquier elemento. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x, para ε

$$\exists\, N \in \mathbb{N} \ni \text{ si } n \geqslant N \Rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon$$

Note que lo anterior implica que $\forall\, n \geqslant N$

$$\|x_n - x\| = \|y_n\| = \|y_n - 0\| < \varepsilon$$

$\therefore (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0.

$\Leftarrow$ La suficiencia es análoga $\square$

Ejemplo 2.12. Sea $X = (C([0,1]), \mathbb{R})$ con la norma $\|f\|_1$

Recordemos que $(C([0,1]), \mathbb{R}) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua } \}$. Sabemos que $C([0,1], \mathbb{R})$ es un $\mathbb{R}$-ésimo espacio vectorial con las operaciones

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)\ \forall\, x \in [0,1] \qquad \text{y} \qquad (\lambda f)(x))\lambda \cdot f(x)\ \forall\, x \in [0,1]$$

En $(C([0,1]), \mathbb{R})$ definimos a la norma $\|\cdot\|_p$ para $p \in [1, \infty)$

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 \left|f(t)\right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

Para $p = \infty$

$$\|f\|_\infty = \sup\{\left|f(x)\right| \mid x \in [0,1]\} = \text{máx}\{\left|f(x)\right| \mid x \in [0,1]\}$$

Definimos a la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$f_n(t) = \begin{cases} -nt+1 & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

Veamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a la función constante 0.

Proof. Note que $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 \left|f(t)\right| dt = \int_0^1 f(t)dt$$

$$= \int_0^{\frac{1}{n}} f(t)dt + \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)dt = \int_0^{\frac{1}{n}} f(t)dt + 0 = \frac{1}{2n}$$

Si $\varepsilon > 0$ es arbitrario $\Rightarrow$ podemos fijar $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2n} < \varepsilon \Rightarrow \forall\, m \geqslant N$ s.t.q.

$$\|f_m - 0\| = \|f_m\| = \frac{1}{2m} \leqslant \frac{1}{2n} < \varepsilon$$

$\therefore (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a la función constante 0. □

Observación. El ejemplo anterior nos es útil para hacer notar que la convergencia o no convergencia de una sucesión depende fuertemente de la métrica que estamos utilizando.

En $(C([0,1]),\mathbb{R})$ con $\|\cdot\|_\infty$ la sucesión definida anteriormente no converge.

Si existiera $f \in (C([a,b]),\mathbb{R})$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f \Rightarrow$ para $0 < x \leqslant 1$ y $n \in \mathbb{N}$ s.t.q.

$$\left|f(x) - f_n(x)\right| \leqslant \|f - f_n\|_\infty = \text{máx}\{\left|f(t) - f_n(t)\right| \mid t \in [0,1]\}$$

Es decir que $\forall x \in [0,1]$ la sucesión $f_n(x)$ convergería a $f(x)$. Esto implica $f(x) = 0$

Pero para $x = 0 \Rightarrow f(x) = 1$

Teorema 2.13. Sea $p \in [1,\infty)$. El espacio $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$ donde $\|f\|_p = \left(\int_a^b \left|f(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ es un espacio normado sobre el campo de los números reales con las operaciones de suma y multiplicación por números reales usuales.

Lema 2.2. $\forall\, f,g \in C([a,b])$ s.t.q.

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Proof. Sean $p, q \in (1, \infty)$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Veamos que

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$$

Supongamos $f, g \neq 0. \forall\, x \in [a, b]$ definimos a

$$\alpha = \frac{|f(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}} = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \qquad \text{y} \qquad \beta = \frac{|g(x)|}{\left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}} = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$$

Por el Lema 1.1

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Si la aplicamos a α y β s.t.q.

$$\alpha \cdot \beta \leqslant \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\right)^p \cdot \frac{1}{p} + \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}\right)^q \cdot \frac{1}{q}$$

Integramos de ambos lados

$$\frac{\int_a^b |f(x)g(x)dx|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leqslant \frac{\int_a^b |f(x)|^p dx}{p\|f\|_p^p} + \frac{\int_a^b |g(x)|^q dx}{q\|g\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\int_a^b |f(x)g(x)dx| = \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

□

Lema 2.3. Sea $p \in [1, \infty]$. Se cumple que $\forall\, f, g \in C([a, b])$

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$$

Proof. Supongamos que $f \neq g$ y que $p \in (1, \infty)$. Definamos $h(x) = \Big(|f(x)| - |g(x)|\Big)^{p-1}$. Aplicamos Hölder a f, h y g, h. Notando que $q = \frac{p}{p-1}$

$$\int_a^b |f(x)|\Big(|f(x)| - |g(x)|\Big)^{p-1} dx \leqslant \|f\|_p \cdot \left(\int_a^b \Big(|f(x)| + |g(x)|\Big)^{p-1 \cdot \frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\int_a^b |g(x)|\Big(|f(x)| - |g(x)|\Big)^{p-1} dx \leqslant \|g\|_p \cdot \left(\int_a^b \Big(|f(x)| + |g(x)|\Big)^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

Sumando las desigualdades

$$\int_a^b \Big(|f(x)| - |g(x)|\Big)^p dx \leqslant \Big(\|f\|_p + \|g\|_q\Big) \left(\int_a^b \Big(|f(x)| + |g(x)|\Big)^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

Ahora como $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$

$$\frac{\int_a^b \left(\left|f(x)\right| - \left|g(x)\right|\right)^p dx}{\left(\int_a^b \left(\left|f(x)\right| + \left|g(x)\right|\right)^p\right)^{\frac{1}{q}}} = \left(\int_a^b \left(\left|f(x)\right| + \left|g(x)\right|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Notemos que

$$\|f+g\|_p = \left(\int_a^b (\left|f(x)+g(x)\right|)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b \left(\left|f(x)\right| + \left|g(x)\right|\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|f\|_p + \|g\|_q$$

□

Proof. Podemos demostrar ahora el Teorema 2.13.

Hemos probado la desigualdad del triangulo en el Lema 2.3. Que es no negativa es trivial, y saca escalares en valor absoluto por linealidad de la integral. Solo falta ver una propiedad. Como $\left|f(x)\right|^p$ es continua y no negativa, notemos que

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b \left|f(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = 0 \Leftrightarrow \left|f(x)\right|^p = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

$\therefore \|f\|_p$ es norma. □

Corolario. El espacio $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ donde $\|f\|_\infty = \sup\{\left|f(x)\right| \mid x \in [a,b]\}$ es un espacio normado. La prueba es análoga a la del Teorema 1.3.

Ejemplo 2.13. Si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $C([a,b])$ que converge a $g \in C([a,b])$ en $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} g_n = g$ en $(C([a,b]), \|\cdot\|_p)\ \forall\, p \in [1,\infty)$

Proof. Sea $r > 0$. Supongamos que $p \in [1,\infty)$ es f.p.a. Definimos a $\varepsilon = \frac{r}{2(b-a)^{\frac{1}{p}}} > 0$. Debido a que $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g$ en $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ para la ε dada

$\exists\, N \in \mathbb{N} \ni \forall\, n \geqslant N \Rightarrow \|g_n - g\|_\infty < \varepsilon$

Resulta que $\forall\, n \geqslant N \Rightarrow \|g_n - g\|_p < r$. Veamos que es cierto. Suponga que $n \in \mathbb{N}$ es tal que $n \geqslant N$

$$\|g_n - g\|_p = \left(\int_a^b \left|g_n(x) - g(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b \|g_n - g\|_\infty{}^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Como la integral es un supremo podemos decir que

$$\leqslant \left(\int_a^b \varepsilon^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \varepsilon(b-a)^{\frac{1}{p}} = \frac{r}{2(b-a)^{\frac{1}{p}}} \cdot (b-a)^{\frac{1}{p}} = \frac{r}{2} < r$$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} g_n = g$ en $(C([a,b]), \|\cdot\|_p)$ □

Ejemplo 2.14. El recíproco del ejemplo anterior no siempre es cierto.

Consideremos a las funciones $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ con $n \in \mathbb{Z}$ definidas como

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - \frac{n(x-a)}{b-a} & \text{si } x \in [a, a + \frac{b-a}{n}] \\ 0 & \text{si } x \in [a + \frac{b-a}{n}], b \end{cases}$$

donde definimos a $[b,b] = \{b\}$. Podemos ver que $f_n \in C([a,b]) \, \forall \, n \in \mathbb{Z}^+$

Veamos que las siguientes proposiciones son verdaderas.

1. La sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a la función constante 0 en $(C([a,b]), \|\cdot\|_1)$
2. La sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a ninguna función en $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

Proof. Veamos que son ciertos los dos incisos.

1. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Como $\mathbb{Z}^+$ no está acotado superiormente en $\mathbb{R}$, $\exists \, N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\frac{b-a}{2\varepsilon} < N$

   Resulta que

   $$\forall \, n \geqslant N \Rightarrow \|f_n - 0\|_1 < \varepsilon$$

   Efectivamente, suponga que $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant N$

   $$\Rightarrow \frac{b-a}{2n} \leqslant \frac{b-a}{2N} < \varepsilon$$

   Así

   $$\|f_n - 0\|_1 = \|f_n\|_1 = \frac{b-a}{2n} < \varepsilon$$

   $\therefore \lim_{n\to\infty} f_n = 0$ en $(C([a,b]), \|\cdot\|_1)$

2. Supongamos que existe $f \in (C([a,b])$ de modo que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ en $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$

   Resulta que $\forall \, \in [a,b] \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

   En efecto, sea $x \in [a,b]$ arbitrario. Supongamos que $\varepsilon > 0$ también es arbitrario. Como $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ en $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ para la $\varepsilon > 0$

   $$\exists \, m \in \mathbb{N} \ni \forall \, n \geqslant m \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$$

   Tenemos que $\left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \|f_n - f\|_\infty \, \forall \, n \geqslant m$

   $$\forall \, n \geqslant m \Rightarrow \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$$

   $\therefore \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

   Utilicemos este último resultado para deducir la regla de asociación de $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

Sea $x \in [a, b]$ cualquiera $\Rightarrow x - a > 0$. Luego $\frac{b-a}{x-a} > 0$. Como este conjunto no es acotado superiormente en $\mathbb{R} \, \exists \, M \in \mathbb{N} \ni \frac{b-a}{x-a} < m$

Entonces $\frac{b-a}{m} < x - a$. Consecuentemene

$$\forall \, n \geqslant m \Rightarrow a + \frac{b-a}{n} < x$$

Aplicando las definiciones de cada f_n s.t.q. $\forall \, n \geqslant m f_n(x) = 0$

$\therefore f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$

En el caso de $x = a$, sabemos que $f_n(a) = 1 \, \forall \, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f_n(a) = 1$

La función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tiene la siguiente regla de asociación.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = a \\ 0 & \text{si } x \in (a, b] \end{cases}$$

lo cual es imposible porque f no es continua por la derecha en $x = a$, puesto que

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = 0 \neq 1 = f(a)$$

$\therefore (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no converge en $(C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$

□

Teorema 2.14. Sean (X, d) un espacio métrico u $A \subseteq X \Rightarrow$

1. $x \in \text{der}(A)$
2. $\exists \, (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de A, que no es eventualmente constante y que converge a X.

Proof. 1. $\Rightarrow$ 2.

Como $x \in \text{der}(A) \Rightarrow \ \forall \, n \in \mathbb{Z}^+$

$$\left(B\left(x, \frac{1}{n}\right) \setminus \{x\} \right) \cap A \neq \varnothing$$

$\forall \, n \in \mathbb{N}$ fijemos un elemento

$$x_n \in \left(B\left(x, \frac{1}{n}\right) \setminus \{x\} \right) \cap A$$

Es cierto que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de A. Probemos que $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ en (X, d). Sea $\varepsilon > 0$ cualquier elemento. Como $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente, para $\frac{1}{\varepsilon} \, \exists \, m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{\varepsilon} < m$

Así entonces

$$\forall\, n \geqslant m \Rightarrow \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{m} < \varepsilon \Rightarrow \forall\, n \geqslant m \Rightarrow d(x_n, x) \leqslant \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ en (X, d).

Note que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es eventualmente constante. Si existiera $x_n = x$, pero tomamos a x_n en el derivado, que es el conjunto de los puntos de acumulación, que considera a la bola sin el centro. Por lo tanto, x_n no puede ser el centro.

2. $\Rightarrow$ 1.

Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de A, que no es eventualmente constante, u que onverge a x.

Sea $r \in \mathbb{R}^+$ arbitrario. Como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ en (X, d), para la $r \in \mathbb{R}^+$ $\exists\, m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\{x_n \mid n \geqslant m\} \subseteq B(x, r)$$

Observe que como x_n no es eventualmente constante, no puede ocurrir que $x_n = x\, \forall\, n \geqslant m$

Si lo fuera, sería eventualmente constante. Entonces $\exists\, n \geqslant m$ tal que $x_n \neq x$

Luego $x_n \in \left(B\left(x, \frac{1}{n}\right) \setminus \{x\}\right) \cap A$

Está en A porque lo tomamos de elementos de A

$\therefore \left(B\left(x, \frac{1}{n}\right) \setminus \{x\}\right) \cap A \neq \varnothing \Rightarrow x \in \operatorname{der}(A)$ □

Definición 2.15 (Continuidad por Sucesiones). Diremos que una función $f : X \to Y$ entre espacios métricos es continua por sucesiones $\Leftrightarrow$ para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

Teorema 2.15. Sea $f : X \to Y$ una funcion donde (X, d) y (Y, ρ) son espacios métricos $\Rightarrow$ son equivalentes

1. f es continua en toda $x \in X$
2. f es continua por sucesiones

Proof. 1. $\Rightarrow$ 2.

Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ en (X, d)

Veamos que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ en (X, d) $\exists\, m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall\, n \geqslant m \Rightarrow x_n \in B(x, r)$$

Veamos que $\forall\, n \geqslant m \Rightarrow f(x_n) \in B(f(x), r)$

$$\exists\, \delta > 0 \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < r$$

Como $x_n \in B(x,\delta) \Rightarrow f(x_n) \in B(f(x), r)$

2. $\Rightarrow$ 1.

Supongamos que f es continua por sucesiones. Para verificar que f es continua supongamos que $F \subseteq Y$ es cualquier subconjunto cerrado de X. Veamos que $f^{\leftarrow}[F]$ es cerrado en X. Supongamos, para generar una contradicción, que $f^{\leftarrow}[F]$ no es cerrado en X. Es decir

$$\mathrm{der}(f^{\leftarrow}[F]) \nsubseteq f^{\leftarrow}[F]$$

Entonces, podemos fijar $x \in \mathrm{der}(f^{\leftarrow}[F])$ tal que $x \in f^{\leftarrow}[F]$. Por el Teorema 2.14 existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no trivial (no eventualmente constante) de elementos de $f^{\leftarrow}[F]$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$

Como f es continua por sucesiones $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$

Además $\forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x_n) \in F$, es decir $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de F que converge a $f(x)$.

$\therefore f(x) \in \mathrm{der}(F) \subseteq F$, porque F es cerrado. Pero esto contradice que $x \notin f^{\leftarrow}[F]$

$\therefore \mathrm{der}(f^{\leftarrow}[F]) \subseteq f^{\leftarrow}[F] \Rightarrow f^{\leftarrow}[F]$ es cerrado en X y por lo tanto f es continua $\square$

Capítulo 3

Compacidad

3.1. Conjuntos Compactos

Definición 3.1 (Cubiertas)**.** Sea X un espacio métrico y $K \subseteq X$. Una familia $\mathscr{U}$ de subconjuntos de X ($\mathscr{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$) es cubierta de K si

$$K \subseteq \cup \mathscr{U}$$

donde

$$\left(\cup \mathscr{U} = \bigcup_{\mathcal{U} \in \mathscr{U}} \mathcal{U} = \cup \{\mathcal{U} \mid \mathcal{U} \in \mathscr{U}\} \right)$$

Si adicionalmente todos los elementos de $\mathscr{U}$ son abiertos, decimos que $\mathscr{U}$ es una cubierta abierta de K

Definición 3.2 (Conjunto Compacto)**.** Un subconjunto K de un espacio métrico es compacto si toda cubierta abierta $\mathscr{U}$ de K contiene una subcubierta finita V de K.

Es decir, si $\forall$ familia de abiertos $\mathscr{U}$ tal que $K \subseteq \cup \mathscr{U} \Rightarrow \exists\, v \subseteq \mathscr{U}$ finito ($|V| < \aleph_0$) tal que $K \subseteq \cup V$

Teorema 3.1. Todo conjunto finito es compacto.

Proof. Si $K = \{x_1, ..., x_n\}$ y $\mathscr{U}$ es cualquier cubierta de K $\Rightarrow$ por ser cubierta, s.t.q. $\forall$ índice $i = \{1, ..., n\}$ $\exists\, U_i \in \mathscr{U}$ tal que $x_i \in U_i \Rightarrow V = \{u_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} \subseteq \mathscr{U}$

Note que V es finito y $K \subseteq \cup V$

$\therefore K$ es compacto $\square$

Ejemplo 3.1. Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en un espacio métrico X que converge a un punto $x \in X$. El conjunto $K = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ es compacto en X.

Proof. Supongamos que $\mathscr{U}$ es cualquier cubierta abirta de K. Para el elemento x, $\exists\, V \in \mathscr{U}$ tal que $x \in V$. Como V es abierto $\exists\, \varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq V$. Debido a que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, m > N$ se cumple que $d(x_m, x) < \varepsilon$, es decir, que $\forall\, m > N$ s.t.q. $x_m \in B(x, \varepsilon) \subseteq V$. Además, $\forall\, i = \{1, ..., n\}$, fijamos un elemento $u_i \in \mathscr{U}$ tal que $x_i \in u_i \Rightarrow W = \{u_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} \cup \{V\}$ es finito, $W \subseteq \mathscr{U}$ y se cumple que $K \subseteq \cup W = \bigcup_{i=1}^{N} u_i \cup V$ $\square$

Ejemplo 3.2. En $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ cualquier intervalo cerrado $[a, b]$ con $a < b$ es compacto.

Proof. Supongamos que $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ arbitrarios y que $\mathscr{U}$ es cualquier cubierta abierta del intervalo $[a, b]$. Consideremos e siguiente conjunto:

$$A = \{x \in [a, b] \mid [a, x] \text{ puede ser cubierta con una cantidad finita de elementos de } \mathscr{U}\}$$

Veamos que $A \neq \varnothing$

Como $\mathscr{U}$ es cubierta $\exists\, u_0 \in \mathscr{U}$ tal que $a \in u_0$. Luego, como u_0 es abierto $\exists\, r > 0$ tal que $B(a, r) = (a - r, a + r) \subseteq \mathscr{U}$. Podemos elegir un elemento z tal que $z \in (a, a + r) \cap [a, b] \Rightarrow z \in A$ porque $[a, x] \subseteq u_0$. De hecho, $a < z < b$.

Observe ahora que A está acotado superiormente por b. Por el axioma del supremo $\exists\, \alpha = \sup(A) \Rightarrow \alpha \leqslant b$.

Veamos que $\alpha = b$. Supongamos que, para generar una contradicción, que $a < b \Rightarrow a < \alpha < b$. Como $\mathscr{U}$ es cubierta abierta $\exists\, W \in \mathscr{U}$ tal que $\alpha \in W$. Debido a que W es abierto $\exists\, \delta > 0$ tal que $(a - \delta, a + \delta) \subseteq W$. S.P.G. note que $(a - \delta, a + \delta) \subseteq [a, b]$. Como $a - \delta < \alpha = \sup(A) \Rightarrow a - \delta$ no es cota superior de A, es decir, $\exists\, x \in A$ tal que $\alpha - \delta < x \Rightarrow [a, x]$ es cubierto por una cantidad finita de elementos de $\mathscr{U}$, y supongamos que estos son $u_1, ..., u_n$

$$\Rightarrow [a, \alpha + \delta] \subseteq u_1 \cup ... \cup u_n$$

Pero esto implica que $\alpha + \delta \in A$ y $\alpha + \delta > \alpha$, lo que contradice que $\alpha = \sup(A)$

$\therefore \alpha = b$ $\square$

Teorema 3.2. Sean (X, d) un espacio métrico y $Y \subseteq K \subseteq X$ subconjuntos tales que K es compacto y Y es cerrado en $X \Rightarrow Y$ también es compacto.

Proof. Suponga que $\mathscr{U} = \{\mathcal{U}_\alpha \mid \alpha \in J\}$ es una cubierta abierta de Y con subconjuntos abiertos de X.

Como Y es cerrado $X \setminus Y$ es un conjunto abierto $\Rightarrow \mathscr{C} = \{\mathcal{U}_\alpha \mid \alpha \in J\} \cup \{X \setminus Y\}$ es una colección de subconjuntos abiertos de X tal que

$$K \subseteq \left(\bigcup_{\alpha \in J} \mathcal{U}_\alpha \right) \cup (X \setminus Y) = \cup\, \mathscr{C}$$

Debido a que K es compacto $\exists\, C_1, ..., C_n \in \mathscr{C}$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} C_i$$

Defina $V = \{C_i \mid i \in \{1, ..., n\} \text{ y } C_i \neq X \setminus Y\}$

Resulta que V es una subcolección finita de $\mathscr{U}$ tal que

$$Y \subseteq \cup\, V$$

$\therefore Y$ es compacto. $\square$

Definición 3.3 (Conjunto Acotado). Sea (X, d) un espacio métrico cualquiera. Diremos que $A \subseteq X$ es acotado en $(X, d) \Leftrightarrow \exists\, x_0 \in X$ y $r > 0$ tal que $A \subseteq B(x_0, r)$

Corolario. Toda bola abierta y cerrada son ejemplos de conjuntos acotados en cualquier espacio métrico.

