Simulation d'une distribution triangulaire symétrique tronquée

Vincent Mazet

LSIIT, UMR CNRS/UDS 7005,
vincent.mazet@unistra.fr

2 mars 2012

Résumé La méthode de l'inversion de la fonction de répartition est utilisée pour générer des échantillons distribués suivant une loi triangulaire, symétrique et tronquée des deux côtés.

1 Densité de probabilité

1.1 Distribution triangulaire

On définit la loi triangulaire par (figure 1) :

$$p(t) = \begin{cases} \alpha t + \beta_1 & \text{si } t \in [\mu - \sigma, \mu], \\ -\alpha t + \beta_2 & \text{si } t \in [\mu, \mu + \sigma], \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec α, β_1 et β_2 choisis de telle sorte à normaliser la densité de probabilité. C'est une loi continue, ce qui impose $T(\mu^-) = T(\mu^+)$. Elle forme un triangle isocèle dont le sommet est en μ et qui s'étend sur une largeur de 2σ. On note cette loi $\mathcal{T}(x; \mu, \sigma)$.

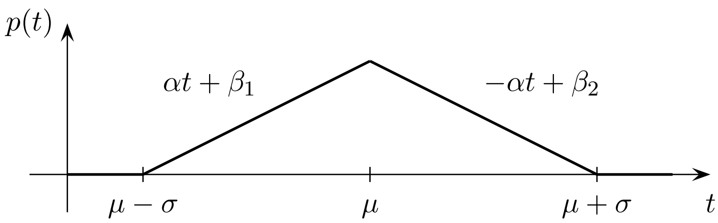

Figure 1 – Distribution triangulaire.

1.2 Distribution triangulaire réduite

Le changement de variable $x = (t-\mu)/\sigma$ permet de se ramener à une distribution « réduite » (figure 2) :

$$p(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta & \text{si } x \in [-1, 0], \\ -\alpha x + \beta & \text{si } x \in [0, +1], \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec α et β choisis de telle sorte à normaliser la densité de probabilité. On note cette loi $\mathcal{T}(x)$.

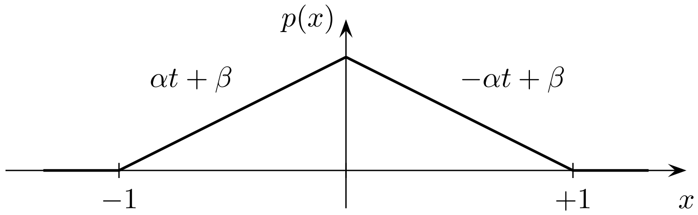

FIGURE 2 – Distribution triangulaire réduite.

1.3 Distribution triangulaire réduite tronquée

La loi triangulaire réduite et tronquée est alors définie par ($a < b$) :

$$p_{[a,b]}(x) = \begin{cases} p(x) & \text{si } x \in [a, b], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note cette loi $\mathcal{T}_{[a,b]}(x)$.

Suivant les valeurs que prennent a et b plusieurs cas se présentent (cf. tableau 1) :
- on rappelle que $a < b$, impliquant alors des cas impossibles ;
- les cas où $a < b < -1$ et $+1 < a < b$ conduisent à une densité nulle partout et sont donc également impossibles ;
- lorsque $b \in [-1, 0]$, alors le cas où $a < -1$ est équivalent au cas $a = -1$: on peut alors considérer les cas 1 et 1' comme identiques ;
- de même, lorsque $a \in [0, +1]$, alors le cas où $b > +1$ est équivalent au cas $b = +1$ et donc les cas 2 et 2' sont identiques ;
- enfin, les autres cas sont équivalents puisque si $a < -1$ la loi est équivalente à la loi tronquée à gauche en -1, et de même si $b > +1$ la loi est équivalente à la loi tronquée à droite en $+1$: on est dans le cas 3.

b \ a	$]-\infty, -1]$	$[-1, 0]$	$[0, +1]$	$[+1, +\infty[$
$]-\infty, -1]$	×	×	×	×
$[-1, 0]$	1'	1	×	×
$[0, +1]$	3a	3	2	×
$[+1, +\infty[$	3b	3c	2'	×

TABLE 1 – Différentes types de loi triangulaire réduite tronquée. Les cas impossibles sont indiqués par une croix.

En conclusion, seuls trois cas sont à prendre en compte :

1. le cas où $a, b \in [-1, 0]$;
2. le cas où $a, b \in [0, +1]$;
3. le cas où $a \in [-1; 0]$ et $b \in [0; +1]$.

