1. Sea ρ una métrica en un conjunto X. Demostrar que las siguientes funciones también son métricas:

a) $\rho_1(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$

b) $\rho_3(x,y) = \min(\{1, \rho(x,y))\})$

Proof. (D_1) Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ P.D. $\rho_1(x,y) \geqslant 0$.

Notemos que, $\rho(x,y) \geqslant 0$

$$\Rightarrow 1 + \rho(x,y) \geqslant 0$$

Si $a \geqslant 0$ y $b \geqslant 0 \Rightarrow \frac{a}{b} \geqslant 0$

$$\Rightarrow \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} \geqslant 0 \Rightarrow \rho_1(x,y) \geqslant 0$$

(D_2) Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ P.D. $\rho_1(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$$\rho_1(x,y) = 0 \Leftrightarrow \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} = 0$$

Si $b \neq 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0$

$$\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} = 0 \Leftrightarrow \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

(D_3) Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ P.D. $\rho_1(x,y) = \rho_1(y,x)$

$$\rho_1(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} = \frac{\rho(y,x)}{1+\rho(y,x)} = \rho_1(y,x)$$

(D_4) Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ P.D. $\rho_1(x,z) \leqslant \rho_1(x,y) + \rho_1(y,z)$

$$\rho_1(x,z) = \frac{\rho(x,z)}{1+\rho(x,z)} = \frac{1+\rho(x,z)-1}{1+\rho(x,z)}$$

$$= \frac{1+\rho(x,z)}{1+\rho(x,z)} - \frac{1}{1+\rho(x,z)} = 1 - \frac{1}{1+\rho(x,z)}$$

$$\leqslant 1 - \frac{1}{1+\rho(x,y)+\rho(y,z)} = \frac{1+\rho(x,y)+\rho(y,z)-1}{1+\rho(x,y)+\rho(y,z)}$$

$$= \frac{\rho(x,y)+\rho(y,z)}{1+\rho(x,y)+\rho(y,z)} = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)+\rho(y,z)} + \frac{\rho(y,z)}{1+\rho(x,y)+\rho(y,z)}$$

$$\leqslant \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} + \frac{\rho(y,z)}{1+\rho(y,z)} = \rho_1(x,y) + \rho_1(y,z)$$

$$\Rightarrow \rho_1(x,z) \leqslant \rho_1(x,y) + \rho_1(y,z)$$

$\therefore \rho_1(x,y)$ es una métrica en $\mathbb{R}^n$. $\square$

Proof. (D_1) Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ P.D. $\rho_3(x,y) \geqslant 0$

Si $\rho(x,y) > 1 \Rightarrow \rho_3(x,y) = 1$. Si $\rho(x,y)) \leqslant 1 \Rightarrow \rho_3(x,y) = \rho(x,y)$. Tenemos los siguientes casos.

a) $\rho(x,y)) > 1 \Rightarrow \rho_3(x,y) = 1$

$$1 > 0 \Rightarrow \rho_3(x,y) \geqslant 0$$

b) $\rho(x,y)) \leqslant 1 \Rightarrow \rho_3(x,y) = \rho(x,y))$ Por definición, $\rho(x,y) \geqslant 0, \Rightarrow \rho_3(x,y) \geqslant 0$

(D_2) Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ P.D. $\rho_3(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$$\rho_3(x,y) = 0 \Leftrightarrow \min(\{1, \rho(x,y)\}) = 0 \Leftrightarrow \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

(D_3) Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ P.D. $\rho_3(x,y) = \rho_3(y,x)$

$$\rho_3(x,y) = \min(\{1, \rho(x,y)\}) = \min(\{1, \rho(y,x)\}) = \rho_3(y,x)$$

(D_4) Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ P.D. $\rho_3(x,z) \leqslant \rho_3(x,y) + \rho_3(y,z)$. Tenemos los siguientes casos.