Teorema 3.3. Sea (X, d) un espacio métrico. Si $K \subseteq X$ es un subconjunto compacto de $(X, d) \Rightarrow K$ es tanto cerrado como acotado.

Proof. Veamos que K es acotado. Sea $x_0 \in X$ cualquier elemento. Sabemos que

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(x_0, n)$$

Entonces $\{B(x_0, n) \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ es una cubierta abierta de K. Debido a que K es compacto, $\exists\, n_1, ..., n_m \in \mathbb{Z}^+$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B\left(x_0, n_j\right)$$

Por su compacidad, hemos extraido una subcubierta finita de la cubierta propuesta. Sea $r = n_1, ..., n_m + 1$. Claramente $r > 0\, \forall\, j \in \{1, ..., m\} \Rightarrow$

$$B(x_0, n_j) \subseteq B(x_0, r)$$

Si todos los uniendos están en $B(x_0, r) \Rightarrow$

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} B(x_0, n_j) \subseteq B(x_0, r) \Rightarrow K \subseteq B(x_0, r)$$

$\therefore K$ es acotado.

Ahora, veamos que K es cerrado en X

Supongamos $x \in X \setminus K$ f.p.a. Como $x \in X \setminus K\ \forall\, k \in K$ s.t.q. $x \neq k$. Entonces $d(x, k) > 0\, \forall\, k \in K$.

Definamos a $r_k = \frac{d(x,k)}{100^{100}}\ \forall\, k \in K$

Consideremos a la colección

$$\mathscr{U} = \{B(k, r_k) \mid k \in K\}$$

Es fácil notar que $\mathscr{U}$ es una cubierta abierta de K.

Debido a que K es compacto $\exists\, k_1, ..., k_n \in K$ tal que

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B(k_j, r_{k_j}\}$$

Definamos a $r = \text{mín}\{r_{k_1}, ..., r_{k_n}\} > 0$. Además, $x \in B(x,r) \subseteq X \setminus K$.

Recuerde que $B(x, r_{k_i}) \cap B(k_i, r_{k_i}) = \varnothing \,\forall\, i \in \{1, ..., n\}$, y como $B(x,r) \subseteq B(x, r_{k_i}) \,\forall\, i \in \{1, ..., n\}$

$$\Rightarrow B/x, r) \cap B(k_i, r_{k_i}) = \varnothing \,\forall\, i \in \{1, ..., n\}$$

Luego

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(k_i, r_{k_i}) \cap B(x,r) = \varnothing \Rightarrow K \cap B(x,r) = \varnothing \Rightarrow B(x,r) \subseteq X \setminus K$$

$\therefore$ como $X \setminus K$ es abierto $\Rightarrow K$ es cerrado $\square$

Observación. No es cierto, en general, que todo subconjunto cerrado y acotdo de un espacio métrico es compacto. Por ejemplo, en $\mathbb{R}$, considere a la métrica discreta d. En este espcio métrico el conjunto $\overline{B}(0, 20) = \mathbb{R}$ es un conjunto cerrado y acotado. Sin embargo, no es compacto, ya que la cubierta del mismo

$$\mathscr{U} = \{B\left(x, \frac{1}{2}\right) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

no tiene subcubiertas finitas. Recuerde, por la observación que le sigue al Teorema 2.6 que las bolas aquí son el espacio métrico si el radio es mayor a uno, como lo es el caso aquí.

Teorema 3.4. Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Si A es un subconjunto infinito de $X \Rightarrow A$ tiene por lo menos un punto de acumulación en X

Proof. Recordemos la Definición 2.9. Supongamos, para generar una contradicción, que A es un conjunto infinito que no tiene puntos de acumulación en $X \Rightarrow \;\forall\, x \in X \,\exists\, r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \cap A$ es finito. Si no existiera $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \cap A$ es finito $\Rightarrow \;\forall\, r > 0$ s.t.q. $B(x,r) \cap A$ es infinito $\Rightarrow (B(x,r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \varnothing$ es infinito, y así $x \in \text{der}(A)$.

Consideramos a la cubierta abierta $\mathscr{U} = \{B(x, r_x) \mid x \in X\}$ de X. Como X es compacto $\exists\, x_1, ..., x_n \in X$ tales que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_{x_i}) \Rightarrow A = A \cap X = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_{x_i})\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (B(x_i, r_{x_i}) \cap A)$$

y como $A \cap B(x_i, r_{x_i})$ es finito $\forall\, i \in \{1..., n\}$ s.t.q. $A = \bigcup_{i=1}^{n} A \cap (B(x_i, r_{x_i})$ es un conjunto finito, lo cual contradice la hipótesis de A.

$\therefore A$ tiene al menos un punto de acumulación. $\square$

Corolario. Si K es un subconjunto compacto de un espacio métrico $(X, d) \Rightarrow$ todo subconjunto infinito $A \subseteq K$ tiene por lo menos un punto de acumulación.

Proof. Como (X, d) es un espacio métrico y $K \subseteq X \Rightarrow d \restriction_K : K \times K \to [0, \infty)$ definida por la regla de correspondencia $d \restriction_K (x, y) = d(x, y) \,\forall\, (x, y) \in K \times K$ es una métrica en K. Luego, s.t.q. $(K, d \restriction_K)$ es un espacio compacto.

Por el Teorema 3.4, si $A \subseteq K$ es infinito $\Rightarrow$ A tiene al menos un punto de acumulación respecto a K en K. Es decir, $\exists\, x \in K$ tal que $x \in \operatorname{der}(A)$ en $(K, d\restriction_K)$.

Notemos que si $x \in K$ es punto de acumulación de A respecto de K, es decir, con la métrica $d\restriction_K \Rightarrow x$ es punto de acumulación de A respecto de X, es decir, con la métrica d. $\square$

Ejemplo 3.3. Demos un ejemplo de un espacio normado real, en el que no es cierto el Teorema de Heine-Börel, que definiremos más adelante, para un espacio normado cualquiera.

Sea el espacio normado real $(\ell_2, \|\cdot\|_2)$

$$\ell_2 := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\} \qquad \text{y} \qquad \left\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2}$$

Consideremos también al subconjunto

$$K = \overline{B}(0,1) = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2 \mid \left\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}} - 0\right\|_2 < 1 \right\}$$

es decir, K es la bola cerrada de centro $0 = (0_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $0_n = 0\, \forall\, n \in \mathbb{N}$, y de radio 1. Ya probamos que K es cerrado, y es acotado porque $K = \overline{B}(0,1) \subseteq B(0, 100^{100})$

Veamos que K no es un subconjunto compacto de ℓ_2

Proof. Defina $e_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\, \forall\, n \in \mathbb{N}$ como la función

$$e_n(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n \\ 0 & \text{si } i \neq n \end{cases}$$

Observe que $e_n \in \ell_2\, \forall\, n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e_n(i)^2 = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} e_n(i)^2 = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{m} e_n(i)^2 \mid m \in \mathbb{N} \right\}$$

Note que $\sum_{i=1}^{m} e_n(i)^2 = 1$ si $m \geqslant m$. Así

$$\sum_{i=1}^{\infty} e_n(i)^2 = \sup\{0, 1\} = 1$$

Note también que si $n \neq m \Rightarrow$

$$d_2(e_n, e_m) = \|e_n - e_m\|_2 = \sqrt{2}$$

Esto sucede porque

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left|e_n(i) - e_m(i)\right|^2 = \sup\left\{\sum_{i=1}^{k} \left|e_n(i) - e_m(i)\right|^2 \mid k \in \mathbb{N}\right\} = 2$$

Definamos $A = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Por lo anterior

$$A \subseteq \overline{B}(0,1)$$

y A es infinito, puesto que $f : \mathbb{N} \to A$, es decir toma $n \to e_n$ es una función inyectiva $(n \neq m \Rightarrow f(n) = e_n \neq e_m = f(m))$

Finalmente, note que A no tiene puntos de acumulación en ℓ_2. Efectivamente, sea $x \in \ell_2$ arbitrario. Defina $r = \frac{\sqrt{2}}{30}$. Resuta que $B(x,r) \cap A$ tiene a lo más un elemento de A, puesto que, si existieran e_n y $e_m \in B(x,r)$ con $n \neq m \Rightarrow \sqrt{2} = \|e_n - e_m\|_2 \leqslant \|e_n - x\|_2 + \|x - e_m\|_2 < r + r = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{30} = \frac{\sqrt{2}}{15}$

Por lo tanto, x no es punto de acumulación de A. Así, hemos probado que $K = \overline{B}(0,1)$ no puede ser compacto.

$\therefore$ el Teorema de Heine - Börel no se cumple en cualquier espacio normado. □

Corolario. El Teorema de Heine-Börel se cumple solo en espacios vectoriales reales de dimensión finita.

Teorema 3.5. Sea $f : X \to Y$ una función continua de un espacio métrico (X,d) a otro espacio métrico (Y,ρ). Si $K \subseteq X$ es un subconjunto compacto $\Rightarrow f[K] = \{f(x) \mid x \in K\}$ es un subconjunto compacto de Y

Proof. Sea $\mathscr{C} = \{v_j \mid j \in J\}$ es una cubierta abierta (de abiertos de Y) de $f[K]$

Como f es continua $\mathscr{U} = \{f^{\leftarrow}[V_j] \mid j \in J\}$ es una colección de abiertos de (X,d). Más aún:

$$K \subseteq \bigcup_{j \in J} f^{\leftarrow}[V_j]$$

Si $x \in K$ es arbitrario $\Rightarrow f(x) \in f[k]$, como $\mathscr{C}$ es cubierta abierta de $f[K] \Rightarrow \exists\, j \in J$ tal que $f(x) \in V_j \Rightarrow x \in f^{\leftarrow}[V_j]$

Debido a que K es compacto $\exists\, j_1, ..., j_n \in J$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} f^{\leftarrow}[V_j]$$

una subcubierta finita. Resulta que $f[K] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{j_i}$. En efecto, sea $y \in f[K]$ arbitrario. Luego, $\exists\, z \in K$ tal que $f(z) = y$. Como $z \in K$ y $K \subseteq f^{\leftarrow}[V_j] \Rightarrow\ \exists\, i = \{1, ..., m\}$ tal que $z \in f^{\leftarrow}[V_j] \Rightarrow y = f(z) \in v_{j_i} \Rightarrow z \in \bigcup_{i=1}^{n} V_{j_i}$

$\therefore f[K]$ es compacto. □

Corolario. Si $f : X \to \mathbb{R}$ es una función continua y (X,d) es un espacio métrico compacto $\Rightarrow f$ es una función acotada.

Proof. Por Teorema 3.5 $f[X]$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R} \Rightarrow f[X]$ es cerrado y acotado. Por ser acotado $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$ y $r > 0$ tales que

$$f[X] \subseteq (x_0 - r, x_0 + r)$$

Y notemos que

$$\big|f(x)\big| = \big|f(x) - 0\big| = \big|f(x) - x_0 + x_0\big| = \big|f(x) - x_0\big| + |x_0| < r + |x_0|$$

Así, f es una función acotada. □

3.2. Existencia de Máximo y Mínimo

Definición 3.4 (Mínimo)**.** Sea (X, d) un espacio métrico y $f : X \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que f alcanza su mínimo en X si $\exists\, x_0 \in X$ tal que

$$f(x_0) \leqslant f(x)$$

El punto x_0 se denota como mínimo de f en X

Definición 3.5 (Máximo)**.** Sea (X, d) un espacio métrico y $f : X \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que f alcanza su máximo en X si $\exists\, x_1 \in X$ tal que

$$f(x) \leqslant f(x_1)$$

El punto x_1 se denota como máximo de f en X

Teorema 3.6. Si $f : X \to \mathbb{R}$ es una función continua en un espacio métrico compacto $\Rightarrow f$ es acotada, y también, f alcanza su máximo y mínimo, es decir $\exists\, x_0, x_1 \in X$ tales que $f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant f(x_1)$

Proof. Por el corolario anterior, f es una función acotada, es decir, $\exists\, M > 0$ tal que

$$\forall\, x \in X \Rightarrow \big|f(x)\big| < M = -M < f(x) < M$$

Note ahora que el conjunto $f[X] = \{f(x) \mid x \in X\}$ es no vacío, y es tanto acotado superiormente como inferiormente en $\mathbb{R}$. Por ejemplo, M es cota superior de $f[X]$, mientras que $-M$ es cota inferior. Consecuentemente $\exists\, \alpha = \text{ínf}\{f[X]\}$ y $\beta = \sup\{f[X]\}$

Veamos que $\exists\, x_1, x_1 \in X$ tales que $f(x_1) = \alpha$ y $f(x_1) = \beta$. Basta probar que $\alpha, \beta \in f[X]$

Primero, note que $\alpha \in f[X]$. Supongamos por el contrario que $\alpha \notin f[X]$. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Como $\alpha < \alpha + \varepsilon$ y $\alpha = \text{ínf}\{f[X]\} \Rightarrow \alpha + \varepsilon$ no puede ser cota inferior de $f[X]$

$\Rightarrow\ \exists\, z \in X$ tal que $f(z) < \alpha + \varepsilon$ y $\alpha < f(z) < \alpha + \varepsilon$.

No es $\alpha \leqslant f(z)$ porque $f(z) \in f[X]$ y $\alpha \notin f[X]$, por suposición por el contrario.

Así $\exists\, f(z) \in f[X] \cap ((\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \setminus \{\alpha\}) = B(\alpha, \varepsilon) \setminus \{\alpha\}$.

Esto implica que $\alpha \in \text{der}(f[X])$, lo que contradice que $\alpha \notin f[X]$.

$\therefore \alpha \in f[X]$. Como α es el ínfimo $\exists\, x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = \alpha \Rightarrow f(x_0) = \alpha \leqslant f(x)$

Ahora, supongamos de forma análoga que $\beta \notin f[X]$. Con el mismo ε, y como $\beta - \varepsilon < \beta$ y β es sup $= \{f(x)\} \Rightarrow \beta - \varepsilon$ no puede ser cota superior de $f[X]$

$\Rightarrow\ \exists\, z \in X$ tal que $\beta - \varepsilon < f(z)$ y $\beta - \varepsilon < f(z) < \beta$

No es $f(z) \leqslant \beta$ porque $f(z) \in f[X]$ y $\beta \notin f[X]$ por el supuesto.

Así $\exists\, f(z) \in f[X] \cap ((\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon) \setminus \{\beta\}) = B(\beta, \varepsilon) \setminus \{\beta\}$.

$\therefore \beta \in f[X]$. Como β es el supremo $\exists\, x_1 \in X$ tal que $f(x_1) = \beta \Rightarrow f(x_1) = \beta \geqslant f(x) \Rightarrow f(x) \leqslant f(x_1)$ □

3.3. Teorema de Heine-Börel

Notación. En todo intervalo $[a, b]$, suponemos $a < b$

Lema 3.1. Si $\{[a_m, b_m] \mid m \in \mathbb{N}\}$ es una colección de intervalos cerrados de $\mathbb{R}$ tales que

$$\forall\, m \in \mathbb{N} \Rightarrow [a_{m+1}, b_{m+1}] \subseteq [a_m, b_m] \Rightarrow \bigcap_{m=1}^{\infty} [a_m, b_m] \neq \varnothing$$

Proof. Primero notemos que el conjunto $A = \{a_m \mid m \in \mathbb{N}\} \neq \varnothing$ y que b_1 es cualquier cota superior de A.

Esto porque $\forall\, i \in \mathbb{N} \Rightarrow a_i \in [a_i, b_i] \subseteq [a_1, b_1] \leqslant b_1$

Por el axioma del supremos $\exists\, \alpha = \sup\{a_m \mid m \in \mathbb{N}\}$, y de manera análoga $\exists\, \beta = \inf\{b_m \mid m \in \mathbb{N}\}$

Resulta que $\alpha \leqslant \beta$. Si ocurriera lo contrario, es decir, que $\beta < \alpha \Rightarrow\ \exists\, m \in \mathbb{N}$ tal que $\beta < a_m$, esto porque α es el supremo, que es la mínima cota superior. Debido a que β es el ínfimo $\exists\, m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\beta_{m_0} < a_m$. Sea $t = m_0 + m_{+1}$. Resulta que

$$[a_t, b_t] \subseteq [a_{m_0}, b_{m_0}] \cap [a_m, b_m]$$

Así $a_m \leqslant a_t \leqslant b_{m_0} < a_m$, lo cual es imposible $\therefore \alpha \leqslant \beta$

Observe ahora que $\alpha \leqslant x \leqslant \beta \Rightarrow$

$$x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} [a_m, b_m]$$

Esto porque

$$a_m \leqslant \alpha = \sup\{a_m \mid m \in \mathbb{N}\} \leqslant x \leqslant \beta = \inf\{b_m \mid m \in \mathbb{N}\} \leqslant b_m$$

$\therefore \bigcap_{m=1}^{\infty} [a_m, b_m] \neq \varnothing$ □

Lema 3.2. Sea $\mathrm{I} = [a_{m+1}, b_{m+1}] \times ... \times [a_{m_n}, b_{m_n}]$

Si $\forall\, m \in \mathbb{N}$ sucede que

$$\mathrm{I}_{m+1} \subseteq \mathrm{I}_m \Rightarrow \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathrm{I} \neq \varnothing$$

Proof. Sea $i \in \{1, ..., n\}$ un elemento cualquiera. Consideremos a la colección $\{[a_{m,i}, b_{m,i}] \mid m \in \mathbb{N}\}$. Notemos que

$$\forall\, m \in \mathbb{N} \Rightarrow [a_{m+1,i}, b_{m+1,i}] \subseteq [a_{m,i}, b_{m,i}]$$

En efecto, sea $m \in \mathbb{N}$ arbitrario. Supongamos que $x \in [a_{m+1,i}, b_{m+1,i}]$ es cualquiera. Defina a

$$\vec{x} = (a_{m+1,1}, a_{m+1,2}, ..., x, a_{m+1,i+1}, a_{m+1,n})$$

Resulta que $\vec{x} \in \mathrm{I}_{m+1} = [a_{m+1,1}, b_{m+1,1}] \times ... \times [a_{m+1,n}, b_{m+1,n}]$

Como $\mathrm{I}_{m+1} \subseteq \mathrm{I}_m$ s.t.q. $\vec{x} \in \mathrm{I}_m$. Así $x \in [a_{m,i}, b_{m,i}]$.

Por el lema Lema 3.1 $\exists\, z_9 \in \bigcap_{m=1}^{\infty} [a_{m,i}, b_{m,i}]$

Defina $\vec{z} = (z_1, ..., z_n)$. Por construcción

$$\vec{z} \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathrm{I}_m \Rightarrow \vec{z} \in \mathrm{I}_m = [a_{m,1}, b_{m,1}] \times ... \times [a_{m,n}, b_{m,n}]$$

□

Lema 3.3. Si tenemos un n-cubo arbitrario $\mathrm{I} = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n] \Rightarrow \forall\, z, y \in \mathrm{I}$ s.t.q.

$$\|x - y\| \leqslant \delta = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2}$$

Lema 3.4. Sea $\mathrm{I} = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$ un n-cubo arbitrario $\Rightarrow \forall\, i \in \{1, ..., n\}$ los puntos medios

$$c_i = \frac{a_i + b_i}{2}$$

generan 2^n cubos $I_1, ..., I_{2^n}$ tales que

1. $\mathrm{I} = \bigcup\limits_{i=1}^{2^n} \mathrm{I}_i$
2. $\forall i \in \{1, ..., n\}$ y $\forall\, x, y \in \mathrm{I}_i \Rightarrow \|x - y\| \leqslant \frac{\delta}{2}$

donde $\delta = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2}$

Proof. Demostramos este teorema por innducción sobre $\mathbb{N}$

Para $n = 1$ s.t.q. $\mathrm{I} = [a_1, b_1]$ y el punto medio es

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

claramente c_1 genera a los intervalos cerrados $\mathrm{I}_1 = [a_1, c_1]$ y $\mathrm{I}_2 = [c_1, b_1]$. Es claro que $\mathrm{I} = \mathrm{I}_1 \cup \mathrm{I}_2$

Por otro lado

Si $x, y \in \mathrm{I}_1 = [a_1, c_1] \Rightarrow$

$$|x - y| \leqslant c_1 - a_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} - \frac{2 \cdot a_1}{2} = \frac{-a_1}{2} + \frac{b_1}{2} = \frac{b_1 - a_1}{2}$$

Así $|x - y| \leqslant \frac{\delta}{2}$, porque recordemos que $\delta = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2} = b_1 - a_1$ para $n = 1$

Si $x, y \in \mathrm{I}_2 = [c_1, b_1] \Rightarrow$

$$|x - y| \leqslant b_1 - c_1 = \frac{2 \cdot b_1}{2} - \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{\delta}{2}$$

$\therefore$ el resultado es cierto para $n = 1$. Se han generado $2^1 = 2$ cubos.

Supóngase que el resultado para $n \in \mathbb{N}$

Supongamos que

$$\mathrm{I} = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n] \times [a_{n+1}, b_{n+1}]$$

Consideremos ahora al n-cubo

$$\mathrm{J} = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$$

Por hipótesis de inducción, los puntos medios

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \qquad \forall\, i \in \mathbb{N}$$

generan 2^n subos $\mathrm{J}_1, \mathrm{J}_2, ..., \mathrm{J}_{2^n}$ tales que

$$\mathrm{J} = \bigcup_{j=1}^{2^n} \mathrm{J}_j \qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad \forall\, j\, \forall\, x, y \in \mathrm{J}_j \Rightarrow \|x - y\| \leqslant \frac{\delta}{2}$$

Observe que el punto medio

$$c_{n+1} = \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}$$

divide a $[a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_{n+1}, c_{n+1}] \cup [c_{n+1}, b_{n+1}]$

Se quita una dimensiòn al $n+1$-cubo para hacer un n cubo, que por inducción genera a 2^n n-cubos. Dividamos al cubo que queda en dos y vamos a multiplicarlo por los 2^n n-cubos.

