

# Metodi Statistici per le decisioni

2024-2025

Vincenzo Nardelli



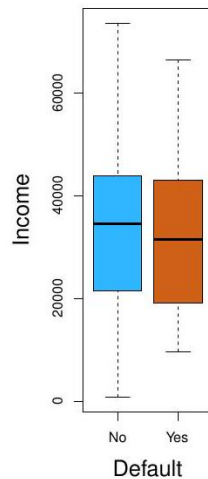
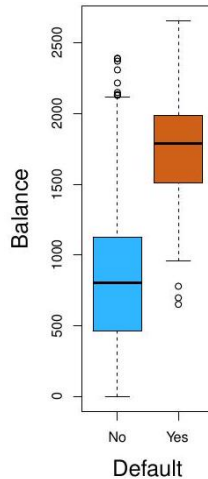
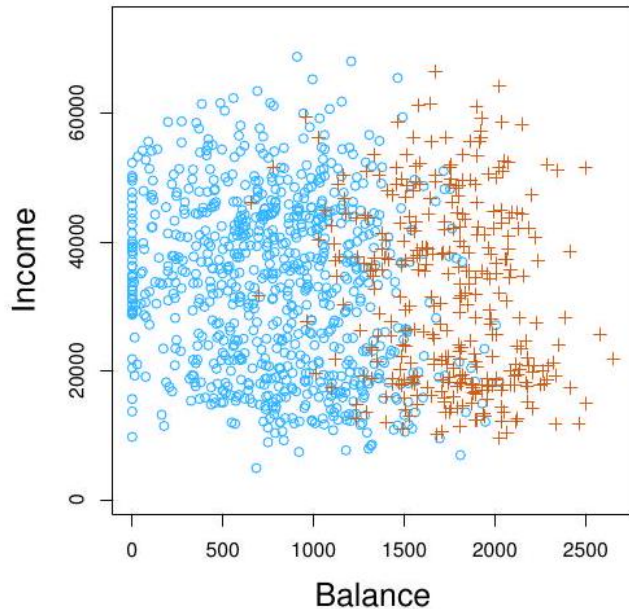
[vincenzo.nardelli@unicatt.it](mailto:vincenzo.nardelli@unicatt.it)

# Classificazione

- ▶ Le variabili qualitative assumono valori in un insieme non ordinato  $\mathcal{C}$ , come ad esempio:  
colore degli occhi  $\in \{ \text{marrone, blu, verde} \}$  email  $\in \{ \text{spam, ham} \}$ .
- ▶ Dato un vettore di caratteristiche  $X$  e una risposta qualitativa  $Y$  che assume valori nell'insieme  $\mathcal{C}$ , il compito di classificazione consiste nel costruire una funzione  $C(X)$  che prenda in input il vettore  $X$  e ne predica il valore per  $Y$ ; ovvero  $C(X) \in \mathcal{C}$ .
- ▶ Spesso siamo più interessati a stimare le probabilità che  $X$  appartenga a ciascuna categoria in  $\mathcal{C}$ .

Ad esempio, è più utile avere una stima della probabilità che una richiesta di assicurazione sia fraudolenta, piuttosto che una classificazione "fraudolenta" o "non fraudolenta".

# Esempio Carta di Credito



# Perchè la regressione lineare non basta?

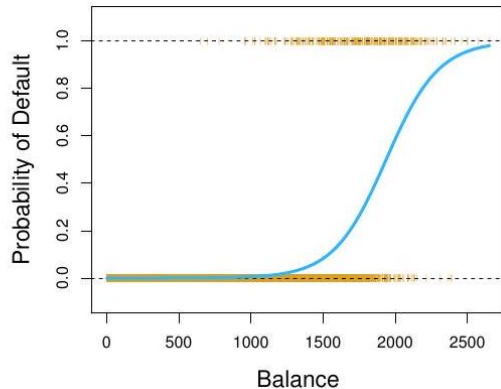
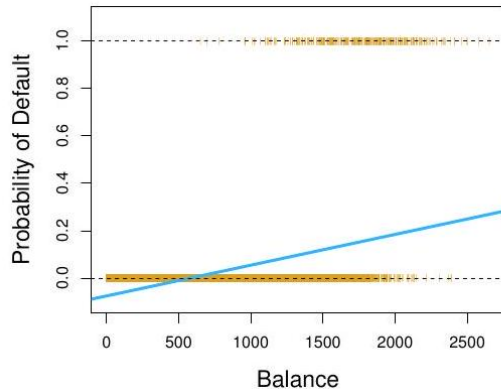
Supponiamo per il compito di classificazione Default di codificare

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{se No} \\ 1 & \text{se Sì.} \end{cases}$$

Possiamo semplicemente eseguire una regressione lineare di  $Y$  su  $X$  e classificare come Sì se  $\hat{Y} > 0.5$ ?

