Mál- og tegurfræði

Fyrirlestrar Reynis Axelssonar

Hörður Freyr Yngvason

Efnisyfirlit

Engin ákveðin kennslubók. Til er texti á íslensku eftir Jón Ragnar Stefánsson sem er víst mjög ítarlegur. Á ensku kallast efni námskeiðsins *measure and integration*.

Kafli 1

Inngangur

Hvað er *rúmmál* (flatarmál, lengd)? 10. jan.

1.0.1 Byrjum á lengd

Við erum sammála um að *lengd* bilanna

$$[a,b]\,,\,]a,b[\,,\,[a,b[\,,\,]a,b]$$

sé $b-a$; hér eru $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Þá er eðlilegt að segja: Ef $a < b < c < d$, þá sé lengd mengisins

$$]a,b[\cup]c,d[$$

talan $(b-a)+(d-c)$. Látum U vera opið hlutmengi í $\mathbb{R}$. Þá er U sammengi samhengisþátta sinna sem eru allir opin bil, $U = \bigcup_{k\in K} I_k$ þar sem I_k eru opin bil, $I_k \cap I_j \neq \emptyset$ ef $k \neq j$, og þau eru *teljanlega mörg*: Hvert þeirra inniheldur ræða tölu, þær eru ólíkar og teljanlega margar. Þá er kannski eðlilegt að skilgreina lengd mengisins U sem summuna

$$\lambda(U) = \sum_{k\in K} \lambda(I_k),$$

þar sem $\lambda(I_k)$ er lengd bilsins I_k. Hvað ef U er ekki opið? Þá þarf U ekki að vera sammengi af bilum *nema* við leyfum einstökunga. Við höfum alltaf $U = \bigcup_{x\in U}\{x\}$. En eðlilegt er að segja að $\{x\}$ hafi lengd 0; og þá er $\sum_{x\in U} \lambda(\{x\}) = 0$.

Athugasemd. Um summur: Lengd bils getur verið $+\infty$, t.d. bilsins $[0,+\infty[$. Setjum

$$\tilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

og köllum þetta *útvíkkuðu rauntalnalínuna.*

Athugum fjölskyldu $(a_k)_{k\in K}$ í $\tilde{\mathbb{R}}$ þ.a. $a_k \geq 0$. *Fyrst*: Ef K er endanlegt og $a_k \in \mathbb{R}$ fyrir öll k, þá er $\sum_{k\in K} a_k$ vel skilgreind rauntala, nefnilega

$$\sum_{k\in K} a_k := \sum_{j=1}^{n} a_{k_j}$$

þar sem $k_1, \dots, k_n$ er upptalning mengisins K; skilgreiningin er óháð upptalningunni. Ef eitt eða fleiri stök a_k eru $+\infty$, hin í $\mathbb{R}$, þá er eðlilegt að segja

$$\sum_{k\in K} a_k := +\infty.$$

Ef eitt eða fleiri eru $-\infty$, hin í $\mathbb{R}$, þá er $\sum_{k\in K} a_k := -\infty$. Ef sum eru $+\infty$, önnur $-\infty$, þá er summan ekki skilgreind. Ef $a_k \geq 0$ fyrir öll k í K og K óendanlegt þá er

$$\sum_{k\in K} a_k := \sup \left\{ \sum_{k\in J} a_k : J \subset K, J \text{ endanlegt} \right\} \in [0, +\infty].$$

Þetta er alltaf vel skilgreint. Höfum:

Setning 1.1. *Ef $(a_k)_{k\in K}$ er fjölskylda af rauntölum, $a_k \geq 0$ fyrir öll $k \in K$, og $\sum_{k\in K} a_k < +\infty$, þá er mengið*

$$K' := \{k \in K : a_k \neq 0\}$$

teljanlegt.

Sönnun. Mengið $K_n := \{k \in K : a_k \geq \frac{1}{n+1}\}$ fyrir $n \in \mathbb{N}$ er endanlegt; annars væri summan óendanleg, og $K' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ er teljanlegt sammengi af endanlegum mengjum. □

Hvaða eiginleika ætti “lengd” að hafa? Við viljum

(i) Ef $A \subset \mathbb{R}$, þá er $0 \leq \lambda(A) \leq +\infty$.

(ii) Lengd breytist ekki ef við hliðrum menginu til, þ.e.

$$\lambda(A + r) = \lambda(A)$$

fyrir öll r úr $\mathbb{R}$, þar sem $A + r := \{a + r : a \in A\}$.

(iii) $\lambda([0, 1[) = 1$.

(iv) Ef $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ er runa af mengjum sem eru sundurlæg tvö og tvö, þ.e. $A_k \cap A_j = \emptyset$ ef $j \neq k$, þá er

$$\lambda(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda(A_k).$$

Táknum með $\mathcal{P}(X)$ mengi allra hlutmengja í gefnu mengi X.

Setning 1.2. *Ekki er til vörpun $\lambda : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \tilde{\mathbb{R}}$ sem fullnægir skilyrðum (i-iv) að ofan.*

Sönnun. Gerum ráð fyrir að slík vörpun sé til. Skilgreinum jafngildisvensl $\sim$ á $\mathbb{R}$ með

$$x \sim y \quad \text{þ.þ.a.a.} \quad x - y \in \mathbb{Q}.$$

Jafngildisflokkur staksins x er mengið

$$x + \mathbb{Q} = \{x + r : r \in \mathbb{Q}\}.$$

Það er ljóst að $x + \mathbb{Q}$ er þétt í $\mathbb{R}$ svo að $(x + \mathbb{Q}) \cap [0, 1[\neq \emptyset$. Fyrir hvern jafngildisflokk $x + \mathbb{Q}$ veljum við eitt stak úr $(x + \mathbb{Q}) \cap [0, 1[$; þau mynda mengi N; höfum þá $N \subset [0, 1]$, $\bigcup_{x\in N}(x + \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ og fyrir $x, y \in N, x \neq y$, er $(x + \mathbb{Q}) \cap (y + \mathbb{Q}) = \emptyset$. Nú er

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &= \bigcup_{x\in N} (x + \mathbb{Q}) \\ &= \{x + r : x \in N, r \in \mathbb{Q}\} \\ &= \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} (N + r). \end{aligned}$$

Setjum

$$N_r := (N + r) \cap [0, 1[.$$

Þá er

$$[0, 1[= \mathbb{R} \cap [0, 1[= (\bigcup_{r\in\mathbb{Q}} (N + r)) \cap [0, 1[= \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} N_r.$$

En $N_r \cap [0, 1[= \emptyset$ nema $r \in [-1, 1[$. Því er

$$[0, 1[= \bigcup_{r\in[0,1[\cap\mathbb{Q}} (N_{r-1} \cup N_r) = \bigcup_{r\in[0,1[\cap\mathbb{Q}} M_r$$

þar sem $M_r := N_{r-1} \cup N_r$. Held fram: Ef $r, s \in [0, 1[\cap\mathbb{Q}$ og $r \neq s$, þá er $M_r \cap M_s = \emptyset$. Fjögur tilvik:

(1) Ef $x \in N_{r-1}$ og $x \in N_s$, þá eru til $n, m \in N$ þ.a. $x = n + r - 1 = m + s$; þá er $n - m = s - r + 1 \in \mathbb{Q}$, svo að $n \sim m$; en þá er $n = m$, því að N hefur bara eitt stak úr hverjum jafngildisflokki, svo að $s = r - 1$, sem er fráleitt fyrir $r, s \in [0, 1[$.

(2) Ef $x \in N_r$ og N_s, þá eru til $n, m \in \mathbb{N}$ þ.a. $x = n + r = m + s$; þá er $n - m = s - r \in \mathbb{Q}$, svo að $n = m$ og þá $r = s$ í mótsögn við að $r \neq s$.

(3-4) Tilfelli (3), $x \in N_r$ og $x \in N_{s-1}$, og (4), $x \in N_{r-1}$ og $x \in N_{s-1}$, eru eins. Þá segir síðara skilyrðið á λ að

$$\lambda([0, 1[) = \sum_{r\in[0,1[\cap\mathbb{Q}} \lambda(M_r).$$

En ljóslega er

$$N_{r-1} \cap N_r = \emptyset, \quad (N_{r-1}+1) \cap N_r = \emptyset$$

svo að

$$\begin{aligned}\lambda(M_r) &= \lambda(N_{r-1}) + \lambda(N_r)\\ &= \lambda(N_{r-1}+1) + \lambda(N_r)\\ &= \lambda((N_{r-1}+1) \cup N_r)\\ &= \lambda(N+r)\\ &= \lambda(N).\end{aligned}$$

Ef $\lambda(N) = 0$, þá fæst

$$1 = \lambda([0,1[) = \sum_{r \in [0,1[\cap \mathbb{Q}} \lambda(M_r) = 0;$$

ef $\lambda(N) > 0$, þá fæst

$$1 = \lambda([0,1[) = \sum_{r \in [0,1[\cap \mathbb{Q}} \lambda(M_r) = +\infty.$$

Í báðum tilvikum fæst mótsögn!