Definamos

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_1 &= \mathrm{J}_1 \times [a_{n+1}, c_{n+1}] \\ \vdots\ \ \vdots &\ \ \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots \\ \mathrm{I}_{2^n} &= \mathrm{J}_{2^n} \times [a_{n+1}, c_{n+1}] \end{aligned}$$

Lo que nos da un total de 2^n cubos. Definamos también

$$\begin{aligned} \mathrm{K}_1 &= \mathrm{J}_1 \times [c_{n+1}, b_{n+1}] \\ \vdots\ \ \vdots &\ \ \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots \\ \mathrm{K}_{2^n} &= \mathrm{J}_{2^n} \times [c_{n+1}, b_{n+1}] \end{aligned}$$

Que a su vez son 2^n cubos. Tenemos $2^n + 2^n$ cubos, es decir $2^n + 2^n = 2^n(1+1) = 2^n(2) = 2^{n+1}$ tenemos 2^{n+1} $n+1$-cubos. Además

$$\mathrm{I} = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n] \times [a_{n+1}, b_{n+1}] = \mathrm{J} \times [a_{n+1}, b_{n+1}] = \left(\bigcup_{j=1}^{2^n} \mathrm{J}_j \right) \times [a_{n+1}, b_{n+1}]$$

$$= \bigcup_{j=1}^{2^n} (\mathrm{J}_j \times [a_{n+1}, b_{n+1}]) = \bigcup_{j=1}^{2^n} (\mathrm{J}_j \times [a_{n+1}, c_{n+1}]) \cup \bigcup_{j=1}^{2^n} (\mathrm{J}_j \times [c_{n+1}, b_{n+1}])$$

$$= \bigcup_{i=1}^{2^n} \mathrm{I}_i \cup \bigcup_{i=1}^{2^n} \mathrm{K}_i \cup$$

$\therefore$ I es igual a la unión de 2^{n+1} $n+1$-cubos. Además $\forall\, i$ y $\forall\, x, y \in \mathrm{I}_i \Rightarrow \|x - y\| \leqslant \frac{\delta}{2}$ y $\forall\, i$ y $\forall\, x, y \in \mathrm{K}_i \Rightarrow \|x - y\| \leqslant \frac{\delta}{2}$

$\therefore$ el resultado es cierto para $n+1$. Así, por inducción, la propiedad es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$ $\square$

Lema 3.5. Todo n-cubo cerrado

$$\mathrm{I} = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$$

es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$

Proof. Supongamos, para generar una contradicción, que I no es compacto $\Rightarrow$ $\exists$ una cubierta abierta

$$\mathscr{U} = \{\mathcal{U}_\alpha \mid \alpha \in A\}$$

de modo que ninguna subcolección finita de $\mathscr{U}$ cubre a I. Por Lema 3.4, los puntos medios

$$c_i = \frac{a_i + b_i}{2}$$

generan a 2^n n-cubos $\mathrm{I}_1, ..., \mathrm{I}_{2^n}$ tales que

$$\mathrm{I} = \bigcup_{i=1}^{2^n} \mathrm{I}_i \qquad \text{y} \qquad \forall\, i\, \forall\, x, y \in \mathrm{I}_i \Rightarrow \|x - y\| \leqslant \frac{\delta}{2}$$

Por nuestra hipótesis dobre $\mathscr{U} \Rightarrow\ \exists$ un $i \in \{1, ..., 2^n\}$ tal que I_i no puede ser cubierto por una cantidad finita de elementos de $\mathscr{U}$

Supongamos $\mathrm{I}_i = [x_1, y_1] \times ... \times [x_n, y_n]$. Note que los puntos medios

$$a_i = \frac{x_i + y_i}{2}$$

generan a 2^n n-cubos $\mathrm{J}_1, ..., \mathrm{J}_{2^n}$ tales que

$$\mathrm{I}_i = \bigcup_{j=1}^{2^n} \mathrm{J}_j \qquad \text{y} \qquad \forall\, j\, \forall\, x, y \in \mathrm{J}_j \Rightarrow \|x - y\| \leqslant \frac{\delta'}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{2}$$

Por nuestra hipótesis dobre $\mathscr{U} \Rightarrow\ \exists$ un $j \in \{1, ..., 2^n\}$ tal que J_j no puede ser cubierto por una cantidad finita de elementos de $\mathscr{U}$. Denotemos $\mathrm{I}_2 = \mathrm{J}_j$ y $\mathrm{I}_1 = \mathrm{I}_i$

$$\Rightarrow \mathrm{I}_2 \subseteq \mathrm{I}_2 \subseteq \mathrm{I} \qquad \text{y} \qquad \forall\, i = 1, 2\, \forall\, x, y \in \mathrm{I}_i \Rightarrow \|x - y\| \leqslant \frac{\delta'}{2} = \frac{\delta}{2}$$

De esta forma, por recursión, $\exists$ una sucesión de m-cubos $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, ..., \mathrm{I}_n$ tales que

$$\forall\, m \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathrm{I}_{m+1} \subseteq \mathrm{I}_m \subseteq \mathrm{I} \qquad \text{y} \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}\, \forall\, x, y \in \mathrm{I}_m \Rightarrow \|x - y\| \leqslant \frac{\delta}{2^m}$$

Por Lema 3.1 $\exists\, \vec{x} \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathrm{I}_m$. Como $\vec{x} \in \mathrm{I} \Rightarrow\ \exists\, \mathcal{U}_\alpha \in \mathscr{U}$ que es un abierto, tal que $\vec{x} \in \mathcal{U}_\alpha$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B(\vec{x}, \varepsilon) \subseteq \mathcal{U}_\alpha$

Como

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\delta}{2^m} = 0 \Rightarrow\ \exists\, m \in \mathbb{N} \ni 0 < \frac{\delta}{2^{m+1}} < \varepsilon$$

Pero, por la segunda propiedad de la sucesión de m-cubos, s.t.q.

$$\mathrm{I}_{m+1} \subseteq B(\vec{x}, \varepsilon) \subseteq \mathcal{U}_\alpha$$

lo que contradice la construcción de I_{m+1}, porque está contenido en una subcolección finita, que de hecho tiene un solo elemento, $\mathcal{U}_\alpha$ $\square$

Teorema 3.7 (Heine - Börel)**.** Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado y acotado $\Rightarrow A$ es compacto

Proof. Como A es acotado $\exists\, z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ tal que $A \subseteq B(z, r)$

Note que

$$A \subseteq B(z, r) \subseteq [z_{1-r}, z_{1+r}] \times ... \times [z_{n-r}, z_{n+r}] = \mathrm{I}$$

Por Teorema 3.2, como I es compacto y A es cerrado $\Rightarrow A$ es compacto □

3.4. Continuidad Uniforme

Definición 3.6 (Continuidad Uniforme)**.** Sean espacios métricos (X, d) y (Y, ρ). Diremos que una función $f : X \to Y$ es una función uniformemente continua si es cierta la siguiente proposición

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, x, y \in X \Rightarrow d(x, y) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Teorema 3.8. Sean espacios métricos (X, d) y (Y, ρ). Toda función Lipschitz continua $f : X \to Y$ es uniformemente continua.

Proof. Supongamos que f es Lipschitz continua. Sea $\varepsilon > 0$ cualquiera. Definamos a $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$. Claramente $\delta > 0$. Si $x, y \in X$ son elementos aribtrarios tales que $d(x, y) < \delta$

$$\Rightarrow \rho(f(x), f(y)) \leqslant c \cdot d(x, y) < c \cdot \delta = c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$$

□

Corolario. Por corolario de Definición 2.2 toda función Lipschitz continua es continua, por lo qur toda función uniformemente continua es continua.

Proof. Si no tuvieramos este resultado, el resultado sigue siendo sumamente trivial. Supongamos que $x \in X$ es cualquiera, y sea $\varepsilon > 0$. Aplicando la Definición 3.6 a $\varepsilon \Rightarrow\ \exists\, \delta > 0$ tal que

$$\forall\, z, y \in X \Rightarrow d(y, z) < \delta \Rightarrow \rho(f(z), f(y)) < \varepsilon$$

□

Observación. Hay funciones continuas que no son uniformemente continuas

Ejemplo 3.4. Considere a la función cuadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^2$$

Se sabe que f es continua $\forall\, x \in \mathbb{R}$ y es infinitamente derivable.

Veamos que la negación de continuidad uniforme

$$\exists\, \varepsilon > 0\, \forall\, \delta > 0\, \exists\, x, y \in X \Rightarrow d(x,y) < \delta \,\wedge\, \rho(f(x), f(y)) \geqslant \varepsilon$$

es verdadera para f

Proof. Consideremos a $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Sea $\delta > 0$ arbitrario. Fijemos $n \in \mathbb{Z}^+$ de modo que $\frac{1}{n} < \delta$. Defina $r = n + \frac{1}{n}$ y $y = n$. Resulta que

$$d(x,y) = |x - y| = \frac{1}{n} < \delta$$

Además, definamos $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Note que

$$\begin{aligned}\rho(f(x), f(y)) &= \left|x^2 - y^2\right| = x^2 - y^2 = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - (n)^2 \\ &= \left(n + \frac{1}{n} + n\right)\left(n + \frac{1}{n} - n\right) = \frac{1}{n}\left(2n + \frac{1}{n}\right) = 2 + \frac{1}{n^2} > \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$\therefore f$ no es uniformemente continua □

Definición 3.7 (Nùmero de Lebesgue)**.** Sea (X,d) un espacio métrico y $\mathscr{U} = \{\mathcal{U}_\alpha \mid \alpha \in J\}$ es una cubierta de X. Diremos que $a > 0$ es un número de Lebesgue para $\mathscr{U} \Leftrightarrow$

$$\forall\, x \in X\, \exists\, \alpha \in J \Rightarrow B(x,a) \subseteq \mathcal{U}_\alpha$$

Lema 3.6 (Lema de Cubierta de Lebesgue)**.** Si (X,d) es un espacio métrico compacto $\Rightarrow$ toda cubierta abierta de X tiene número de Lebesgue

Proof. Supongamos que $\mathscr{U} = \{\mathcal{U}_\alpha \mid \alpha \in J\}$ es una cubierta abierta de X. Ahora, $\forall\, x \in X$ fijemos un $\varepsilon_x > 0$ y un $U_x \in \mathscr{U}$ tal que $B(x, \varepsilon_x) \subseteq U_x$. Considere a la cubierta $\mathscr{C} = \left\{B(x, \frac{\varepsilon_x}{2} \mid x \in X\right\}$, Como X es compacto $\exists x_1, ..., x_n \in X$ tales que $\mathscr{U}' = \left\{B(x_i, \frac{\varepsilon_{x_i}}{2} \mid 1 \leqslant i \leqslant n\right\} \subseteq \mathscr{U}$ es una subcubierta finita de X

Definimos $a = \text{mín}\left\{\frac{\varepsilon_{x_i}}{2} \mid 1 \leqslant i \leqslant n\right\} > 0$. Veamos que a es número de Lebesgue de la cubierta $\mathscr{U}$

Para ello, supongamos que $x \in X$ es cualquier elemento. Como $\mathscr{U}'$ es cibierta de X $\exists$ un índice $i_0 \in \{1, ..., n\}$ tal que $x \in \left(x_{i_0}, \frac{\varepsilon_{x_{i_0}}}{2}\right) \subseteq$
$A_{x_{i_0}}$. Resulta que $B(x,a) \subseteq B\left(x_{i_0}, \varepsilon_{x_{i_0}}\right)$.

En efecto, supongamos que $y \in B(x,a)$ es cualquier elemento

$$\Rightarrow d(y, x_{i_0}) \leqslant d(y,x) + d(x, x_{i_0}) < a + \frac{\varepsilon_{x_{i_0}}}{2} \leqslant \frac{\varepsilon_{x_{i_0}}}{2} + \frac{\varepsilon_{x_{i_0}}}{2} = \varepsilon_{x_{i_0}}$$

$\therefore y \in B\left(x_{i_0}, \varepsilon_{x_{i_0}}\right)$ Con esto, hemos probado que

$$b(x,a) \subseteq B\left(x_{i_0}, \varepsilon_{x_{i_0}}\right) \subseteq \mathcal{U}_{x_{i_0}}$$

Es decir $\forall\, x \in X\, \exists\, V \in \mathscr{U}$ tal que $B(x,a) \subseteq V$

$\therefore a$ es número de Lebesgue de $\mathscr{U}$ $\square$

Teorema 3.9. Si (X, d) es un espacio métrico compacto y (Y, ρ) es un espacio métrico $\Rightarrow$ toda función continua $f : X \to Y$ es uniformemente continua

Proof. Sea $\varepsilon > 0$. La colección

$$\mathscr{U} = \left\{ f^{\leftarrow}\left[B\left(y, \frac{\varepsilon}{2} \right) \right] \mid y \in Y \right\}$$

es una cubierta abierta para Y, esto por Teorema 3.4. Como X es compacto, por Lema 3.6 $\exists\, \delta > 0$ que es número de Lebesgue de la cubierta $\mathscr{U}$

Si $x_1, x_2 \in X$ son tales que $\mathrm{d}(x_1, x_2) < \delta$ s.t.q. $x_2 \in B(x_1, \delta)$ y $\exists\, z \in Y$ tal que $B(x_!, \delta) \subseteq f^{\leftarrow}\left[B\left(z, \frac{\varepsilon}{2}\right) \right]$. Note que $B\left(z, \frac{\varepsilon}{2}\right) \in \mathscr{U}$, y que $x_2 \in f^{\leftarrow}\left[B\left(z, \frac{\varepsilon}{2}\right) \right] \Rightarrow f(x_2) \in B\left(z, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Luego,

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) \leqslant \rho(f(x_1), z) + \rho(z, f(x_2)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\therefore f$ es uniformemente continua $\square$

Capítulo 4

Completitud

4.1. Espacios Métricos Completos

Definición 4.1 (Sucesión de Cauchy)**.** Sea (X, d) un espacio métrico. Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de X es una sucesión de Cauchy si $\forall\, n, m \,\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n, m \geqslant N$ s.t.q.

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Teorema 4.1. Si (X, d) es un espacio métrico, toda sucesión convergente en (X, d) es una sucesión de Cauchy.

Proof. Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X que converge a un elemento $x_0 \in X$. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario.

Por la convergencia $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n \geqslant N$ s.t.q. $d(x_n, x_) < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \forall\, n, m \geqslant N$ s.t.q.

$$d(x_n, x_m) \leqslant d(x_n, x_0) + d(x_0, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\therefore (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy □

Observación. Aunque es cierto que toda sucesión convergente es de Cauchy, no es cierto, en general, que toda sucesión de Cauchy sea convergente.

Ejemplo 4.1. Considere al intervalo $(0, 1)$ y la métrica inducida por $\mathbb{R}$, es decir $((0, 1), |\cdot|)$. En este conjunto la sucesión $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, pero no es convergente en $((0, 1), |\cdot|)$. Esto también es cierto en $\mathbb{R}^+$, y lo demostraremos más adelante

Teorema 4.2. Sean (X, d) un espacio métrico y $\varnothing \neq Y \subseteq X$ con la métrica ρ, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de Y, y $y \in X \Rightarrow$

1. $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $(Y, \rho) \Leftrightarrow (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en (X, d)
2. $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a y $(Y, \rho) \Leftrightarrow (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a y en (X, d)

Proof. 1. $\Rightarrow$ Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Como la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en (Y, ρ),

$\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n, m \geqslant N$

$$\rho(y_n, y_m) < \varepsilon$$

Recuerde que si (X, d) es un espacio métrico y $\varnothing \neq Y \subseteq X \Rightarrow$ la métrica inducida por d en Y es la distancia $\rho : Y \times Y \to \mathbb{R}$

$$\rho(y_0, y) = d(y_0, y)$$

$\Rightarrow d(y_n, y_m) < \varepsilon \,\forall\, n, m \geqslant N$

$\therefore\, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en (X, d)

$\Leftarrow$ Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Como la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en (X, d), $\exists\, M \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n, m \geqslant M$

$$d(y_n, y_m) < \varepsilon$$

$\rho(y_n, y_m) = d(y_n, y_m) < \varepsilon \,\forall\, n, m \geqslant M$

$\therefore\, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en (Y, ρ)

2. La demostración es análoga a la anterior, utilizando esta vez la definición de convergencia.

$\square$

Observación. ¿Cuál es la utilidad de las sucesiones de Cauchy? Imaginemos estar en cuarto en el que cae agua. Si el nivel de agua se mantiene, podemos suponer que el agua se está yendo a algún lado mediante un hoyo. El cuarto no está completo. Las sucesiones de Cauchy nos permiten notar esto.

Ejemplo 4.2. En $X = \mathbb{R}^+$ con la métrica $d(x, y) = |x - y|$ inducida por la norma usual de $\mathbb{R}$. La sucesión $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, pero no converge a ningún elemento de $\mathbb{R}^+$

Proof. Sea $\varepsilon > 0$. Como $\mathbb{N}$ no es acotado superiormente en $\mathbb{R}^+ \Rightarrow \exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{\varepsilon} < N$

Resulta que $\forall\, n, m \geqslant N \Rightarrow \left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1}\right| < \varepsilon$

En efecto, sean $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \geqslant N \Rightarrow$

$$\left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1}\right| \leqslant \left|\frac{1}{n+1}\right| + \left|\frac{-1}{m+1}\right| \leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{N} + \frac{1}{N} = \frac{2}{N} < \varepsilon$$

Como $\frac{2}{\varepsilon} < N \Rightarrow \frac{2}{N} < \varepsilon$

$\therefore \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Ahora veamos que no converge a ningún elemento de $\mathbb{R}^+$

Sea $x \in \mathbb{R}^+$ cualquier elemento. Definamos $\varepsilon_0 = \frac{x}{2}$. Como $\mathbb{N}$ no es acotado superiormente en $\mathbb{R}^+ \Rightarrow \exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{\varepsilon} = \frac{2}{x} < N$

Resulta que $\forall\, n \geqslant N \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{1}{n+1} \notin \left(\frac{x}{2}, \frac{3x}{2}\right)$

Consecuentemente $\nexists\, M \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n \geqslant M \Rightarrow \frac{1}{n+1} \in \left(\frac{x}{2}, \frac{3x}{2}\right)$

La sucesión convergería si ocurriése lo siguiente

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, M \in \mathbb{N}\, \forall\, n \geqslant M \Rightarrow \frac{1}{n+1} \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$$

Como queremos ver que no converge

$$\exists\, \varepsilon = \varepsilon_0 = \frac{x}{2}\, \nexists\, M \in \mathbb{N}\, \forall\, n \geqslant N \Rightarrow \frac{1}{n+1} \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$$

Si $M \in \mathbb{N}$ es arbitrario definamos a $n = N + M + 10^{100}$

$\therefore \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a x □

Ejemplo 4.3. Si (X, d) es un espacio métrico discreto (es decir, d es la métrica discreta) $\Rightarrow$ toda sucesión de Cauchy en (X, d) converge a un elemento de X

Proof. Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en (X, d). Aplicando la Definición 4.1 a $\varepsilon = 1$ s.t.q. $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall\, n, m \geqslant N \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon = 1$$

En particular, $\forall\, n \geqslant N \Rightarrow d(x_n, x_N) < 1$

Pero esto sucede $\Leftrightarrow x_n = x_N\ \forall\, n \in \mathbb{N} \geqslant N$, ya que d es la métrica discreta. Por Teorema 2.11 todas las sucesiones eventualmente constantes convergen. Note que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es eventualmente constante.

$\therefore (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x_N □

Definición 4.2 (Espacio Métrico Completo). Diremos que un espacio (X, d) es un espacio métrico completo $\Leftrightarrow$ toda sucesión de Cauchy en (X, d) converge a un elemento en (X, d)

Definición 4.3 (Espacio de Banach). Diremos que un espacio normado real $(X, \|\cdot\|)$, es decir un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, es un espacio de Banach $\Leftrightarrow$ el espacio métrico (X, d) es completo, donde d es la métrica inducida por $\|\cdot\|$

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

donde $x, y \in X$

Definición 4.4 (Espacio de Hilbert). Diremos que un espacio con producto interior real $(X, \langle, \rangle)$ es un espacio de Hilbert (real) $\Leftrightarrow$ el espacio $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach, donde $\|\cdot\|$ es la norma

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

donde $x \in X$

Observación. La idea de lo que se va a ver a continuación es ver que los espacios métricos compactos son completos.

Definición 4.5. Si $f : \mathbb{N} \to X$ es una sucesión $\Rightarrow$ una subsucesión de f es cualquier composición $f \circ g : \mathbb{N} \to X$ donde $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es estrictamente creciente.