- ▶ In questo caso di risultato binario, la regressione lineare svolge un buon lavoro come classificatore ed è equivalente all'analisi discriminante lineare che discuteremo più avanti.
- ▶ Poiché nella popolazione  $E(Y | X = x) = \Pr(Y = 1 | X = x)$ , si potrebbe pensare che la regressione sia perfetta per questo compito.
- ▶ Tuttavia, la regressione lineare potrebbe produrre probabilità inferiori a zero o superiori a uno. La regressione logistica è più appropriata.

# Regressione Lineare VS Regressione Logistica



I segni arancioni indicano la risposta  $Y$ , 0 o 1. La regressione lineare non stima bene  $\Pr(Y = 1 | X)$ . La regressione logistica sembra adatta al compito.

# Regressione Logistica

Scriviamo  $p(X) = \Pr(Y = 1 \mid X)$  per semplicità e consideriamo l'uso del bilancio per prevedere il default. La regressione logistica usa la forma

$$p(X) = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 X}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 X}}$$

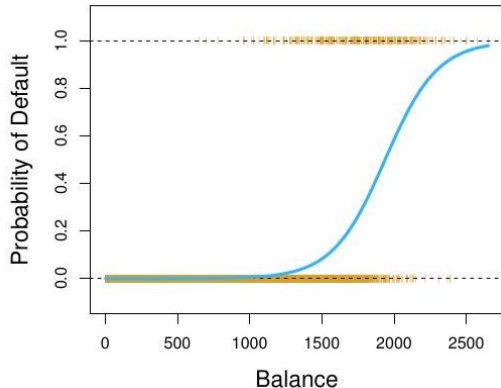
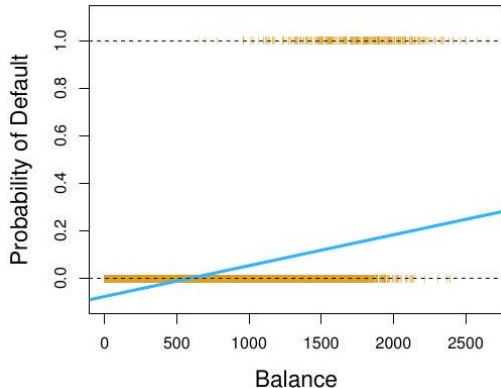
( $e \approx 2.71828$  è una costante matematica [numero di Eulero]). È facile vedere che, indipendentemente dai valori di  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  o  $X$ ,  $p(X)$  avrà valori compresi tra 0 e 1.

Un po' di riorganizzazione dà

$$\log \left( \frac{p(X)}{1 - p(X)} \right) = \beta_0 + \beta_1 X$$

Questa trasformazione monotona è chiamata trasformazione log-odds o logit di  $p(X)$ . (con log intendiamo logaritmo naturale:  $\ln$ ).

# Regressione Lineare VS Regressione Logistica



La regressione logistica garantisce che la nostra stima per  $p(X)$  sia compresa tra 0 e 1.

# Massima Verosimiglianza

Usiamo la massima verosimiglianza per stimare i parametri.

$$\ell(\beta_0, \beta) = \prod_{i: y_i=1} p(x_i) \prod_{i: y_i=0} (1 - p(x_i))$$

Questa funzione di verosimiglianza dà la probabilità degli zeri e degli uno osservati nei dati. Scegliamo  $\beta_0$  e  $\beta_1$  per massimizzare la probabilità dei dati osservati.



# Massima Verosimiglianza

La maggior parte dei pacchetti statistici è in grado di fare il fit di modelli di regressione logistica lineare usando la massima verosimiglianza. In R, utilizziamo la funzione 'glm'.