a) Si $\rho(x,y)) > 1 \Rightarrow \rho_3(x,y) = 1$ o $\rho(y,z) > 1 \Rightarrow \rho_3(y,z) = 1$
Notemos que, por definición, $\rho_3(x,z) \leqslant 1$

$$\rho_3(x,y) + \rho_3(y,z) \geqslant 1$$

$$\rho_3(x,z) \leqslant 1 \leqslant \rho_3(x,y) + \rho_3(y,z) \Rightarrow \rho_3(x,z) \leqslant \rho_3(x,y) + \rho_3(y,z)$$

b) Si $\rho(x,y)) < 1 \Rightarrow \rho_3(x,y) = \rho(x,y))$ o $\rho(y,z) < 1 \Rightarrow \rho_3(y,z) = \rho(y,z)$

$$\rho_3(x,y) + \rho_3(y,z) = \rho(x,y)) + \rho(y,z) \geqslant \rho(x,z) \geqslant \rho_3(x,z) \Rightarrow$$
$$\rho_3(x,z) \leqslant \rho_3(x,y) + \rho_3(y,z)$$

$\therefore \rho_3(x,y)$ es una métrica en $\mathbb{R}^n$

□

2. a) Sea $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ una métrica. Prueba la desigualdad tetrahédrica

$$|\rho(x,y) - \rho(z,w)| \leqslant \rho(x,z) + \rho(y,w)$$

$\forall\, x, y, z, w \in X$

b) Sea $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ una función $\ni$

i. $\forall\, x \in X \Rightarrow \rho(x,x) = 0$

ii. $\forall\, x \neq y \in X \Rightarrow \rho(x,y) = \rho(y,x) > 0$

iii. Satisface la desigualdad tetrahédrica

Pruebe que ρ es una métrica

Proof. Sea $x, y, z, w \in X$ arbitrario. Como ρ es una métrica en X s.t.q.

$$\rho(x,y) \leqslant \rho(x,w) + \rho(w,y) \leqslant (\rho(x,z) + \rho(z,w)) + \rho(y,w)$$
$$\Rightarrow \rho(x,y) - \rho(w,z) \leqslant \rho(x,z) + \rho(y,w)$$

Además

$$\rho(z,w) \leqslant \rho(z,y) + \rho(y,w) \leqslant (\rho(z,x) + \rho(x,y)) + \rho(w,y)$$
$$\Rightarrow \rho(w,z) - \rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(y,w)$$

Tanto $\rho(x,y) - \rho(z,w)$ como $-(\rho(x,y) - \rho(z,w)) \leqslant \rho(x,z) + \rho(y,w) \Rightarrow$ con la función $|\cdot|$ s.t.q.

$$|\rho(x,y) - \rho(z,w)| \leqslant \rho(x,z) + \rho(y,w)$$

□

Proof. (D_1) Por definición de ρ s.t.q $\forall\, x, y \in X \Rightarrow \rho(x,y) \geq 0$

(D_2) Si $x = y$, por el inciso i. $\rho(x,x) = 0 \Rightarrow$ necesariamente $x = y$, porque de lo contrario, por ii. $\rho(x,y) > 0$

(D_3) Se sigue de i. y ii.

(D_4) Sean $x, y, z \in X$ elementos arbitrarios

$$\rho(x,y) = |\rho(x,y)| = |\rho(x,y) + \rho(x,z) - \rho(x,z)|$$
$$\leqslant |\rho(x,z)| + |\rho(x,y) - \rho(x,z)|$$

Por la desigudaldad tetrahédrica s.t.q.

$$|\rho(x,y) - \rho(x,z)| \leqslant \rho(x,x) + \rho(y,z)$$
$$\Rightarrow \rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(x,x) + \rho(y,z) = \rho(x,z) + \rho(y,z)$$

$\therefore \rho$ es una métrica en X □

3. ¿Qué condiciones debe satisfacer una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida sobre $\mathbb{R}$ para que en la recta real se pueda dar una métrica por medio de la igualdad $\rho(x,y) = |f(x) - f(y)|$?