Si denotamos como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a la f sucesión, es decir, si $f(n) = x_n \,\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ la subsucesión $f \circ g$ puede ser denotada como $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ donde $n_n = g(m)$ y así $x_{n_m} = (f \circ g)(m) = f(g(m)) \,\forall\, m \in \mathbb{N}$

Corolario. $\forall\, n \in \mathbb{N}$ se cumple que $n \leqslant g(n)$

Proof. Supongamos, para generar una contradicción, que $\exists\, m \in \mathbb{N}$ tal que $m > g(m) \Rightarrow$ el conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n > g(n)\}$ es no vacío , ya que $m \in A$, y por ello, $\exists\, \alpha = \min(A)$

Por Definición 4.5, g es estrictamente creciente, y como $\alpha \in A$ s.t.q.

$$\alpha > g(\alpha) \Rightarrow g(\alpha) > g(g(\alpha))$$

Note que $\alpha > g(\alpha)$, ya que $\alpha \in A$, y además $g(\alpha) \in A$, pero eso contradice que $\alpha = \min(A)$, ya que $g(\alpha) \in A$ es menor que α

$\therefore\ \nexists\, m \in \mathbb{N}$ tal que $m > g(m) \Rightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}$ se cumple que $n \leqslant g(n)$ □

Teorema 4.3. Sea (X, d) un espacio métrico y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de X. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy $\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, es decir, $\exists\, z \in X$ y $r > 0$ tales que $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq B(z, r)$

Proof. Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Para $\varepsilon = 1\, \exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall\, n, m \geqslant N \Rightarrow d(x_n, x_m) < 1$$

En particular, $\forall\, m \geqslant N \Rightarrow d(x_N, x_m) < 1$, o sea que

$$\{x_m \mid m \geqslant N\} \subseteq B(x_N, 1)$$

Definamos $M = \max\{d(x_i, x_N) \mid 1 \leqslant i \leqslant N - 1\} + 1$. Note que $M \geqslant 1$. Resulta que

$$\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq B(x_N, M)$$

$\therefore (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. □

Corolario. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente $\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.

Proof. Por el Teorema 4.1, toda sucesión convergente es de Cauchy, y por Teorema 4.3, toda sucesión de Cauchy es acotada. □

Teorema 4.4. Sea (X, d) un espacio métrico y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de X.

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y $\exists$ una subsucesión $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a un elemento $x \in X \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también converge a $x \in X$

Proof. Sea $\varepsilon > 0$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, para $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$ $\exists\, M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall\, n, m \geqslant M \Rightarrow d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por otra parte, como $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ converge a $x \in X$, para $\frac{\varepsilon}{2}$ $\exists J \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall\, k \geqslant J \Rightarrow d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Definamos a $N = M + J \Rightarrow N \geqslant M$ y $N \geqslant J$. Luego, si $K \geqslant N \Rightarrow$, por el corolario de la Definición 4.5, $n_k \geqslant K \geqslant J \Rightarrow k, n_k \geqslant M \geqslant N \Rightarrow$

$$d(x_k, x) \leqslant d(x_k, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Pero esto implica que $d(x_k, x) < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x$

$\therefore (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x \in X$ □

Lema 4.1. Toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales tiene una subsucesión $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ que es creciente o decreciente.

Proof. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cualquier sucesión de números reales. Diremos que un número natural m es distinguido con respecto a la sucesión $\Leftrightarrow$

$$\forall\, n \geqslant m \Rightarrow x_n \leqslant x_m$$

Sea $D = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ es distinguido } \}$. No importa si $D = \varnothing$, por lo que tenemos los siguientes dos casos.

1. D es finito

   En este caso vamos a construir una subsucesión $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que es estrictamente creciente.

   Debido a que $D \subseteq \mathbb{N}$ es finito por el caso $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que

   $$D \subseteq \{1, 2, ..., N\}$$

   Resulta que, $\forall\, n > N \Rightarrow n$ no es disntinguido. Como $N + 1 > N \Rightarrow N + 1$ no es distinguido, por lo que para $N + 1$ no se cumple la definición de número distinguido. Así, $\exists\, n_1 \geqslant N + 1$ tal que $x_{N+1} < x_{n_1}$

   Asimismo, como $n_1 > N$, n_1 tampoco es distinguido, y tampoco cumple su definición. Por ello, $\exists\, n_2 > n_1$ tal que $x_{n_1} < x_{n_2}$

   Observe que $n_1 \neq n_2$, por lo que $n_2 > n_1$. Esto por la Definición 2.12, que nos dice que la sucesión es una función. Si sucediera que $n_1 = n_2 \Rightarrow$ no se podría dar $x_{n_1} < x_{n_2}$

   Supongamos ahora que $m \geqslant 2$, y que se tienen construidos, via recursión, $N < N+1 \geqslant n_1 < n_1 < ... < n_m$ números $\in \mathbb{R}$ tales que $x_{n_1} < x_{n_2} < ... < x_{n_m}$

Debido a que $n_m > m \Rightarrow n_m$ no es distinguido $\Rightarrow \exists\, n_{m+1} > n_m$ tal que $x_{n_m} < x_{n_{m+1}}$

Y note que se sigue que $n_m \neq n_{m+1}$. Esto termina el segundo paso de recursión. Así, por el Teorema de Recursión, tenemos definida a la subsucesión $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que es estrictamente creciente.

2. D es infinito

   Debido a que D es infinito $\Rightarrow D \neq \varnothing$. Así, supongamos $n_1 \in D$ f.p.a.

   Como D es infinito, $\exists\, n_2 \in D$ tal que $n_1 < n_2$. Como n_1 es distinguido $\forall\, n \geqslant n_1 \Rightarrow x_n \leqslant x_{n_1}$

   Y como $n_2 > n_1 \Rightarrow x_{n_2} \leqslant x_{n_1}$

   Supogamos que $m \geqslant 2$, y que tenemos construidos naturales $n_1, n_2, ..., n_m \in D$ tales que $n_1 < n_2 < ... < n_m$ y $x_{n_1} \geqslant x_{n_2} \geqslant ... \geqslant x_{n_m}$

   Observe ahora que, como D es infinito, $\exists\, n_{m+1} \in D$ tal que $n_m \leqslant n_{m+1}$. Como n_m es disntinguido, y dado $n_{m+1} > n_m \Rightarrow x_{n_{m+1}} \leqslant x_{n_m}$

   Esto termina el segundo paso de recursión. Por el teorema homólogo, tenemos definida a la subsucesión $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que es estrictamente decreciente.

□

Ejemplo 4.4. El espacio normado $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach

Proof. Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy arbitraria en $\mathbb{R}$. Por el Teorema 4.3 esta sucesión es acotada $\Rightarrow\ \exists\, x \in \mathbb{R}$ y $r > 0$ tales que

$$\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq B(x, r) = B(x - r, x + r)$$

Por el Lema 4.1, $\exists\, (x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que es creciente o decreciente. Observe que

$$\{x_{n_m} \mid m \in \mathbb{N}\} \subseteq \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq B(x - r, x + r)$$

Note que x_{n_m} está acotada superiormente e inferiormente. Así, si x_{n_m} es creciente, converge a $\sup\{x_{n_m} \mid m \in \mathbb{N}\}$, y si x_{n_m} es decreciente, converge a $\inf\{x_{n_m} \mid m \in \mathbb{N}\}$.

En cualquier caso $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ converge. Por el Teorema 4.4 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

$\therefore$ $\mathbb{R}$ es un espacio métrico completo con la distancia inducida por la norma $|\cdot|$, por lo que es de Banach. Note que también es de Hilbert. □

Ejemplo 4.5. Todo espacio $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ es un espacio de Banach, con $n \in \mathbb{N}$

Proof. Supongamos que $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy arbitraria en $\mathbb{R}^n$. Denotaremos como $(\vec{x}_n(i))$ a la i-ésima coordenada del vector $\vec{x}_n = (x_n(1), ..., x_n(i), ..., x_n(k))$

Veamos que $\forall\, i \in \{1, ..., k\} \Rightarrow \left(\vec{x}_n(i)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$. Sea $i \in \{1, ..., k\}$ arbitrario, y supongamos $\varepsilon > 0$ también arbitrario.

Como $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cacuhy $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall\, n, m \geqslant N \Rightarrow d(x_n, x_m) = \|x_n - x_m\|_2 < \varepsilon$$
$$\Rightarrow\ \forall\, n, m \geqslant N \Rightarrow \left|\vec{x}_n(i) - \vec{x}_m(i)\right| \leqslant \|x_n - x_m\|_2 < \varepsilon$$

$\therefore\ \big(\vec{x}_n(i)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Por lo anterior, y por el Ejemplo 4.4, $\exists\, x_1, ..., x_k \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n(i) = x_i\ \forall\, i \in \{1, ..., k\}$$

Defina $x = (x_1, ..., x_k)$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \vec{x}_n = x$$

$\therefore\ (\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x \in \mathbb{R}^n$, por lo que es un espacio métrico completo, y como d fue la métrica inducida por $\|\cdot\|_2$, también es de Banach. Note que también es de Hilbert. $\square$

Lema 4.2. Si (X, d) es un espacio métrico y $K \subseteq X$ es compacto, $\Rightarrow$ toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de K tiene una subsucesión $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ que converge a algún $x \in K$

Proof. Supongamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es cualquier sucesión de elementos de K. Para $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ se tienen los siguientes casos

1. A es un conjunto finito

   Supongamos que $A = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ con $n \in \mathbb{N} \Rightarrow\ \forall\, j \in \{1, ..., n\}$ definimos $N_j = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n = y_n\}$

$$\Rightarrow \mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{n} N_j$$

   Debido a que $\mathbb{N}$ es infinito $\exists$ un índice $\bar{j} \in \{1, ..., n\}$ tal que el conjunto

$$N_{\bar{j}} = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n = y_{\bar{j}}\} \subseteq \mathbb{N}$$

   es un conjunto infinito. Podemos definir una función estrictamente creciente de elementos de $N_{\bar{j}}$. En efecto, como $N_{\bar{j}}$ es infinito, evidentemente es no vacío, por lo que podemos definir $n_1 = \min(N_{\bar{j}})$, que existe ya que $\mathbb{N}$ está bien ordenado.

   Nuevamente, debido a que $N_{\bar{j}} \setminus \{n_1\}$ es infinito y no vacío, podemos definir $n_1 = \min(N_{\bar{j}} \setminus \{n_1\})$, y observe que $n_1 < n_2$, ya que queremos dar orden a $N_{\bar{j}}$

   Supongamos ahora, que tenemos definidos $n_1, n_2, ..., n_m \in N_{\bar{j}}$ con la propedad $n_1 < n_2 < ... < n_m$ con $m \in \mathbb{N}$

   Como $\{n_1, ..., n_m\}$ es finito y $N_{\bar{j}}$ es infinito y no vacío, se puede definir

$$n_{m+11} = \min(N_{\bar{j}} \setminus \{n_1, ..., n_m\})$$

   y note que $n_m < n_{m+1}$. Por el Teorema de recursión $\exists$ una función $g : \mathbb{N} \to N_{\bar{j}}$

que es estrictamente creciente, definida mediante la regla de correspondencia $g(m) = n_m \,\forall\, m \in \mathbb{N}$

Considere ahora, la subsucesión $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ induce a la función g. Esto implica que la subsucesión $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ es la sucesión constante de valor $y_{\bar{j}}$. Por Teorema 2.11 converge a $y_{\bar{j}}$

$\therefore$ $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ converge a $y_{\bar{j}} \in K$

2. A es un conjunto infinito

   Como A es infinito y K es compacto, por Teorema 3.4, $\exists\, x \in K$ que es punto de acumulación de A en K

   Con el punto de acumulación, vamos a constuir una subsucesión $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{m\in\mathbb{N}}$ que converge a $x \in K$

   Como x es punto de acumulación de $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow \exists\, x_1 \in A \cap B(x, 1)$

   Debido a que $x \in \operatorname{der}(A)$ el conjunto $A \cap B\left(x, \frac{1}{2}\right)$ es infinito. Por ello, $\exists\, x_{n_2} \in \left(A \cap B\left(x, \frac{1}{2}\right)\right) \setminus \{x_1, ..., x_{n_i}\}$ y observe que $n_1 < n_2$

   Supongamos ahora un $m \in \mathbb{N}$ con $m \geqslant 2$, y que se tienen construidos los elementos $x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_m}$ que cumplen

$$x_{n_1} \in A \cap B(x, 1) \quad \text{y} \quad \forall\, j \in \{2, ..., m\} \Rightarrow x_{n_j} \in \left(A \cap B\left(x, \frac{1}{j}\right)\right) \setminus \{x_1, ..., x_{n_{(j-1)}}\}$$

   Aplicando que x es punto de acumulación de A, el conjunto, $\left(A \cap B\left(x, \frac{1}{m+1}\right)\right) \setminus \{x_1, ..., x_m\}$ es infinito, por lo cual existe

$$x_{n_{m+1}} \in \left(A \cap B\left(x, \frac{1}{m+1}\right)\right) \setminus \{x_1, ..., x_m\}$$

   y observe que $n_m < n_{m+1}$. Por el teorema de recursión $\forall\, n \in \mathbb{N}\, \exists\, x_{n_m}$ tal que

$$x_{n_1} \in A \cap B(x, 1) \quad \text{y} \quad \forall\, j \text{ con } j \geqslant 2 \Rightarrow x_{n_j} \in \left(A \cap B\left(x, \frac{1}{j}\right)\right) \setminus \{x_1, ..., x_{n_{(j-1)}}\}$$

   Es claro que $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y además converge a $x \in K$.

   Como $x_{n_m} \in \left(A \cap B\left(x, \frac{1}{m}\right)\right) \setminus \{x_1, ..., x_m\}$

$$\Rightarrow 0 \leqslant \lim_{m\to\infty} d(x_{n_m}, x) \leqslant \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} = 0$$

   $\therefore$ toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de K tiene una subsucesión $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ que converge a algún $x \in K$

$\square$

4.2. Compacto ⇒ Completo

Definición 4.6 (Secuencialmente Compacto). Sea (X, d) un espacio métrico. Se dice que un conjunto $K \subseteq X$ es secuencialmente compacto si cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de K tiene una subsucesión $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ que converge a algún elemento de K

Corolario. Sea (X, d) un espacio métrico. Por el Lema 4.2, si $K \subseteq$ es compacto $\Rightarrow K$ es secuencialmente compacto.

Corolario. Sea (X, d) un espacio métrico. Si (X, d) es compacto $\Rightarrow (X, d)$ es completo.

Proof. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cualquier sucesión de Cauchy en (X, d). Por Lema 4.2 $\exists\ (x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a algún $x \in X$. Como X es compacto, por Teorema 4.4, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también converge a $x \in X$ □

Teorema 4.5. Sean (X, d) y (Y, ρ) dos espacios métricos y sea $\Phi : X \to Y$ una equivalencia. Si (X, d) es completo $\Rightarrow (Y, \rho)$ también es completo.

Proof. Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy cualquiera en (Y, ρ). Como Φ es una equivalencia (Definición 2.3), Φ es biyectiva, y tanto Φ como Φ^{-1} son funciones Lipschitz continua, con $\Phi^{-1} : Y \to X$

Consideremos, a la sucesión $\left(\Phi^{-1}(y_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Veamos que esta sucesión es de Cauchy en (X, d)

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Como Φ^{-1} es Lipschitz continua con $\Phi^{-1} : Y \to X$, por lo que, $\exists c > 0$ tal que

$$\forall\, y, z \in Y \Rightarrow d(\Phi^{-1}(y), \Phi^{-1}(z)) \leqslant c \cdot \rho(y, z)$$

Debido a que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en (Y, ρ), para $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{c} > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall\, n, m \geqslant N \Rightarrow \rho(y_n, y_m) < \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{c}$$
$$\Rightarrow \forall\, n, m \geqslant N \Rightarrow d(\Phi^{-1}(y_n), \Phi^{-1}(y_m)) \leqslant c \cdot \rho(y_n, y_m) < \varepsilon_0 = c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$$

$\therefore \left(\Phi^{-1}(y_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en (X, d)

Debido a que (X, d) es completo, $\exists\, x \in X$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi^{-1}(y_n) = x$

Por otra parte, como $\Phi.X \to Y$ es Lipschitz continua, también es continua, y por Teorema 2.15, envía sucesiones convergentes a sucesiones convergentes. Así, $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi\big(\Phi^{-1}(y_n)\big) = \Phi(x) \in Y$

Luego $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \Phi(x)$

$\therefore (Y, \rho)$ es completo □

Teorema 4.6. Sean (X, d) un espacio métrico completo $\Rightarrow \varnothing \neq F \subseteq X$ es un subconjunto cerrado $\Leftrightarrow (F, d\restriction_F)$ es un espacio métrico completo

Proof. $\Rightarrow$ Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy cualquiera en $(F, d\restriction_F)$, $\Rightarrow$, por el Teorema 4.2, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en (X,d)

Como (X,d) es completo $\exists\, x \in X$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ en (X,d)

Resulta que $x \in F$. Efectivamente, si $x \in X \setminus F$, como F es cerrado, $\exists\, r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq X \setminus F$. Pero, como $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow \exists\, M \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n \geqslant N \Rightarrow d(x_n, x) < r$

Así, $x_{M+1} \subseteq B(x,r)$. Luego $x_{M+1} \in F \cap (X \setminus F)$, lo cual es una contradiccón, por lo que $x \in F$

Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en F, y que $x \in F$, podemos concluir que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ en $(F, d\restriction_F)$

$\therefore$ $(F, d\restriction_F)$ es completo

$\Leftarrow$ Supongamos que $x \in \operatorname{der}(F)$ es cualquier elemento. Por el Teorema 4.2 $\exists\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de F que no es eventualmente constante, y tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ en (X,d)

Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, por el Teorema 4.1, es de Cauchy en (X,d). Como F tiene la métrica $d\restriction_F$, la sucesión también es de Cauchy en $(F, d\restriction_F)$.

Como $(F, d\restriction_F)$ es completo $\Rightarrow\ \exists\, a \in F$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ en $F \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ en (X,d) por definición de $d\restriction_F$

En efecto, no puede ocurrir que $a \neq x$, ya que por el Teorema 2.9, el punto al que converge es único, y como $a \in F \Rightarrow a = x \in F$. Como x fue un punto arbitrario $F \subseteq \operatorname{der}(F)$

$\therefore$ F es cerrado □

4.3. Teorema del Punto Fijo de Banach

Definición 4.7 (Contracción). Sea (X,d) un espacio métrico. Una función $\varphi : X \to X$ se llama contracción si $\exists\, c \in (0,1)$ tal que

$$\forall\, x, y \in X \Rightarrow d(\varphi(x), \varphi(y)) \leqslant c \cdot d(x,y)$$

Podemos decir que una contracción es una función en un espacio métrico en si mismo que es Lipschitz continua, con constante de Lipschitz $c \in (0,1)$

Definición 4.8 (Punto Fijo). Un punto $z \in X$ se llama punto dijo de la función $\varphi : X \to X$ si $\varphi(z) = z$.

Para $n \in \mathbb{N}$ denotaremos por φ^n a la composición

$$\varphi^n = \varphi \circ \varphi \circ \ldots \circ \varphi$$

También definimos $\varphi^\circ = \mathrm{id}_X : X \to X$ a la función identidad

Observación. El siguiente teorema nos da la existencia de un único punto fijo de una contracción $\varphi : X \to X$ y además nos dirá como hallar una aproximación de él.

Teorema 4.7 (Punto Fijo de Banach). Sea (X, d) un espacio métrico completo, no vacío, y sea $\varphi : X \to X$ una contracción $\Rightarrow$ se cumple que

1. φ tiene un único punto fijo $z \in X$
2. $\forall\, x_0 \in X$ la sucesión $\big(\varphi^n(x_0)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $z \in X$ y se cumple que

$$d(\varphi^n(x_0), z) \leqslant \frac{c^n}{1-c} \cdot d(\varphi(x_0), x_0)$$

donde $\frac{c^n}{1-c}$ es el error de aproximación, y $c \in (0,1)$ satisface la Definición 4.7.