□

11. jan.

Hvað veldur? Er hugsanlegt að skilyrði (iv) sé of sterkt og við ættum bara að fara fram á að

$$\lambda(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \lambda(A_1) + \cdots + \lambda(A_n)$$

hvenær sem $A_1, \ldots, A_n$ eru hlutmengi í $\mathbb{R}$ og sundurlæg tvö og tvö?

Nei, þetta er ekki ástæðan. Að vísu má sýna fram á tilvist (en ekki ótvíræðni) slíks falls í einni vídd, en ekki í víddum ≥ 3.

Setning 1.3. *Látum $n \geq 3$. Þá er ekki til vörpun $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \tilde{\mathbb{R}}$ þannig að eftirfarandi skilyrðum sé fullnægt:*

(i) $0 \leq \mu(A) \leq +\infty$.

(ii) Ef A, B eru samsniða *hlutmengi í $\mathbb{R}^n$, þá er $\mu(A) = \mu(B)$.*

(iii) $\mu(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n)$ ef $A_1, \ldots, A_n$ eru hlutmengi í $\mathbb{R}^n$, sundurlæg tvö og tvö.

(iv) $\mu(Q) = 1$ ef Q er kassi með hliðalengdir 1.

Skilgreining 1.4 (samsniða, flutningur)**.** Við segjum að hlutmengi A, B í $\mathbb{R}^n$ séu *samsniða* eða *eins* ef til er flutningur $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ þ.a. $T(A) = B$.

Flutningur er vörpun sem varðveitir fjarlægðir:

$$\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\| \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$$

Athugasemd. Sýna má að flutningur er af gerðinni

$$T(x) = A(x) + b$$

þar sem A er þverstöðluð línuleg vörpun, sem þýðir að línur fylkisins fyrir A í venjulega grunninum mynda venjulegan þverstæðan grunn af einingarvigrum.

Setning 1.3 er afleiðing af:

Setning 1.5 (Banach-Tarski-þversögnin)**.** *Látum A og B vera takmörkuð hlutmengi í $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, þannig að A og B hafi innri punkta, þ.e. $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$, $\overset{\circ}{B} \neq \emptyset$, þ.e. bæðin mengin innihalda opna kúlu. Þá er til tala m og hlutmengi $A_1, \ldots, A_m$ í $\mathbb{R}^n$ þannig að gildi:*

(i) $A = A_1 \cup \cdots \cup A_m$, $B = B_1 \cup \cdots \cup B_m$.

(ii) $A_1, \ldots, A_m$ *eru sundurlæg tvö og tvö.*

(iii) $B_1, \ldots, B_m$ *eru sundurlæg tvö og tvö.*

(iv) A_k *er samsniða* B_k *fyrir* $k = 1, \ldots, m$.

M.ö.o.: Við getum skipt A upp í endanlega mörg mengi, fært þau til og raðað þeim saman upp á nýtt þannig að við fáum mengið B.

Sönnun Banach-Tarski-setningarinnar notar frumsendu um val. Sönnunin verður ekki tekin fyrir að svo stöddu.

Athugasemd (Niðurstaða)*.* Sum hlutmengi í $\mathbb{R}^n$ eru of flókin til að nokkur leið sé að segja að þau hafi eitthvert rúmmál: Ekki bara að við getum ekki reiknað rúmmálið út; sú forsenda að mengið hafi eitthvert tiltekið rúmmál leiðir til mótsagnar!

Við verðum að láta okkur nægja að bara sum hlutmengi í $\mathbb{R}^n$ hafi rúmmál. Önnur ástæða þess hvernig við ætlum að taka á mál- og heildunarfræðum kemur úr *líkindafræði*:

Við gerum ráð fyrir að við höfum eitthvert tilviljanakennt fyrirbæri, t.d. það að kasta upp teningi, og höfum gefið eitthvert mengi Ω af hugsanlegum útkomum, t.d. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ fyrir hliðarnar sem geta komið upp á teningi. Hlutmengi í Ω kallast *atburður*; t.d. er $\{2, 4, 6\}$ sá atburður að upp komi jöfn tala og $\{3, 6\}$ sá atburður að upp komi margfeldi af 3. Viljum úthluta sérhverjum atburði A tilteknum *líkindum* $\lambda(A)$ sem er tala á bilinu $[0,1]$. Viljum að

$$\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B) \quad \text{ef} \quad A \cap B = \emptyset. \tag{1.1}$$

Ef við höfum "ósvikinn tening", þá $\lambda(\{x\}) = \frac{1}{6}$ fyrir öll x úr $\{1,\ldots,6\}$, og af (1.1) leiðir að

$$\lambda(A) = \frac{1}{6}\#A$$

þar sem $\#A$ er fjöldatala A. Viljum líka leyfa óendanleg mengi af hugsanlegum útkomum og lendum þá í sama vanda og áður að ekki er ljóst að allir atburðir hafi "hugsanleg líkindi"; t.d. ef við skjótum örmjórri ör úr mikilli fjarlægð á skífu, þá eru líkindin á að örin lendi á tilteknu svæði nokkurn veginn í hlutfalli við flatarmál svæðisins.

Enn önnur ástæða fyrir almenna framsetningu: Kannski viljum við ekki reikna út rúmmál rúmmynda, heldur t.d. *massa* þeirra, miðað við að við höfum tiltekna efnisdreifingu í rúminu. Þá þurfa samsniða rúmmyndir ekki að hafa sama massa, en við búumst við að áfram eigi reglan

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \quad \text{ef} \quad A \cap B = \emptyset$$

og væntanlega líka samsvarandi reglu fyrir teljanlega mörg mengi.

Kafli 2

Mál og málrúm

Við hugsum okkur að við höfum gefið eitthvert fast mengi X og ætlum að athuga hlutmengi í X. Við táknum með

$$\mathcal{P}(X)$$

mengi allra hlutmengja í X. Fyrir $A \subset X$ skrifum við

$$A^C := X \setminus A = \{x \in X : x \notin A\}.$$

Við hugsum okkur að sum mengi í X séu *mælanleg* og önnur ekki; gerum jafnan ráð fyrir að þau myndi svokallaða *σ-algebru*:

Skilgreining 2.1 (mengjaalgebra og σ-algebra)**.** Látum X vera mengi. Mengi $\mathcal{A}$ af hlutmengjum í X kallast *mengjaalgebra* (eða bara *algebra*) á X ef eftirfarandi þremur skilyrðum er fullnægt:

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$.

(ii) Ef $A \in \mathcal{A}$, þá er $A^C \in \mathcal{A}$.

(iii) Ef $A, B \in \mathcal{A}$, þá er $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Við segjum að $\mathcal{A}$ sé *σ-algebra* ef það fullnægir (i) og (ii), en í stað (iii) kemur sterkara skilyrðið:

(iii') Ef $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ er runa af stökum í $\mathcal{A}$, þá er $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$; þ.e. sammengi teljanlega margra mengja sem eru stök í $\mathcal{A}$ er stak í $\mathcal{A}$.

Athugasemd. Af (i) og (ii) leiðir að $X = \emptyset^C \in \mathcal{A}$. Mengið $\{\emptyset, X\}$ er σ-algebra á X og er innihaldið í sérhverri σ-algebru á X; það er því *minnsta* σ-algebran á X. Eins er $\mathcal{P}(X)$ *stærsta* σ-algebran á X.

