1. Sea $p \in [1, \infty)$. Demuestra que el espacio $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$ donde $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ es un espacio normado sobre el campo de los números reales con las operaciones de suma y multiplicación por números reales usuales.

2. Demuestra que el espacio $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ donde $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\}$ es un espacio normado.

Lema. Sean $p, q \in (1, \infty)$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Veamos que

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$$

Supongamos $f, g \neq 0. \forall\, x \in [a,b]$ definimos a

$$\alpha = \frac{|f(x)|}{\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}} = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \qquad \text{y} \qquad \beta = \frac{|g(x)|}{\left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}} = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$$

Tomaremos por sentada la desigualdad de Young.

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Si la aplicamos a α y β s.t.q.

$$\alpha \cdot \beta \leqslant \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\right)^p \cdot \frac{1}{p} + \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}\right)^q \cdot \frac{1}{q}$$

Integramos de ambos lados

$$\frac{\int_a^b |f(x)g(x)dx|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leqslant \frac{\int_a^b |f(x)|^p dx}{p\|f\|_p^p} + \frac{\int_a^b |g(x)|^q dx}{q\|g\|_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\int_a^b |f(x)g(x)dx| = \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Podemos ver que también

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

Lema. Sea $p \in [1, \infty]$. Veamos que $\forall\, f, g \in C([a,b])$

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$$

Supongamos que $f \neq g$ y que $p \in (1, \infty)$. Definamos $h(x) = (|f(x)| - |g(x)|)^{p-1}$. Aplicamos Hölder a f, h y g, h. Notando que $q = \frac{p}{p-1}$

$$\int_a^b |f(x)|(|f(x)| - |g(x)|)^{p-1} dx \leqslant \|f\|_p \cdot \left(\int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^{p-1 \cdot \frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\int_a^b |g(x)|(|f(x)| - |g(x)|)^{p-1} dx \leqslant \|g\|_p \cdot \left(\int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^{p} \right)^{\frac{1}{q}}$$

Sumando las desigualdades

$$\int_a^b (|f(x)| - |g(x)|)^p dx \leqslant \left(\|f\|_p + \|g\|_q \right) \left(\int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^p \right)^{\frac{1}{q}}$$

Ahora como $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$

$$\frac{\int_a^b (|f(x)| - |g(x)|)^p dx}{\left(\int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^p \right)^{\frac{1}{q}}} = \left(\int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Notemos que

$$\|f + g\|_p = \left(\int_a^b (|f(x) + g(x)|)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b (|f(x)| + |g(x)|)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|f\|_p + \|g\|_q$$

Proof. Hemos probado la desigualdad del triangulo en el último lema. Que es no negativa es trivial, y saca escalares en valor absoluto por linealidad de la integral. Solo falta ver una propiedad. Como $|f(x)|^p$ es continua y no negativa, notemos que

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = 0 \Leftrightarrow |f(x)|^p = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

$\therefore \|f\|_p$ es norma. $\|f\|_\infty$ también es norma. $\square$

3. Sea $C^r[a, b]$ el conjunto de las funciones $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ que son r-veces continuamente diferenciables en $[a, b]$, es decir, tales que todas sus derivadas $f', f'', \ldots, f^r$ hasta el orden r existen en (a, b) y son continuas en $[a, b]$. Para cada $p \in [1, \infty]$ definimos

$$\|f\|_{r,p} = \|f\|_p + \|f'\|_p + \ldots + \|f^r\|_p$$

Demuestra que $C_p^r[a, b] = (C^r[a, b], \|\cdot\|_{r,p})$ es un espacio normado.

Proof. Sean $f, g \in C^r[a, b]$. Notemos que, $\forall\, 0 \leqslant s \leqslant r$

$$(f^s + g^s)' = f^{s+1} + g^{s+1}$$

$$\|f+g\|_{r,p} = \sum_{s=0}^{r} \|(f+g)^s\|_p = \sum_{s=0}^{r} \|f^s + g^s\|_p \leqslant \sum_{s=0}^{r} \|f^s\|_p + \sum_{s=0}^{r} \|g^s\|_p = \|f\|_{r,p} + \|g\|_{r,p}$$

Las demás propiedades son triviales. $\therefore \|f\|_{r,p}$ es norma. $\square$

4. La norma es convexa

Proof. Trivial por la desigualdad de Minkowski para norma (triangular) $\square$

5. Defina $\mathcal{B}(X,Y) = \{f : X \to Y \mid f \text{es acotada}\}$. Demuestre que la función $d_\infty : \mathcal{B}((X,Y) \times \mathcal{B}((X,Y) \to \mathbb{R}$ dada por $d_\infty(f,g) = \sup\{d_Y(f(x), g(x)) \mid x \in X\}$ para toda $f, g \in \mathcal{B}(X,Y)$, es una métrica en $\mathcal{B}(X,Y)$

Proof. Esta métrica se llama métrica úniforme.