Proof. Sea $x_0 \in X$ cualquier elemento, y denotaremos por $x_n = \varphi^n(x_0)$. Primero, veamos que la sucesión $\big(\varphi^n(x_0)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

Como φ satisface la Definición 4.7 $\Rightarrow$

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow d(x_{n+1}, x_n) = d(\varphi^{n+1}(x_0), \varphi^n(x_0) = d(\varphi^n(x_1), \varphi^n(x_0)) \leqslant c^n \cdot d(x_1, x_0)$$

Esta desigualdad es fácilmente demostrable via inducción sobre n. Además, $\forall\, u, w \in X \Rightarrow$

$$\begin{aligned} d(u,w) \leqslant d(u,\varphi(u)) + d(\varphi(u), w) &\leqslant d(u,\varphi(u)) + d(\varphi(u),\varphi(w)) + d(\varphi(w), w) \\ &\leqslant d(u,\varphi(u)) + c \cdot d(u,w) + d(\varphi(w), w) \\ &\Rightarrow d(u,w) - c\cdot d(u,w) \leqslant d(u,\varphi(u)) + d(\varphi(w), w) \\ &\Rightarrow (1-c)d(u,w) \leqslant d(u,\varphi(u)) + d(\varphi(w), w) \end{aligned}$$

Haciendo $u = x_n$, y a $w = x_k$, con $n, k \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$d(x_n, x_k) \leqslant \frac{d(x_n, \varphi(x_n)) + d(\varphi(x_k), x_k)}{1-c} = \frac{d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{k+1}, x_k)}{1-c}$$

Aplicando la desigualdad $d(\varphi^n(x_1), \varphi^n(x_0)) \leqslant c^n \cdot d(x_1, x_0)$

$$\leqslant \frac{c^n d(x_1, x_0) + c^k d(x_1, x_0)}{1-c} = \left(\frac{c^n + c^k}{1-c}\right) \cdot d(x_0, x_1)$$

$\Rightarrow\ \forall\, n, k \in \mathbb{N}$ s.t.q.

$$d(x_n, x_k) \leqslant \left(\frac{c^n + c^k}{1-c}\right) \cdot d(x_0, x_1)$$

Para ver que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(\varphi^n(x_0)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, supongamos que $\varepsilon > 0$ es cualquiera. Debido a que $c \in (0,1) \Rightarrow\ \exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall\, n \geqslant N \Rightarrow \frac{c^n}{1-c} \cdot d(x_0, x_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Esto como $\frac{c^n}{1-c}$ converge a 0. $\Rightarrow$

$$\forall\, m,k \geqslant N \Rightarrow d(x_m,x_k) \leqslant \left(\frac{c^n+c^k}{1-c}\right)\cdot d(x_0,x_1)$$

$$= \frac{c^m}{1-c}\cdot d(x_0,x_1) + \frac{c^k}{1-c}\cdot d(x_0,x_1) < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\therefore$ la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

Por otra parte, como (X,d) es un espacio métrico completo $\exists\, z \in X$ tal que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a z

Veamos que z es un punto fijo de φ. Como φ es Lipschitz continua, por corolario de Definición 2.2, es continua, y s.t.q. la sucesión $\big(\varphi(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\varphi(z)$. Como, por el Teorema 2.9, el punto al que converge es único $\Rightarrow \varphi(z) = z$

Veamos ahora que z es único. Si $z_1, z_2 \in X$ son puntos fijos de $\varphi \Rightarrow$

$$d(z_1,z_2) = d(\varphi(z_1),\varphi(z_2)) \leqslant c\cdot d(z_1,z_2)$$

Como $c \in (0,1)$ s.t.q. $c\cdot d(z_1,z_2) \leqslant d(z_1,z_2)$

Si $d(z_1,z_2) > 0 \Rightarrow c\cdot d(z_1,z_2) < d(z_1,z_2)$, ya que $c<1$. Pero notemos que esto no ocurre, lo que implica que $d(z_1,z_2) = 0 \Rightarrow z_1 = z_2$

$\therefore z$ es único

Finalmente, si hacemos $k \to \infty$ en la siguiente desigualdad, s.t.q.

$$d(x_n,x_k) = \lim_{k\to\infty} d(x_n,x_k) \leqslant \lim_{k\to\infty}\left(\frac{c^n+c^k}{1-c}\right)\cdot d(x_0,x_1) = \frac{c^n}{1-c}\cdot d(x_0,x_1)$$

$\therefore$ es cierto el Teorema 4.7 □

Corolario. Sean (X,d) un espacio métrico completo y $\varphi : X \to X$ una función continua, para la cual $\exists\, k \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi^k : X \to X$ es una contracción, donde $\varphi^k = \varphi \circ \ldots \circ \varphi$ k-veces, $\Rightarrow \varphi$ tiene un único punto fijo

Proof. Debido a que φ^k es una contracción, y que (X,d) es un espacio métrico completo, por el Teorema 4.7 : $\exists$ un único punto fijo $z \in X$ de φ^k, es decir, $\varphi^k(z)\varphi(\varphi(\ldots(\varphi(z))\ldots)) = z$

Luego $\varphi(\varphi^k(z)) = \varphi(z)$, así $\varphi^k(\varphi(z)) = \varphi(z)$

Esto porque $\varphi \circ \varphi^k = \varphi^k \circ \varphi = \varphi^{k+1}$

$\therefore \varphi(z)$ también es punto fijo de φ^k

$\Rightarrow \varphi(z) = z$

$\therefore z$ es punto fijo de φ

Ahora, veamos que z es único. Supongamos que $y \in X$ es también un punto fijo de φ, es decir, $\varphi(y) = y$. Luego $\varphi(\varphi(y)) = \varphi(y) = y \Rightarrow \varphi(\varphi(\varphi(y))) = \varphi(\varphi(y)) = \varphi(y) = y$. Después de k pasos de hacer esto s.t.q. $\varphi^k(y) = y$.

Por el Teorema 4.7, sabemos que z es el único punto fijo de $\varphi^k \Rightarrow z = y$ □

4.4. Teorema de Heine-Börel Reloaded

Observación. ¿Habrá algún teorema parecido al Heine-Börel (Teorema 3.7) para espacios métricos cualesquiera? Este teorema se cumple en $\mathbb{R}^n$, que es completo y de Banach. Se va a fortalecer la nocíon de *acotado*, que nos daba el teorema, e introduciremos la noción de totalmente acotado.

Definición 4.9 (Totalmente Acotado). Sea (X,d) un espacio métrico. Diremos que un subconjunto $K \subseteq X$ es totalmente acotado en $(X,d) \Leftrightarrow$ cumple con lo siguiente

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, F = \{x_1, ..., x_n\} \subseteq X$$

Donde F es finito y no vacío

$$\Rightarrow K \subseteq \bigcup_{x \in F} B(x,\varepsilon) = B(x_1,\varepsilon) \cup ... \cup B(x_n,\varepsilon)$$

Teorema 4.8. Si K es totalmente acotado $\Rightarrow K$ es acotado.

Proof. Como K es totalmente acotado, para $\varepsilon = 1 \Rightarrow\ \exists\, x_1, ..., x_n \in X$ tales que

$$K \subseteq B(x_1, 1) \cup ... \cup B(x_n, 1)$$

Resulta que $K \subseteq B(x,r)$ donde $r = \max\{d(x_1,x_2)+1, ..., d(x_1,x_n)+1\}$ □

Teorema 4.9. Sea (X,d) un espacio métrico y $K \subseteq X$. Si K es secuencialmente compacto $\Rightarrow K$ es totalmente acotado.

Proof. Supongamos, para generar una contradicción, que K no es totalmente acotado $\Rightarrow$ $\exists\, \varepsilon > 0$ tal que $\forall\, F = \{x_1, ..., x_n\} \subseteq X$ finito y no vacío $\Rightarrow K \not\subseteq \bigcup_{x\in F} B(x,\varepsilon)$

Como $\varnothing \subseteq B(x,\varepsilon) \Rightarrow$ si K es vacío es totalmente acotado. Como estamos suponiendo que K no es totalmente acotado $\Rightarrow K \neq \varnothing$

Sea $x_1 \in K$. Por la negación de totalmente acotado $K \not\subseteq B(x_1,\varepsilon)$. Luego, $\exists x_2 \in K \backslash B(x_1,\varepsilon)$. Note que como $x_2 \notin B(x_1,\varepsilon)$ está fuera de la bola, $d(x_1,d_2) \geqslant \varepsilon$

Supongamos que $m \geqslant 2$ y que tenemos construidos $x_1, x_2, ..., x_m$ elementos de K tales que

$$x_1 \in K \qquad \text{y} \qquad \forall\, j \in \{2, ..., n\} \Rightarrow x_j \in K \setminus \big[B(x_1,\varepsilon) \cup ... \cup B(x_{j-1},\varepsilon)\big]$$

Como K no es totalmente acotado

$$K \not\subseteq B(x_1,\varepsilon) \cup ... \cup B(x_m,\varepsilon)$$

$\Rightarrow\ \exists\, x_{m+1} \in K \setminus \big[B(x_1,\varepsilon) \cup ... \cup B(x_m,\varepsilon)\big]$

Por el Teorema de recursión, s.t.q. hemos construido una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en K. Note que

$$\forall\, k, m \in N \Rightarrow \text{ si } k \neq m \Rightarrow d(x_k, x_m) \geqslant \varepsilon$$

En particular, si $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ es cualquier subsuseción de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s.t.q.

$$\forall\, k, m \in N \Rightarrow \text{ si } k \neq m \Rightarrow d(x_{n_k}, x_{n_m}) \geqslant \varepsilon$$

Así, $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ no es de Cauchy, por lo que no es convergente. Pero se trata de una sucesión de elementos de K, que supusimos secuencialmente compacto, por lo que hay una contradicción.

$\therefore K$ es totalmente acotado. □

Corolario. Sea (X, d) un espacio métrico. Si $K \subseteq X$ es compacto, es toalmente acotado. Esto porque por el Definición 4.6 todo compacto es secuencialmente compacto, y por el Teorema 4.9 todo secuencialmente compacto es totalmente acotado.

Teorema 4.10 (Bolzano- Weiestrass). Las siguientes condiciones son equivalentes para cualquier espacio métrico (X, d)

1. X es compacto
2. Todo subconjunto infinito de X tiene un punto de acumulación
3. Todo subconjunto infinito numerable de X tiene un punto de acumulación
4. X es secuencialmente compacto

Proof. 1. $\Rightarrow$ 2.

Fue demostrado en el Teorema 3.4

2. $\Rightarrow$ 3.

Evidente

3. $\Rightarrow$ 4.

Sea $f : \mathbb{N} \to X$ una sucesión. Si $A = \{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ es finito $\Rightarrow A = \{y_1, ..., y_n\}$. Ya probamos en el Caso 1 del Lema 4.2 que $\exists$ una subsucesión $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que es constante de valor $y_{\bar{j}}$, y así $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ converge.

Si A es infinito, en el Caso 2 del Lema 4.2, también probamos que $\exists$ una subsucesión $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que es convergente.

4. $\Rightarrow$ 1.

Sea $\mathscr{U} = \{\mathcal{U}_\alpha \mid \alpha \in J\}$ una colección arbitraria de abiertos tales que $X = \bigcup_{\alpha\in J} \mathcal{U}_\alpha$. Veamos que $\exists\, \alpha_1, ..., \alpha_n \in J$ con $X = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}_{\alpha_i}$

Para ello, veamos que $\exists\, \varepsilon > 0$ tal que $\forall\, x \in X\, \exists\, \alpha_x \in J \Rightarrow B(x, \varepsilon) \subseteq \mathcal{U}_{\alpha_x}$

Supongamos que tal ε no existe

$$\Rightarrow\ \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, x_\varepsilon \in X\, \forall\, \alpha \in J \Rightarrow B(x, \varepsilon) \nsubseteq \mathcal{U}_\alpha$$

En particular

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}^+ \,\exists\, x_n \in X \,\forall\, \alpha \in J \Rightarrow B\left(x, \frac{1}{n}\right) \nsubseteq \mathcal{U}_\alpha$$

Tenemos así, definida una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Como supusimos que X es secuencialmente compacto $\Rightarrow$ para cada sucesión en X, podemos extraer una subsucesión que converge, y en particular, $\exists\, (x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a un elemento $x \in X$

$\Rightarrow\ \exists \beta \in J$ tal que $x \in \mathcal{U}_\beta$. Pero $\mathcal{U}_\beta \in \mathscr{U}$ es abierto, por lo que, $\exists r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq \mathcal{U}_\beta$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_m} = x$, para $\frac{r}{2} > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall\, m \geqslant N \Rightarrow x_{n_m} \in B\left(x, \frac{r}{2}\right)$$

Fijemos $M \in \mathbb{N}$, con $M \geqslant \frac{2}{r}$, y también $M > N \Rightarrow$

$$B\left(x_{n_m}, \frac{1}{n_m}\right) \subseteq B(x, r)$$

En efecto, veamos que es cierto. Sea $z \in B\left(x_{n_m}, \frac{1}{n_m}\right)$ un elemento cualquiera $\Rightarrow$

$$d(z, x) \leqslant d(z, x_{n_m}) + d(x_{n_m}, x) < \frac{1}{n_m} + \frac{r}{2} < r$$

Esto como $n_m \geqslant m$y $n_m \geqslant M \Rightarrow \frac{1}{n_m} \leqslant \frac{1}{M}$, y $\frac{1}{M} < \frac{r}{2}$, ya tomamos a $M \geqslant \frac{2}{r} \Rightarrow \frac{1}{n_m} + \frac{r}{2} < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} < r$

Así $z \in B(z, r) \Rightarrow B\left(x_{n_m}, \frac{1}{n_m}\right) \subseteq B(x, r)$

Como $B(x, r) \subseteq \mathcal{U}_\beta \Rightarrow$

$$B\left(x_{n_m}, \frac{1}{n_m}\right) \subseteq B(x, r) \subseteq \mathcal{U}_\beta$$

Pero eso es una contradicción, ya que tomamos $B\left(x, \frac{1}{n}\right) \nsubseteq \mathcal{U}_\alpha$

$\therefore\ \exists\, \varepsilon > 0$ tal que

$$\forall\, x \in X\, \exists\, \alpha_x \in J \Rightarrow B(x, \varepsilon) \subseteq \mathcal{U}_{\alpha_x}$$

Como X es secuencialmente compacto, por Teorema 4.9, es totalmente acotado $\Rightarrow$ para la $\varepsilon > 0$ dada por la afirmacióna anterior $\exists\, x_1, ..., x_n \in X$ tales que

$$X \subseteq B(x_1, \varepsilon) \cup ... \cup B(x_n, \varepsilon) \subseteq X = X$$

Por la propiedad que hemos querido demostrar de $\varepsilon > 0$, s.t.q. $\forall\, i \in \{1, .., n\}$

$$X = B(x_1, \varepsilon) \cup ... \cup B(x_n, \varepsilon) \subseteq \mathcal{U}_{\alpha_{x_1}} \cup ... \cup \mathcal{U}_{\alpha_{x_n}} \subseteq \mathscr{U}$$

$\therefore X$ es compacto, ya que hemos agarrado una subcolección finita de una cubierta arbitraria que lo cubre. $\square$

Corolario. Sea (X, d) un espacio métrico y $K \subseteq X \Rightarrow K$ es compacto $\Leftrightarrow$ es secuencialmente compacto.

Teorema 4.11 (Heine-Börel Reloaded). Sea (X, d) un espacio métrico completo $\Rightarrow \forall \varnothing \neq K \subseteq X$ s.t.q. K es compacto $\Leftrightarrow K$ es cerrado y totalmente acotado.

Proof. $\Rightarrow$ Ya se ha demostrado por varios teoremas.

$\Leftarrow$ Veamos que K es secuencialmente compacto, y que K es completo. Supongamos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión arbitraria de elementos de K. Sea $A = \{x_n \mid n \in\}$. Para A tenemos los siguientes dos casos.

1. A es finito

   Vease el Caso 1. de Lema 4.2

2. A es infinito

   Como K es totalmente acotado $\exists\, F_1 \subseteq X$ finito tal que $K \subseteq \bigcup_{x\in F_1}(x, 1)$

   Como $A \subseteq X \Rightarrow$

   $$A \cap K = A \cap \bigcup_{x\in F_1}(x, 1) = \bigcup_{x\in F_1} A \cap (x, 1)$$

   Como A es infinito $\exists\, y_1 \in F_1$ tal que $A \cap B(y_1, 1)$ es infinito.

   Hay una cantidad infinita de iPhones que lanzamos a tiendas, por lo que hay una tienda, el paraíso de los jovenes, en la que hay una infinidad de iPhones.

   Sabemos que $A_1 = B(y_1, 1) \cap A \subseteq K$. Como K es totalmente acotado $\Rightarrow A_1$ es totalmente acotado $\Rightarrow$ para $\varepsilon = \frac{1}{2}\, \exists\, F_2$ tal que

   $$A_1 \subseteq \bigcup_{x\in F_2} B\left(x, \frac{1}{2}\right)$$

   Como A_1 es infinito $\exists\, y_2 \in F_2$ tal que $A_2 = A_1 \cap B\left(y_2, \frac{1}{2}\right)$ es infinito.

   El siguiente paso de recursión es suponer que tenemos construidos conjuuntos infinitos $A \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq ... \supseteq A_n \supseteq ...$, y elementos $y_1, ..., y_n, ... \in X$ tales que

   $$\begin{gathered} A_1 = A \cap B(y_1, 1) \\ A_2 = A_1 \cap B\left(y_2, \frac{1}{2}\right) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ A_n = A_{n-1} \cap B\left(y_n, \frac{1}{n}\right) \end{gathered}$$

   Teniendo ya esta sucesión, veamos que $\exists$ una subsucesión $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\forall\, m \in \mathbb{N} \Rightarrow x_{n_m} \in B(y_1, 1) \cap B\left(y_2, \frac{1}{2}\right) \cap ... \cap B\left(y_m, \frac{1}{m}\right)$$

Vamos a construirla via recursión. Para $m = 1$, como A_1 es infinito, s.t.q. $A_1 \neq \varnothing$. Podemos fijar $x_{n_1} \in A_1$. Note que $x_{n_1} \in A_1 \subseteq B(y_1, 1)$.

Por otro lado, como A_2 es infinito s.t.q

$$A_2 \nsubseteq \{x_1, x_2, ..., x_{n_1}\}$$

Es por ello que $\exists\, n_2 > n_1$ tal que

$$x_{n_2} \in A_1 \setminus \{x_1, x_2, ..., x_{n_1}\}$$

Note que $x_{n_2} \in A_2 = A_1 \cap B\left(y_2, \frac{1}{2}\right) \subseteq A_1 \subseteq B(y, 1)$

Así $x_{n_1} \in B(y_1, 1)$, ya que $x_{n_2} \in B(y_1, 1) \cap B\left(y_2, \frac{1}{2}\right)$

Supongamos ahora que $m \geqslant 2$ y que tenemos construios $x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_m}$ con la propiedad deseada. Además $n_1 < n_2 < ... < n_m$

Debido a que A_{m+1} es infinito

$$A_{m+1} \nsubseteq \{x_1, x_2, ..., x_{n_m}\}$$

Es por ello que $\exists\, n_{m+1} > n_m$ tal que

$$x_{n_{m+1}} \in A_{m+1} \setminus \{x_1, x_2, ..., x_{n_m}\}$$

Note que $x_{n_{m+1}} \in A_{m+1} = A_m \cap B\left(y_{m+1}, \frac{1}{m+1}\right)$. Así $x_{n_{m+1}} \in B\left(y_{m+1}, \frac{1}{m+1}\right)$. Además, como

$$A_{m+1} \subseteq A_m \subseteq A_{m-1} \subseteq ... \subseteq A_1 \subseteq A$$

s.t.q. $x_{n_{m+1}} \in A_i\ \forall\, i \in \{1, ..., m\}$. Como $A_i = A_{i-1} \cap B\left(y_{i1}, \frac{1}{i}\right)$ s.t.q.

$$x_{n_{m+1}} \in B(y_1, 1) \cap ... \cap B\left(y_m, \frac{1}{m}\right) \cap B\left(y_{m+1}, \frac{1}{m+1}\right)$$

Por el teorema de recursión, se tiene construida la subscucesión $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$

Para ver que converge, basta ver que es de Cauchy, ya que $K \subseteq X$ es cerrado y (X, d) es completo $\Rightarrow$ por Teorema 4.6 K es completo.

Veamos entonces que $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{\varepsilon} < N$. Resulta que $\forall\, k, m \geqslant N \Rightarrow d(x_{n_k}, x_{n_m}) < \varepsilon$

En efecto, sean $k, m \geqslant N \Rightarrow n_m, n_k \geqslant N$

Por construcción de la sucesión, $x_{n_k}, x_{n_m} \in B\left(y_N, \frac{1}{N}\right)$

$$\Rightarrow d(x_{n_k}, x_{n_m}) \leqslant d(x_{n_k}, y_N) + d(y_N, x_{n_m}) < \frac{1}{N} + \frac{1}{N} = \frac{2}{N} < \varepsilon$$

$\therefore (x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Note que como K es cerrado en (X, d), y (X, d) es completo, $\Rightarrow$ por el Teorema 4.6 K es completo. Por la Definición 4.2, como $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $K \Rightarrow (x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ converge a algún elemento en K, lo cual satisface la Definición 4.6 $\Rightarrow K$ es secuencialmente compacto, y por el Teorema 4.10, K es compacto. $\square$

Capítulo 5

Espacios de Funciones

5.1. Espacios $\mathcal{C}(X, Y)$ y $\mathcal{C}^*(X, Y)$

Definición 5.1 (Conjunto de Funciones Continuas)**.** Dados dos espacios métricos (X, d) y (Y, ρ), definifimos al conjunto de las funciones continuas de X en Y como

$$\mathcal{C}(X, Y) = \{f : X \to Y \mid f \text{ es continua }\}$$

Notación. Cuando $(Y, \rho) = (\mathbb{R}, d_2)$ donde d_2 es la métrica inducida por la norma $\|\cdot\|_2$ es usual escribir $\mathcal{C}(X)$ en lugar de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$

Observación. Para definir al conjunto $\mathcal{C}^*(X, Y)$ es necesario dar la noción de función acotada.

Definición 5.2 (Función Acotada)**.** Sean (X, d) y (Y, ρ) dos espacios métricos. Diremos que una función $F : X \to Y$ es acotada si $\exists\, y_0 \in Y$ y $M > 0$ tales que

$$\forall\, x \in X \Rightarrow \rho(f(x), y_0) < M$$

es decir, que el conjunto $f[X]$ es acotado

Ejemplo 5.1. Cualquier función constante es una función acotada.

Ejemplo 5.2. Consideremos a la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por medio de la regla de correspondencia

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$$

donde $\mathbb{R}$ tiene la métrica usual $|\cdot|$

Proof. f es una función acotada porque $\forall\, x \in \mathbb{R}$ sucede que

$$|f(x) - 0| = \left|\frac{x}{1+x^2}\right| \leqslant \frac{1}{2}$$

y así $f[\mathbb{R}] \subseteq B(0,1)$

$\therefore f$ es acotada □

Ejemplo 5.3. Toda función continua $f : X \to Y$ con X un espacio métrico compacto es una función acotada.

