Metodi Statistici per le decisioni

2024-2025

Vincenzo Nardelli

vincenzo.nardelli@unicatt.it

Alberi decisionali

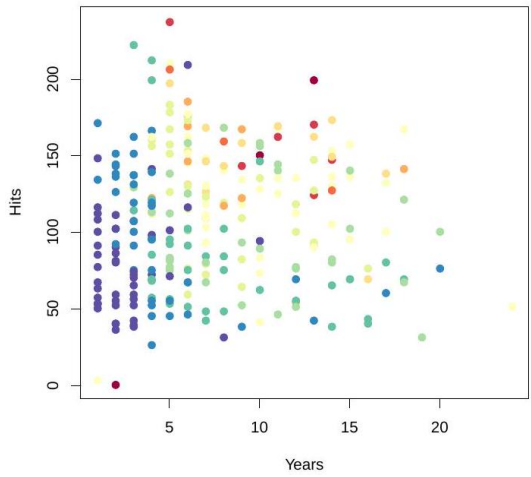
- I metodi basati sugli alberi decisionali prevedono di stratificare o segmentare lo spazio dei predittori in un certo numero di regioni semplici.
- Poiché l'insieme delle regole di divisione utilizzate per segmentare lo spazio dei predittori può essere riassunto in un albero, questi approcci sono noti come metodi basati sugli alberi decisionali.
- È possibile utilizzare questi metodi sia per regressione che classificazione.

Pro e Contro

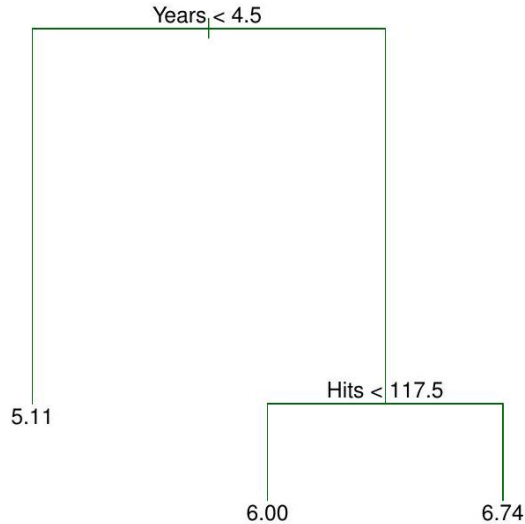
- I metodi basati sugli alberi sono semplici e utili per l'interpretazione.
- Tuttavia, generalmente non sono competitivi con i nuovi approcci di apprendimento supervisionato in termini di accuratezza predittiva.
- Per questo motivo, discutiamo anche di bagging e foreste casuali (random forests). Questi metodi crescono molti alberi che vengono poi combinati per produrre una singola previsione di consenso.
- La combinazione di un gran numero di alberi può spesso migliorare notevolmente l'accuratezza predittiva, a scapito di una perdita di interpretabilità.

Dati sugli stipendi nel baseball: come li stratificheresti?

Gli stipendi sono codificati per colore dal basso blu, verde, giallo, rosso...