Setning 2.2. *(1) Ef $\mathcal{A}$ er algebra á X og $A, B \in \mathcal{A}$, þá er*

$$A \cap B, A \setminus B \in \mathcal{A}.$$

(2) Ef $\mathcal{A}$ er σ-algebra á X og $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ er runa af stökum í $\mathcal{A}$, þá er

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k \in A.$$

Sönnun. (1) Höfum

$$A \cap B = (A^C \cup B^C)^C$$

(de-Morgan-formúla) og

$$A \setminus B = A \cap B^C.$$

(2) Eins höfum við de-Morgan-formúlu

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k = \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k^C\right).$$

□

Setning 2.3. *Fyrir sérhvert mengi $\mathcal{C}$ af hlutmengjum X er til* minnsta *σ-algebra $\mathcal{A}$ þ.a. $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$.*

Sönnun. Setjum

$$\mathcal{A} := \bigcap \{\mathcal{B} : \mathcal{B} \text{ er } \sigma\text{-algebra og } \mathcal{C} \subset \mathcal{B}\}$$

Athugum að mengið $\{\mathcal{B} : \mathcal{B}$ er σ-algebra og $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}\}$ er ekki tómt, því það hefur stakið $\mathcal{P}(X)$. Ljóst er að sniðmengi af σ-algebrum er σ-algebra. □

Skilgreining 2.4 (Borel-σ-algebran)**.** Látum X vera firðrúm (eða grannrúm). Minnsta σ-algebra á X sem inniheldur öll opin mengi í X kallast *Borel-σ-algebran* á X.

14. jan. Sér í lagi má tala um Borel-σ-algebruna á $\mathbb{R}$ og almennar á $\mathbb{R}^n$. Táknum með

$$\mathcal{B}_X$$

Borel-σ-algebruna á firðrúmi (grannrúmi) X; köllum stökin í $\mathcal{B}_X$ *Borel-mengi.*

Athugasemd. Sérhvert opið mengi og sérhvert lokað mengi í X er Borel-mengi. Sniðmengi af teljanlega mörgum opnum mengjum er líka Borel-mengi, slík mengi kallast *G_δ-mengi.* Sammengi af teljanlega mörgum lokuðum mengjum kallast *F_σ-mengi*; það er líka Borel-mengi.

Setning 2.5. *Borel-σ-algebran $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ á $\mathbb{R}$ er spönnuð af hverju fyrir sig af eftirfarandi mengjum:*

(i) Mengi allra takmarkaðra opinna bila $]a, b[$, þar sem $a, b \in \mathbb{R}$ og $a < b$.

(ii) Mengi allra takmarkaðra lokaðra bila $[a, b]$, þar sem $a, b \in \mathbb{R}$ og $a < b$.

(iii) *Mengi allra takmarkaðra hálfopinna bila* $[a, b[$*, þar sem* $a, b \in \mathbb{R}$ *og* $a < b$*.*

(iv) *Mengi allra takmarkaðra hálfopinna bila* $]a, b]$*, þar sem* $a, b \in \mathbb{R}$ *og* $a < b$*.*

(v) *Mengi allra ótakmarkaðra opinna bila* $]a, +\infty[$*, þar sem* $a \in \mathbb{R}$*.*

(vi) *Mengi allra ótakmarkaðra opinna bila* $]-\infty, a[$*, þar sem* $a \in \mathbb{R}$*.*

(vii) *Mengi allra ótakmarkaðra lokaðra bila* $[a, +\infty[$*, þar sem* $a \in \mathbb{R}$*.*

(viii) *Mengi allra ótakmarkaðra lokaðra bila* $]-\infty, a]$*, þar sem* $a \in \mathbb{R}$*.*

Sönnun. Ljóst að opið bil er sammengi teljanlegra margra lokaðra bila; lokað bil er sniðmengi teljanlega margra opinna bila; höfum $]-\infty, b[\, \cap \,]a, +\infty[\, = \,]a, b[$ ef $a < b$ o.s.frv. Sérhvert opið mengi er sammengi teljanlega margra opinna bila. □

Skilgreining 2.6. Segjum að fjölsklda $(A_i)_{i \in I}$ af mengjum sé *sundurlæg* ef $A_j \cap A_k = \emptyset$ fyrir öll $j, k \in I$ þ.a. $j \neq k$, þ.e. ef mengin í fjölskyldunni eru sundurlæg tvö og tvö.

Athugasemd. Til að ganga úr skugga um að mengi $\mathcal{A}$ af hlutmengjum í X sé σ-algebra nægir að sýna tvennt:

(1) $\mathcal{A}$ er algebra á X.

(2) Ef $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ er *sundurlæg* runa í $\mathcal{A}$, þá er $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$.

Ef þá $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ er þá einhver runa í $\mathcal{A}$, þá eru skv. (1) mengin $A_0 := B_0$ og $A_k := B_k \setminus \bigcup_{j=0}^{k-1} B_j$ fyrir $k \geq 1$ öll í $\mathcal{A}$; og runan $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ er sundurlæg og $\bigcup B_k = \bigcup A_k \in \mathcal{A}$ skv. (2).

Athugasemd. Skilyrðið að fjölskylda $(A_i)_{i \in I}$ sé sundurlæg er *miklu sterkara* en skilyrðið $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$.

Skilgreining 2.7 (mál)**.** (1) Látum X vera mengi og $\mathcal{A}$ vera σ-algebru á X. *Mál* á $\mathcal{A}$ er vörpun $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ þannig að eftirfarandi skilyrðum sé fullnægt:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) Ef $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ er sundurlæg runa af hlutmengjum í X sem eru stök í $\mathcal{A}$, þá er

$$\mu\Big(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\Big) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k).$$

(2) *Mælanlegt rúm* er tvennd $(X, \mathcal{A})$ þar sem X er mengi og $\mathcal{A}$ er σ-algebra á X; við köllum stökin í $\mathcal{A}$ *mælanleg hlutmengi* í mælanlega rúminu (eða einfaldlega í X). *Málrúm* er þrennd $(X, \mathcal{A}, \mu)$, þar sem $(X, \mathcal{A})$ er mælanlegt rúm og μ er mál á $\mathcal{A}$.

(3) Við segjum að málrúm $(X, \mathcal{A}, \mu)$ sé *endanlegt* ef $\mu(X) < +\infty$. *Líkindarúm* er málrúm $(X, \mathcal{A}, \mu)$ þannig að $\mu(X) = 1$. Mælanlegu mengin í líkindarúmi eru kölluð *atburðir* og málið er kallað *líkindamál*.

Dæmi 2.8 (Dæmi um mál)**.** (1) Látum X vera mengi og skilgreinum $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ með

$$\mu(A) := \begin{cases} \#A & \text{ef } A \text{ er endanlegt,} \\ +\infty & \text{ef } A \text{ er óendanlegt.} \end{cases}$$

Þá er μ mál á $\mathcal{P}(X)$, sem kallast *talningarmálið* á X.

(2) Látum X vera mengi, a tiltekinn punkt í X. Skilgreinum $\delta_a : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ með

$$\delta_a(A) := \begin{cases} 1 & \text{ef } a \in A, \\ 0 & \text{ef } a \notin A. \end{cases}$$

Þetta er mál á $\mathcal{P}(X)$, kallað *Dirac-málið* í punktinum a.

Setning 2.9. *Látum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vera málrúm.*

(1) Ef $A, B \in \mathcal{A}$ og $A \subset B$, þá er

$$\mu(A) \leq \mu(B).$$

(2) Ef $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ er runa af stökum í $\mathcal{A}$, þá er

$$\mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k).$$

(3) Ef $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ er vaxandi runa af stökum í $\mathcal{A}$, þ.e. $A_k \subset A_{k+1}$ fyrir öll k, þá er

$$\mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \lim_{k \to +\infty} \mu(A_k).$$

(4) Ef $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ er fallandi runa af stökum í $\mathcal{A}$ þ.e. $A_{k+1} \subset A_k$ fyrir öll $k \in \mathbb{N}$, og til er $k \in \mathbb{N}$ þ.a. $\mu(A_k) < +\infty$, þá er

$$\mu\left(\bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) = \lim_{j \to +\infty} \mu(A_j).$$

Sönnun. (1) Mengið B er sammengi endanlegu mengjanna A og $B \setminus A$, svo að

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A),$$

því að $\mu(B \setminus A) \geq 0$.