(D_1) Es evidente que es mayor que cero, ya que d_Y es métrica.

(D_2) Como d_Y satisface (D_1) s.t.q.

$$d_\infty(f,g) = 0 \Leftrightarrow d_Y(f(x), g(x)) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x) \, \forall \, x \in X$$

(D_3) Como d_Y satisface (D_3) s.t.q.

$$d_\infty(f,g) = \sup\{d_Y(f(x), g(x)) \mid x \in X\} = \sup\{d_Y(g(x), f(x)) \mid x \in X\} = d_\infty(g,f)$$

(D_3) Sean $f, g, h \in \mathcal{B}(X,Y)$

$$d_Y(f(x), g(x)) \leqslant d_Y(f(x), h(x)) + d_Y(h(x), g(x)) \leqslant d_\infty(f,h) + d_\infty(h,g)$$
$$d_Y(f(x), g(x)) \leqslant d_\infty(f,g) \leqslant d_\infty(f,h) + d_\infty(h,g)$$

$\therefore d_\infty$ es métrica en $\mathcal{B}(X,Y)$ $\square$

6. Da un ejemplo de dos métricas definidas sobre un mismo conjunto X de tal manera que la función identidad de (X, d_1) a (X, d_2) no sea continua.

Proof. Considere a $X = \mathbb{R}$, donde $d_1(x,y) = |x-y|$ y a d como la métrica discreta. Sea $f : X \to X$ la función $f(x) = x$. Veamos que $f : (X, d_1) \to (X, d)$ no es continua.

En efecto, debemos probar que la proposición que niega la definición de función continua. Es decir, la proposición

$$\exists \, \varepsilon < 0 \;\; \forall \, \delta < 0 \ni \exists \, x_\delta \in X \Rightarrow d_1(x_\delta, y) < \delta \text{ y } d(f(x), f(y)) \geqslant \varepsilon$$

es verdadera. Por ello, consideremos a $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Sea $\delta > 0$ arbitrario

$$\Rightarrow \; \exists \, x_\delta \in X \ni |x_\delta - y| = \frac{\delta}{2}$$

.

Note que $x_\delta = y + \frac{\delta}{2}$ con $x_\delta > y$. Además, sucede que

$$d_1(x_\delta, y) = |x_\delta - y| = \frac{\delta}{2} < \delta \qquad \text{y} \qquad d(f(x_\delta), f(y)) = d(x_\delta, y) = d(y + \frac{\delta}{2}, y) = 1 > \frac{1}{2}$$

Esto porque $x_\delta \neq y$ y la métrica $d = 1$ si eso sucede.

$\therefore f : (X, d_1) \to (Y, d)$ no es continua en $x_0 = 0$ □

7. Sea (X, d) un espacio métrico y $f_1, ..., f_n : X \to \mathbb{R}$ una colección de n funciones continuas. Entonces la función $f : X \to \mathbb{R}^n$ definida como $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))$ es continua. Aquí, tanto $\mathbb{R}$ como $\mathbb{R}^n$ se consideran con las métricas inducidas por la norma $\|\cdot\|_2$.

Proof. Supongamos $f_1, ..., f_n : X \to \mathbb{R}$ una colección de n funciones continuas. Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis $\exists\, \delta(i) > 0 \ni \forall\, x \in X \Rightarrow d(x, y) < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| < \frac{\varepsilon}{n}$

Sea $\delta = min(\{\delta(1), ..., \delta(n)\})$

$$\text{Si } x \in X \text{ y } d(x, y) \leqslant \delta \leqslant \delta(1) \leqslant ... \leqslant \delta(n)$$
$$\Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leqslant |f_1(x) - f_1(y)| + ... + |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{n} + ... + \frac{\varepsilon}{n} = n \cdot \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$$

$\therefore f$ es continua en X. □

8. Sean (X, d) un espacio métrico y$A \subseteq X, A \neq \varnothing$. Demuestra que la función $f : X \to \mathbb{R}$ dada por$f(x) = d(x, A)$ es continua.