Albero decisionale per questi dati

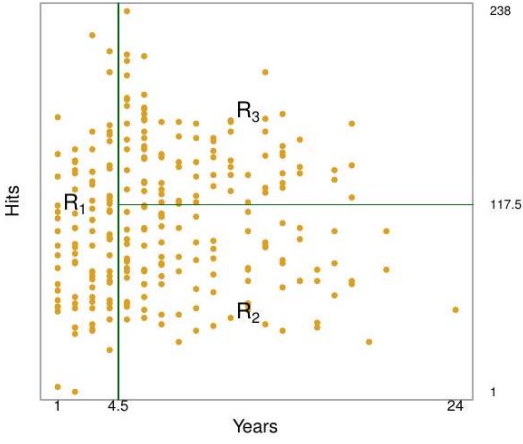


Dettagli della figura precedente

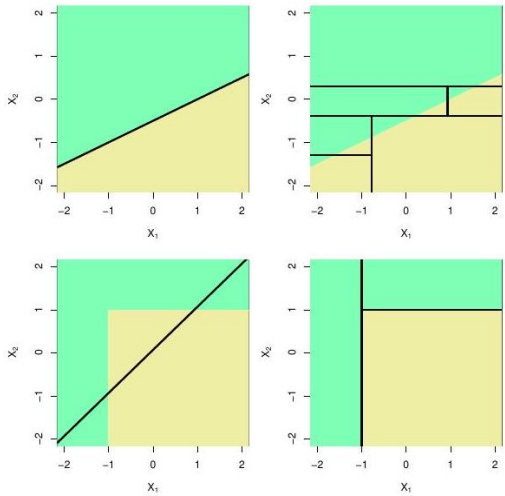
- Per i dati degli Hitters, un albero di regressione predice il logaritmo dello stipendio di un giocatore di baseball, basandosi sul numero di anni trascorsi nelle leghe maggiori e sul numero di battute valide (hits) effettuate nell'anno precedente.
- In un dato nodo interno, l'etichetta (del tipo $X_j < t_k$) indica che il ramo sinistro si riferisce alla condizione $X_j < t_k$, mentre il ramo destro corrisponde a $X_j \geq t_k$. Ad esempio, la divisione in cima all'albero produce due grandi rami: il ramo sinistro corrisponde a Years < 4.5, e il ramo destro corrisponde a Years >= 4.5.
- L'albero ha due nodi interni e tre nodi terminali, o foglie. Il numero in ciascuna foglia rappresenta la media della risposta per le osservazioni che vi appartengono.

Risultati

- Complessivamente, l'albero stratifica o segmenta i giocatori in tre regioni dello spazio dei predittori: R_1 = {X | Years < 4.5}, R_2 = {X | Years >= 4.5, Hits < 117.5}, e R_3 = {X | Years >= 4.5, Hits >= 117.5}.



Alberi vs Modelli Lineari



Terminologia per gli alberi

- Seguendo l'analogia dell'albero, le regioni R_1, R_2 e R_3 sono note come nodi terminali.
- Gli alberi decisionali sono solitamente rappresentati al contrario, nel senso che le foglie sono in basso nell'albero.
- I punti lungo l'albero dove lo spazio dei predittori viene diviso sono detti nodi interni.
- Nell'albero degli Hitters, i due nodi interni sono indicati dal testo Years < 4.5 e Hits < 117.5.

Interpretazione dei risultati

- Il numero di anni di esperienza (Years) è il fattore più importante nel determinare lo stipendio, e i giocatori con meno esperienza guadagnano stipendi più bassi rispetto a quelli più esperti.
- Dato che un giocatore è meno esperto, il numero di battute valide effettuate nell'anno precedente sembra avere poca influenza sullo stipendio.
- Ma tra i giocatori che sono stati nelle leghe maggiori per cinque o più anni, il numero di battute valide effettuate nell'anno precedente influisce sullo stipendio, e i giocatori che hanno realizzato più battute valide tendono a guadagnare di più.
- Sicuramente una semplificazione, ma rispetto a un modello di regressione è facile da visualizzare, interpretare e spiegare.

Dettagli del processo di costruzione dell'albero

1. Dividiamo lo spazio dei predittori, cioè l'insieme dei valori possibili per $X_1, X_2, \ldots, X_p$, in J regioni distinte e non sovrapposte, $R_1, R_2, \ldots, R_J$.
2. Per ogni osservazione che rientra nella regione R_j, facciamo la stessa previsione, che è semplicemente la media dei valori di risposta per le osservazioni di training in R_j.

Ulteriori dettagli sul processo di costruzione dell'albero

- In teoria, le regioni potrebbero avere qualsiasi forma. Tuttavia, scegliamo di dividere lo spazio dei predittori in rettangoli o box ad alta dimensione, per semplicità e facilità di interpretazione del modello predittivo risultante.
- L'obiettivo è trovare i box $R_1, \ldots, R_J$ che minimizzano l'RSS, dato da

$$\sum_{j=1}^{J} \sum_{i \in R_j} \left(y_i - \hat{y}_{R_j} \right)^2$$

dove $\hat{y}_{R_j}$ è la media della risposta per le osservazioni di training all'interno della scatola j.

Ulteriori dettagli sul processo di costruzione dell'albero

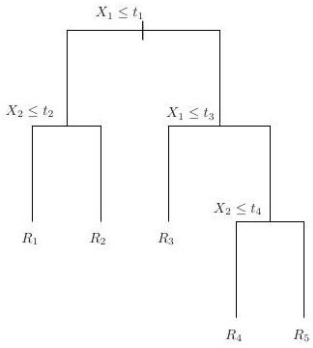
- Purtroppo, è computazionalmente impossibile considerare tutte le possibili partizioni dello spazio dei predittori in J box.
- Per questo motivo, adottiamo un approccio top-down noto come suddivisione binaria ricorsiva.
- L'approccio è top-down perché inizia dalla cima dell'albero e successivamente divide lo spazio dei predittori; ogni divisione è indicata da due nuovi rami più in basso nell'albero.
- Ad ogni passaggio del processo di costruzione dell'albero, viene effettuata la miglior divisione in quel particolare passaggio, invece di guardare avanti per scegliere una divisione che potrebbe portare a un albero migliore in un passaggio futuro (simile alla forward varible selection).