(2) Skilgreinum $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ með $B_0 := A_0$ og $B_{k+1} := A_{k+1} \setminus \bigcup_{j=0}^{k} A_j$; þá er runan $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sundurlæg, $B_k \in \mathcal{A}$ og $B_k \subset A_k$, svo að

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(B_k) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k).$$

(3) Setjum $A_{-1} := \emptyset$. Þá er runan $(A_k \setminus A_{k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ sundurlæg, svo að

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) &= \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \setminus A_{k-1}\right) \\
&= \sum_{k\ni\mathbb{N}} \mu(A_k \setminus A_{k-1}) \\
&= \lim_{k\to+\infty} \sum_{j=0}^{k} \mu(A_j \setminus A_{j-1}) \\
&= \lim_{k\to+\infty} \mu\left(\bigcup_{j=0}^{k} (A_j \setminus A_{j-1})\right) \\
&= \lim_{k\to+\infty} \mu(A_k).
\end{aligned}$$

(4) Setjum $B_j := A_k \setminus A_{j+1}$. Þá er (B_j) vaxandi runa af mengjum sem eru stök í $\mathcal{A}$. Við höfum $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_{k+j} \subset A_k$, svo að

$$\begin{aligned}
\mu(A_k) - \mu\left(\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_{k+j}\right) &= \mu\left(A_k \setminus \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_{k+j}\right) \\
&= \mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} (A_k \setminus A_{k+j})\right) \\
&= \mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j\right) \\
&\underset{(3)}{=} \lim_{j\to+\infty} \mu(B_j) \\
&= \lim_{j\to+\infty} \mu(A_k \setminus A_{k+j}) \\
&= \mu(A_k) - \lim_{j\to+\infty} \mu(A_{k+j}),
\end{aligned}$$

svo að

$$\lim_{j\to+\infty} \mu(A_j) = \lim_{j\to+\infty} \mu(A_{k+j}) = \mu\left(\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_{k+j}\right) = \mu\left(\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j\right).$$

$\square$

Athugasemd. Forsendan $\mu(A_k) < +\infty$ í (4) að ofan er nauðsynleg: Höfum $\mu([k, +\infty[) = +\infty$ en $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} [k, +\infty[= \emptyset$.

17. jan.

Skilgreining 2.10. (1) Látum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vera málrúm. Stak A í $\mathcal{A}$ kallast *núllmengi* ef $\mu(A) = 0$.

(2) Látum $\mathbf{E}(x)$ vera einhverja fullyrðingu um punkta x í málrúmi $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Við segjum að $\mathbf{E}(x)$ gildi *næstum allsstaðar* ef mengið

$$\{x \in X : \mathbf{E}(x) \text{ er ekki satt}\}$$

er núllmengi. Ef $(X, \mathcal{A}, \mu)$ er líkindarúm, þá notum við *næstum örugglega* um það sama.

(3) Við segjum að málrúmið $(X, \mathcal{A}, \mu)$ sé *fullkomið* ef sérhvert hlutmengi í núllmengi er mælanlegt (og þá nauðsynlega núllmengi).

Athugasemd. Þetta þýðir t.d.: Ef X er bæði málrúm og firðrúm og $f : X \to \mathbb{R}$ er fall, þá getum við sagt að f sé samfellt næstum allsstaðar ef mengi ósamfelldnipunktanna er núllmengi.

Ein leið til að búa til mál er að byrja á *ytra máli* með aðferð sem er kennd við Carathéodory:

Skilgreining 2.11. Látum X vera mengi. *Ytra mál* á menginu X er vörpun $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ þannig að gildi:

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$.

(ii) Ef $A \subset B$ þá er $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

(iii) Ef $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ er runa af hlutmengjum í X, þá er

$$\mu^*(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu^*(A_k).$$

Skilgreining 2.12. Látum μ^* vera ytra mál á mengi X. Við segjum að hlutmengi A í X sé *mælanlegt* m.t.t. μ^* ef fyrir sérhvert hlutmengi T í X gildir

$$\mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A^C).$$

Athugasemd. Við höfum alltaf $\mu^*(T) \leq \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A^C)$. Til að sýna að A sé mælanlegt þurfum við bara að sýna að

$$\mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A^C)$$

fyrir öll T þ.a. $\mu^*(T) < +\infty$ (því ef $\mu^*(T) = +\infty$ er ójafnan augljós).

Setning 2.13 (Carathéodory). *Látum μ^* vera ytra mál á mengi X. Þá mynda mælanlegu mengin m.t.t. μ^* σ-algebru $\mathcal{A}$ og einskorðunin $\mu = \mu^*|\mathcal{A}$ er fullkomið mál.*

Sönnun. Látum A og B vera mælanleg mengi m.t.t. μ^*. Fyrir $T \subset X$ er þá

$$\begin{aligned}
\mu^*(T) &= \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A^C) \\
&= \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A^C \cap B) + \mu^*(T \cap A^C \cap B^C) \\
&\geq \mu^*((T \cap A) \cup (T \cap A^C \cap B)) + \mu^*(T \cap (A \cup B)^C) \\
&= \mu^*(T \cap (A \cup B)) + \mu^*(T \cap (A \cup B)^C)
\end{aligned}$$

því að

$$(T \cap A) \cup (T \cap (A^C \cap B)) = T \cap (A \cup (B \setminus A)) = T \cap (A \cup B),$$

svo að $A \cup B$ er mælanlegt. Vegna $\mu^*(\emptyset) = 0$ er ljóst að $\emptyset$ er mælanlegt; og skilyrðið á mælanlegt mengi í skilgreiningunni er samhverft í A og A^C, svo að A^C er mælanlegt ef A er mælanlegt. Höfum þá sýnt að mælanlegu mengin mynda algebru.

Látum A, B vera hlutmengi í X þ.a. $A \cap B = \emptyset$ og A sé mælanlegt. Þá er

$$\begin{aligned}
\mu^*(A \cup B) &= \mu^*((A \cup B) \cap A) + \mu^*((A \cup B) \cap A^C) \\
&= \mu^*(A) + \mu^*(B)
\end{aligned}$$

því að $(A \cup B) \cap A = A$ og $(A \cup B) \cap A^C = B \setminus A = B$ vegna $A \cap B = \emptyset$. Af því leiðir með þrepun að fyrir sundurlæga fjölskyldu $A_1, \ldots, A_n$ af mælanlegum mengjum er

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A_i).$$

Til að sýna að $\mathcal{A}$ sé σ-algebra nægir að sýna að sammengi *sundurlægrar* runu af mælanlegum mengjum sé mælanlegt; auk þess viljum við að ytra mál þess sé summan af ytri málum mengjanna í rununni. Látum þá $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vera sundurlæga runu af mælanlegum mengjum; setjum $B_k := \bigcup_{j=0}^{k} A_j$ og $B := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$. Ef nú T er eitthvert hlutmengi í X, þá er

$$\begin{aligned}
\mu^*(T) &= \mu^*(T \cap B_k) + \mu^*(T \cap B_k^C) \\
&\geq \sum_{j=0}^{k} \mu^*(T \cap A_j) + \mu^*(T \cap B^C).
\end{aligned}$$

(Ójöfnumerkið röstutt seinna). Látum nú k stefna á $+\infty$ og fáum

$$\begin{aligned}
\mu^*(T) &\geq \sum_{j=0}^{+\infty} \mu^*(T \cap A_j) + \mu^*(T \cap B^C) \\
&\geq \mu^*(T \cap B) + \mu^*(T \cap B^C) \\
&\geq \mu^*(T)
\end{aligned}$$

svo að jafnaðarmerki gildir allsstaðar! Því er $B = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ mælanlegt og

$$\mu^*(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu^*(A_k).$$

Látum nú A vera hlutmengi í mælanlegu núllmengi. Þá er $\mu^*(A) = 0$ og því

$$\begin{aligned}\mu^*(T) &\leq \mu^*(T\cap A) + \mu^*(T\cap A^C)\\ &= 0 + \mu^*(T\cap A^C)\\ &\leq \mu^*(T)\end{aligned}$$

svo að jafnaðarmerkin gilda og A er mælanlegt. Þar með er málið fullkomið.

□

Setning 2.14. *Látum $\mathcal{E}$ vera hlutmengi í $\mathcal{P}(X)$ þ.a. $\emptyset \in \mathcal{E}$ og $v : \mathcal{E} :\to [0, +\infty]$ vera fall þ.a. $v(\emptyset) = 0$. Skilgreinum vörpun $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ með*

$$\mu^*(A) := \inf\{\sum_{k\in\mathbb{N}} v(A_k) : (A_k) \text{ er runa í } \mathcal{E} \text{ og } A \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\}.$$

Þá er μ^* ytra mál á X.

21. jan.