	Coefficiente	Errore Std.	Statistica Z	Valore-P
Intercept	-10.6513	0.3612	-29.5	< 0.0001
balance	0.0055	0.0002	24.9	< 0.0001

# Log-Odds: Coefficienti, Formula e Calcolo

## Coefficienti:

$$\text{log-odds} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$$

- Cambiamenti nelle log-odds associati a incrementi unitari nelle variabili.

## Log-odds:

$$\text{log-odds} = \ln \left( \frac{P(y = 1)}{1 - P(y = 1)} \right)$$

- Permettono di modellare la probabilità su una scala lineare.

## Odds

$$\text{odds} = e^{\text{log-odds}}$$

- Il rapporto tra la probabilità di successo e di insuccesso.

# Perché il modello logistico produce log-odds?

- ▶ Nella regressione logistica, il nostro obiettivo è modellare la **probabilità** che un evento accada,  $P(y = 1)$ .
- ▶ Tuttavia,  $P(y = 1)$  è limitato tra 0 e 1, quindi non può essere modellata direttamente come combinazione lineare delle variabili.
- ▶ Per superare questa limitazione:

- ▶ Si calcolano le **odds**, cioè il rapporto tra la probabilità di successo e quella di insuccesso:

$$\text{odds} = \frac{P(y = 1)}{1 - P(y = 1)}$$

- ▶ Si applica il logaritmo naturale alle odds, ottenendo le **log-odds**, che hanno un intervallo illimitato:

$$\text{log-odds} = \ln \left( \frac{P(y = 1)}{1 - P(y = 1)} \right)$$

- ▶ La regressione logistica modella le log-odds come combinazione lineare delle variabili esplicative:

$$\text{log-odds} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots$$

# Interpretazione dell'Intercetta nella Regressione Logistica

## Definizione dell'Intercetta ( $\beta_0$ ):

- ▶ L'intercetta rappresenta le **log-odds** dell'evento di successo ( $y = 1$ ) quando tutte le variabili esplicative sono uguali a 0.
- ▶ Può essere trasformata in una probabilità:

$$P(y = 1) = \frac{e^{\beta_0}}{1 + e^{\beta_0}}$$

## Interpretazione:

- ▶  $\beta_0 > 0$ : L'evento è più probabile ( $P(y = 1) > 0.5$ ) quando  $x_1, x_2, \dots = 0$ .
- ▶  $\beta_0 = 0$ : L'evento ha probabilità  $P(y = 1) = 0.5$  quando  $x_1, x_2, \dots = 0$ .
- ▶  $\beta_0 < 0$ : L'evento è meno probabile ( $P(y = 1) < 0.5$ ) quando  $x_1, x_2, \dots = 0$ .

## Considerazioni:

- ▶ L'intercetta ha senso solo se  $x = 0$  è un valore interpretabile per tutte le variabili.
- ▶ Se  $x = 0$  non ha significato pratico, l'intercetta è difficile da interpretare.

# Interpretazione dei risultati

Supponiamo di avere i seguenti risultati di regressione logistica:

	Coefficiente	Errore Std.	Statistica Z	Valore-P
Intercept	-10.6513	0.3612	-29.5	< 0.0001
balance	0.0055	0.0002	24.9	< 0.0001

## ► **Intercept (-10.6513):**

- Rappresenta le log-odds quando tutte le variabili esplicative sono uguali a 0.
- Essendo molto negativo, le probabilità di successo ( $P(y = 1)$ ) sono molto basse quando balance = 0.

## ► **balance (0.0055):**

- Il coefficiente positivo indica che all'aumentare di balance, aumentano le log-odds, quindi la probabilità di successo.
- Interpretazione delle odds:  $e^{0.0055} \approx 1.0055$ . Per ogni aumento unitario di balance, le odds aumentano dello 0.55%.
- Il valore-p molto basso (< 0.0001) indica che l'effetto è statisticamente significativo.