Esta función debe de ser injectiva, es decir $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$

Proof. (D_1) Sea $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \geqslant 0$ por propiedades de $|\cdot|$

(D_2) Sea $x, y \in \mathbb{R}$ Como f es inyectiva, s.t.q.

$$\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow |f(x) - f(y)| \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$$

(D_3) Sea $x, y \in \mathbb{R}$. Por propiedades de $|\cdot|$ s.t.q.

$$\rho(x,y) = |f(x) - f(y)| = |f(y) - f(x)| = \rho(y,x)$$

(D_4) Sea $x, y, z \in \mathbb{R}$. Por propiedades de $|\cdot|$ s.t.q.

$$\rho(x,z) = |f(x) - f(z)| \leqslant |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(z)| = \rho(x,y) + \rho(y,z)$$

$\therefore \rho$ es métrica en $\mathbb{R}$ $\square$

4. Suponga que (X, d) es un espacio métrico y fije una función $f : [0, \infty] \to [0, \infty]$ estrictamente creciente $\ni f(0) = 0$. Demuestre que si f es una función subaditiva (es decir, si $\forall\, x, y \in [0, \infty]$ se teiene la desigualdad $f(x + y) \leqslant f(x) + f(y) \Rightarrow f \circ d : X \times X \to [0, \infty]$ es una métrica en X.

Proof. (D_1) Sean $x, y \in X$. Como d es una métrica en $X \Rightarrow d(x, y) \geqslant 0$. Por otra parte, como f es estrictamente creciente $f(t) \geqslant 0\, \forall\, t \in [0, \infty]$. Por lo cual $(f \circ d)(x, y) = f(d(x, y)) \geqslant 0$

(D_2) Sean $x, y \in X$. Por hipótesis $f(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0\, \forall\, t \in [0, \infty]$. Usando esto s.t.q.

$$(f \circ d)(x,y) = 0 \Leftrightarrow f(d(x,y)) = 0 \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

(D_3) Sean $x, y \in X$. Como d es métrica en X, note lo siguiente

$$(f \circ d)(x,y) = f(d(x,y)) = f(d(y,x)) = (f \circ d)(y,x)$$

(D_4) Sean $x, y, x \in X$. Notemos que, como f es estrictamente creciente, y además subaditiva s.t.q

$$\begin{aligned}(f \circ d)(x,z) = f(d(x,z)) \leqslant f(d(x,y) + d(y,z)) \leqslant f(d(x,y)) + f(d(y,z))\\ = (f \circ d)(x,y) + (f \circ d)(y,z) \Rightarrow (f \circ d)(x,z) \leqslant (f \circ d)(x,y) + (f \circ d)(y,z)\end{aligned}$$

$\therefore f \circ d$ es una métrica en X $\square$

5. Sea X un conjunto no vacío y $d : X \times X \to [0, \infty]$ una función que cumple las siguientes condiciones $\forall\, x, y, z \in X$

(a) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(b) $d(x, y) = d(y, x)$

(c) $d(x, z) \geqslant d(x, y) + d(y, z)$

Pruebe que bajo estas condiciones X tiene únicamente un punto

Proof. Supongamos $x, y \in X \ni x \neq y$

Por la propiedad (a) s.t.q. $d(x, x) = 0$

Por la desigualdad triangular de la hipótesis s.t.q.

$$d(x,x) \geqslant d(x,y) + d(y,x) = 0 \geqslant 2 \cdot d(y,x) = 0 \geqslant d(x,y)$$

Como $d : X \times X \to [0, \infty] \Rightarrow d(x, y) = 0$. Pero por (a) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \Rightarrow\Leftarrow$

Pero esto es una contradicción, ya que supusimos a $x \neq y$ $\therefore X$ tiene únicamente un punto $\square$

6. En el conjunto $\mathbb{Z}^+$ de los enteros positivos tomemos:

$$\rho(n,m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m = n \\ 1 + \frac{1}{n+m} & \text{si } m \neq n \end{cases}$$

Demuestre que ρ es una métrica.

Proof. (D_1) Sea $n, m \in \mathbb{Z}^+$ Si $m = n \Rightarrow \rho(n,m) \geqslant 0$. Si $m \neq n \Rightarrow \rho(n,m) \geqslant 0$, ya que

$$\rho(n,m) = 1 + \frac{1}{n+m} \geqslant 0$$

(D_2) Se sigue de la definición de $\rho(n,m)$

(D_3) Sea $n, m \in \mathbb{Z}^+$

$$\rho(n,m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m = n \\ 1 + \frac{1}{n+m} & \text{si } m \neq n \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = m \\ 1 + \frac{1}{m+n} & \text{si } n \neq m \end{cases} = \rho(m,n)$$