Dettagli - Continuazione

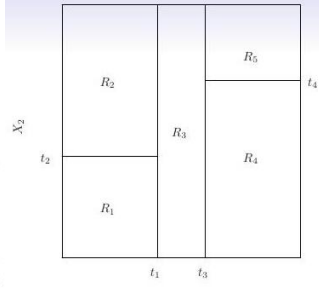
- Selezioniamo il predittore X_j e il punto di taglio s tali che dividendo lo spazio dei predittori nelle regioni $\{X \mid X_j < s\}$ e $\{X \mid X_j \geq s\}$ si ottenga la maggiore riduzione possibile dell'RSS.
- Successivamente, ripetiamo il processo, cercando il miglior predittore e il miglior punto di taglio per dividere ulteriormente i dati in modo da minimizzare l'RSS all'interno delle regioni risultanti.
- Questa volta, invece di dividere l'intero spazio dei predittori, dividiamo una delle due regioni precedentemente identificate. Ora abbiamo tre regioni.
- Ancora, cerchiamo di dividere una di queste tre regioni, per minimizzare l'RSS. Il processo continua fino a raggiungere un criterio di arresto; ad esempio, possiamo continuare finché nessuna regione contiene più di cinque osservazioni.

Previsioni

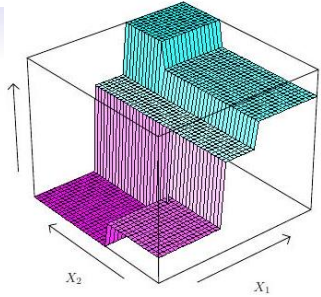
Prevediamo la risposta per una determinata osservazione di test usando la media delle osservazioni di training nella regione a cui appartiene tale osservazione di test.



Il risultato della suddivisione binaria ricorsiva.



L'albero corrispondente alla partizione.



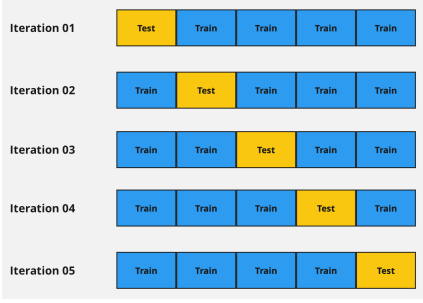
Un grafico prospettico della superficie predittiva.

Pruning di un albero

- Il pruning semplifica un albero complesso eliminando rami non necessari, migliorando interpretabilità e riducendo il rischio di sovradattamento.
- Si parte da un albero grande e complesso e si rimuovono progressivamente i rami meno significativi, mantenendo solo quelli utili per la predizione.
- L'obiettivo è trovare un equilibrio tra complessità e accuratezza, evitando di includere dettagli inutili che potrebbero peggiorare le performance sui nuovi dati.

Cross-validation

Obiettivo: Scegliere il modello che funziona meglio su dati non visti.



- La validazione incrociata è una tecnica per valutare le performance di un modello suddividendo i dati in più parti (folds).
- Ogni fold viene utilizzato a turno come set di test, mentre i rimanenti fungono da set di training.
- Permette di stimare l'accuratezza del modello su nuovi dati, evitando il rischio di sovradattamento.
- Nel contesto del pruning degli alberi, aiuta a identificare il sottoalbero con il miglior compromesso tra semplicità e capacità predittiva.

Selezione del miglior sottoalbero

- La scelta del miglior albero avviene attraverso la validazione incrociata, confrontando le performance di diversi sottoalberi.
- Ogni sottoalbero viene valutato per identificare quello che offre la migliore combinazione tra semplicità e capacità predittiva.
- Una volta identificato l'albero ottimale, lo si applica ai dati completi per migliorare l'accuratezza finale.

Alberi di classificazione

- Molto simili a un albero di regressione, con la differenza che vengono utilizzati per prevedere una risposta qualitativa anziché quantitativa.
- Per un albero di classificazione, prevediamo che ogni osservazione appartenga alla classe più comune tra le osservazioni di training nella regione a cui appartiene.