2 Loi triangulaire tronquée lorsque $a, b \in [-1, 0]$

On considère la loi (figure 3)

$$p(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta & \text{si } x \in [a, b], \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $a < b$ sous la contrainte que $a, b \in [-1, 0]$ et les paramètres α et β sont calculés afin de normaliser la loi. Ainsi :

$$\alpha(-1) + \beta = 0 \tag{1}$$

$$-\alpha(+1) + \beta = 0 \tag{2}$$

$$\int_a^b \alpha x + \beta \, dx = 1 \tag{3}$$

Les équations (1) et (2) sont équivalentes et impliquent que $\alpha = \beta$. L'équation (3) se simplifie alors :

$$\alpha \int_a^b x + 1 \, dx = \alpha \left(\frac{b^2}{2} + b - \frac{a^2}{2} - a \right) = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha = \frac{2}{b^2 + 2b - a^2 - 2a}$$

La fonction de répartition de la loi triangulaire symétrique tronquée est

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a, \\ \int_a^x p(u) \, du & \text{si } x \in [a, b], \\ 1 & \text{si } x > b. \end{cases}$$

Ainsi, lorsque $x \in [a, b]$,

$$f(x) = \int_a^x \alpha(1 + u) \, du = \alpha \left[u + \frac{u^2}{2} \right]_a^x = \alpha \left(x + \frac{x^2}{2} - a - \frac{a^2}{2} \right)$$

En posant $y = f(x)$ (donc $f^{-1}(y) = x$), on a alors

$$\frac{x^2}{2} + x - \frac{y}{\alpha} - a - \frac{a^2}{2} = 0$$

C'est une équation du deuxième ordre possédant deux solutions :

$$x_1 = -1 - \sqrt{1 + 2y/\alpha + 2a + a^2} \qquad x_2 = -1 + \sqrt{1 + 2y/\alpha + 2a + a^2}$$

Comme $x_1 < -1$ et $x_2 > -1$, c'est x_2 que nous retenons. La fonction de répartition inverse a donc pour expression :

$$f^{-1}(y) = -1 + \sqrt{1 + 2y/\alpha + 2a + a^2}.$$

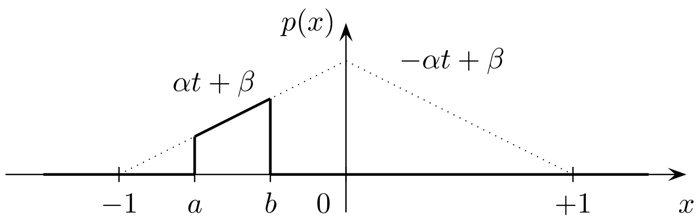

FIGURE 3 – Distribution triangulaire réduite tronquée ($a, b \in [-1, 0]$).

3 Loi triangulaire tronquée lorsque $a, b \in [0, +1]$

On considère la loi (figure 4)

$$p(x) = \begin{cases} -\alpha x + \beta & \text{si } x \in [a, b], \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $a < b$ sous la contrainte que $a, b \in [0, +1]$ et les paramètres α et β sont calculés afin de normaliser la loi. Ainsi :

$$\alpha(-1) + \beta = 0 \tag{4}$$

$$-\alpha(+1) + \beta = 0 \tag{5}$$

$$\int_a^b -\alpha x + \beta \, dx = 1 \tag{6}$$

Les équations (4) et (5) sont équivalentes et impliquent que $\alpha = \beta$. L'équation (6) se simplifie alors :

$$\alpha \int_a^b -x + 1 \, dx = \alpha \left(-\frac{b^2}{2} + b + \frac{a^2}{2} - a \right) = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha = \frac{2}{-b^2 + 2b + a^2 - 2a}$$

La fonction de répartition de la loi triangulaire symétrique tronquée est

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a, \\ \int_a^x p(u) \, du & \text{si } x \in [a, b], \\ 1 & \text{si } x > b. \end{cases}$$

Ainsi, lorsque $x \in [a, b]$,

$$f(x) = \int_a^x \alpha(1 - u) \, du = \alpha \left[u - \frac{u^2}{2} \right]_a^x = \alpha \left(x - \frac{x^2}{2} - a + \frac{a^2}{2} \right)$$

En posant $y = f(x)$ (donc $f^{-1}(y) = x$), on a alors

$$\frac{x^2}{2} - x + \frac{y}{\alpha} + a - \frac{a^2}{2} = 0$$

C'est une équation du deuxième ordre possédant deux solutions :

$$x_1 = 1 - \sqrt{1 - 2y/\alpha - 2a + a^2} \qquad x_2 = 1 + \sqrt{1 - 2y/\alpha - 2a + a^2}$$

Comme $x_1 < 1$ et $x_2 > 1$, c'est x_1 que nous retenons. La fonction de répartition inverse a donc pour expression :

$$f^{-1}(y) = 1 - \sqrt{1 - 2y/\alpha - 2a + a^2}.$$

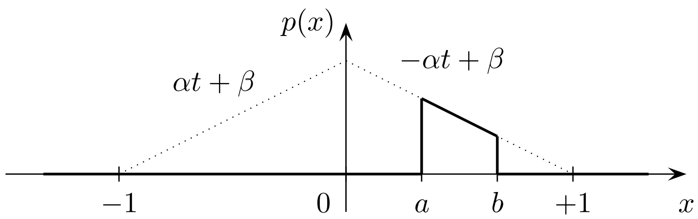

FIGURE 4 – Distribution triangulaire réduite tronquée ($a, b \in [0, +1]$).