Proof. Como f es una función continua y X es compacto $\Rightarrow f[X]$ es compacto en el espacio Y. Así que $f[X]$ es cerrado y acotado en Y, y en particular, es un conjunto acotado. □

Definición 5.3 (Espacios de Funciones Continuas y Acotadas)**.** Sean dos espacios métricos (X,d) y (Y,ρ), definifimos al conjunto $\mathcal{C}^*(X,Y)$ como el conjunto

$$\mathcal{C}^*(X,Y) = \{f : X \to Y \mid f \text{ es continua y acotada }\}$$

El conjunto $\mathcal{C}^*(X,Y)$ es llamado conjunto de funciones continuas y acotadas de X en Y

Corolario. Es muy claro que $\mathcal{C}^*(X,Y) \subseteq \mathcal{C}*(X,Y)$

Lema 5.1. Sean dos espacios métricos (X,d) y (Y,ρ) arbitrarios, si $f,g \in \mathcal{C}*(X,Y) \Rightarrow \exists \sup\{\rho(f(x),g(x)) \mid x \in X\} \in \mathbb{R}$

Proof. Supongamos $x \in X$ arbitrario. Como f,g son funciones acotadas $\exists y_1, y_2$ y $M_1, M_2 > 0$ tales que $\forall\, z \in X$ s.t.q.

$$\rho(f(z),y_1) < M \qquad \text{y} \qquad \rho(g(z),y_2)$$

En particular, para $z = x$ se cumple lo siguiente

$$\rho(f(x),y_1) < M \qquad \text{y} \qquad \rho(g(x),y_2)$$

$$\Rightarrow \rho(f(x),g(x)) \leqslant \rho(f(x),y_1) + \rho(y_1,g(x))$$

$$\leqslant \rho(f(x),y_1) + \rho(y_1,y_2) + \rho(y_2,g(x)) \leqslant \rho(y_1,y_2) + M_1 + M_2$$

Definamos a $M_3 = \rho(y_1,y_2) + M_1 + M_2 \Rightarrow$ el conjunto $\{\rho(f(x),g(x)) \mid x \in X\}$ es no vacío y está acotado superiormente por $M_3 \in \mathbb{R}$, ya que una métrica es una función $f : X \to \mathbb{R}$

$\therefore \exists \sup\{\rho(f(x),g(x)) \mid x \in X\} \in \mathbb{R}$ □

Teorema 5.1. Sean (X,d) y (Y,ρ) dos espacios métricos arbitrarios. La función $d_u : \mathcal{C}^*(X,Y) \times \mathcal{C}^*(X,Y) \to \mathbb{R}$ definida por

$$d_u(f,g) = \sup\{\rho(f(x),g(x) \mid x \in X\}$$

es una métrica en $\mathcal{C}^*(X,Y)$

Proof. Sean $f, g \in \mathcal{C}^*(X,Y)$ elementos cualesquiera.

Notemos que $\forall\, x \in X$ s.t.q.

$$\rho(f(x), g(x) \geqslant 0 \Rightarrow \sup\{\rho(f(x), g(x) \mid x \in X\} = d_u(f,g) \geqslant 0$$

Por lo que d_u es una función no-negativa. Además, notemos que

$$d_u(f,g) = \sup\{\rho(f(x), g(x) \mid x \in X\} = 0 \Leftrightarrow \rho(f(x), g(x) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in X \Rightarrow f(x) = g(x) \Leftrightarrow f = g$$

Por otra parte, como ρ es simétrica

$$d_u(f,g) = \sup\{\rho(f(x), g(x) \mid x \in X\} = \sup\{\rho(g(x), f(x) \mid x \in X\} = d_u(g,f)$$

Finalmente, supongamos $h \in \mathcal{C}^*(X,Y) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} d_u(f,g) &= \sup\{\rho(f(x), g(x) \mid x \in X\} \\ &\leqslant \sup\{\rho(f(x), h(x) \mid x \in X\} + \sup\{\rho(h(x), g(x) \mid x \in X\} = d_u(f,h) + d_u(h,g) \end{aligned}$$

$\therefore d_u$ es una métrica en $\mathcal{C}^*(X,Y)$ $\square$

Teorema 5.2. Sean (X,d) y (Y,ρ) dos espacios métricos arbitrarios, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{C}^*(X,Y)$, y $f \in \mathcal{C}^*(X,Y)$. Las siguientes condiciones son equivalentes.

1. La sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f en $(\mathcal{C}^*(X,Y), d_u)$

2. La siguiente proposición es verdadera

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N}\, \forall\, n \geqslant N\, \forall\, x \in X \Rightarrow \rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

Proof. 1. $\Rightarrow$ 2.

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario.

Como $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ en $(\mathcal{C}^*(X,Y), d_u) \Rightarrow\ \exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} &\forall\, n \geqslant N \Rightarrow d_u(f_n, f) < \varepsilon \\ \Rightarrow\ &\forall\, n \geqslant N \Rightarrow \sup\{\rho(f(x), g(x) \mid x \in X\} < \varepsilon \\ \Rightarrow\ &\forall\, n \geqslant N \Rightarrow \rho(f(x), g(x) < \varepsilon \end{aligned}$$

Esto porque $\rho(f(x), g(x) \leqslant \sup\{\rho(f(x), g(x) \mid x \in X\}$, por lo que si el supremo es menor que ε, todos son menores que ε

2. $\Rightarrow$ 1.

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por el inciso 2. $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall\, n \geqslant N\, \forall\, x \in X \Rightarrow \rho(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \forall\, n \geqslant N\, \forall\, x \in X \Rightarrow \sup\{\rho(f_n(x), f(x)) \mid x \in X\} = d_u(f_n, f) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

$\therefore\ \forall\, n \geqslant N \Rightarrow d_u(f_n, f) < \varepsilon$

Así $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ en $(\mathcal{C}^*(X,Y), d_u)$ □

Definición 5.4. Sean X un conjunto no vacío y (Y,ρ) un espacio métrico, diremos que una sucesión de funciones

$$\langle f_n : X \to Y \mid n \in \mathbb{N}\rangle \qquad \text{o} \qquad (f_n : X \to Y)_{n\in\mathbb{N}}$$

converge uniformemente a una función $f : X \to Y \Leftrightarrow$

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N}\, \forall\, n \geqslant N\, \forall\, x \in X \Rightarrow \rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

Notación. En ese caso escribimos $f_n \rightrightarrows f$, donde f es el límite uniforme de la sucesión.

Ejemplo 5.4. La sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está dada por

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx+n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

converge uniformemente a la función constante $\overline{0}$

Proof. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Como $\left|\sin(x)\right| \leqslant 1 \Rightarrow$

$$\left|f(x)\right| = \left|\frac{1}{n}\sin(nx+n)\right| = \frac{1}{n}\left|\sin(nx+n)\right| \leqslant \frac{1}{n}$$

Así que, eligiendo alguna $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{\varepsilon} < N \Rightarrow$ si $m \geqslant N$ y $x \in X$ es cualquiera, s.t.q.

$$\left|f_m(x) - 0\right| = \frac{1}{m}\left|\sin(mx+m)\right| \leqslant \frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{N} < \varepsilon$$

$\therefore\ f_n \rightrightarrows \overline{0}$ □

Definición 5.5 (Convergencia Puntual)**.** Sea X un conjunto no vacío cualquiera y (Y,ρ) un espacio métrico. Diremos que una sucesión de funciones

$$\langle f_n : X \to Y \mid n \in \mathbb{N}\rangle \qquad \text{o} \qquad (f_n : X \to Y)_{n\in\mathbb{N}}$$

converge puntualmente a la función $f : X \to Y \Leftrightarrow \forall\, x \in X$ s.t.q.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

en el espacio (Y,ρ)

Notación. En este caso diremos que f es el límite puntual de la sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y se denota como $f_n \to f$

Observación. La noción de convergencia puntual nos ayuda a ver con más facilidad si una sucesión de funciones converge uniformemente, esto por el Lema 5.2

Lema 5.2. Sea X un conjunto no vacío y (Y,ρ) un espacio métrico. Si $\langle f_n : X \to Y \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ converge uniformemente a $f : X \to Y \Rightarrow \langle f_n : X \to Y \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ converge puntualmente a f

Es decir $f_n \rightrightarrows f \Rightarrow f_n \to f$

Proof. Supongamos $z \in X$ cualquiera y $\varepsilon > 0$

Como $f_n \rightrightarrows f$, para ε

$$\exists\, N \in \mathbb{N}\, \forall\, n \geqslant N\, \forall\, x \in X \Rightarrow \rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

En particular $\forall\, n \geqslant N$ y el elemento z ocurre lo siguiente

$$\rho(f_n(z), f(z)) < \varepsilon$$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ por la definición de límite

Como z fue arbitrario s.t.q. $f_n \to f$ □

Ejemplo 5.5. La sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por la regla de correspondencia

$$f(x) = x^n\, \forall\, n \in \mathbb{N}$$

converge puntualmente a la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Proof. Sea $x_0 \in [0,1]$ f.p.a. Para x_0 se tienen los siguientes casos

1. $x_0 = 0$

$$\Rightarrow f_n(x_0) = f_n(0) = 0^n = 0\, \forall\, n \in \mathbb{N}$$

   Es claro ver

$$f(x_0) = f(0) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

2. $x_0 = 1$

   En este caso, $\big(f_n(x_0)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión constante de valor 1

$$f(x_0) = f(1) = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

3. $x_0 \in (0,1)$

   $\Rightarrow x_0 < 1$ y esto implica que $\frac{1}{x_0} > 1$, así que $h = \frac{1}{x_0} - 1 > 0$ es tal que $1 + h = \frac{1}{x_0}$, y así, s.t.q.$x_0 = \frac{1}{h+1}$

   Luego, $\forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow {x_0}^n = \frac{1}{(1+h)^n}$. Por el Teorema del Binomio de Newton s.t.q.

$$(1+h)^n = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n}{k} 1^k h^{n-k} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

   $\Rightarrow\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$(1+h)^n \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n}{n} 1^n h^{n-n} + \binom{n}{n-1} 1^{n-1} h^{n-(n-1)} = 1 + nh \geqslant nh$$

   $\Rightarrow\ \forall\, n \geqslant 2$ se cumple que

$${x_0}^n = \frac{1}{(1+h)^n} \leqslant \frac{1}{nh} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

$\therefore f_n \to f$ □

Lema 5.3. Sea X un conjunto no vacío, (Y,ρ) un espacio métrico, $\langle f_n : X \to Y \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ una sucesión de funciones, y $f : X \to Y$ una función.

Supongamos que $f_n \rightrightarrows f \Rightarrow$

1. Si todas las funciones $f_n : X \to Y$ son acotadas $\Rightarrow f : X \to Y$ también es acotada.
2. Si (X,d) es un espacio métrico, y cada $f_n : X \to Y \in \mathcal{C}(X,Y) \Rightarrow f \in \mathcal{C}(X,Y)$

Proof. 1. Aplicando la Definición 5.4, con $\varepsilon = 1\, \exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall\, n \geqslant N\, \forall\, x \in X \Rightarrow \rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon = 1$$

En particular

$$\forall\, x \in X \Rightarrow \rho(f_N(x), f(x)) < 1$$

Como $f_N : X \to Y$ es acotada $\Rightarrow\ \exists\, y \in Y$ y $r > 0$ tales que

$$f_N(x) \in f_N[X] \subseteq B(y,r)$$

Defina $R = r + 1$. Resulta que

$$f[X] \subseteq B(y,R)$$

En efecto, supongamos $f(x) \in f[X]$ es arbitrario $\Rightarrow$

$$\rho(f(x),y) \leqslant \rho(f(x),f_N(x)) + \rho(f_N(x),y) < 1 + r = R$$

$\therefore f$ es acotado

2. Supongamos que $x_0 \in X$ es arbitrario.

   Sea $\varepsilon > 0$. Como $f_n \rightrightarrows f \Rightarrow$, utilizando la Definición 5.4 para $\frac{\varepsilon}{8}$ $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall\, n \geqslant N\, \forall\, x \in X \Rightarrow \rho(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{8}$$

   En particular

$$\forall\, x \in X \Rightarrow \rho(f_N(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{8}$$

   Debido a que $f_N : X \to Y$ es continua en x_0, para $\frac{\varepsilon}{8}$ $\exists\, \delta > 0$ tal que

$$\forall\, x \in X \Rightarrow d(x,x_0) < \delta \Rightarrow \rho(f_N(x), f_N(x_0)) < \frac{\varepsilon}{8}$$

   Veamos que $\forall\, x \in X \Rightarrow d(x,x_0) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

   En efecto, sea $x \in X$ arbitrario tal que $d(x,x_0) < \delta \Rightarrow$

$$\rho(f(x),f(x_0)) \leqslant \rho(f(x),f_N(x)) + \rho(f_N(x),f(x_0))$$
$$\leqslant \rho(f(x),f_N(x)) + \rho(f(x_0),f_N(x_0)) + \rho(f_N(x_0)+f_N(x)) < \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} = \frac{3\cdot\varepsilon}{8} < \varepsilon$$

   $\therefore f$ es continua en x_0

□

Observación. Volviendo al Ejemplo 5.5, cuando $f_n(x) = x^n$ sabemos que $f_n \to f$ donde

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Pero po el Lema 5.3, sabemos que $f_n \not\rightrightarrows f$ porque f no es continua y f_n si lo es.

Teorema 5.3. Sean (X,d) y (Y,ρ) espacios métricos. Si (Y,ρ) es completo $\Rightarrow (\mathcal{C}^*(X,Y), d_u)$ también es completo.

Proof. Supongamos que $(f_n : X \to Y)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{C}^*(X,Y), d_u)$

Veamos que $\forall\, x \in X \Rightarrow \big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en (Y,ρ)

Supongamos que $x_0 \in X$ es un elemento cualquiera. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathcal{C}^*(X,Y)$ $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall\, n, m \geqslant N \Rightarrow d_u(f_n, f_m) < \varepsilon$$

Pero $d_u(f_n, f_m) = \sup\{\rho(f_n(x), f_m(x)) \mid x \in X\}$

Así que $\rho(f_n(x_0), f_m(x_0)) \leqslant d_u(f_n, f_m)$ porque d_u es el supremo

$$\Rightarrow\ \forall\, n, \geqslant N \Rightarrow \rho(f_n(x_0), f_m(x_0)) \leqslant d_u(f_n, f_m) < \varepsilon$$

$\therefore \big(f_n(x_0)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en (Y, ρ)

Debido que $\forall\, x \in X\ \big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y a que (Y, ρ) es completo $\exists\, y_x \in Y$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = y_x = f(x) \in (Y, \rho)$$

Esto si definimos $f : X \to Y$ por medio de $f(x) = y_x$

Veamos que $f \in \mathcal{C}^*(X,Y)$. Por el Lema 5.3 basta ver que $f_n \rightrightarrows f$, ya que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}^*(X,Y)$

En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $(\mathcal{C}^*(X,Y), d_u)$ $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall\, n, m \geqslant N \Rightarrow d_u(f_n, f_m) < \frac{\varepsilon}{8}$$
$$\Rightarrow\ \forall\, n, m \geqslant N \Rightarrow \rho(f_n(x), f_m(x)) < \frac{\varepsilon}{8}$$

Esto porque d_u es el supremo. Resulta que

$$\forall\, n \geqslant N\, \forall\, x \in X \Rightarrow \rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

En efecto, sean $n \geqslant N$ y $x_0 \in X$ arbitrarios

Como $\lim\limits_{n\to\infty} f_m(x_0) 0 y_{x_0} = f(x_0)$, para $\frac{\varepsilon}{8}$ $\exists\, M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall\, m \geqslant M \Rightarrow \rho(f_m(x_0), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{8}$$

Sea $m \in \mathbb{N}$ con $m > N$ y $m > M$

$$\rho(f_n(x_0), f(x_0)) \leqslant \rho(f_n(x_0), f_m(x_0)) + \rho(f_m(x_0), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} < \varepsilon$$

$\therefore f_n \rightrightarrows f$

Aplicando el Lema 5.3 $\Rightarrow f \in \mathcal{C}^*(X,Y)$. Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathcal{C}^*(X,Y)$ y $f \in \mathcal{C}^*(X,Y)$, y $f_n \rightrightarrows f$, por el Teorema 5.2 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ en $(\mathcal{C}^*(X,Y), d_u)$

$\therefore (\mathcal{C}^*(X,Y), d_u)$ es completo □

Corolario. Si $(Y, \|\cdot\|_Y)$ es un espacio de Banach real $\Rightarrow$ $(\mathcal{C}^*(X,Y), \|\cdot\|_u)$ también es un espacio de Banach, donde

$$\|f\|_u = \sup\{f(x) \mid x \in X\}$$

5.2. Teorema de Arzelá-Ascoli

Definición 5.6 (Equicontinuidad)**.** Sean (X, d) y (Y, ρ) dos espacios métricos. Diremos que $\mathscr{F} \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$ es equicontinua en $y \in X \Leftrightarrow$

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, x \in X \Rightarrow d(x, y) < \delta \Rightarrow\ \forall\, f \in \mathscr{F} \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Diremos que $\mathscr{F} \subseteq \mathcal{C}(X, Y)$ es equicontinua en todo $X \Leftrightarrow \mathscr{F}$ es equicontinua $\forall\, x \in X$

Ejemplo 5.6. Si $\mathscr{F} = \{\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, ..., f_n\}$ donde $f_i : X \to Y$ es una función continua en $X\, \forall\, i \in \{1, ..., n\} \Rightarrow \mathscr{F}$ es equicontinua en cada $y \in X$

Proof. Sea $\varepsilon > 0$. Como cada función f_i es continua en $y \in X\, \exists\, \delta_1, \delta_2, ..., \delta_n > 0$ tales que

$$\forall\, i \in \{1, ..., n\}\, \forall\, x \in X \Rightarrow d(x, y) < \delta_i \Rightarrow \rho(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon$$

Defina $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n\} \Rightarrow$

$$\forall\, x \in X \Rightarrow d(x, y) < \delta \leqslant \delta_i \Rightarrow\ \forall\, i \in \{1, ..., n\} \Rightarrow rho(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon$$

Así

$$\forall\, x \in X \Rightarrow d(x, y) < \delta \Rightarrow\ \forall\, f \in \mathscr{F} \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

$\therefore \mathscr{F}$ es equicontinua en $y \in X$. Como y fue arbitraria, $\mathscr{F}$ es equicontinua en todo Y $\square$

Teorema 5.4 (Valor Medio)**.** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$ y derivable en $(0, 1) \Rightarrow\ \exists\, y \in (a, b)$ tal que $f'(y) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Ejemplo 5.7. Sea $\mathscr{F} = \{f_n : [0, 1] \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Resulta qeu $\mathscr{F}$ es equicontinua en cada $x_0 \in (0, 1)$ donde

$$f_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Proof. Sea $x_0 \in (0, 1)$. Para $y \in [0, 1]$ con $y \neq x_0$, por el Teorema 5.4 aplicado a $f_n\, \exists\, z_n$ entre y y x_0 ($y < z_n < x_0$ si $y < x_0$ o $x_0 < z_n < y$ si $x_0 < y$) tal que

$$z^n = f_n'(z_n) = \frac{f_n(y) - f_n(x_0)}{y - x_0}$$

Observe que $\forall\, x \in [0, 1] \Rightarrow |x^n| \leqslant 1$. Así

$$\left|f_n'(z_n)\right| = |z^n| \leqslant 1 \Rightarrow \left|\frac{f_n(y) - f_n(x_0)}{y - x_0}\right| \leqslant 1$$

Por ello

$$\left|f_n(y) - f_n(x_0)\right| \leqslant |y - x_0| \;\forall\, n \in \mathbb{N}$$

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Defina $\delta = \varepsilon$. Claramente es positiva, y además

$$\forall\, y \in [0,1] \Rightarrow d(y, x_0) = |y - x_0| < \delta \Rightarrow \;\forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left|f_n(y) - f_n(x_0)\right| < \varepsilon$$

$\therefore \mathscr{F}\{f_n : [0,1] \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ es equicontinua en x_0 □

Teorema 5.5. Sean (X, d) y (Y, ρ) dos espacios métricos. Si $\mathscr{F} \subseteq (\mathcal{C}^*(X,Y), \|\cdot\|_u)$ es totalmente acotado $\Rightarrow \mathscr{F}$ es equicontinua.

Proof. Sea $x \in X$ arbitrario. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Debido a que $\mathscr{F}$ es totalmente acotado $\exists\, \mathrm{F}_1, ..., f_n \in \mathcal{C}^*(X,Y)$ tales que

$$\mathscr{F} \subseteq B\left(\mathrm{F}_1, \frac{\varepsilon}{4}\right) \cup ... \cup \left(f_n, \frac{\varepsilon}{4}\right)$$

Como cada f_i es continua en x_0, para $\frac{\varepsilon}{4} > 0 \;\exists\, \delta_i > 0$ tal que

$$\forall\, x \in X \Rightarrow d(x, x_0) < \delta_i \Rightarrow \rho(f_i(x), f_i(x_0)) < \frac{\varepsilon}{4}$$

Definamos $\delta = \text{mín}\{\delta_1, ..., \delta_n\} \;\forall\, i \in \{1, ..., n\}$

Veamos que

$$\forall\, x \in X \Rightarrow d(x, x_0) < \delta \Rightarrow \;\forall\, f \in \mathscr{F} \Rightarrow \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

En efecto, sea $x \in X$ arbitrario con $f(x, x_0) < \delta$

Supongamos que $f \in \mathscr{F}$ es cualquiera $\Rightarrow \;\exists\, i \in \{1, ..., n\}$ tal que $f \in B\left(f_i, \frac{\varepsilon}{4}\right)$. Así,

$$\begin{aligned}
\forall\, z \in X \Rightarrow \rho(f(z), f_i(z)) \leqslant d_u(f, f_i) < \frac{\varepsilon}{4} \\
\Rightarrow \rho(f(x), f(x_0)) \leqslant \rho(f(x), f_i(x)) + \rho(f_i(x), f(x_0)) \\
\leqslant \rho(f(x), f_i(x)) + \rho(f_i(x), f_i(x_0)) + \rho(f_i(x_0), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3 \cdot \varepsilon}{4} < \varepsilon
\end{aligned}$$

$\therefore \mathscr{F}$ es equicontinua en x_0 □

Corolario. Sean (X, d) y (Y, ρ) dos espacios métricos. Si $\mathscr{F} \subseteq \mathcal{C}^*(X,Y)$ es un subconjunto compacto $\Rightarrow \mathscr{F}$ es equicontinua.