Dettagli sugli alberi di classificazione

- Come nel contesto della regressione, utilizziamo la suddivisione binaria ricorsiva per far crescere un albero di classificazione.
- Nel contesto della classificazione, l'RSS non può essere utilizzato come criterio per effettuare le suddivisioni binarie.
- Un'alternativa naturale all'RSS è il tasso di errore di classificazione, che è semplicemente la frazione di osservazioni di training in quella regione che non appartengono alla classe più comune:

$$E = 1 - \max_k (\hat{p}_{mk})$$

Qui $\hat{p}_{mk}$ rappresenta la proporzione di osservazioni di training nella regione m che appartengono alla classe k.

- Tuttavia, il tasso di errore di classificazione non è sufficientemente sensibile per la crescita degli alberi, e in pratica sono preferibili altre due misure.

Indice di Gini e Devianza

- L'indice di Gini è definito come

$$G = \sum_{k=1}^{K} \hat{p}_{mk} (1 - \hat{p}_{mk})$$

una misura della varianza totale tra le K classi. L'indice di Gini assume un valore basso se tutti i $\hat{p}_{mk}$ sono vicini a zero o a uno.

- Per questo motivo, l'indice di Gini è considerato una misura della purezza del nodo: un valore basso indica che un nodo contiene prevalentemente osservazioni di una singola classe.

Indice di Gini e Devianza

- L'indice di Gini è definito come

$$G = \sum_{k=1}^{K} \hat{p}_{mk} \left(1 - \hat{p}_{mk}\right)$$

una misura della varianza totale tra le K classi. L'indice di Gini assume un valore basso se tutti i $\hat{p}_{mk}$ sono vicini a zero o uno.

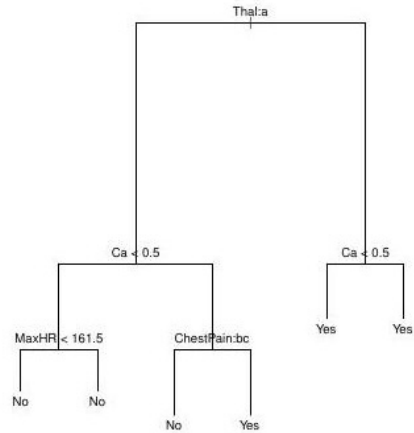
- Per questo motivo, l'indice di Gini è considerato una misura della purezza del nodo: un valore basso indica che un nodo contiene prevalentemente osservazioni di una singola classe.
- Un'alternativa all'indice di Gini è l'entropia incrociata, definita come

$$D = -\sum_{k=1}^{K} \hat{p}_{mk} \log \hat{p}_{mk}$$

- Si scopre che l'indice di Gini e l'entropia incrociata sono molto simili numericamente.

Esempio: dati cardiaci

- Questi dati contengono un esito binario **HD** per 303 pazienti che si sono presentati con dolore toracico.
- Un valore di esito pari a **Yes** indica la presenza di malattia cardiaca basata su un test angiografico, mentre **No** significa assenza di malattia cardiaca.
- Ci sono 13 predittori, inclusi **Age**, **Sex**, **Chol** (una misura del colesterolo) e altre misure della funzione cardiaca e polmonare.



Vantaggi e Svantaggi degli Alberi

Vantaggi

- Gli alberi sono facili da spiegare, anche più della regressione lineare.
- Riflettono in modo intuitivo il processo decisionale umano.
- Sono facilmente visualizzabili e interpretabili, soprattutto se piccoli.
- Gestiscono predittori qualitativi senza necessità di variabili dummy.

Svantaggi

- Gli alberi hanno generalmente una minore accuratezza predittiva rispetto ad altri approcci.
- La loro performance può essere migliorata aggregando più alberi (es. ensemble methods).

LAB Credit Analysis: Obiettivi

Questo laboratorio riprende l'analisi dei dati bancari introdotta nel Capitolo 1, con l'obiettivo di approfondire ulteriormente:

- La relazione tra variabili socioeconomiche e il saldo medio delle carte di credito (`Balance`).
- Il confronto tra due approcci di modellazione: **regressione lineare** e **regression tree**.

L'obiettivo finale è identificare il modello più efficace per fornire raccomandazioni strategiche alla banca.

LAB Credit Analysis: Procedura

- Ripeti l'analisi introdotta nel Capitolo 1, utilizzando la regressione lineare per predire il saldo medio delle carte di credito (`Balance`).
- Estendi l'analisi costruendo un **regression tree** con lo stesso dataset e confronta i due modelli.
- Per ciascun modello, valuta:
  - L'accuratezza predittiva tramite il **Mean Squared Error (MSE)**.
  - La capacità di interpretare le relazioni tra variabili.
- Discuti quale modello è più adatto per l'obiettivo della banca.