Lema. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. La distancia de A a $x \in X$ se define como $d'(A, x) = \inf\{d(y, x) \mid y \in A\}$. Demostrar que $|d'(A, x) - d'(A, y)| \leqslant d(x, y)$

Sea $x, y \in X \Rightarrow \forall\, z \in A$ s.t.q.

$$d'(A, x) \leqslant d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$$
$$d'(A, y) \leqslant d(y, z) \leqslant d(y, x) + d(x, z)$$

Podemos tomar el ínfimo en z, ya que la desigualdad se cumple para todas las métricas

$$d'(A, x) \leqslant d(x, y) + d'(A, y) \Rightarrow d'(A, x) - d'(A, y) \leqslant d(x, y)$$
$$d'(A, y) \leqslant d(y, x) + d'(A, x) \Rightarrow d'(A, y) - d'(A, x) \leqslant d(y, x)$$

Esto implica $|d'(A, x) - d'(A, y)| \leqslant d(x, y)$

Proof. Sea $x, y \in X$ f.p.a. Notemos que $\forall\, a \in A$ s.t.q.

$$|d(A, x) - d(A, y)| \leqslant d(x, y)$$

Esto por el Lema anterior, que fue un ejercicio de la tarea anterior. Veamos que es continua.

Sea $\varepsilon > 0$. Consideremos a $\delta = \varepsilon$. Sucede que

$$d(x, y) < \delta \qquad \text{y} \qquad |d(A, x) - d(A, y)| \leqslant d(x, y) < \delta = \varepsilon$$

$\therefore f(x) = d(x, A)$ es continua. Note que también es Lipschitz continua con constante 1. □

9. Prueba que $f : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_2)$ es continua si y solo si $f : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p) \to (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_r)$ es continua para cualesquiera $p, r \in [1, \infty]$

Lema. Sean $\Phi : X \to Y$ y y $\Psi : Y \to Z$ funciones entre espacios métricos.

(a) Si Φ y Ψ son continuas $\Rightarrow \Psi \circ \Phi : X \to Z$ es continua.

(b) Si Φ es un homeomorfismo $\Rightarrow \Psi$ es continua $\Leftrightarrow \Psi \circ \Phi$ es continua.

(c) Si Ψ es un homeomorfismo $\Rightarrow \Phi$ es continua $\Leftrightarrow \Psi \circ \Phi$ es continua.

Proof. (a) Sean $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$. Notemos que Ψ es una función continua en $y_0 = \Phi(x_0)$, por lo que $\exists\, \gamma > 0$ tal que si

$$d_Y(y, y_0) < \gamma \Rightarrow d_Z(\Psi(y), \Psi(y_0)) < \varepsilon$$

Como Φ es continua en x_0 $\exists\, \delta$ tal que si

$$d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(\Phi(x), \Phi(x_0))$$
$$\Rightarrow \text{ si } d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Z(\Psi(\Phi(x)), \Psi(\Phi(x_0)))$$

Esto satisface la definición de continuidad.

(b) Si Φ es un homeomorfismo, Φ^{-1} es continua, y por el inciso anterior sabemos que si $\Psi \circ \Phi$ es continua $\Rightarrow (\Psi \circ \Phi) \circ \Phi^{-1}$ es continua.

(c) Es análogo al anterior.

$\square$

Proof. Demostremos ahora el inciso anterior. Sea Φ la identidad de $\mathbb{R}^n_p$ a $\mathbb{R}^n$

$$\Phi : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$$

y sea Ψ la identidad de $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^m_r$

$$\Psi : (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_r)$$

Sabemos que Φ y Ψ son homeomorfismos. Esto implica que son continuas. Supongamos otra función continua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, por el Lema anterior, sabemos que $f = f \circ \Phi : \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}^m$ es continua. Además, por el mismo Lema, se tiene que $f = \Psi \circ f : \mathbb{R}^n_p \to \mathbb{R}^m_r$ es una función continua. $\square$

10. Sea(X, d) espacio métrico y $f, g : X \to \mathbb{R}$ funciones Lipschitz continuas.

(a) Si f y g son funciones acotadas, entonces su producto fg es una función Lipschitz continua.

(b) Mediante un ejemplo muestre que el inciso anterior puede fallar si no se supone que f y g son acotadas.