Það vantaði rökstuðning fyrir seinni ójöfnu. Látum $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vera sundurlæga runu af μ^*-mælanlegum mengjum og setjum $B_k := \bigcup_{j=0}^k A_j$, þá gildir fyrir sérhvert hlutmengi T í X að

$$\begin{aligned}\mu^*(T\cap B_k) &= \mu^*(T\cap B_k\cap A_k) + \mu^*(T\cap B_k\cap A_k^C)\\ &= \mu^*(T\cap A_k) + \mu^*(T\cap B_{k-1}),\end{aligned}$$

þrepun gefur $\mu^*(T\cap B_k) = \sum_{j=0}^k \mu^*(T\cap A_j)$. Þá er

$$\begin{aligned}\mu^*(T) &= \mu^*(T\cap B_k) + \mu^*(T\cap B_k^C)\\ &\geq \sum_{j=0}^k \mu^*(T\cap A_j) + \mu^*(T\cap B^C)\end{aligned}$$

þar sem $B := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \supset B_k$.

Athugasemd. Af sönnuninni leiðir: Ef $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ er sundurlæg runa af mengjum sem eru mælanleg m.t.t. ytra máls μ^*, þá gildir fyrir öll hlutmengi T í X að

$$\mu^*(T\cap \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(T\cap A_k).$$

Setning 2.15. *Látum $\mathcal{E}$ vera mengi af hlutmengjum í mengi X og $v : \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ vera vörpun þ.a. $\emptyset \in \mathcal{E}$ og $v(\emptyset) = 0$. Setjum*

$$\mu^*(T) := \inf\{\sum_{k=0}^{+\infty} v(Q_k) : (Q_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ er runa í } \mathcal{E} \text{ og } T \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k\}$$

Þá er μ^* ytra mál a X.

Athugasemd. Ef ekki er til runa (Q_k) í $\mathcal{E}$ þ.a. $T \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k$ þá er $\mu(T) = +\infty$ vegna $\inf \emptyset = +\infty$.

Sönnun. Ljóst er að $\mu^*(\emptyset) = 0$ og fyrir T, S þ.a. $T \subset S$ er $\mu^*(T) \leq \mu^*(S)$, því að runa (Q_k) sem þekur S þekur líka T. Látum nú $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vera runu af hlutmengjum í X; viljum sýna að $\mu^*(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mu^*(A_k)$. Þetta er ljóst ef einhver stærðanna $\mu^*(A_k)$ er $+\infty$, svo að við megum gera ráð fyrir að $\mu^*(A_k) < +\infty$ fyrir öll k. Fyrir hvert $k \in \mathbb{N}$ er þá til runa $(Q_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ í $\mathcal{E}$ þannig að $\sum_{j=0}^{+\infty} v(A_{k_j}) \leq \mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$ þar sem ε er fyrirfram gefin tala, $\varepsilon > 0$. Þá er $(Q_{kj})_{(k,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ teljanleg fjölskylda af stökum í $\mathcal{E}$ þannig að $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \subset \bigcup_{(k,j)\in\mathbb{N}\times N} Q_{kj}$ og

$$\begin{aligned}
\sum_{(k,j)\mathbb{N}\times\mathbb{N}} v(Q_{kj}) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} v(Q_{kj}) \\
&\leq \sum_{k=0}^{+\infty}(\mu^*(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mu^*(A_k) + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mu^*(A_k) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Þar eð ε má vera hvaða jákvæða tala sem vera skal fæst niðurstaðan. □

Skilgreining 2.16. *Kassi* í $\mathbb{R}^n$ er mengjamargfeldi

$$Q = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n,$$

þar sem $I_1, \ldots, I_n$ eru takmörkuð bil í $\mathbb{R}$. *Rúmmál* kassans Q er talan

$$v(A) := (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\cdots(b_n - a_n)$$

þar sem a_j er neðri endapunktur og b_j efri endapunktur I_j fyrir $j = 1, \ldots, n$.

Athugasemd. Ef öll bilin eru lokuð, þá fáum við lokaðan kassa; ef þau eru öll opin, þá fáum við opinn kassa. Bilin mega vera úrkynjuð, þ.e. það má gilda $a_j = b_j$ fyrir eitthvert j; þannig er tóma mengið kassi (*tómi kassinn*) og $v(\emptyset) = 0$.

Kassi í $\mathbb{R}$ er bara takmarkað bil.

Skilgreining 2.17. Látum $\mathcal{Q}$ vera mengi allra kassa í $\mathbb{R}^n$ og $v : \mathcal{Q} \to [0, +\infty]$ vera rúmmálið. Ytra málið á $\mathbb{R}^n$ sem v gefur af sér skv. síðustu setningu kallast *ytra mál Lebesgues* og er táknað λ_n^*eða λ^*. Hlutmengi í $\mathbb{R}^n$

er *Lebesgue-mælanlegt* ef það er mælanlegt m.t.t. λ_n^*. Táknum með λ_n eða λ samsvarandi mál og með

$$\mathcal{M}_{\lambda_n} \quad \text{eða} \quad \mathcal{M}_\lambda$$

σ-algebru allra Lebesgue-mælanlegra mengja; málið $\lambda : \mathcal{M}_\lambda \to [0, +\infty]$ kallast *Lebesgue-málið* á $\mathbb{R}^n$.

Setning 2.18. *Borel-σ-algebran á $\mathbb{R}^n$ er spönnuð af sérhverju eftirtalinna mengja:*

(i) *Mengi allra opinna kassa.*

(ii) *Mengi allra lokaðra kassa.*

(iii) *Mengi allra kassa.*

(iv) *Mengi allra opinna hálfrúma af gerðinni* $H_{j,a}^- := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j < a\}$, *þar sem* $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ *og* $a \in \mathbb{R}$.

(v) *Mengi allra opinna hálfrúma af gerðinni* $H_{j,a}^+ := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j > a\}$, *þar sem* $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ *og* $a \in \mathbb{R}$.

(vi) *Mengi allra lokaðra hálfrúma af gerðinni* $\bar{H}_{j,a}^- := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j \leq a\}$, *þar sem* $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ *og* $a \in \mathbb{R}$.

(vii) *Mengi allra lokaðra hálfrúma af gerðinni* $\bar{H}_{j,a}^+ := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j \geq a\}$, *þar sem* $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ *og* $a \in \mathbb{R}$.

Sönnun. Sérhvert opið mengi er sammengi af teljanlega mörgum opnum kössum svo að mengi opinna kassa spannar $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$. Opinn kassi er sammengi teljanlega margra lokaðra kassa; og kassi er sniðmengi endanlega margra hálfrúma eins og í (iv)-(vii). □

Setning 2.19. *Sérhvert Borel-mengi í $\mathbb{R}^n$ er Lebesgue-mælanlegt.*

Sönnun. Látum $A := \bar{H}_{j,a} = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_j \leq a\}$. Það nægir að sýna að A sé mælanlegt. Þurfum að sýna: Ef $T \subset \mathbb{R}^n$ og $\lambda^*(T) < +\infty$, þá er

$$\lambda^*(T) \geq \lambda^*(T \cap A) + \lambda^*(T \cap A^C). \tag{2.1}$$

Látum $\varepsilon > 0$ vera gefið; þá er til runa $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ af kössum þ.a. $T \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k$ og $\sum_{k=0}^{+\infty} v(Q_k) \leq \lambda^*(T) + \varepsilon$. Nú Skiptir A hverjum kassa Q_k í tvo kassa (hugsanlega tóma), nefnilega

$$Q_k^- = A \cap Q_k \quad \text{og} \quad Q_k^+ = A^C \cap Q_k$$

og ljóst er að $v(Q_k) = v(Q_k^-) + v(Q_k^+)$. En þá er $T \cap A \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k^+$, $T \cap A^C \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k^-$, svo að

$$\begin{aligned}\lambda^*(T\cap A) + \lambda^*(T\cap A^C) &\le \sum_{k\in\mathbb{N}} v(Q_k^-) + \sum_{k\in\mathbb{N}} v(Q_k^+) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} v(Q_k) \\ &\le \lambda^*(T) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Látum $\varepsilon \to 0$ og fáum niðurstöðuna (2.1). □

24. jan.

Hjálparsetning 2.20. *Látum Q vera kassa í $\mathbb{R}^n$ og $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vera runu af kössum þannig að $Q \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k$. Þá er $v(Q) \le \sum_{k=0}^{+\infty} v(Q_k)$.*

Sönnun. Niðurstaðan er augljós ef $v(Q) = 0$, svo að við megum gera ráð fyrir að $v(Q) > 0$.