(D_4) Sea $n, m, c \in \mathbb{Z}^+$. Veamos que $\rho(n,c) \leqslant \rho(n,m) + \rho(m,c)$. Supongamos que $n \neq c$, ya que ese caso es trivial.

$$\rho(n,c) = 1 + \frac{1}{n+c} \leqslant 2 + \frac{1}{n+m} + \frac{1}{m+c}$$

Esto porque $n, m, c \in \mathbb{Z}^+$

$$= \left(1 + \frac{1}{n+m}\right) + \left(1 + \frac{1}{m+c}\right) = \rho(n,m) + \rho(m,c)$$

$\therefore \rho$ es una métrica en $\mathbb{Z}^+$ □

7. Sea $M_{n\times n}$ el espacio de matrices reales de tamaño $n \times n$. Demuestre que este conjunto es un espacio métrico con la función

$$\rho(A,B) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij} - b_{ij}| \right)$$

Donde $A = a_{ij}$ y $B = b_{ij}$

Proof. (D_1) Sea $A, B \in M_{n\times n}$. Por propiedades de $|\cdot|$ s.t.q.

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{ij} - b_{ij}| \geqslant 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij} - b_{ij}| \right) \geqslant 0 \Rightarrow \rho(A,B) \geqslant 0$$

(D_2) Sea $A, B \in M_{n\times n}$

$$\rho(A,B) = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij} - b_{ij}| \right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |a_{ij} - b_{ij}| 0 \Leftrightarrow |a_{ij} - b_{ij}| = 0 \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$$

(D_3) Sea $A, B \in M_{n\times n}$

$$\rho(A,B) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij} - b_{ij}|\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}|b_{ij} - a_{ij}|\right) = \rho(B,A)$$

(D_4) Sea $A, B, C \in M_{n\times n}$

$$\rho(A,B) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij} - b_{ij}|\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij} - c_{ij} + c_{ij} - b_{ij}|\right)$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(|a_{ij} - c_{ij}| + |c_{ij} - b_{ij}|)\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij} - c_{ij}| + \sum_{i=1}^{n}|c_{ij} - b_{ij}|\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij} - c_{ij}|\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}|c_{ij} - b_{ij}|\right) = \rho(A,C) + \rho(C,B)$$

$\therefore \rho(A,B)$ es una métrica en $M_{n\times n}$ □

8. Demuestra que $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| \mid i = 1, ..., n\}$ y $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i|$ donde $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ son normas en $\mathbb{R}^n$

Proof. (N_1) $\forall\, (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ arbitrario s.t.q. $|x_i| \geqslant 0\; \forall\, i = 1, ..., n$

$$\Rightarrow \max\{|x_i| \mid i = 1, ..., n\} = \|x\|_\infty \geqslant 0$$

(N_2)

$$\|x\|_\infty = 0 = \max\{|x_i| \mid i = 1, ..., n\} \Leftrightarrow |x_i| = 0\; \forall\, i = 1, ..., n \Leftrightarrow x_i = (0, ..., 0)$$

(N_3) Sea $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrarios

$$\Rightarrow \|\lambda x\|_\infty = \max\{|\lambda x_i| \mid i = 1, ..., n\} = \max\{|\lambda||\lambda x_i| \mid i = 1, ..., n\}$$

Lema. Probaremos que, en general, $\forall\, \varepsilon > 0$ y $y_1, ..., y_n \in \mathbb{R}^n$ s.t.q. $\max\{\varepsilon \cdot y_i \mid i = 1, ..., n\} = \varepsilon \cdot \max\{y_i \mid i = 1, ..., n\}$

Proof. Supongamos que $\varepsilon \cdot y_j = \max\{\varepsilon \cdot y_i \mid i = 1, ..., n\}$ para algún índice $j \in \{1, ..., n\} \Rightarrow \forall\, i = 1, ..., n$ s.t.q.

$$y_i \leqslant \varepsilon \cdot y_i \leqslant \varepsilon \cdot y_j$$

Como $\varepsilon > 0 \Rightarrow y_i \leqslant y_j\; \forall\, i = 1, ..., n$, es decir que

$$y_j = \max\{y_i \mid i = 1, ..., n\}$$

Así que, como $y_i \leqslant y_j \leqslant \varepsilon \cdot y_i \leqslant \varepsilon \cdot y_j$, s.t.q.