Proof. (a) Supongamos que $|f| \leqslant M$ y $|g| \leqslant M$

$$\begin{aligned}|(fg)(x) - (fg)(y)| &\leqslant |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\ &\leqslant M(|g(x) - g(y)| + |f(x) - f(y)|)\end{aligned}$$

(b) Sea $f(x) = cos(x)$ y $g(x) = x$. Note que

$$h(x) := f(x)g(x) = xcos(x)$$

no es Lipschitz en $\mathbb{R}$

$\square$

11. Demuestra que, si $1 \leqslant s \leqslant r \leqslant \infty$, entonces la inclusión $i : \ell_s \to \ell_r$ es Lipschitz continua.

Proof. Se sigue de la demostración anterior de que si $1 \leqslant s \leqslant r \leqslant \infty$

$$\|x\|_r \leqslant \|x\|_s$$

Notemos que podemos tomar cualesquiera dos secuencias $(x_n), (y_n) \in \ell_s$

$$\|x_n - y_n\|_r \leqslant 1 \cdot \|x_n - y_n\|_s$$

Pero esto es la definición de Lipschitz continua. $\square$

12. Demuestra que para cualquier $1 \leqslant s \leqslant \infty$, la k-esima proyección $\pi_k : \ell_s \to \mathbb{R}$ tal que $\pi_k(x) = x_k$ con $x = (x_n) \in \ell_s$ es Lipschitz continua.

Proof. Sea $1 \leqslant p < \infty$. Note que $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$, si $1 \leqslant k \leqslant n$

$$|\pi_k(x) - \pi_k(y)| = |x_k - y_k| = (|x_k - y_k|)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|\right)^{\frac{1}{p}} = 1 \cdot \|x - y\|_p$$

De forma análoga, supongamos que $x, y \in \ell_\infty$ y $k \geqslant 1$

$$|\pi_k(x) - \pi_k(y)| = |x_k - y_k| \leqslant \sup\{|x_k - y_k|\} = 1 \cdot \|x - y\|_\infty$$

$\square$

13. Sean $(V, \|\cdot\|_V)$ y $(W, \|\cdot\|_W)$ espacios normados, y sea $L : V \to W$ una transformacion lineal. Demuestra que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(a) L es continua.

(b) L es continua en 0.

(c) Existe $c > 0$ tal que $\|Lv\|_W \leqslant c \cdot \|v\|_V$ para todo $v \in V$

(d) L es Lipschitz continua.

Proof. $(a) \Rightarrow (b)$ Como L es continua en todos los puntos del dominio, es continua en 0

$(b) \Rightarrow (c)$

Como L es continua en 0, sean $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ tal que si $\|v - 0\|_V < \delta \Rightarrow \|Lv - 0\|_W < \epsilon$ $\forall\, v \in V \Rightarrow$

$$\left\| \frac{\delta}{2\|v\|_V} \cdot v \right\|_V = \frac{\delta}{2} < \delta$$

$$\Rightarrow \left\| L\left(\frac{\delta}{2\|v\|_V} \cdot v \right) \right\|_W = \frac{\delta}{2\|v\|_V} \cdot \|Lv\|_W \leqslant \varepsilon$$

Sea $c = \frac{2\varepsilon}{\delta}$. Reordenando algebraicamente

$$\|Lv\|_W \leqslant \varepsilon \cdot \frac{2}{\delta}\|v\|_V = \|Lv\|_W \leqslant c \cdot \|v\|_V$$

$(c) \Rightarrow (d)$

$\forall\, v, w \in V$

$$\|Lv - Lw\|_W = \|L(v - w)\|_W \leqslant c \cdot \|v - w\|_V$$

Esto por el inciso anterior

$(d) \Rightarrow (a)$ Trivial $\square$

14. Establezca si la función $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\Phi(t) = t^2$ es Lipschitz continua. Justifique todas sus afirmaciones.

Proof. Supongamos, para generar una contradicción, que si es Lipschitz continua. Entonces $\exists\, c > 0$ tal que $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \left|x^2 - y^2\right| \leqslant c \cdot |x - y|$$
$$= |x - y| \cdot |x + y| \leqslant c \cdot |x - y|$$
$$= |x + y| \leqslant c$$

Pero esto no se puede, ya que los números reales no están acotados superiormente.

$\therefore \Phi$ no es Lipschitz continua. $\square$

15. Sea $X = (X, d)$ un espacio métrico y sea $x_0 \in X$. Prueba que la función $\Phi : X \to \mathbb{R}$ dada por $\Phi(x) = d(x_0, x)$ es Lipschitz continua.