4 Loi triangulaire tronquée lorsque $a \in [-1, 0]$ et $b \in [0, +1]$

On considère la loi (figure 5)

$$p(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta & \text{si } x \in [a, 0], \\ -\alpha x + \beta & \text{si } x \in [0, b], \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $a \in [-1, 0]$ et $b \in [0, +1]$. Les paramètres α et β sont calculés afin de normaliser la loi. Ainsi :

$$\alpha(-1) + \beta = 0 \tag{7}$$
$$-\alpha(+1) + \beta = 0 \tag{8}$$
$$\int_a^0 \alpha x + \beta \, dx + \int_0^b -\alpha x + \beta \, dx = 1 \tag{9}$$

Les équations (7) et (8) sont équivalentes et donnent $\alpha = \beta$. L'équation (9) se simplifie alors :

$$\begin{aligned} & \alpha \left(\int_a^0 x + 1 \, dx + \int_0^b -x + 1 \, dx \right) = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha \left(\left[\frac{x^2}{2} + x \right]_a^0 + \left[-\frac{x^2}{2} + x \right]_0^b \right) = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha \left(-\frac{a^2}{2} - a - \frac{b^2}{2} + b \right) = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha = \frac{2}{-a^2 - 2a - b^2 + 2b} \end{aligned}$$

La fonction de répartition de la loi triangulaire symétrique tronquée est

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a, \\ f^-(x) = \int_a^x p(u) \, du & \text{si } x \in [a, 0], \\ f^+(x) = \int_a^0 p(u) \, du + \int_0^x p(u) \, du & \text{si } x \in [0, b], \\ 1 & \text{si } x > b. \end{cases}$$

Ainsi :

$$f^-(x) = \int_a^x \alpha(1 + u) \, du = \alpha \left[u + \frac{u^2}{2} \right]_a^x = \alpha \left(x + \frac{x^2}{2} - a - \frac{a^2}{2} \right)$$
$$f^+(x) = \int_a^0 \alpha(1 + u) \, du + \int_0^x \alpha(1 - u) \, du = \alpha \left(-a - \frac{a^2}{2} \right) + \alpha \left[u - \frac{u^2}{2} \right]_0^x = \alpha \left(x - \frac{x^2}{2} - a - \frac{a^2}{2} \right)$$

- L'inversion de f^- donne :

$$\frac{x^2}{2} + x - \frac{y}{\alpha} - a - \frac{a^2}{2} = 0$$

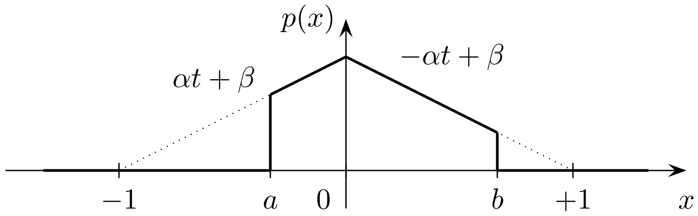

Figure 5 – Distribution triangulaire réduite tronquée ($a \in [-1, 0]$ et $b \in [0, +1]$).

C'est une équation du deuxième ordre possédant deux solutions :

$$x_1 = -1 - \sqrt{1 + 2y/\alpha + 2a + a^2} \qquad x_2 = -1 + \sqrt{1 + 2y/\alpha + 2a + a^2}$$

Pour avoir des valeurs de x dans $[a, 0]$, c'est la seconde expression qu'il faut considérer, donc la fonction de répartition inverse a pour expression :

$$f^{-^{-1}}(y) = -1 + \sqrt{1 + 2y/\alpha + 2a + a^2}$$

- L'inversion de f^+ donne :

$$\frac{x^2}{2} - x + \frac{y}{\alpha} + a + \frac{a^2}{2} = 0$$

C'est une équation du deuxième ordre possédant deux solutions :

$$x_1 = 1 - \sqrt{1 - 2y/\alpha - 2a - a^2} \qquad x_2 = 1 + \sqrt{1 - 2y/\alpha - 2a - a^2}$$

Pour avoir des valeurs de x dans $[0, b]$, c'est la première expression qu'il faut considérer, donc la fonction de répartition inverse a pour expression :

$$f^{+^{-1}}(y) = 1 - \sqrt{1 - 2y/\alpha - 2a - a^2}$$

Il s'agit maintenant de déterminer le seuil S qui permet de choisir entre $f^{-^{-1}}$ et $f^{+^{-1}}$. Le seuil correspond en fait à $x = 0$, donc :

$$S = f^-(0) = f^+(0) = -\alpha \left(a + \frac{a^2}{2}\right)$$

5 Calcul de la densité de probabilité

Lorsque la densité de probabilité réduite a pour valeur $p(x)$, la densité de probabilité *non* réduite a pour valeur $p(x)/\sigma$ car σ^{-1} est l'inverse du Jacobien de la transformation $t = \mu + x\sigma$.