$$\varepsilon \cdot \max\{y_i \mid i = 1, ..., n\} \leqslant \max\{\varepsilon \cdot y_i \mid i = 1, ..., n\}$$

Por otra parte, como $y_j = \max\{y_i \mid i = 1, ..., n\} \Rightarrow \forall\, i = 1, ..., n$ s.t.q.

$$\varepsilon \cdot y_i \leqslant \varepsilon \cdot y_j$$

Como $\varepsilon > 0 \Rightarrow$

$$\max\{\varepsilon \cdot y_i \mid i = 1, ..., n\} \leqslant \varepsilon \cdot y_j$$
$$\max\{\varepsilon \cdot y_i \mid i = 1, ..., n\} \leqslant \varepsilon \cdot \max\{y_i \mid i = 1, ..., n\}$$
$$\Rightarrow max\{\varepsilon \cdot y_i \mid i = 1, ..., n\} = \varepsilon \cdot \max\{y_i \mid i = 1, ..., n\}$$

□

Para $\lambda \in \mathbb{R}$ tenemos los siguientes casos

i. $\lambda = 0$
En este caso $\lambda \cdot x = \vec{0}$ y por (N_2) s.t.q.

$$\|\lambda x\|_\infty = 0 = 0 \cdot \|x\|_\infty$$

ii. $\lambda \neq 0 \Rightarrow |\lambda| > 0$
Por el **Lema** anterior s.t.q.

$$\max\{|\lambda||\lambda x_i| \mid i = 1, ..., n\} = |\lambda| \max\{|\lambda x_i| \mid i = 1, ..., n\} = |\lambda|\|x\|_\infty$$

(N_4) Sean $x = (x_1, ..., x_n)$ y $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ arbitrarios. Por definición de $\|\cdot\|_\infty$ s.t.q.

$$\|x + y\|_\infty = \max\{|x_i + y_i| \mid i = 1, ..., n\}$$

Supongamos que $|x_j + y_j| = \max\{|x_i + y_i| \mid i = 1, ..., n\}$
Como $|x_j + y_j| \leqslant |x_j| + |y_j|$

$$\max\{|x_i + y_i| \mid i = 1, ..., n\} \leqslant |x_j| + |y_j|$$

$$|x_j| \leqslant \max\{|x_i| \mid i = 1, ..., n\} \qquad \text{y} \qquad |y_j| \leqslant \max\{|y_i| \mid i = 1, ..., n\}$$

Por lo cual, por transitividad de $\leqslant$

$$\max\{|x_i + y_i| \mid i = 1, ..., n\} \leqslant \max\{|x_i| \mid i = 1, ..., n\} + \max\{|y_i| \mid i = 1, ..., n\}$$
$$\Rightarrow \|x + y\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

$\therefore \|x\|_\infty = \max\{|x_i| \mid i = 1, ..., n\}$ es una norma en $\mathbb{R}^n$ □

Proof. (N_1) $\forall\, (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ arbitrario s.t.q. $|x_i| \geqslant 0\, \forall\, i = 1, ..., n$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \geqslant 0$$

(N_2)

$$\|x\|_1 = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0 \Leftrightarrow x_i = 0\, \forall\, i = 1, ...n$$

(N_3) Sea $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\|\lambda x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i| = \sum_{i=1}^{n} |\lambda||x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |\lambda|\|x\|_1$$

(N_4) Sea $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\|x + y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

$\therefore \|x\|_1$ es una norma en $\mathbb{R}^n$ $\square$

9. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ an una serie convergente de números reales positivos. En el conjunto E de todas las sucesiones de números reales $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definimos

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1 + |x_n - y_n|}{|x_n - y_n|}$$

(a) Demostrar que d es una métrica en E

(b) ¿Se puede introducir una norma en el espacio E de tal modo que se cumpla la igualdad $d(x, y) = \|x - y\|$?

(c) Dar un ejemplo de una sucesión $(x_n^1, x_n^2, ...) x_n^i \in \mathbb{R}$ que converja en el espacio E, que pertenezca al espacio ℓ_2 pero que no converja en el espacio ℓ_2.