Proof. Por el Teorema 4.11, todo compacto es totalmente acotado, y por Teorema 5.5 si un subconjunto $\mathscr{F} \subseteq \mathcal{C}^*(X,Y)$ es totalmente acotado es equicontinuo. □

Definición 5.7 (Puntualmente Acotado). Sean X un conjunto no vacío y (Y, ρ) un espacio métrico. Sea $\mathscr{F}$ una colección de funciones de X en X. Diremos que $\mathscr{F}$ es puntualmente acotado si $\forall\, x \in X$ el conjunto $\{f(x) \mid f \in \mathscr{F}\}$ es un subconjunto acotado de (Y, ρ)

Lema 5.4. Sean (X,d) y (Y,ρ) dos espacios métricos. Si $\mathscr{F} \subseteq \mathcal{C}^*(X,Y)$ es un subconjunto acotado $\Rightarrow \mathscr{F}$ es una familia de funciones puntualmente acotada.

Proof. Como $\mathscr{F} \subseteq (\mathcal{C}^*(X,Y), \|\cdot\|_u)\ \exists\, g \in \mathcal{C}^*(X,Y)$ y un $r > 0$ tales que $\mathscr{F} B(g,r) \Rightarrow$

$$\forall\, f \in \mathscr{F} \Rightarrow d_u(f,g) < r$$

Así

$$\forall\, x \in X\ \forall\, f \in \mathscr{F} \Rightarrow \rho(f(x), g(x)) \leq d_u(f,g) < r$$

Sea $x_0 \in X$ arbitrario. Veamos que $\{f(x_0) \mid f \in \mathscr{F}\} \subseteq B(g(x_0), r+1)$ es un subconjunto acotado.

Supongamos que $f \in \mathscr{F}$ es cualquiera $\Rightarrow$

$$\rho(f(x_0), g(x_0)) < r + 1$$

$\therefore f(x_0) \in B(g(x_0), r+1)$

$\therefore \mathscr{F}$ es puntualmente acotado como $\{f(x) \mid f \in \mathscr{F}\}$ es acotado en (Y,ρ) $\square$

Lema 5.5. Sean (X,d) y (Y,ρ) dos espacios métricos. Si X es compacto y $\mathscr{F} \subseteq \mathcal{C}^*(X,Y)$ es equicontinua y puntualmente acotada $\Rightarrow \mathscr{F}$ es un subconjunto acotado de $(\mathcal{C}^*(X,Y), \|\cdot\|_u)$

Proof. Veamos que $\exists\, g \in \mathcal{C}^*(X,Y)$ y $r > 0$ tal que $\mathscr{F} \subseteq B(g,r)$ en $(\mathcal{C}^*(X,Y), \|\cdot\|_u)$

Sea $x \in X$ arbitrario. Como $\mathscr{F}$ es equicontinua en $x \Rightarrow$ para $\varepsilon = 1\ \exists\, \delta_x > 0$ tal que

$$\forall\, z \in X \Rightarrow d(z,x) < \delta_x \Rightarrow\ \forall\, f \in \mathscr{F} \Rightarrow \rho(f(z), f(x)) < \varepsilon = 1$$

$\Rightarrow$ la colección $\mathscr{U} = \{B(x,\delta_x) \mid x \in X\}$ es una cubierta abierta de X, es decir

$$X = \bigcup_{x \in X} B(x, \delta_x)$$

Como X es compacto $\exists\, x_1, ..., x_n \in X$ una cantidad finita de elementos de X tales que

$$X = B(x_1, \delta_{x_1}) \cup ... \cup B(x_n, \delta_{x_n})$$

Debido a que $\mathscr{F}$ es puntualmente acotado $\exists\, y_1, ..., y_n \in Y$ y $r_1, ..., r_n > 0$ tales que

$$\forall\, i \in \{1, ..., n\} \Rightarrow \{f(x_i) \mid f \in \mathscr{F}\} \subseteq B(y_i, r_i)$$

Defina a $g : X \to Y$ por medio de $g(x) = y_1$ con $x \in X$

Claramente $g \in \mathcal{C}^*(X,Y)$, ya que $g(x)$ es una función constante y por lo tanto acotada.

Defina también $R = 1 + r_1 + ... + r_n + \rho(y_1, y_2) + ... + \rho(y_1, y_n)$

Resulta que $\mathscr{F} \subseteq B(y, 10,000 \cdot R)$

En efecto, sea $f \in \mathscr{F}$ y $x \in X$ cualquiera.

Como $X = B(x_1, \delta_{x_1}) \cup ... \cup B(x_n, \delta_{x_n}) \exists i \in \{1, ..., n\}$ tal que $x \in B(x_i, \delta_{x_i}) \Rightarrow d(x, x_i) < \delta_{x_i}$. Así

$$\forall\, h \in \mathscr{F} \Rightarrow \rho(h(x), h(x_i)) < 1$$

En particular $\rho(f(x), f(x_i)) < 1$. Luego

$$\begin{aligned} \rho(f(x), g(x)) &= \rho(f(x), y_1) \leqslant \rho(f(x), f(x_i)) + \rho(f(x_i), y_1) \\ &\leqslant \rho(f(x), f(x_i)) + \rho(f(x_i), y_i) + +\rho(y_i, y_1) < 1 + r_i + \rho(y_i, y_1) \leqslant R \leqslant 10,000 \cdot R \end{aligned}$$

$\therefore \mathscr{F} \subseteq B(y, 10,000 \cdot R) \Rightarrow \mathscr{F}$ es acotada. $\square$

Lema 5.6. Sea (X, d) métrico completo y $\mathscr{F} \subseteq \mathcal{C}^*(X, \mathbb{R}^n)$ un subconjunto acotado $\Rightarrow \exists K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto tal que

$$\forall\, f \in \mathscr{F} \Rightarrow f[X] \subseteq K$$

Proof. Como $\mathscr{F}$ está acotado en $(\mathcal{C}^*(X, \mathbb{R}^n), d_u)$ $\exists\, y \in \mathcal{C}^*(X, \mathbb{R}^n)$ y $r > 0$ tal que $\mathscr{F} \subseteq B(g, r)$

$$\forall\, f \in \mathscr{F} \Rightarrow d_u(f, g) < r$$

Debido a que $g : X \to \mathbb{R}^n$ es continua y X es compacto $g[X] = \{g(x) \mid x \in X\}$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$

Por el Teorema 3.2 $\Rightarrow g[X]$ es acotado, así, $\exists\, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ y $R > 0$ tal que

$$g[X] \subseteq B(\vec{y}, R) \in \mathbb{R}^n$$

Definamos $r_2 = r + R + \|\vec{y}\|_2$. Resulta que $B(\vec{0}, r_2)$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Veamos que

$$\forall\, f \in \mathscr{F} \Rightarrow f[X] \subseteq K$$

En efecto, suponga $f \in \mathscr{F}$ es un elemento cualquiera. Sea $x \in X$ arbitrario. Observer que $g[X] \subseteq B(\vec{0}, R + \|\vec{y}\|)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left\|f(x) - 0\right\|_2 &\leqslant \left\|f(x) - g(x)\right\|_2 + \left\|g(x)\right\|_2 \\ &\leqslant d_u(f, g) + \left\|g(x)\right\|_2 < r + R + \|\vec{y}\|_2 = r_2 \end{aligned}$$

Así $f(x) \in B(\vec{0}, r_2) \subseteq \overline{B}(\vec{0}, r_2) = K$

$\therefore f[X] \subseteq K$ $\square$

Teorema 5.6 (Arzelá-Ascoli)**.** Sea (X, d) un espacio métrico completo $\Rightarrow \forall \mathscr{F} \subseteq \mathcal{C}^*(X, \mathbb{R}^n) \mathscr{F}$ es un subconjunto compacto de $(\mathcal{C}^*(X, \mathbb{R}^n), d_u) \Leftrightarrow \mathscr{F}$ es cerrado, equicontinuo, y puntualmente acotado.

Proof. $\Rightarrow$ Por el Teorema 4.11, todo compacto es totalmente acotado y cerrado. Además, por Teorema 5.5 todo $\mathscr{F}$ totalmente acotado es equicontinuo, y por el Lema 5.4 como $\mathscr{F}$ es acotado es puntualmente acotado.

$\Leftarrow$ Primero, note que $\mathcal{C}^*(X, \mathbb{R}^n)$ es completo, porque $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ es completo. Por el Teorema 4.11, para probar que $\mathscr{F}$ es compacto, basta probar que $\mathscr{F}$ es totalmente acotado y cerrado.

En efecto, sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por el Lema 5.6 $\exists\, K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto tal que $\forall\, f \in \mathscr{F} \Rightarrow f[X] \subseteq K$

Como K es compacto, y a que la siguiente colección de bolas

$$\mathscr{C} = \left\{ B(\vec{y}, \frac{\varepsilon}{10,000} \mid \vec{y} \in \mathbb{R}^n \right\}$$

es una cubierta abierta de $K \,\exists\, \vec{y}_1, ..., \vec{y}_m \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$K \subseteq B\left(\vec{y}_1, \frac{\varepsilon}{10,000}\right) \cup ... \cup B\left(\vec{y}_m, \frac{\varepsilon}{10,000}\right)$$

Como $\mathscr{F}$ es equicontinua $\forall\, x \in X \Rightarrow$ para $\frac{\varepsilon}{10,000}$ $\exists\, \delta_x > 0$ tal que

$$\forall\, z \in X \Rightarrow d(z, x) < \delta_x \Rightarrow \forall\, f \in \mathscr{F} \Rightarrow \left\| f(x) - f(z) \right\| < \frac{\varepsilon}{10,000}$$

Como X es compacto y $\mathscr{U} = \{B(x, \delta_x \mid x \in X\}$ es una cubierta abierta para $X \,\exists x_1, ..., x_k \in X$ tales que

$$X = B(x_1, \delta_{x_1}) \cup ... \cup B(x_k, \delta_{x_k})$$

Definamos $\Phi = \{\alpha : \{1, ..., k\} \to \{1, ..., m\} \mid \exists\, f \in \mathscr{F}\}$

$$\Rightarrow \forall\, i \in \{1, ..., k\} \Rightarrow f(x_i) \in B\left(\vec{y}_{\alpha(i)}, \frac{\varepsilon}{10,000}\right)$$

Como la cardinalidad $|\Phi| \leqslant m^k \Rightarrow \Phi$ es finito

$\forall\, \alpha \in \Phi$, fijemos una única función $f_\alpha \in \mathscr{F}$ tal que

$$\forall\, \{1, ..., k\} \Rightarrow f_\alpha(x_i) \in B\left(\vec{y}_{\alpha(i)}, \frac{\varepsilon}{10,000}\right)$$

Note que $\{f_\alpha \mid \alpha \in \Phi\} \subseteq \mathscr{F} \subseteq \mathcal{C}^*(X, \mathbb{R}^n)$ es finito porque Φ es finito.

Resulta que

$$\mathscr{F} \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Phi} B(f_\alpha, \varepsilon)$$

Esto mostraría que $\mathscr{F}$ es totalmente acotado.

En efecto, sea $f \in \mathscr{F}$ cualqioer elemento, y sea $i \in \{1, ..., k\}$ arbitrario. Como ocurre que

$$f(x_i) \in f[X] \subseteq K \subseteq B\left(\vec{y}_1, \frac{\varepsilon}{10,000}\right) \cup ... \cup B\left(\vec{y}_m, \frac{\varepsilon}{10,000}\right)$$

es posible elegir un único $j(i) \in \{1, ..., m\}$ tal que

$$f(x_i) \in B\left(\vec{y}_{j(i)}, \frac{\varepsilon}{10,000}\right)$$

Defina $\alpha : \{1, ..., k\} \to \{1, ..., m\}$ mediante la regla de asociación $\alpha(i) = j(i)$. Note que $\alpha \in \Phi$. Consideremos a la función f_α asociada aα. Veamos que

$$f \in B(f_\alpha, \varepsilon) \Leftrightarrow d_u(f, f_\alpha) < \varepsilon$$

Sea $x \in X$ arbitrario $\Rightarrow$ $\exists\, i \in \{1, ..., k\}$ tal que $x \in B(x_i, \delta_{x_i})$. Así $d(x, x_i) < \delta_{x_i}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \left\|f(x) - f_\alpha(x)\right\|_2 &\leqslant \left\|f(x) - f(x_i)\right\|_2 + \left\|f(x_i) - f_\alpha(x)\right\|_2 \\
&\leqslant \left\|f(x) - f(x_i)\right\|_2 + \left\|f(x_i) - \vec{y}_{\alpha(i)}\right\|_2 + \left\|\vec{y}_{\alpha(i)} - f_\alpha(x)\right\|_2 \\
&\leqslant \left\|f(x) - f(x_i)\right\|_2 + \left\|f(x_i) - \vec{y}_{\alpha(i)}\right\|_2 + \left\|\vec{y}_{\alpha(i)} - f_\alpha(x_i)\right\|_2 + \left\|f_\alpha(x_i) - f_\alpha(x)\right\|_2 \\
&< \frac{\varepsilon}{10,000} + \frac{\varepsilon}{10,000} + \frac{\varepsilon}{10,000} + \frac{\varepsilon}{10,000} = \frac{4 \cdot \varepsilon}{10,000} < \varepsilon
\end{aligned}$$

Así $f \in B(f_\alpha, \varepsilon) \Rightarrow \mathscr{F} \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Phi} B(f_\alpha, \varepsilon)$

$\therefore \mathscr{F}$ es compacto porque es totalmente acotado y cerrado $\square$

Corolario. Supongamos que $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ y que $\mathscr{F} = \{f_n : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n\}$ es una familia de funciones continuas que es equicontinua y puntualmente acotado $\Rightarrow$ $\exists$ una función continua $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ y una subsucesión $(f_{n_t})_{n \in \mathbb{N}}$ de la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\forall\, K \subseteq \mathcal{U}$ compacto

$$f_{n_t} \restriction_K \rightrightarrows f \restriction_K$$

Definición 5.8 (Cerradura). Sea (X, d) un espacio métrico. $\forall\, A \subseteq X$ definimos a la cerradura de A en (X, d) como el conjunto

$$\mathrm{cl}(A) = A \cup \mathrm{der}(A)$$

Definición 5.9 (Relativamente Compacto). Diremos que A es relativamente compacto en $(X, d) \Leftrightarrow \mathrm{cl}(A)$ es un subconjunto compacto.

Teorema 5.7 (Arzelá-Ascoli II). Sean (X, d) un espacio métrico compacto y (Y, ρ) un espacio métrico completo $\Rightarrow \mathscr{F} \subseteq \mathcal{C}^*(X, Y) \mathscr{F}$ es relativamente compacto en $(\mathcal{C}^*(X, Y), d_u) \Leftrightarrow \mathscr{F}$ es equicontinua y $\forall\, x \in X \Rightarrow \{f(x) \mid f \in \mathscr{F}\}$ es relativamente compacto en (Y, ρ)

5.3. Teorema de Stone-Weierstraß

Definición 5.10 (Polinomios de Bernstein)**.** Sean $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $t \in \mathbb{R}$. Definimos al n-ésimo polinomio básico de Bernstein como el polinomio

$$\theta_{n,k}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$$

donde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Teorema 5.8. Sean $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $t \in \mathbb{R}$

1. $1 = \sum\limits_{k=0}^{n} \theta_{n,k}(t)$
2. $nt = \sum\limits_{k=0}^{n} k\,\theta_{n,k}(t)$
3. $(n^2 - n)t = \sum\limits_{k=0}^{n} (k^2 - k)\,\theta_{n,k}(t)$
4. $\frac{t-t^2}{n} = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(t - \frac{k}{n}\right)^2 \theta_{n,k}(t)$

Proof.

1. Sean $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $t \in \mathbb{R}$

   Para $n = 0$, como $0^0 = 1$, tenemos el resultado.

   Si $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ por el teorema de Newton

$$1 = 1^n = (t + (1-t))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \theta_{n,k}(t)$$

2. Sean $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $t \in \mathbb{R}$

   Si $n = 0 \Rightarrow nt = 0 = \sum\limits_{k=0}^{n=0} k\,\theta_{n,k}(t)$

   Si $n \geqslant 1 \Rightarrow n-1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Así, por el inciso 1. aplicado a $n-1$, s.t.q.

$$1 = \sum_{k=0}^{n-1} \theta_{n-1,k}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} t^k (1-t)^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} t^k (1-t)^{n-(k+1)}$$

   Multiplicando por t

$$t = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} t^{k+1} (1-t)^{n-(k+1)}$$

   Observe que

$$\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k+1)!} \cdot \frac{n!}{n} \cdot \frac{k+1}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} \cdot \frac{k+1}{n}$$

Así

$$t = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} t^{k+1}(1-t)^{n-(k+1)} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} \cdot \frac{k+1}{n} t^{k+1}(1-t)^{n-(k+1)}$$

Defina $j = k+1$. Note que si $k = 0, 1, 2, .., n-1 \Rightarrow j = 1, 2, ..., n$. Luego,

$$t = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \cdot \frac{j}{n} t^j (1-t)^{n-j}$$

Observe que para $j = 0 \Rightarrow \frac{j}{n} = 0 \Rightarrow \binom{n}{j} = \frac{j}{n} t^j (1-t)^{n-j} = 0$. Así

$$t = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot \frac{j}{n} t^j (1-t)^{n-j}$$

$$\Rightarrow nt = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} j t^j (1-t)^{n-j}$$

Lo que demuestra al inciso 2.

3. Sean $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $t \in \mathbb{R}$

Si $n = 0 \Rightarrow (n^2 - n)t = 0 = \sum_{k=0}^{n=0} (k^2 - k)\, \theta_{n,k}(t)$

Si $n = 1 \Rightarrow (n^2 - n)t = 0 = \sum_{k=0}^{1} (k^2 - k)\, \theta_{n,k}(t)$

Si $n \geqslant 2 \Rightarrow n - 2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Así, por el inciso 1. aplicado a $n-2$, s.t.q.

$$1 = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} t^k (1-t)^{n-2-k}$$

Observe que

$$\binom{n-2}{k} = \frac{(n-2)!}{k!(n-2-k)!} \cdot \frac{(n-1)n}{(n-1)n} \cdot \frac{(k+1)(k+2)}{(k+1)(k+2)} = \binom{n}{k+2} \cdot \frac{(k+1)(k+2)}{(n-1)n}$$

Luego

$$1 = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k+2} \frac{(k+1)(k+2)}{(n-1)n} t^k (1-t)^{n-2-k}$$

Multiplicando por t^2

$$t^2 = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k+2} \frac{(k+1)(k+2)}{(n-1)n} t^{k+2}(1-t)^{n-2-k}$$

Definiendo $j = k+2 \Rightarrow$

$$n(n-1)t^2 = \sum_{j=2}^{n-2} \binom{n}{j} (j-1) t^j (1-t)^{n-j}$$

Note que si $j = 0, 1 \Rightarrow \binom{n}{j}(j-1)t^j(1-t)^{n-j} = 0$

$$\Rightarrow (n^2-n)t = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} j(j-n) t^j (1-t)^{n-j}$$

4. Como $\left(t - \frac{k}{n}\right)^2 = t^2 - \frac{2tk}{n} + \frac{k^2}{n^2}$ multiplicamos la expresión del inciso 1 por t^2, y a la expresión del inciso 2. por $(-2)\frac{t}{n}$ y obtenemos lo siguiente

$$t^2 = \sum_{k=0}^{n} t^2\, \theta_{n,k}(t) \qquad \text{y} \qquad -2t^2 = \sum_{k=0}^{n} (-2)\frac{kt}{n}\, \theta_{n,k}(t)$$

Luego sumamos las expresiones 2, y 3. y multiplicamos por $\frac{1}{n^2}$

$$\frac{nt + (n^2-n)t^2}{n^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2}\, \theta_{n,k}(t) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(k^2-k)}{n^2}\, \theta_{n,k}(t)$$

$\Rightarrow$ podemos reescribir la ecuación anterior como

$$\frac{t}{n} + t^2 - \frac{t^2}{n} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k + (k^2-k)}{n^2} \right) \theta_{n,k}(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2}\, \theta_{n,k}(t)$$

Sumando todas estas expresiones s.t.q.

$$t^2 - 2t^2 + \frac{t}{n} + t^2 - \frac{t^2}{n} = \sum_{k=0}^{n} t^2\, \theta_{n,k}(t) + \sum_{k=0}^{n} (-2)\frac{kt}{n}\, \theta_{n,k}(t) + \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2}\, \theta_{n,k}(t)$$

Es decir,

$$\frac{t}{n} - \frac{t^2}{n} = \frac{t-t^2}{n} = \sum_{k=0}^{n} \left(t^2 - \frac{2kt}{n} + \frac{k^2}{n^2} \right) \theta_{n,k}(t) = \sum_{k=0}^{n} \left(t - \frac{k}{n} \right)^2 \theta_{n,k}(t)$$

$\therefore$ es cierto el Teorema 5.8 □

Definición 5.11 (Polinomios de Bernstein II). Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua . Dado $n \in \mathbb{N}$ definimos al n-ésimo polinomio de Bernstein de f como

$$\mathrm{B}_n(f)(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (t-a)^k (b-t)^{n-k} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)$$

donde $t \in [a, b]$

Note que si $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ es continua

$$\mathrm{B}_n(f)(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (t-0)^k (1-t)^{n-k} f\left(0 + \frac{k}{n}(1-0)\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \theta_{n,k}(t)$$

$\forall\, t \in [0, 1]$

Teorema 5.9 (Aproximación de Weierstraß I). Si $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ es continua $\Rightarrow$ la sucesión de polinomios $\big(\mathrm{B}_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f en $[0, 1]$, o equivalentemente $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{B}_n(f) = f$ en el espacio métrico $(\mathcal{C}^*([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_u) = (\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_u)$