# Fare Previsioni per Balance = \$1000

## Log-odds:

$$\text{log-odds} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot X = -10.6513 + 0.0055 \cdot 1000 = -5.1524$$

## Odds:

$$\text{odds} = e^{\text{log-odds}} = e^{-5.1524} \approx 0.0058$$

## Probabilità:

$$\hat{p}(X) = \frac{\text{odds}}{1 + \text{odds}} = \frac{0.0058}{1 + 0.0058} \approx 0.006$$

## Interpretazione:

- ▶ **Log-odds:** Le log-odds di default sono -5.1524, indicando una probabilità estremamente bassa.
- ▶ **Odds:** Le odds sono 0.0058, ovvero circa 1 possibilità su 173 che il default avvenga.
- ▶ **Probabilità:** La probabilità stimata di default è 0.006, cioè lo 0.6%.

# Fare Previsioni per Balance = \$2000

## Log-odds:

$$\text{log-odds} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot X = -10.6513 + 0.0055 \cdot 2000 = 0.3465$$

## Odds:

$$\text{odds} = e^{\text{log-odds}} = e^{0.3465} \approx 1.414$$

## Probabilità:

$$\hat{p}(X) = \frac{\text{odds}}{1 + \text{odds}} = \frac{1.414}{1 + 1.414} \approx 0.586$$

## Interpretazione:

- ▶ **Log-odds:** Le log-odds di default sono 0.3465, indicando una probabilità maggiore del 50%.
- ▶ **Odds:** Le odds sono 1.414, ovvero il default è circa 1.41 volte più probabile rispetto al non default.
- ▶ **Probabilità:** La probabilità stimata di default è 0.586, cioè il 58.6%.

# La devianza in un modello logistico

## Formula della devianza:

$$D = -2 \cdot (\ell_{\text{modello}} - \ell_{\text{modello di saturazione}})$$

## Dove:

- ▶  $\ell_{\text{modello}}$ : La log-verosimiglianza del modello stimato.
- ▶  $\ell_{\text{modello di saturazione}}$ : La log-verosimiglianza di un modello perfetto che si adatta esattamente ai dati (massima possibile).

## Spiegazione:

- ▶ La devianza misura quanto il modello corrente si discosta da un modello perfetto.
- ▶ Valori più bassi di devianza indicano un miglior adattamento ai dati.
- ▶ Si confrontano due tipi di devianza:
  - ▶ **Devianza nulla**: Modello con solo l'intercetta (nessun predittore).
  - ▶ **Devianza residua**: Modello con i predittori inclusi.
- ▶ La differenza tra devianza nulla e devianza residua indica quanto i predittori migliorano il modello.



# Akaike Information Criterion (AIC)

## Formula dell'AIC:

$$AIC = -2 \cdot \ell_{\text{modello}} + 2 \cdot k$$

## Dove:

- ▶  $\ell_{\text{modello}}$ : La log-verosimiglianza del modello stimato.
- ▶  $k$ : Il numero di parametri stimati nel modello (inclusa l'intercetta).

## Spiegazione:

- ▶ L'AIC valuta un modello bilanciando:
  - ▶ **Adattamento**: Quanto bene il modello si adatta ai dati (log-verosimiglianza).
  - ▶ **Semplicità**: Penalizza modelli troppo complessi (numero di parametri).
- ▶ Modelli con un AIC più basso sono preferibili.
- ▶ L'AIC è utile per confrontare modelli: un modello con AIC più basso è considerato migliore.

**Nota:** L'AIC non misura la qualità assoluta di un modello, ma è un criterio comparativo tra modelli con gli stessi dati.

# Confusion Matrix e Accuracy

## Definizione della Confusion Matrix:

	Predetto: No	Predetto: Yes
Effettivo: No	True Negative (TN)	False Positive (FP)
Effettivo: Yes	False Negative (FN)	True Positive (TP)

## Terminologia chiave:

- ▶ **True Positive (TP):** Predetto "Yes" e l'evento è effettivamente "Yes".
- ▶ **False Positive (FP):** Predetto "Yes" ma l'evento è effettivamente "No".
- ▶ **True Negative (TN):** Predetto "No" e l'evento è effettivamente "No".
- ▶ **False Negative (FN):** Predetto "No" ma l'evento è effettivamente "Yes".