Proof. Recordemos que ya demostramos

$$|\rho(x,y) - \rho(z,w)| \leqslant \rho(x,z) + \rho(y,w)$$

Veamos que

$$|f(x) - f(y)| \leqslant c \cdot d(x,y)$$
$$|f(x) - f(y)| = |d(x,x_0) - d(y,x_0)|$$

Por el primer enunciado, note que

$$|d(x,x_0) - d(y,x_0)| \leqslant d(x,y) + d(x_0,x_0) = d(x,y)$$

$\therefore \Phi$ es Lipschitz continua con constante $c = 1$. □

16. Sea $g_0 \in C([a,b])$. Demuestra que $\forall\, p \in [1,\infty]$, la función $\Phi : (C([a,b]), \|\cdot\|_p) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\Phi(x) = \int_a^b f(t) g_0(t) dt$$

es Lipschitz continua.

Proof. Tenemos los siguientes casos

$p \in [1,\infty)$

Sean $f, h \in C([a,b])$. Por el primer ejercicio, note que

$$\left| \int_a^b (f(t) - h(t)) g_0(t) dt \right| \leqslant \|f - h\|_p \cdot \|g_0\|_q$$

Si agarramos una cota superior de $\|g_0\|_q$ como la constante Lipschitz, hemos demostrado que es Lipschitz continua.

$p = \infty$

Análoga. □

17. Demuestra las siguientes afirmaciones.

(a) Toda isometría es Lipschitz continua.

(b) La composición de Lipschitz continua es Lipschitz continua.

(c) Si $\Phi : X \to Y$ es una equivalencia, entonces $\Psi : Y \to Z$ es Lipschitz continua si y solo si $\Psi \circ \Phi : X \to Z$ lo es.

(d) Si $\Psi : Y \to Z$ es una equivalencia, entonces $\Phi : X \to Y$ es Lipschitz continua si y solo si $\Psi \circ \Phi : X \to Z$ lo es.

Proof. (a) Es evidente por la definición de Isometría. No se prohibe la igualdad, por lo que podemos agarrar la $c = 1$ y hemos terminado.

(b) Sean $\Phi : X \to Y, \Psi : Y \to Z$ Lipschitz continuas. $\exists\, \gamma \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\forall\, x, y \in X \Rightarrow d_Y(\Phi(x) - \Phi(y)) \leqslant \gamma \cdot d_X(x - y)$$

También $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\forall\, a, b \in Y \Rightarrow d_Z(\Psi(a) - \Psi(b)) \leqslant \lambda \cdot d_Y(a - b)$$

En particular, $\forall\, x, y \in X$

$$d_Z(\Psi(\Phi(x)) - \Psi(\Phi(y))) \leqslant \lambda \cdot d_Y(\Phi(x) - \Phi(y)) \leqslant \lambda\gamma \cdot d_X(x - y)$$

(c) Tanto $\Phi : X \to Y$ como $\Phi^{\leftarrow} : Y \to X$ son Lipschitz continuas, tal que si $\Psi : Y \to Z$ es Lipschitz, por el inciso anterior, también lo es $\Phi \circ \Psi$. Pero si esta función es continua, tomemos $\Phi^{\leftarrow}$ como nueva composición, haciendo la compisición de la composición, es decir $(\Phi \circ \Psi) \circ \Phi^{\leftarrow} = \Psi$. Hemos probado la necesidad y la suficiencia.

(d) Tanto $\Psi : Y \to Z$ como $\Psi^{\leftarrow} : Z \to Y$ son Lipschitz continuas, tal que si $\Phi : X \to Y$ es Lipschitz, por el inciso anterior, también lo es $\Phi \circ \Psi$. Pero si esta función es continua, tomemos $\Psi^{\leftarrow}$ como nueva composición, haciendo la compisición de la composición, es decir $\Psi^{\leftarrow} \circ (\Psi \circ \Phi) = \Phi$. Hemos probado la necesidad y la suficiencia.

$\square$

18. Sea I un intervalo en $\mathbb{R}$ (abierto, cerrado, acotado o no acotado). Prueba que, si $f : I \to R$ es continuamente diferenciable en I y existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $||f'(t)| \leqslant c$ para toda $t \in I$, entonces f es Lipschitz continua.