Proof. Si f es la función constante 0

$\Rightarrow \mathrm{B}_n(f)(t) = 0\, \forall\, n \in \mathbb{N}$ y $t \in [0, 1]$. Es claro que $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{B}_n(f) = f$ en $(\mathcal{C}^*([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_u)$

Si f no es la función constante 0

$\Rightarrow \|f\|_u = \|f\|_\infty \geqslant 0$

Sea $\varepsilon > 0$. Queremos ver que $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, n \geqslant N$ y $\forall\, t \in [0, 1] \Rightarrow \big|B_n(f)(t) - f(t)\big| < \varepsilon$

Como $[0, 1]$ es compacto f es uniformemente continua, esto por el Teorema 3.9, así, para $\frac{\varepsilon}{10} > 0\, \exists\, \delta > 0$ tal que

$$\forall\, x, y \in [0, 1] \Rightarrow |x - y| < \delta \Rightarrow \big|f(x) - f(y)\big| < \frac{\varepsilon}{10}$$

Como $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente en $\mathbb{R}\, \exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que

$$N > \frac{1}{\delta^4} \qquad \text{y} \qquad N > \frac{\|f\|_\infty^2}{\varepsilon^2}$$

Veamos que

$$\forall\, n \geqslant N\, \forall\, t \in [0, 1] \Rightarrow \big|f(t) - \mathrm{B}_n(f)(t)\big| < \frac{7\varepsilon}{10} < \varepsilon$$

Sea $n \geqslant N$ y $t \in [0, 1]$ arbitrarios $\Rightarrow$

$$n > \frac{1}{\delta^4} \qquad \text{y} \qquad n > \frac{\|f\|_\infty^2}{\varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} < \delta^4 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{n}} < \delta \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{\varepsilon}{\|f\|_\infty^2}$$

$$\Rightarrow \left|f(t) - \mathrm{B}_n(f)(t)\right| = \left|f(t)\cdot 1 - \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\,\theta_{n,k}(t)\right|$$

$$= \left|f(t)\left(\sum_{k=0}^{n}\theta_{n,k}(t)\right) - \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\,\theta_{n,k}(t)\right|$$

$$= \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\,\theta_{n,k}(t)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n}\left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\left|\,\theta_{n,k}(t)\right|$$

Como $\theta_{n,k}(t) \geqslant 0 \Rightarrow$

$$\left|f(t) - \mathrm{B}_n(f)(t)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n}\left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\theta_{n,k}(t)$$

Por otra parte, si definimos

$$\mathrm{F}_1 = \left\{k \in \{0,..,n\} \mid \left|t - \frac{k}{n}\right| < \frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right\} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{F}_2 = \left\{k \in \{0,..,n\} \mid \left|t - \frac{k}{n}\right| \geqslant \frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right\}$$

$\Rightarrow$ sucede que

$$\{0,..,n\} = \mathrm{F}_1 \cup \mathrm{F}_2 \qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad \mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2 = \varnothing$$

Por lo que podemos separar

$$\left|f(t) - \mathrm{B}_n(f)(t)\right| \leqslant \sum_{k\in \mathrm{F}_1}\left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\theta_{n,k}(t) + \sum_{k\in \mathrm{F}_2}\left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\theta_{n,k}(t) = \Xi + \Upsilon$$

Vamos a acotar a las sumas Ξ y Υ

Observe que, para Ξ, si $k \in \mathrm{F}_1 \Rightarrow$

$$\left|t - \frac{k}{n}\right| < \frac{1}{\sqrt[4]{n}} < \delta$$

y aplicando que $[0,1]$ es compacto y f es uniformemente continua s.t.q.

$$\left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{10}$$

$$\Rightarrow \sum_{k\in \mathrm{F}_1}\left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\theta_{n,k}(t) < \sum_{k\in \mathrm{F}_1}\frac{\varepsilon}{10}\,\theta_{n,k}(t) \leqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{\varepsilon}{10}\,\theta_{n,k}(t) = \frac{\varepsilon}{10}\sum_{k=0}^{n}\theta_{n,k}(t) = \frac{\varepsilon}{10}$$

Ahora, para Υ, como $\forall\, k \in \mathrm{F}_2 \Rightarrow$

$$\left|t - \frac{k}{n}\right| \geqslant \frac{1}{\sqrt[4]{n}} > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{\left(t - \frac{k}{n}\right)^2} \leqslant \sqrt{n}$$

Por lo que acotamos

$$\sum_{k\in F_2}\left|f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\theta_{n,k}(t)=\sum_{k\in F_2}\left|f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\frac{\left(t-\frac{k}{n}\right)^2}{\left(t-\frac{k}{n}\right)^2}\theta_{n,k}(t)$$
$$\leqslant\sum_{k\in F_2}\left(\left|f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\left(t-\frac{k}{n}\right)^2\cdot\sqrt{n}\,\theta_{n,k}(t)\right)$$

Además, como

$$\left|f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant|f(t)-f|\left|\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\|f\|_\infty+\|f\|_\infty=2\|f\|_\infty$$

Por lo que

$$\sum_{k\in F_2}\left|f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\theta_{n,k}(t)\leqslant\sum_{k\in F_2}2\|f\|_\infty\left(t-\frac{k}{n}\right)^2\cdot\sqrt{n}\,\theta_{n,k}(t)$$
$$\leqslant\sum_{k=0}^{n}\left(2\|f\|_\infty\left(t-\frac{k}{n}\right)^2\cdot\sqrt{n}\,\theta_{n,k}(t)\right)=2\|f\|_\infty\sqrt{n}\sum_{k=0}^{n}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2\theta_{n,k}(t)$$
$$=2\|f\|_\infty\sqrt{n}\frac{(t-t^2)}{n}$$

Pero para $t\in[0,1]$ s.t.q. $0\leqslant\left(t-\frac{1}{2}\right)^2=t^2-t+\frac{1}{4}\Rightarrow t^2-t\leqslant\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow\sum_{k\in F_2}\left|f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\theta_{n,k}(t)\leqslant2\|f\|_\infty\frac{\sqrt{n}}{n}(t-t^2)\leqslant2\|f\|_\infty\frac{\sqrt{n}}{n}\cdot\frac{1}{4}$$

Como $n\geqslant N>\frac{\|f\|_\infty^2}{\varepsilon^2}\Rightarrow\varepsilon^2>\frac{\|f\|_\infty^2}{n}\Rightarrow\frac{2\|f\|_\infty^2}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{4}<\frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow\sum_{k\in F_2}\left|f(t)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\theta_{n,k}(t)\leqslant2\|f\|_\infty\frac{\sqrt{n}}{n}\cdot\frac{1}{4}<\frac{\varepsilon}{2}$$

$\therefore\left|f(t)-B_n(f)(t)\right|=\Xi+\Upsilon<\frac{\varepsilon}{10}+\frac{\varepsilon}{2}=\frac{7\cdot\varepsilon}{10}<\varepsilon$

$\therefore B_n(f)\rightrightarrows f$ □

Teorema 5.10 (Aproximación de Weierstraß II). Sean $a,b\in\mathbb{R}$ con $a<b$. Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función continua $\Rightarrow$ $\exists$ una sucesión de polinomios $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $P_n\rightrightarrows f$ en $[a,b]$

Proof. La función $\varphi:[0,1]\to[a,b]$ definida por $\varphi(x)=a+x(b-a)$ es una función biyectiva y continua, y su inversa es la función $\varphi^{-1}:[a,b]\to[0,1]$ dada por:

$$\varphi^{-1}(y)=\frac{y-a}{b-a}$$

Defina $g = f \circ \varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$, y como la composición de funciones continuas es continua, g es una dunción continua. Observe que si f es una función constante $\Rightarrow$ podemos definir $P_n = f \;\forall\, n \in \mathbb{N}$. Claramente, cada P_n es un polinomio de grado cero, y también es claro que $P_n \rightrightarrows f$. Así, supongamos que f no es una función constante.

Por el Teorema 5.9, la sucesión $\big(\mathrm{B}_n(g)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a la función g en $[0,1]$. Defina, para $n \in \mathbb{N}$

$$P_n = \mathrm{B}_n(g) \circ \varphi^{-1}$$

Veamos que cada P_n es un polinomio, y que $P_n \rightrightarrows f$ en $[a,b]$. En primer lugar, sea $n \in \mathbb{N}$ cualquiera

$$\begin{aligned}
P_n(t) = (\mathrm{B}_n(g) \circ \varphi^{-1})(t) = \mathrm{B}_n(g)(\varphi^{-1}(t)) &= \mathrm{B}_n(g)\left(\frac{t-a}{b-a}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^k \left(1 - \frac{t-a}{b-a}\right)^{n-k} g\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(t-a)^k}{(b-a)^k} \cdot \frac{(b-a-(t-a))^{n-k}}{(b-a)^{n-k}} f\left(\varphi\left(\frac{k}{n}\right)\right) \\
\frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (t-a)^k (b-t)^{n-k} f\left(a + \left(\frac{k}{n}\right)(b-a)\right) &= \frac{1}{(b-a)^n} \mathrm{B}_n(f)(t)
\end{aligned}$$

Como $\mathrm{B}_n(f)(t)$ es un polinomio, multiplicado por el real $\frac{1}{(b-a)^n} \Rightarrow P_n$ sigue siendo un polinomio.

Ahora, veamos que $P_n \rightrightarrows f$

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por el Teorema 5.9 $\mathrm{B}_n(g) \rightrightarrows g$ en $[0,1]$ y $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall\, n \geqslant N \;\forall\, x \in [0,1] \Rightarrow \big|\mathrm{B}_n(g)(x) - g(x)\big| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Como $g^{-1} : [a,b] \to [0,1]$ es biyectiva $\Rightarrow \forall x \in [0,1] \,\exists$ una única $t \in [a,b]$ tal que $\varphi^{-1}(t) = x$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \forall\, n \geqslant N \;\forall\, t \in [a,b] \Rightarrow \Big|\mathrm{B}_n(g)(\varphi^{-1}(t)) - g(\varphi^{-1}(t))\Big| < \frac{\varepsilon}{2} \\
&\Rightarrow \forall\, n \geqslant N \;\forall\, t \in [a,b] \Rightarrow \Big|(\mathrm{B}_n(g) \circ \varphi^{-1})(t) - (f \circ g)(\varphi^{-1}(t))\Big| < \frac{\varepsilon}{2} \\
&\Rightarrow \forall\, n \geqslant N \;\forall\, t \in [a,b] \Rightarrow \big|P_n(t) - f(t)\big| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon
\end{aligned}$$

$\therefore P_n \rightrightarrows f$ en $[a,b]$ $\square$

Observación. Sabemos que la convergencia preserva continua. Es decir, si f_n es continua

$$f_n : X \to Y \Rightarrow f_n \rightrightarrows f : X \to Y$$

¿Ocurre lo mismo con la derivabilidad e integrabilidad de funciones? Veamos que para la derivabilidad, no es cierto esto último.

Ejemplo 5.8. Consideremos a la función $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$. La función f es continua en $[-1, 1]$, y no derivable en $x_0 = 0$. Pero por el Teorema 5.10 $\exists$ una sucesión de polinomios $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (t+1)^k (t-1)^{n-k} f\left(-1 + \left(\frac{k}{n}\right)(1 - (-1))\right)$$

tales que $P_n \rightrightarrows f$ en $[-1, 1]$, y por la secundaria, se save que todo polinomio es derivable en $\mathbb{R}$

Definición 5.12 (Uniformemente Cauchy)**.** Las sucesiones $\langle f_n : X \to Y \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ que tienen la propiedad

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N}\, \forall\, n, m \geqslant N\, \forall\, x \in X \Rightarrow \rho(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$$

son llamadas sucesiones de funciones uniformemente Cauchy

Teorema 5.11. Sean (X, d) y (Y, ρ) dos espacios métricos, donde (Y, ρ) es completo. Si $\langle f_n : X \to Y \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ es una sucesión de funciones tal que

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N \in \mathbb{N}\, \forall\, n, m \geqslant N\, \forall\, x \in X \Rightarrow \rho(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$$

es uniformemente Cauchy $\Rightarrow\ \exists\, f : X \to Y$ tal que $f_n \rightrightarrows f$ en X

Proof. Sea $x \in X$ cualquier elemento. Resulta que la sucesión $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en (Y, ρ)

En efecto, sea $\varepsilon > 0$ arbitraria. Por satisfacer la Definición 5.12, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall\, n, m \geqslant N\, \forall\, z \in X \Rightarrow \rho(f_n(z), f_m(z)) < \varepsilon$$

En particular como $x \in X$

$$\forall\, n, m \geqslant N \Rightarrow \rho(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$$

Así $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en (Y, ρ). Como (Y, ρ) es un espacio métrico, $\exists\, y_x \in Y$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = y_x$ en (Y, ρ)

Definamos $f : X \to Y$ por medio de $f(x) = y_x \Rightarrow$ veamos que $f_n \rightrightarrows f$ en X

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Aplicando la Definición 5.12, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall\, n, m \geqslant N\, \forall\, x \in X \Rightarrow \rho(f_n(x), f_m(x)) < \frac{\varepsilon}{4}$$

Veamos que

$$\forall\, n \geqslant N\, \forall\, x \in X \Rightarrow \rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

Sean $n \geqslant N$ y $x \in X$ cualesquiera elementos

Como $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para $\frac{\varepsilon}{4} > 0 \,\exists\, M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall\, m \geqslant M \,\forall\, x \in X \Rightarrow \rho(f_m(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{4}$$

Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > N$ y $m > M \Rightarrow$

$$\rho(f_n(x), f(x)) \leqslant \rho(f_n(x), f_m(x)) + \rho(f_m(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{1 \cdot \varepsilon}{4} < \varepsilon$$

$\therefore f_n \rightrightarrows f$ en X □

Lema 5.7. Si $f_n \rightrightarrows f$ en $X \Rightarrow \langle f_n : X \to Y \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ es uniformemente de Cauchy

Teorema 5.12. Si $a < b$ y $\langle f_n : (a,b) \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ es una sucesión de funciones tal que

1. Cada f_n es derivable en (a,b)
2. $\exists\, x_0 \in (a,b)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) \,\exists\, \in \mathbb{R}$
3. $\exists$ una función $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ tal que $f_n' \rightrightarrows g$

$\Rightarrow\ \exists\, f : (a,b) \to \mathbb{R}$ tal que $f_n \rightrightarrows f$, f es derivable en (a,b), y $f' = g$

Proof. Veamos que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy en (a,b)

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Como $f_n' \rightrightarrows g$, por el Lema 5.7, la sucesión $\left(f_n'\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy en $(a,b) \Rightarrow\ \exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall\, n, m \geqslant N \,\forall\, x \in (a,b) \Rightarrow \left|f_n'(x) - f_m'(x)\right| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

Por otro lado, debido a que $\lim\limits_{n\to\infty} \,\exists\, \in \mathbb{R}$, la sucesión $\big(f_n(x_0)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{R} \Rightarrow$ para $\frac{\varepsilon}{4} \,\exists\, M \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall\, n, m \geqslant M \Rightarrow \left|f_n(x_0) - f_m(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Sea $K = \max\{N, M\}$. Resulta que

$$\forall\, n, m \geqslant K \,\forall\, x \in (a,b) \Rightarrow \left|f_n(x) - f_m(x)\right| < \varepsilon$$

En efecto, sean $n, m \geqslant K$ y $x \in (a,b)$ cualesquiera elementos.

Si $x = x_0 \Rightarrow$ como $n, m \geqslant K \Rightarrow n, m \geqslant M \Rightarrow$

$$\left|f_n(x) - f_m(x)\right| = \left|f_n(x_0) - f_m(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$$

Si $x \neq x_0 \Rightarrow$ el intervalo cerrado I de extremos x y x_0 está contenido en $(a,b) \Rightarrow \mathrm{I} \subseteq (a,b)$. Como f_n y f_m son derivables en $(a,b) \Rightarrow f_n - f_m$ es derivable en (a,b), y por tanto, es derivable en el intervalo I. Aplicando el Teorema 5.4 a $f_n - f_m$, s.t.q. $\exists\, c$ entre x y x_0 tal que

$$f'_n(c) - f'_m(c) = \frac{(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))}{x - x_0}$$

$$\Rightarrow \left|f_n(x) - f_m(x)\right| = \left|(x - x_0)(f'_n(c) - f'_m(c)) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))\right|$$
$$\leqslant \left|f'_n(c) - f'_m(c)\right|(b-a) + \left|f_n(x_0) - f_m(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \cdot (b-a) + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$$

$\therefore$ por lo anterior, $\exists\, f : (a,b) \to \mathbb{R}$ tal que $f_n \rightrightarrows f$ en (a,b)

Ahora, veamos que f es derivable en (a,b) y que $f' = g$

Sea $z \in (a,b)$ cualquiera. Definamos $\forall\, n \in \mathbb{N}$ a la función $\varphi_n : (a,b) \to \mathbb{R}$ con la regla de correspondencia

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{f_n(x) - f_n(z)}{x - z} & \text{si } z \neq z \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(z)}{x - z} = f'_n(z) & \text{si } x = z \end{cases}$$

Veamos ahora, que $\exists\, \varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$, para ello, por el Teorema 5.11, basta probar que $\langle f_n : X \to Y \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ es uniformemente de Cauchy.

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\left(f'_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall\, n, m \geqslant N\, \forall\, x \in (a,b) \Rightarrow \left|f'_n(x) - f'_m(x)\right| < \varepsilon$$

Veamos que

$$\forall\, n, m \geqslant N\, \forall\, x \in (a,b) \Rightarrow \left|f_n(x) - f_m(x)\right| < \varepsilon$$

En efecto, sean $n, m \geqslant N$ y $x \in (a,b)$ cualquiera.

Si $x = z \Rightarrow$ como $\left(f'_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy $\Rightarrow$

$$\left|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)\right| = \left|\varphi_n(z) - \varphi_m(z)\right| = \left|f'_n(x) - f'_m(x)\right| < \varepsilon$$

Si $x \neq z$, por ello, s.t.q. $x, z \in (a,b) \Rightarrow$ con el intervalo cerrado I, de extremos x y $z \Rightarrow \mathrm{I} \subseteq (a,b)$. Debido a que f_n y f_m son deribables en $(a,b) \Rightarrow f_n - f_m$ es continua en I y derivable en el abierto de extremos x y z. Por el Teorema 5.4, $\exists\, c$ entre x y z tal que

$$f'_n(c) - f'_m(c) = (f_n - f_m)(c) = \frac{(f_n - f_m)(x) - (f_n - f_m)(z)}{x - z}$$
$$= \frac{f_n(x) - f_m(x)}{x - z} - \frac{f_n(z) - f_m(z)}{x - z} = \varphi_n(x) - \varphi_m(x)$$

Aplicando una vez más, que $\left(f'_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy, para c s.t.q.

$$\left|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)\right| = \left|f'_n(c) - f'_m(c)\right| < \varepsilon$$

$\therefore \langle f_n : X \to Y \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ es uniformemente Cauchy.

Por Teorema 5.11, $\exists\, \varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ en (a,b). Notemos ahora lo siguiente.

1. Cada φ_n es continua en z

$$\Rightarrow \lim_{x \to z} \varphi_n(x) = \lim_{x \to z} \frac{f_n(x) - f_m(x)}{x - z} = f_n'(z) = \varphi_n(z)$$

   $\therefore \varphi_n$ es continua en z

2. Como $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$, y cads φ_n es continua en $z \Rightarrow \varphi$ es continua en z
3. $\varphi_n \to \varphi$ converge puntualmente, esto porque converge uniformemente, y así, también ocurre que $f_n \to f$ y que $f_n \to g$

Para ver que f es derivable en z y que $f'(z) = g(z)$, encontramos el valor de $\varphi(x)$

Si $x = z$, por la Definición 5.5 $\Rightarrow$

$$\varphi(z) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(z) = \lim_{n \to \infty} f'(z) = g(z)$$

Esto porque $f_n \to g$

Si $x \neq z$, como $f_n \to f \Rightarrow$

$$\varphi(x) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = \lim_{x \to z} \frac{f_n(x) - f_m(x)}{x - z} = \frac{f(x) - fm(x)}{x - z}$$

Para finalizar, notemos que como $x \neq z$

$$\lim_{x \to z} \frac{f_n(x) - f_m(x)}{x - z} = \lim_{x \to z} \varphi(x) = \varphi(z) = g(z)$$

$\therefore f$ es derivable en z y además $f'(z) = g(z)$. Así, f es derivable en (a,b) y $f' = g$

$\square$

Definición 5.13. Sea $A \subseteq X \Rightarrow$ diremos que A es denso en X si $\mathrm{cl}(A) = X$, es decir, si $\forall\, x \in X\ \exists$ una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en A tal que $a_k \to x$ en X

Teorema 5.13. Sea K un espacio métrico compacto y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(X)$, de la Definición 5.1, que cumple las siguientes propiedades

1. $\forall\, \varphi, \psi \in \mathcal{A}$ y $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda\varphi + \mu\psi \in \mathcal{A}$
2. $\forall\, \varphi, \psi \in \mathcal{A} \Rightarrow \varphi\psi \in \mathcal{A}$
3. $1 \in \mathcal{A}$
4. Si $x \neq y \in K \Rightarrow\ \exists\, \varphi \in \mathcal{A}$ tal que $\varphi(x) \neq \varphi(y)$

$\Rightarrow \mathcal{A}$ es denso en $\mathcal{C}(X)$, es decir, dada una función continua $f : X \to \mathbb{R} \Rightarrow\ \exists$ una sucesión (φ_k) de funciones en $\mathcal{A}$ tal que $\varphi_k \rightrightarrows f$ en K