## Accuracy:

$$\text{Accuracy} = \frac{\text{TP} + \text{TN}}{\text{Totale delle osservazioni}}$$

# Confusion Matrix e Accuracy

**Risultati ottenuti:**

	<b>Effettivo: No</b>	<b>Effettivo: Yes</b>
<b>Predetto: No</b>	9625	233
<b>Predetto: Yes</b>	42	100

**Calcolo dell'Accuracy:**

$$\text{Accuracy} = \frac{9625 + 100}{9625 + 233 + 42 + 100} = 0.9725 \text{ (97.25\%)}$$

# La correttezza non è tutto

## Problema:

- ▶ Un modello può avere un'alta accuratezza, ma potrebbe non essere ottimale in termini di falsi positivi (FP) e falsi negativi (FN).
- ▶ Dipende dal contesto: alcuni errori sono più costosi di altri.

## Errori nel modello:

- ▶ **Falsi Positivi (FP):** Il modello predice positivi, ma sono negativi.
- ▶ **Falsi Negativi (FN):** Il modello predice negativi, ma sono positivi.

## Obiettivo:

- ▶ In alcune situazioni, vogliamo minimizzare i FP.
- ▶ In altre, vogliamo minimizzare i FN.

**Conclusione:** La scelta tra ridurre FP e FN dipende dal contesto applicativo.

# Quando ridurre FP e FN?

## Ridurre i Falsi Positivi:

- ▶ Sistemi di raccomandazione:
  - ▶ Evitare di inviare offerte a utenti non interessati.
- ▶ Cybersecurity:
  - ▶ Evitare falsi allarmi che distraggono il team IT.
- ▶ Controllo qualità:
  - ▶ Evitare di scartare prodotti conformi.

## Ridurre i Falsi Negativi:

- ▶ Diagnosi medica:
  - ▶ Identificare tutti i pazienti con una malattia grave.
- ▶ Customer Retention:
  - ▶ Identificare tutti i clienti a rischio di abbandono.
- ▶ Frodi:
  - ▶ Identificare tutte le transazioni fraudolente.

# Cos'è la Sensitività?

## Definizione:

$$\text{Sensitività (Recall)} = \frac{\text{True Positive (TP)}}{\text{True Positive (TP)} + \text{False Negative (FN)}}$$

## Spiegazione:

- ▶ Misura la capacità del modello di identificare correttamente i positivi.
- ▶ Una sensibilità alta significa pochi falsi negativi.

## Quando applicarla?

- ▶ **Diagnosi medica:** Identificare tutti i pazienti malati.
- ▶ **Frodi:** Assicurarsi che tutte le transazioni fraudolente siano segnalate.

## Trade-off:

- ▶ Una sensitività alta può comportare un aumento dei falsi positivi.

# Cos'è la Specificità?

## Definizione:

$$\text{Specificità} = \frac{\text{True Negative (TN)}}{\text{True Negative (TN)} + \text{False Positive (FP)}}$$

## Spiegazione:

- ▶ Misura la capacità del modello di identificare correttamente i negativi.
- ▶ Una specificità alta significa pochi falsi positivi.

## Quando applicarla?

- ▶ **Sistemi di raccomandazione:** Evitare di disturbare utenti non interessati.
- ▶ **Cybersecurity:** Minimizzare gli allarmi inutili per attacchi inesistenti.

## Trade-off:

- ▶ Una specificità alta può comportare un aumento dei falsi negativi.

# Spostare la Soglia: Bilanciare FP e FN

## **Spostare la soglia di classificazione:**

- ▶ La soglia determina il punto in cui una probabilità viene classificata come positiva o negativa.

## **Effetti di soglie diverse:**

### ▶ **Soglia bassa:**

- ▶ Aumenta la sensibilità (meno falsi negativi).
- ▶ Riduce la specificità (più falsi positivi).

### ▶ **Soglia alta:**

- ▶ Aumenta la specificità (meno falsi positivi).
- ▶ Riduce la sensibilità (più falsi negativi).

## **Esempio pratico: Diagnosi medica**

- ▶ **Soglia bassa:** Identificare tutti i malati (anche con falsi allarmi).
- ▶ **Soglia alta:** Evitare di diagnosticare erroneamente pazienti sani.



# Fare Previsioni

Ripetiamo utilizzando "studente" come predittore.