Proof. Primero veamos que $d : E \times E \to \mathbb{R}$ está bien definida, es decr, que $\forall\, x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1 + |x_n - y_n|}{|x_n - y_n|}$$

converge en $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ supongamos que $x, y \in E$ arbitrarios. Notemos que

$$0 \leqslant \frac{1 + |x_n - y_n|}{|x_n - y_n|} \leqslant 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Así que

$$0 \leqslant a_n \frac{1 + |x_n - y_n|}{|x_n - y_n|} \leqslant a_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$0 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1 + |x_n - y_n|}{|x_n - y_n|} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ por criterios de convergencia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1+|x_n-y_n|}{|x_n-y_n|}$ converge a un número en $\mathbb{R}$

(D_1) En la demostración de que d está bien definida se hace evidente

(D_2) Supongamos que $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1+|x_n - y_n|}{|x_n - y_n|} = 0 \Leftrightarrow \ \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \frac{1+|x_n - y_n|}{|x_n - y_n|} = 0$$

$$\Leftrightarrow |x_n - y_n| = 0 \Leftrightarrow x_n = y_n \,\forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

(D_3) Sean $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1+|x_n - y_n|}{|x_n - y_n|} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1+|y_n - x_n|}{|y_n - x_n|} = d(y,x)$$

(D_4) Sean $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$
En el ejercicio **1.** se demostro que $\forall\, n \in \mathbb{N}$ s.t.q.

$$\frac{1+|x_n - y_n|}{|x_n - y_n|} \leqslant \frac{1+|x_n - z_n|}{|x_n - z_n|} + \frac{1+|z_n - y_n|}{|z_n - y_n|}$$

Así que

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1+|x_n - y_n|}{|x_n - y_n|} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{1+|x_n - z_n|}{|x_n - z_n|} + \frac{1+|z_n - y_n|}{|z_n - y_n|} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{1+|x_n - z_n|}{|x_n - z_n|} + a_n \frac{1+|z_n - y_n|}{|z_n - y_n|} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1+|x_n - z_n|}{|x_n - z_n|} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1+|z_n - y_n|}{|z_n - y_n|} = d(x,z) + d(z,y)$$

$\therefore d$ es una métrica en E $\square$

Proof. Para que $d(x,y) = \|x - y\|$ sea compatible se debe de cumplir $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$

$$d(\lambda x, \lambda y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1+|\lambda x_n - \lambda y_n|}{|\lambda x_n - \lambda y_n|} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1+|\lambda \cdot (x_n - y_n)|}{|\lambda \cdot (x_n - y_n)|}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1+|\lambda||x_n - y_n|}{|\lambda||x_n - y_n|} \neq |\lambda| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1+|x_n - y_n|}{|x_n - y_n|}$$

$\square$

10. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado cuya norma procede de un producto interior.

(a) Demuestra que la igualdad $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ implica que los vectores x y y son linealmente dependientes.

(b) Comprueba la identidad del paralelogramo

(c) Infiera que la norma infinito y norma uno no provienen de un producto interior

Proof. Recordemos la desigualdad C-S. Sea $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio con producto interior, $\implies$ $\forall\, x, y \in V$ s.t.q.

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle}$$

Para probar el inciso a) es sufciente probar el siguiente lema

Lema. En las condiciones de C-S

$$|\langle x, y\rangle| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle} \Leftrightarrow x, y \text{ es linealmente dependiente}$$

Proof. $\Rightarrow$ Supongamos que $|\langle x, y\rangle| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle}$
Supongamos que $x \neq 0 \neq y$, ya que cuando son $x = 0$ o $y = 0$ trivialmente se cumple que son linealmente dependiente.

$$\Rightarrow \langle x, y\rangle^2 = \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle$$

Por ello, s.t.q.

$$\langle x, x\rangle = \frac{\langle x, y\rangle^2}{\langle y, y\rangle} \Rightarrow \langle x, x\rangle - \frac{\langle x, y\rangle^2}{\langle y, y\rangle} = 0 \Rightarrow \langle x, x\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} \cdot \langle x, y\rangle$$

$$= \langle x, x\rangle - 2 \cdot \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} \cdot \langle x, y\rangle + \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} \cdot \langle x, y\rangle$$

$$= \langle x, x\rangle - 2 \cdot \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} \cdot \langle x, y\rangle + \frac{\langle x, y\rangle^2}{\langle y, y\rangle} \frac{\langle y, y\rangle}{\langle y, y\rangle} = \langle x, x\rangle - 2 \cdot \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} \cdot \langle x, y\rangle + \frac{\langle x, y\rangle^2}{\langle y, y\rangle^2} \langle y, y\rangle$$

