Traitement du signal 1

Vincent Mazet

January 5, 2026

Contents

0.1 Classification des signaux

La plupart des signaux physiques que l'on mesure sont *analogiques*, c'est-à-dire qu'ils dépendent d'une variable qui prend des valeurs continues (par exemple, le temps) et qu'eux-mêmes peuvent prendre des valeurs *continues*. On peut citer comme exemple la tension électrique dans un circuit, un son, une mesure de température, etc.

À l'inverse, les signaux traités par un ordinateur sont un ensemble de valeurs qui dépendent donc d'une variable discrète, et de plus les amplitudes du signal sont également discrètes. Ces signaux sont *numériques*. On peut citer comme exemple une photographie numérique qui est constituée de pixels dont les intensités ne peuvent prendre que $256^3 = 16\ 777\ 216$ valeurs.

Un signal numérique est à la fois *échantillonné* (c'est-à-dire qu'il dépend d'une variable discrète) et *quantifié* (ses amplitudes sont discrètes). Ainsi, l'*échantillonnage* consiste à transformer un signal non échantillonné en un signal échantillonné. De même, la *quantification* consiste à transformer un signal à valeurs continues en un signal à valeurs discrètes. La combinaison de ces deux opérations est appelée *numérisation*. Nous étudierons dans les pages correspondantes (**?** et **?**) quelles sont les conditions qui permettent de ne pas trop dégrader le signal et quelles sont les conséquences sur le signal numérique.

> **Remarque**
> Sur un ordinateur, on ne peut donc traiter que des signaux numériques, et de durée limitée, car une mémoire informatique ne peut stocker qu'un nombre fini de valeurs dont la précision est limitée.

Un signal peut également être à valeurs complexes, quelle que soit sa classification. La représentation complexe est une représentation mathématique bien pratique car même si les signaux physiques peuvent être exprimés avec des valeurs réelles, les nombres complexes permettent parfois de manipuler plus simplement les signaux [Prandoni 2008, p. 20]. C'est le cas par exemple des champs électromagnétiques.

Dans la suite du cours, nous adopterons les conventions de notation suivantes :

- les signaux à temps continu sont notés avec des parenthèses et le plus souvent la variable $t \in \mathbb{R}$, par exemple : $x(t)$.
- les signaux à temps discret (échantillonnés) sont notés avec des crochets et le plus souvent la variable $n \in \mathbb{Z}$, par exemple : $x[n]$.

1

0.2 Propriétés des signaux

0.2.1 Transformation de la variable indépendante

Le signal $x(t)$ dépend de la variable t, appelée *variable indépendante.*

- Un changement de signe sur t revient à un retournement de l'axe temporel, donc à une symétrie par rapport à l'origine.
- Un changement d'échelle consiste à multiplier t par une variable $a \in \mathbb{R}^{+*}$.
- Une translation (ou décalage) consiste à ajouter une variable $d \in \mathbb{R}$ à la variable indépendante.

L'animation ci-dessous permet de visualiser ces transformations sur t, dans l'exemple d'un signal x tel que

$$x(t) = \begin{cases} t & \text{si} \quad 0 \leq t < 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1}$$

0.2.2 Périodicité

Un signal x est périodique s'il est constitué d'une infinité de morceaux tous identiques, appelés *périodes.* Par extension, la période désigne aussi la longueur de cette période. Un signal non périodique est dit *apériodique.* Ainsi :

- un signal à temps continu de période T est tel que : $\forall t \quad x(t+T) = x(t)$,
- un signal à temps discret de période N est tel que : $\forall n \quad x[n+N] = x[n]$.

La *fréquence* d'un signal est l'inverse de sa période.

0.2.3 Causalité

Un signal x est *causal* si et seulement s'il est nul pour les temps négatifs :

- pour un signal à temps continu : $\forall t < 0 \quad x(t) = 0$,
- pour un signal à temps discret : $\forall n < 0 \quad x[n] = 0$.

0.3 Énergie et puissance

Par analogie avec l'énergie et la puissance d'un système physique (moteur électronique, mobile en déplacement...), on définit l'énergie et la puissance d'un signal. Dans le cas — très courant — où les amplitudes du signal sont sans unité, alors l'énergie et la puissance sont également sans unité.

0.3.1 Énergie d'un signal

L'énergie d'un signal x est définie par les formules ci-dessous.

Ces formules sont équivalentes, heureusement ! L'énergie est en fait l'aire sous la courbe du carré du signal, l'aire sous la courbe étant une intégrale ou une somme. Remarquez également que la notation $|\cdot|$ correspond au module (le signal pouvant être complexe).

0.3.2 Puissance d'un signal

La puissance d'un signal x périodique correspond à l'énergie sur une période divisée par la durée de cette période.

Un signal apériodique peut être considéré comme un signal périodique de période infinie. Ainsi, en faisant tendre la période vers l'infini dans l'expression de la puissance d'un signal périodique, on obtient les formules de la puissance d'un signal apériodique :

Les signaux de la vie réelle sont issus d'un système physique réel : leur amplitude est donc bornée et ils sont mesurés sur une durée finie. Cela implique que les signaux de la vie réelle sont à énergie finie (l'aire sous la courbe est finie, donc le carré de l'aire sous la courbe également et l'intégrale converge). Cela implique également que les signaux de la vie réelle sont à puissance nulle puisque, d'après la formule de la puissance d'un signal apériodique, l'intégrale (finie) est divisée par $2T$ qui tend vers l'infini.

3

0.4 Exercices sur feuille

0.4.1 Exercice 1

Complétez le tableau de classification des signaux.

Placez dans le tableau les signaux suivants :

- la température ambiante en fonction du temps,
- le nombre d'étudiants dans une classe en fonction du temps,
- l'heure du lever de soleil tous les jours.

0.4.2 Exercice 2

Tracez à la main les signaux suivants :

$$w(t) = 3\sin(8\pi t + \pi)\,, \qquad x(t) = \frac{1}{2}\mathrm{sinc}\left(\frac{t}{2}\right), y[n] = \sin(\pi n), \qquad z[n] = \mathrm{rect}\left(\frac{n}{4} - \frac{1}{2}\right) - \delta[n-2] \tag{2}$$

0.4.3 Exercice 3

Calculez la puissance et l'énergie des signaux suivants :

$$x(t) = e^{-2t}u(t), \qquad y[n] = \frac{1}{2^n}u[n]. \tag{3}$$