Proof. Sea $x \leqslant y \in I \Rightarrow f$ es continua en $[x, y]$, por la definición de f, y además es diferenciable en esos puntos, por lo que debe de cumplir el teorema del valor medio para algún $\lambda \in (x, y)$

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\lambda)||x - y| \leqslant c \cdot |x - y|$$

$\square$

19. ¿Cuáles de las siguientes funciones son Lipschitz continuas y cuáles son equivalencias?

(a) $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donde $\Phi(x) = x^2$

(b) $\Phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ donde $\Phi(x) = \sqrt{x}$

(c) $\Phi : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ donde $\Phi(x) = \arctan(x)$

Proof. (a) $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donde $\Phi(x) = x^2$ no es Lipschitz continua. Supongamos, para generar una contradicción, que si lo fuera $\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x^2 + y^2| \leqslant c \cdot |x - y|$. En particular, sea $x > y > 0$ tales que $x + y > c$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) < c \cdot (x - y)$$

Pero esto implica $x + y < x + y$, lo cual es imposible. Otra prueba, tal vez más facil es la del inciso 14.

(b) $\Phi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ donde $\Phi(x) = \sqrt{x}$ no es Lipschitz continua. Si lo fuera, $\Rightarrow\ \exists\, c \in \mathbb{R}^{+}$ tal que $\left|\sqrt{x} + \sqrt{y}\right| \leqslant c \cdot |x - y|$. Sea $x = \left(\frac{1}{1+c}\right)^2$ y sea $y = 0$

$$\Rightarrow \left|\sqrt{\left(\frac{1}{1+c}\right)^2} + \sqrt{0}\right| = \left|\frac{1}{1+c}\right| \leqslant c \cdot \left|\left(\frac{1}{1+c}\right)^2\right| \Rightarrow c + 1 \leqslant c$$

Lo cual es imposible.

(c) $\Phi : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ donde $\Phi(x) = \arctan(x)$ si es Lipschitz continua. Por el teorema del valor medio $\exists\, c \in (a, b)$ tales que

$$|f(a) - f(b)| = f'(c)|a - b|$$

Pero usando la derivada de $\arctan(x)$ s.t.q

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} \leqslant 1$$

Esto demuestra que $|\arctan a - \arctan b| \leq |a - b|$, por lo que la contante de Lipschitz es 1.

$\therefore$ se han demostrado los tres incisos. $\square$

20. Suponga que X y Y son un par de espacios métricos y fije una función $\Phi : X \to Y$. Responda los siguientes incisos.

(a) Demuestre que si Φ es una isometría, entonces es inyectiva.

(b) Pruebe que si Φ es una isometría biyectiva, entonces Φ^{-1} también es una isometría.

Proof. (a) Veamos que toda isometría es inyectiva. Recordemos que sean (X, d) y (Y, ρ) dos espacios métricos. Una función $\Phi : X \to Y$ es isometría si

$$\rho(\Phi(x), \Phi(y)) = d(x, y)\ \forall\, x, y \in X$$

Notemos que si $\Phi(x) = \Phi(y)$, que recordemos es el incicio a la contrapositiva del enunciado de función inyectiva $\Rightarrow d(x, y) = \rho(\Phi(x), \Phi(y)) = 0 \Rightarrow x = y$.

(b) Veamos que si Φ es una isometría biyectiva, entonces Φ^{-1} también es una isometría. Sean $z, w \in Y$ y $x, y \in X$ tales que $z = \Phi(x)$ y $w = \Phi(y)$. Note que

$$\rho(z, w) = \rho(\Phi(x), \Phi(y)) = d(x, y) = d(\Phi^{-1}(z), \Phi^{-1}(w))$$

$\therefore$ ambos enunciados son verdaderos. $\square$

21. ¿Cuáles son isometrías?

(a) La identidad $I : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_r)$, $I(x) = x$ con $p \neq r$

(b) La identidad $I : (C[0,1], \|\cdot\|_p) \to (C[0,1], \|\cdot\|_r)$, $I(f) = f$ con $p \neq r$

(c) La inclusión $i : (C^1[0,1], \|\cdot\|_p) \to (C[0,1], \|\cdot\|_p)$, $i(f) = f$

Proof. (a) Si $\|(1,1)\|_p = \|(1,1)\|_r$, lo que implica que $2 = 2^{\frac{p}{r}}$, lo que a su vez implica que $p = r$, pero esto contradice el supuesto que $p \neq r$. Esto significa que no es isometría.

(b) Esta tampoco es isometría.

(c) Como toda inclusión es isometría, se sigue que la inclusión en ese espacio es isometría.

$\square$