Definimos a $\lambda_0 = \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$0 = \langle x, x\rangle - 2\lambda_0 \langle x, y\rangle + \lambda_0^2 \langle y, y\rangle$$

$$= \langle x - \lambda_0 y, x - \lambda_0 y\rangle = 0 \Leftrightarrow x - \lambda_0 y = 0 \Rightarrow x = \lambda_0 y \Leftrightarrow \text{ son l.d.}$$

$\Leftarrow$ Supongamos que son l.d. $\Rightarrow\ \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ni$ no sn ambos cero y $\alpha x + \beta y = 0$. Supongamos que $\alpha \neq 0 \Rightarrow x = \frac{-\beta y}{\alpha}$
Luego

$$|\langle x, y\rangle| = \left|\langle \frac{-\beta y}{\alpha}, y\rangle\right| = \left|\frac{-\beta}{\alpha} \langle y, y\rangle\right| = \left|\frac{-\beta}{\alpha}\right| |\langle y, y\rangle|$$

Por otra parte

$$\sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\langle \frac{-\beta y}{\alpha}, \frac{-\beta y}{\alpha}\rangle} = \sqrt{\left(\frac{-\beta}{\alpha}\right)^2 \langle y, y\rangle} = \left|\frac{-\beta}{\alpha}\right| \sqrt{\langle y, y\rangle}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle} = \left|\frac{-\beta}{\alpha}\right| (\sqrt{\langle y, y\rangle})^2 = \left|\frac{-\beta}{\alpha}\right| |\langle y, y\rangle|$$

$\Rightarrow |\langle x, y\rangle| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle}$ $\square$

Supongamos que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$. Como $\|\cdot\|$ viene de un producto interior $\Rightarrow$

$$\sqrt{\langle x+y, x+y\rangle} = \sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle}$$

Luego

$$\Rightarrow \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\sqrt{\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle} + \langle y, y\rangle$$

Vamos a expandir el producto interior del lado izquierdo de la ecaución

$$\begin{gathered}
\langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\
\Rightarrow \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\sqrt{\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle} + \langle y, y\rangle \\
\Rightarrow 2\langle x, y\rangle = 2\sqrt{\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle} \Rightarrow \langle x, y\rangle = \sqrt{\langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle} = \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}
\end{gathered}$$

Pero notemos que $\sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle} = \|x\|\|y\|$, que por $(N_1) \geqslant 0 \Rightarrow \langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle|$
$\therefore x, y$ son linealmente dependientes por el Lema anterior. □

Proof. Sea $x, y \in E$. Por definición de $E \Rightarrow$

$$\begin{gathered}
\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \sqrt{\langle x+y, x+y\rangle}^2 + \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}^2 \\
= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle = \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle + \langle x, x-y\rangle - \langle y, x-y\rangle \\
= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle + \langle x, x\rangle - \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\
= 2\langle x, x\rangle + 2\langle y, y\rangle = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2
\end{gathered}$$

$\therefore$ se cumple la identidad del paralelogramo □

Proof. (a) Notemos que la norma infinito no satisface la identidad del paralelogramo. Sea $x = (1, 0, ..., 0), y = (0, -1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{gathered}
\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \\
\max\{|x_i + y_i| \mid i = 1, ..., n\}^2 + \max\{|x_i - y_i|\}^2 = 2 \cdot \max\{|x_i|\}^2 + 2 \cdot \max\{|y_i|\}^2 \\
1^2 + 1^2 = 2 \neq 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2 = 4
\end{gathered}$$

(b) Notemos que la norma uno no satisface la identidad del paralelogramo. Sea $x = (1, 0, ..., 0)$, $y = (0, 1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 = 2\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + 2\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 \\
2^2 + 2^2 = 8 \neq 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2 = 4
\end{gathered}$$

□

11. Consideremos el polinomio $Q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ donde $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a > 0$ y $ac - b^2 > 0$. Demuestra que la fórmula $\|(x,y)\| = \sqrt{Q(x,y)}$ define en $\mathbb{R}^2$ una norma asociada a un producto interior.