Sýnum fyrst: Ef Q er lokaður kassi og $(K_i)_{i\in A}$ er endanleg fjölskylda af lokuðum kössum sem eru hlutmengi í Q o ghafa enga sameiginlega innri punkta tveir og tveir, þá er $\sum_{i\in I} v(K_i) \le v(Q)$. Veljum skiptingu kassans Q (sem fæst með því að skipta sérhverju bili sem Q er margfeldi af) þannig að sérhver hornpunktur einhvers af kössunum K_i sé skiptipunktur skiptingarinnar. Látum $L_1, \dots, L_r$ vera hlutkassa skiptingarinnar. Þá er sérhver af kössunum K_i sammengi einhverra kassanna $L_1, \dots, L_r$. Látum

$$B_i := \{j \in \{1, \dots, r\} : L_j \subset K_j\},$$

þá er $K_i = \bigcup_{j\in B_i} L_i$ þar sem kassarnir K_i hafa enga sameiginlega innri punkta tveir og tveir eru mengin B_i sundurlæg tvö og tvö, og $\bigcup_{i\in I} B_i \subset \{1, \dots, r\}$. Þá fæst

$$\sum_{i\in I} v(K_i) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in B_i} v(L_j) = \sum_{j\in\bigcup B_i} v(L_j) \le \sum_{j=1}^{r} v(L_j) = v(Q).$$

Látum nú Q, (Q_k) vera eins og í HS, $v(Q) > 0$. Látum $\varepsilon > 0$ vera gefið. Þá má (augljóslega) finna lokaðan kassa Q' þ.a. $Q' \subset Q$ og $v(Q) \le \frac{1}{2}\varepsilon + v(Q')$. Eins má finna opinn kassa Q_k' þ.a. $Q_k \subset Q_k'$ og $v(Q_k') \le 2^{-k-2}\varepsilon + v(Q_k)$. Þá er $Q' \subset Q \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k'$, svo að $(Q_k')_{k\in\mathbb{N}}$ er opin þakning *þjappaða* kassans Q' og hefur því *Lebesgue-tölu* $\delta > 0$; þ.e. tala $\delta > 0$ þ.a. sérhvert hlutmengi í Q sem hefur þvermál minna en δ er hlutmengi í einhverju mengjanna Q_k' í opnu þakningunni. Finnum skiptingu kassans Q' í hlutkassa $K_1, \dots, K_s$ sem hafa lalir þvermál minna en δ. Þá má fyrir sérhvert j úr $\{1, \dots, s\}$ finna tölu $\phi(j)$ úr $\mathbb{N}$ þ.a. $K_j \subset Q_{\phi(j)}$, höfum þá vörpun $\phi : \{1, \dots, s\} \to \mathbb{N}$; fyrir k úr $\mathbb{N}$ setjum við

$$A_k := \phi^{-1}[k] = \{j \in \{1, \dots, s\} : \phi(j) = k\}.$$

Þetta eru endanleg mengi, sundurlæg tvö og tvö, og $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \{1,\dots,s\}$. Nú er $(K_j)_{j\in A_k}$ endanleg fjölskylda af kössum sem eru hlutmengi í Q_k^{-1} og hafa enga sameiginlega innri punkta tveir og tveir; skv. ofansögðu er

$$\sum_{j\in A_k} v(K_j) \le v(\overline{Q}'_k) = v(Q'_k).$$

Þá er

$$\begin{aligned} v(Q') = \sum_{j=1}^{s} v(K_j) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j\in A_k} v(K_j) \\ &\le \sum_{k=0}^{+\infty} v(Q'_k) \\ &\le \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(2^{-k-2}\varepsilon + v(Q_k)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon + \sum_{k=0}^{+\infty} v(Q_k). \end{aligned}$$

$\square$

Fáum:

Setning 2.21. *Sérhver kassi Q er Lebesgue-mælanlegur og $\lambda(Q) = v(Q)$.*

Sönnun. Ljóst er að Q er Borel-mengi og því Lebesgue-mælanlegt: Kassi er sniðmengi af hálfrúmum sem mega hvort sem er vera opin eða lokuð. Skv. skilgreiningu er þá

$$\begin{aligned} \lambda(Q) &= \lambda^*(Q) \\ &= \inf\{\sum_{k=0}^{+\infty} v(Q_k) : (Q_k) \text{ runa af kössum sem þekja } Q\} \end{aligned}$$

svo að HS segir að $v(Q) \le \lambda^*(Q) = \lambda(Q)$. En nú er $Q = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k$, þar sem $Q_0 := Q$ og $Q_k := \emptyset$ ef $k \ge 1$. Því er $\lambda^*(Q) \le \sum_{k=0}^{+\infty} v(Q_k) = v(Q)$. $\square$

Athugasemd. Við skilgreindum ytra málið λ^* sem ytra málið sem $v : \mathcal{Q} \to [0,+\infty]$ gefur af sér, þar sem $\mathcal{Q}$ er mengi *allra* kassa. Við hefðum eins getað tekið mengið $\mathcal{Q}_1$ af öllum lokuðum kössum eða mengið $\mathcal{Q}_2$ af öllum opnum kössum. Látum λ_1^* vera ytra málið sem $v|\mathcal{Q}_1$ gefur af sér og λ_2^* vera málið sem $v|\mathcal{Q}_2$ gefur af sér. Þá er ljóst að

$$\lambda^* \le \lambda_1^* \quad \text{og} \quad \lambda^* \le \lambda_2^*.$$

Ef $A \subset \mathbb{R}^n$ og $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ er runa af kössum sem þekur A, þá er $(\overline{Q}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ runa af *lokuðum* kössum sem þekur A, og $\sum_{k=0}^{+\infty} v(\overline{Q}_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} v(Q_k)$, svo að $\lambda_1^* \leq \lambda^*$ og þá $\lambda_1^* = \lambda^*$. Skv. sönnun HS má líka fyrir $\varepsilon > 0$ og runu $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ af kössum sem þekur A finna runu $(Q'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ af opnum kössum sem þekur A þ.a.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} v(Q'_k) \leq \varepsilon + \sum_{k=0}^{+\infty} v(Q_k),$$

svo að $\lambda_2^*(A) \leq \varepsilon + \lambda^*(A)$. Þar sem $\varepsilon > 0$ er hvað sem vera skal er $\lambda_2^* \leq \lambda^*$ og þá $\lambda_2^* = \lambda^*$.

Setning 2.22. *Ef μ er mál á Borel-algebrunni $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ þ.a. $\mu(Q) = v(Q)$ fyrir alla kassa, þá er $\mu(U) = \lambda(U)$ fyrir öll opin mengi U í $\mathbb{R}^n$.*

Sönnun. Það nægir að sýna að sérhvert opið mengi í $\mathbb{R}^n$ sé sammengi sundurlægrar fjöskyldu af kössum. Látum $\mathcal{C}_k$ vera mengi allra kassa sem eru margfeldi af hálfopnum bilum af gerðinni

$$\left]\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right], \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Fyrir $k \in \mathbb{N}$ er $\mathcal{C}_k$ mengi af kössum sem eru sundurlægir tveir og tveir og $\bigcup_{Q\in\mathcal{C}_k} Q = \mathbb{R}^n$. Skilgreinum $\mathcal{E}_k$ sem hlutmengi í $\mathcal{C}_k$ með þrepun:

$$\mathcal{E}_0 := \{Q \in \mathcal{C}_0 : Q \subset U\}$$
$$\mathcal{E}_{k+1} := \{Q \in \mathcal{C}_{k+1} : Q \subset U, Q \not\subseteq \bigcup_{K\in\mathcal{E}_0\cup\cdots\cup\mathcal{E}_k} K\}.$$