	Coefficiente	Errore Std.	Statistica Z	Valore-P
Intercept	-3.5041	0.0707	-49.55	< 0.0001
student[Si]	0.4049	0.1150	3.52	0.0004

$$\hat{\Pr}(\text{insolvenza} = \text{Sì} \mid \text{studente} = \text{Sì}) = \frac{e^{-3.5041+0.4049 \times 1}}{1 + e^{-3.5041+0.4049 \times 1}} = 0.0431,$$

$$\hat{\Pr}(\text{insolvenza} = \text{Sì} \mid \text{studente} = \text{No}) = \frac{e^{-3.5041+0.4049 \times 0}}{1 + e^{-3.5041+0.4049 \times 0}} = 0.0292$$

# Regressione logistica con più variabili

$$\log \left( \frac{p(X)}{1 - p(X)} \right) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_p X_p$$

$$p(X) = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_p X_p}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_p X_p}}$$

	Coefficiente	Errore Std.	Statistica Z	Valore-P
Intercept	-10.8690	0.4923	-22.08	< 0.0001
balance	0.0057	0.0002	24.74	< 0.0001
income	0.0030	0.0082	0.37	0.7115
student [Si]	-0.6468	0.2362	-2.74	0.0062

Perché il coefficiente per "studente" è negativo mentre era positivo prima?

# Confronto tra diverse soglie di classificazione

## Soglia = 0.2

$$\begin{bmatrix} 9404 & 134 \\ 263 & 199 \end{bmatrix}$$

- ▶ **Accuracy:** 0.9603
- ▶ **Sensitività:** 0.5976
- ▶ **Specificità:** 0.9728

## Soglia = 0.5

$$\begin{bmatrix} 9625 & 233 \\ 42 & 100 \end{bmatrix}$$

- ▶ **Accuracy:** 0.9725
- ▶ **Sensitività:** 0.3003
- ▶ **Specificità:** 0.9957

## Soglia = 0.8

$$\begin{bmatrix} 9662 & 307 \\ 5 & 26 \end{bmatrix}$$

- ▶ **Accuracy:** 0.9688
- ▶ **Sensitività:** 0.0781
- ▶ **Specificità:** 0.9995

- ▶ **Soglia 0.2:** Alta sensibilità, ma ridotta specificità (molti falsi positivi).
- ▶ **Soglia 0.5:** Bilanciamento tra sensibilità e specificità.
- ▶ **Soglia 0.8:** Alta specificità, ma ridotta sensibilità (molti falsi negativi).

# LAB Puntualità delle Consegne nell'E-Commerce

La puntualità delle consegne è un aspetto fondamentale per garantire la soddisfazione del cliente nel settore dell'e-commerce. Attraverso l'analisi dei dati delle spedizioni, è possibile identificare i fattori che influenzano maggiormente i ritardi, consentendo all'azienda di ottimizzare le operazioni logistiche e migliorare l'efficienza.

Obiettivo dell'analisi:

- ▶ Identificare i fattori chiave che portano a ritardi nelle consegne.
- ▶ Creare un modello predittivo per anticipare i ritardi.
- ▶ Fornire raccomandazioni operative per mitigare i ritardi e migliorare la soddisfazione del cliente.

# Descrizione delle Variabili - Dataset Shipping

Il dataset contiene informazioni raccolte su spedizioni e clienti per analizzare i ritardi nelle consegne. Le principali variabili includono:

- ▶ **mode\_of\_shipment**: Modalità di spedizione (Nave, Aereo, Strada).
- ▶ **customer\_rating**: Valutazione del cliente (1 = peggiore, 5 = migliore).
- ▶ **cost\_of\_the\_product**: Costo del prodotto (USD).
- ▶ **prior\_purchases**: Numero di acquisti precedenti del cliente.
- ▶ **product\_importance**: Importanza del prodotto (bassa, media, alta).
- ▶ **gender**: Genere del cliente (Maschio, Femmina).
- ▶ **discount\_offered**: Sconto offerto sul prodotto.
- ▶ **weight\_in\_gms**: Peso del prodotto in grammi.
- ▶ **reached\_time**: Variabile target (1 = in ritardo, 0 = puntuale).

# LAB Puntualità delle Consegne: Attività

1. Esplora il dataset e verifica la distribuzione delle variabili. Controlla eventuali valori mancanti o incoerenti.
2. Costruisci un modello di regressione logistica con `Reached.on.Time_Y.N` come variabile dipendente e le altre variabili come predittori.
3. Analizza i coefficienti del modello per identificare i fattori significativi e il loro impatto sulla probabilità di ritardo.
4. Sviluppa raccomandazioni operative basate sui risultati del modello per ridurre i ritardi nelle consegne.