Proof. NO SE $\square$

12. Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. La distancia de A a $x \in X$ se define como $d'(A,x) = \inf\{d(y,x) \mid y \in A\}$. Demostrar que $|d'(A,x) - d'(A,y)| \leqslant d(x,y)$

Proof. Sea $x, y \in X \Rightarrow \forall\, z \in A$ s.t.q.

$$d'(A,x) \leqslant d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$$
$$d'(A,y) \leqslant d(y,z) \leqslant d(y,x) + d(x,z)$$

Podemos tomar el ínfimo en z, ya que la desigualdad se cumple para todas las métricas

$$d'(A,x) \leqslant d(x,y) + d'(A,y) \Rightarrow d'(A,x) - d'(A,y) \leqslant d(x,y)$$
$$d'(A,y) \leqslant d(y,x) + d'(A,x) \Rightarrow d'(A,y) - d'(A,x) \leqslant d(y,x)$$

Esto implica $|d'(A,x) - d'(A,y)| \leqslant d(x,y)$ $\square$

13. Sea (X,d) un espacio métrico y $\varnothing \neq Y \subseteq X$, se define al diámetro de Y como $\operatorname{diam}(Y) = \sup\{d(y,w) \mid y, w \in Y\}$. Suponga que $(V, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado, que $d(x,y) = \|x - y\|$ y que $A, B \subseteq V$ son no vacíos.¿Se cumplen las siguientes afirmaciones? argumente o dé un contraejemplo.

(a) Si $A \cap B \neq \varnothing \Rightarrow \operatorname{diam}(A \cup B) \leqslant \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B)$
(b) $\operatorname{diam}(A \setminus B) = \operatorname{diam}(A) - \operatorname{diam}(B)$
(c) Si $A \cap B = \varnothing \Rightarrow \operatorname{diam}(A \cup B) = \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B)$
(d) Dado $u \in V$ definimos $A + u = \{a + u \mid a \in A\} \Rightarrow \operatorname{diam}(A + u) = \operatorname{diam}(A)$
(e) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ definimos $\lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\} \Rightarrow \operatorname{diam}(\lambda A) = |\lambda| \operatorname{diam}(A)$
(f) Si $A \subseteq B \Rightarrow \operatorname{diam}(A) \leqslant \operatorname{diam}(B)$

Proof. (a) $\forall\, x, y \in A \cup B$ se tienen los siguientes casos

i. Si $x, y \in A \Rightarrow d(x,y) \leqslant \operatorname{diam}(A) \leqslant \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B)$
ii. Si $x, y \in B \Rightarrow d(x,y) \leqslant \operatorname{diam}(B) \leqslant \operatorname{diam}(B) + \operatorname{diam}(A)$
iii. SPG supongamos que $x \in A$ y que $y \in B \Rightarrow\ \exists\, z \in A \cap B$

$$\Rightarrow d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y) \leqslant \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B)$$

(b) Creo que no
(c) Creo que no
(d) Creo que no

(e) Esto es cierto ya que en la definición de distancia se puede ver que proviene de una norma, y esto sucede si y solo si saca escalares en valor absoluto.

$\square$

14. Demuestra la Desigualdad de Hölder para series

Proof. Sean $p, q \in [1, \infty] \ni \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Sea $(x_m)_{m=1}^{\infty} \in \ell_p(\mathbb{R})$ y $(y_m)_{m=1}^{\infty} \in \ell_q(\mathbb{R})$

Aplicando la desigualdad de Hölder en $\mathbb{R}^n$ tenemos que $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} = M$$

Notemos que M es un número real, porque pertenece a $\ell_p(\mathbb{R})$, por lo tanto converge

$$\Rightarrow \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant M \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \text{ converge}$$

Si se tiene una sucesión de sumas parciales acotadas y mayores iguales a cero, y se encuentra una cota superior, entonces la serie converge

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Pero esta es la desigualdad de Hölder para series $\square$