Þá er $(Q)_{Q\in\mathcal{E}}$, $\mathcal{E} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{E}_k$, sundurlæg fjölskylda af kössum þ.a. $U = \bigcup_{Q\in\mathcal{E}} Q$. Höfðum skilgreint mengi $\mathcal{C}_k$ af hálfopnum teningum $I_1 \times \cdots I_n$ í 28. jan
$\mathbb{R}^n$, þar sem $I_1, \ldots, I_n \in J_k$, þar sem J_k er mengi allra bila $\left]\frac{j}{2^k}, j + 12^k\right[$, $j \in \mathbb{Z}$. Sjáum að fyrir sérhvert k er $\mathbb{R}^n$ sammengi sundurlægu fjölskyldunnar $(Q)_{Q\in\mathcal{C}_k}$. Teningarnir $\mathcal{C}_{k+1}$ fást með því að skipta teningunum $\mathcal{C}_k$ í 2^n minni teninga; sjáum: ef $l \geq k$, $Q_l \in \mathcal{C}_l$ og $Q_k \in \mathcal{C}_k$, þá er annaðhvort $Q_l \cap Q_k = \emptyset$ eða $Q_l \in Q_k$. Fyrir opið mengi U skilgreinum við hlutmengi $\mathcal{E}$ í $\mathcal{C} := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_k$ þannig: $\mathcal{E}_0$ er mengi allra teninga Q í $\mathcal{C}_0$ þ.a. $Q \subset U$. Ef $\mathcal{E}_0, \ldots, \mathcal{E}_k$ eru þekkt, þá er $\mathcal{E}_{k+1}$ mengi allra Q í $\mathcal{C}_{k+1}$ þ.a. $Q \subset U$ og $Q \not\subseteq \bigcup_{Q\in\mathcal{E}_0\cup\cdots\cup\mathcal{E}_k} Q$, seinna skilyrðið er jafngilt $Q \cap \left(\bigcup_{Q\in\mathcal{E}_0\cup\cdots\cup\mathcal{E}_k} Q\right) \neq \emptyset$. Setjum $\mathcal{E} := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{E}_k$. Þá er $(Q)_{Q\in\mathcal{E}} = U$: Ef $x \in U$, þá er x stak í nákvæmlega einum teningi Q_k úr $\mathcal{C}_k$ fyrir sérhvert k; ef k er það stórt að þvermál Q_k er minna en fjarlægð x frá $\mathbb{R}^n \setminus U$, þá er $Q_k \subset U$. Ef k er *minnsta* talan þ.a. $Q_k \subset U$, þá er $Q_k \in \mathcal{E}_k$ og við höfum þá $x \in \bigcup_{Q\in\mathcal{E}} Q$. E fnú μ er mál á $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ þ.a. $\mu(Q) = \lambda(Q)$ fyrir alla teninga úr $\mathcal{C}$, þá er

$$\mu(U) = \mu(\bigcup_{Q\in\mathcal{E}} Q) = \sum_{Q\in\mathcal{E}} \mu(Q) = \sum_{Q\in\mathcal{E}} \lambda(Q) = \lambda(\bigcup_{Q\in\mathcal{E}} Q) = \lambda(U).$$

Þar em U var hvaða opna mengi sem vera skal fæst $\mu(U) = \lambda(U)$ fyrir öll opin mengi í $\mathbb{R}^n$. $\square$

Athugasemd. Almennar rétt: Ef μ, ν eru mál á $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ og $\mu(Q) = \nu(Q)$ fyrir alla teninga Q í $\mathcal{C}$, þá er $\mu(U) = \nu(U)$ fyrir öll opin mengi U í $\mathbb{R}^n$.

Setning 2.23. *Látum A vera Lebesgue-mælanlegt hlutmengi í $\mathbb{R}^n$. Þá er*

$$\lambda(A) = \inf\{\lambda(U) : U \textit{ er opið mengi í } \mathbb{R}^n \textit{ og } A \subset U\}$$

og

$$\lambda(A) = \sup\{\lambda(K) : K \textit{ er þjappað mengi í } \mathbb{R}^n \textit{ og } K \subset A\}$$

Sönnun. Ef $A \subset U$, U opið, þá er $\lambda(A) \leq \lambda(U)$, svo að

$$\lambda(A) \leq \inf\{\lambda(U) : U \text{ opið og } A \subset U\}$$

er augljóst. Eins er

$$\lambda(A) \geq \sup\{\lambda(K) : K \text{ þjappað og } K \subset A\}.$$

Látum $\varepsilon > 0$ vera gefið. Skv. athugasemd úr síðasta tíma er til runa $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ af *opnum* teningum þ.a. $A \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k$ og $\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda(Q_k) \leq \lambda^*(A) + \varepsilon = \lambda(A) + \varepsilon$. Þá er $U := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k$ opið hlutmengi í $\mathbb{R}^n$, $A \subset U$ og $\lambda(U) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda(Q_k)$, svo að $\lambda(U) \leq \lambda(A) + \varepsilon$. Þar sem þetta er rétt fyrir öll $\varepsilon > 0$ fæst

$$\lambda(A) \geq \inf\{\lambda(U) : U \text{ opið og } A \subset U\}.$$

Til að sanna að $\lambda(A) \leq \sup\{\lambda(K) : K \text{ þjappað og } K \subset A\}$: Gerum ráð fyrir að A sé takmarkað. Látum þá $\mathcal{C}$ vera þjappað hlutmengi í $\mathbb{R}^n$ þannig að $A \subset \mathcal{C}$. Látum $\varepsilon > 0$ vera gefið. Finnum skv. ofansögðu opið mengi U þ.a. $C \setminus A \subset U$ og $\lambda(U) < \lambda(C \setminus A) + \varepsilon = \lambda(C) - \lambda(A) + \varepsilon$. Setjum $K := C \setminus U$. Þá er K þjappað, $K \subset A$, $C \subset K \subset U$ og því $\lambda(C) \leq \lambda(K) + \lambda(U)$ og þá $\lambda(A) - \varepsilon \leq \lambda(C) - \lambda(U) \leq \lambda(K)$. Þar sem þetta gildir fyrir öll $\varepsilon > 0$ er $\lambda(A) \leq \sup\{\lambda(K) : K \subset A \text{ og } K \text{ þjappað }\}$. Ef A er ekki takmarkað, þá skrifum við $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$, þar sem $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ er vaxandi runa af takmörkuðum Lebesgue-mælanlegum mengjum (t.d. $A_k := \{x \in A : \|x\| \leq k\}$). Látum M vera einhverja takmarkaða rauntölu þ.a. $M < \lambda(A)$. Skv. setningu er $\lambda(A) = \lim_{k\to+\infty} \lambda(A_k)$, svo að til er k þ.a. $\lambda(A_k) > M$. Skv. ofansögðu er til þjappað hlutmengi K í A_k þ.a. $\lambda(K) > M$. En þá er K líka þjappað hlutmengi í A, og við höfum $\sup\{\lambda(K) : K \subset A, K \text{ þjappað}\} > M$. Þar sem þetta gildir fyrir öll $M < \lambda(A)$ er $\sup\{\lambda(K) : K \subset A, K \text{ þjappað}\} \geq \lambda(A)$. □

Setning 2.24. *Látum μ vera mál á $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ þ.a. $\mu(Q) = \lambda(Q)$ fyrri alla kassa Q, þá er $\mu = \lambda|\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$.*

Athugasemd. Það nætir að vita að $\mu(Q) = \lambda(Q) = v(Q)$ fyrir alla teninga í mengi $\mathcal{C}$.

Sönnun. Skv. setningu er $\mu(U) = \lambda(U)$ fyrir öll opin mengi í $\mathbb{R}^n$. Fyrir Borel-mengi A í $\mathbb{R}^n$ og opið mengi U þ.a. $A \subset U$ er þá $\mu(A) \le \mu(U) = \lambda(U)$. Skv. síðustu setningu fæst

$$\mu(A) \le \inf\{\lambda(U) : U \text{ opið}, A \subset U\} = \lambda(A),$$

þ.e. $\mu(A) \le \lambda(A)$ fyrir öll A úr $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$. Til að sýna ójöfnu í hina áttina gerum við fyrst ráð fyrir að A sé takmarkað og finnum takmarkað opið mengi U þ.a. $A \subset U$. Þá fæst

$$\mu(U) = \mu(A) + \mu(U \setminus A) \le \lambda(A) + \lambda(U \setminus A) = \lambda(U) = \mu(U).$$

En fyrir rauntölu a, b, c, d þ.a. $a \le c, b \le d$ og $a + b = c + d$ fæst $a = c$ og $b = d$. Fáum $\mu(A) = \lambda(A)$. Ef A er ekki takmarkað, þá er A sammengi sundurlægrar runu $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ af takmörkuðum Borel-mengjum, og þá er

$$\mu(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(A_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda(A_k) = \lambda(A).$$

□

Skilgreining 2.25. Látum $\mathcal{E}$ vera hlutmengi í $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Segjum að $v : \mathcal{E} \to Y$, þar sem Y er mengi, sé *hliðrunaróbreytt* (eða *hliðrunaróháð*) ef fyrir sérhvert A úr $\mathcal{E}$ og x úr $\mathbb{R}^n$ gildir

$$A + x \in \mathcal{E} \quad \text{og} \quad v(A + x) = v(A).$$

Hér er $A + x := \{a + x : a \in A\}$.

31. jan.