# LAB Analisi dell'Accettazione dei Coupon da Parte degli Autisti

L'analisi dell'accettazione dei coupon da parte degli autisti è cruciale per comprendere come variabili come destinazione, meteo, presenza di passeggeri e distanza influiscano sulle decisioni. Questo consente alle aziende di ottimizzare le strategie promozionali, ridurre gli sprechi e migliorare i profitti. Il caso studio si basa su dati reali raccolti in diversi scenari di guida, dove si valuta se gli autisti accettano o meno i coupon offerti.

## **Obiettivo dell'analisi:**

- ▶ Identificare i fattori chiave che influenzano la decisione degli autisti di accettare un coupon durante la guida.
- ▶ Creare un modello predittivo basato sulla regressione logistica per stimare la probabilità di accettazione dei coupon.
- ▶ Analizzare i costi aziendali associati agli errori del modello, come falsi positivi (offerta di coupon inutili) e falsi negativi (perdita di opportunità), al fine di migliorare la strategia promozionale.

# Descrizione delle Variabili - Dataset Coupon

Il dataset analizza scenari di guida e preferenze dei clienti per prevedere l'accettazione dei coupon. Le principali variabili includono:

- ▶ **destination**: Destinazione attuale (No Urgent Place, Home, Work).
- ▶ **passenger**: Passeggeri in macchina (Alone, Friend(s), Kid(s), Partner).
- ▶ **weather**: Condizioni meteo (Sunny, Rainy, Snowy).
- ▶ **coupon**: Tipo di coupon offerto (Restaurant, Coffee House, Bar, etc.).
- ▶ **income**: Fascia di reddito (<12.5k, 12.5k–25k, >100k, etc.).



# Descrizione delle Variabili - Dataset Coupon

- ▶ **RestaurantLessThan20**: Frequenza di visite a ristoranti con spesa media inferiore a \$20 (4-8, 1-3, less1, gt8, never).
- ▶ **Restaurant20To50**: Frequenza di visite a ristoranti con spesa media tra \$20-\$50 (1-3, less1, never, gt8, 4-8, nan).
- ▶ **toCoupon\_GEQ15min**: Distanza in macchina >15 minuti (1 = sì, 0 = no).
- ▶ **toCoupon\_GEQ25min**: Distanza in macchina >25 minuti (1 = sì, 0 = no).
- ▶ **direction\_same**: Il coupon è nella stessa direzione della destinazione (1 = sì, 0 = no).
- ▶ **direction\_opp**: Il coupon è nella direzione opposta alla destinazione (1 = sì, 0 = no).
- ▶ **Y**: Variabile target (1 = coupon accettato, 0 = non accettato).

# LAB Coupon Analysis: Attività

1. Esplora il dataset per comprendere la distribuzione delle variabili e identificare valori mancanti o incoerenti.
2. Costruisci un modello di regressione logistica con  $Y$  come variabile dipendente e le altre variabili come predittori.
3. Analizza i coefficienti del modello per identificare i fattori significativi e il loro impatto sulla probabilità di accettazione del coupon.
4. Valuta l'errore del modello, calcolando l'impatto economico di falsi positivi e falsi negativi.

# Valutazione dell'Errore e Impatti Economici

In un contesto aziendale, i costi associati a falsi positivi e falsi negativi sono fondamentali:

- ▶ **Falsi Positivi (FP):** Il modello prevede che il cliente accetterà il coupon, ma in realtà non lo fa.
  - ▶ Costo aziendale: Spese di marketing per l'invio di un coupon (0.3€ per coupon inviato).
- ▶ **Falsi Negativi (FN):** Il modello prevede che il cliente non accetterà il coupon, ma in realtà lo avrebbe fatto.
  - ▶ Costo aziendale: Perdita di opportunità di guadagno (4.5€ per coupon non accettato ma potenzialmente valido).

## Calcolo dei costi totali:

- ▶ Costo totale FP =  $FP \times 0.3$
- ▶ Costo totale FN =  $FN \times 4.5$