1. Da un ejemplo de un espacio métrico X, en el cual existan puntos x y y tales que $B(x,r) \subset B(y,\varepsilon)$ con $r > \varepsilon$.

Proof. Considere al espacio métrico $\mathbb{R}^2$ con la norma usual. Considere a la métrica como

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \begin{cases} 0 & \mathbf{x}=\mathbf{y} \\ \|x\|+\|y\| & \mathbf{x}\neq\mathbf{y} \end{cases}$$

Recuerde que la la bola abierta de centro $x \in X$ y radio $r > 0$ en (X,d) es el subconjunto

$$B_d(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$$

En este caso, las bolas con centro en $(0,0)$ son las bolas usuales, mientras que las demás son puntos aislados. Es decir $B(x,r) = \{x\}$ si $r < \|x\|$. De lo contrario, tenemos al punto unión una bola con centro en el orign cada vez más chica hasta que se hace el punto aislado.

Note entonces que $B((0,0),\frac{3}{2})$ es la bola usual con centro en el origen y de radio $\varepsilon = \frac{3}{2}$. Note que $B((1,0),2)$ es la bola usual, con radio $r = 2$. Pero por definición de la métrica, note que esta bola es el punto $(1,0) \cup B((0,0),1) \subset B((0,0),\frac{3}{2})$. Hemos encontrado lo requerido. □

2. Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. La distancia de A a $x \in X$ se define como $d'(A,x) = \inf\{d(y,x) \mid y \in A\}$.

(a) Demuestra que es Lipschitz continua

(b) Demuestre que si A es un subconjunto cerrado de X, entonces $d'(x,A) = 0$ si y sólo si $x \in A$

(c) Exhiba un ejemplo de un espacio métrico X, un subconjunto no vacío A del mismo y un punto $x \in X$ de manera que $d'(x,A) = 0$ y $x \notin A$.

Proof. (a) Por ejercicio 8. de la tarea 2 es trivial.

(b) $\Rightarrow$

$d'(A,x) = 0 \Rightarrow \inf\{d(y,x) \mid y \in A\} = 0$ Pero como es un conjunto cerrado, no puede estar fuera de la cerradura. No hemos definido este concepto.

Note entonces que $\forall\, n \in \mathbb{N}\, \exists\, a_n \in A$ tal que

$$d(x,a_n) < d'(x,A) + \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

Esta es la definición de convergencia de sucesiones, por lo que a_n converge a $x \Rightarrow x \in \operatorname{der}(A)$ y como A es cerrado $\Rightarrow \operatorname{der}(A) = A$

$\Leftarrow$

Como es cerrado, si $x \in A \Rightarrow d'(A,x) = \inf\{d(y,x) \mid y \in A\} \leqslant d(x,x) = 0$ por lo que si $x \in A \Rightarrow d(x,x) = 0$

(c) Sea $X = \mathbb{R}$ y considere a $A \subseteq \mathbb{R} = A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$. Defina a la métrica usual como el valor absoluto. Tomemos $x = 0$. Claramente $x \notin A$. Sin embargo, sabemos por Cálculo 1 que la cota inferior de A es 0, y que se trata de una sucesión que converge a ese punto, sin que ese punto pertenezca a A. Note entonces que $d'(A, x) = \inf\{d(y, x) \mid y \in A\} = 0$, ya que es la ínfima distancia entre 0 y todo $y \in A$. Vease que se puede entonces reescribir el ejercicio como $d'(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \operatorname{der}(A)$

$\square$

3.