Getum þá talað um hliðrunaróbreytt mál á σ-algebrum á $\mathbb{R}^n$, um hliðrunaróbreytt ytri mál á $\mathbb{R}^n$; hliðrunaróbreytt innihöld á algebrum á $\mathbb{R}^n$ o.s.frv.

Setning 2.26. *Ytra mál Lebesgues og Lebesgue-málið á $\mathbb{R}^n$ eru hliðrunaróbreytt.*

Sönnun. Ljóst er að fyrri kassa Q er $Q+x$ líka kassi og $v(Q+x) = v(Q)$. Ef $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ er runa af kössum sem þekur hlutmengi A í $\mathbb{R}^n$, þá er $(Q_k + x)_{k\in\mathbb{N}}$ runa af kössum sem þekur $A+x$; og $\sum_{k\in\mathbb{N}} v(Q_k+x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} v(Q_k)$; öfugt ef (Q'_k) er runa af kössum sem þekur $A + x$, þá er $(Q'_k - x)_{k\in\mathbb{N}}$ runa af kössum sem þekur A og $\sum_{k\in\mathbb{N}} v(Q'_k - x)_{k\in\mathbb{N}} = \sum_{k\in\mathbb{N}} v(Q'_k)$. Þá er ljóst að $\lambda^*(A+x) = \lambda^*(A)$. Nú er A mælanlegt þ.þ.a.a. $\lambda^*(T) = \lambda^*(T \cap A) + \lambda^*(T \cap A^C)$ fyrir öll T. En þá er

$$\begin{aligned}\lambda^*(T \cap (A + x)) + \lambda^*(T \cap (A + x)^C) &= \lambda^*((T - x) \cap A) + \lambda^*((T - x) \cap A^C) \\ &= \lambda^*(T - x) \\ &= \lambda^*(T),\end{aligned}$$

því að $(A + x)^C = A^C + x$ fyrir öll x, svo að $A + x$ er mælanlegt, og þá er $\lambda(A + x) = \lambda^*(A + x) = \lambda^*(A) = \lambda(A)$. □

Nú sjáum við:

Setning 2.27. *Til er hlutmengi N í $[0,1]$ sem er ekki Lebesgue-mælanlegt.*

Uppkast að sönnun. Við sýndum í innganginum að ekki er til hliðrunaróbreytt mál á σ-algebrunni $\mathcal{P}(X)$ með því að sýna að til væri hlutmengi N þannig að til væri sundurlæg teljanleg fjölskylda $(M_r)_{r\in I}$ þ.a.a hvert mengi M_r væri sammengi hliðrana af $N \cap A$ og $N \cap A^C$ fyrir sérhvert bil A; þ.a.a öll M_r yrðu að hafa sama Lebesgue-mál ef N vær i æmlanlegt; en auk þess væri $\bigcup_{r\in I} M_r = [0,1]$. Ef N væri mælanlegt, þá fengist $1 = \sum_{r\in I} \lambda(M_r)$; en summan er 0 ef $\lambda(N) = 0$, og $+\infty$ ef $\lambda(N) > 0$. Því er N ekki mælanlegt. $\square$

Rifjum upp að mengið $\mathcal{C} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_k$ af teningum, $\mathcal{C}_k$ var mengi allra teninga sem eru margfeldi af bilum í $\mathcal{J}_k := \left\{ \left] \frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k} \right[: j \in \mathbb{Z} \right\}$. Ef $Q \in \mathcal{C}_k$ þá er Q sammengi af 2^n teningum úr $\mathcal{C}_{k+1}$ sem eru sundurlægir tveir og tveir. Nú er sérhver teningur í $\mathcal{C}_k$ hliðrun af teningi $\left]0, \frac{1}{2^k}\right]^n = \left]0, \frac{1}{2^k}\right] \times \cdots \times \left]0, \frac{1}{2^k}\right]$. Ef nú μ er hliðrunaróbreytt mál í $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, þá hafa allir kassar Q_k í $\mathcal{C}_k$ sama mál, því að þeir eru allir hliðrun af sama tening; og fyrir kassa Q_1 í $\mathcal{C}_k$ og Q_2 í $\mathcal{C}_{k+1}$ gildir því $\mu(Q_1) = 2^n \mu(Q_2)$. Einföld þrepun: Ef $c := \mu(]0,1]^n)$, þá er

$$\mu(Q) = \frac{1}{2^{nk}} c \quad \text{fyrir} \quad Q \in \mathcal{C}_k.$$

Þetta gildir sér í lagi fyrir Lebesgue-málið; þar sem $\lambda(]0,1]^n) = 1$ fæst: Ef μ er hliðrunaróbreytt mál á $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ og $0 < c < +\infty$, þá er

$$\frac{1}{c}\mu(Q) = \lambda(Q)$$

fyrir alla kassa $Q \in \mathcal{C}$. Setning gefur $\frac{1}{c}\mu = \lambda$ á $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$. Höfum sýnt

Setning 2.28. *Ef μ er hliðrunaróbreytt mál á $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, þá er*

$$\mu = c\lambda|\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n},$$

þar sem $c := \mu(]0,1]^n)$.

Rifjum upp að mál $\mu : \mathcal{A} \to [0,+\infty]$ kallast *fullkomið* ef sérhvert hlutmengi í núllmengi er mælanlegt (og því núllmengi). Vitum að Lebesgue-málið er fullkomið.

Setning 2.29. *Látum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vera málrúm og $\bar{\mathcal{A}}_\mu$ vera mengi allra hlutmengja A í X þ.a. til séu mengi E, F sem eru stök í $\mathcal{A}$ þ.a.*

$$E \subset A \subset F \quad \textit{og} \quad \mu(F \setminus E) = 0.$$

Þá má skilgreina vörpun $\bar{\mu} : \bar{\mathcal{A}}_\mu \to [0,+\infty]$ með því að setja

$$\mu(A) := \mu(E) = \mu(F)$$

ef E, F eru eins og að framan; þetta gerir $\bar{\mu} : \bar{\mathcal{A}}_\mu \to [0,+\infty]$ að fullkomnu máli.

Skilgreining 2.30. Köllum $(X, \bar{\mathcal{A}}_\mu, \bar{\mu})$ fullkomnum málrúmsins $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Athugasemd. Sjáum að $A \in \bar{\mathcal{A}}_\mu$ þ.þ.a.a. skrifa megi $A = E \cup B$, þar sem $E \in \mathcal{A}$ og B er hlutmengi í núllmengi úr $\mathcal{A}$.

Byrjum á sönnun setningar. Þurfum að sjá að $\bar{\mu}$ sé vel skilgreint: Látum $E, F, E_1, F_1 \in \mathcal{A}$, $E \subset A \subset F$, $E_1 \subset A \subset F_1$ $\mu(F \setminus E) = \mu(F_1 \setminus E_1) = 0$. Þá er $\mu(E) \leq \mu(F_1)$, $\mu(E_1) \leq \mu(F)$, því að $E \subset F_1$, $E_1 \subset F$, og $0 = \mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$, svo að $\mu(E) = \mu(F)$, eins er $\mu(E_1) = \mu(F_1)$. 4. feb.

Sönnun. Fyrir mál μ á σ-algebru $\mathcal{A}$ skilgreindum við mengi $\overline{\mathcal{A}}_\mu$ og vörpun $\overline{\mu} : \overline{\mathcal{A}}_\mu \to [0, +\infty]$ þannig: $A \in \overline{\mathcal{A}_\mu}$ þ.þ.a.a. til séu E, F í $\mathcal{A}$ þ.a. $E \subset A \subset F$ og $\mu(F \setminus E) = 0$. Settum þá $\overline{\mu}(A) = \mu(E)$. Þetta er vel skilgreint: Ef líka gildir $E_1 \subset A \subset F_1$ og $\mu(F_1 \setminus E_1) = 0$, þá er $\mu(E_1) = \mu(E)$ því að við höfum $\mu(F) = \mu(F \setminus E) + \mu(E) = \mu(E)$, eins er $\mu(E_1) = \mu(F_1)$. Líka er $E \subset F_1$ og $E_1 \subset F$, svo að $\mu(E) \leq \mu(F_1)$ og $\mu(E_1) \leq \mu(F)$. En þá er

$$\mu(E) \leq \mu(F_1) = \mu(E_1) \leq \mu(F) = \mu(E).$$

Jafnaðarmerki hljóta þá að gilda alls staðar. Sýnum að $\overline{\mathcal{A}}_\mu$ er σ-algebra. Ljóst er að $\emptyset \in \overline{\mathcal{A}}_\mu$ og $\overline{\mu}(\emptyset) = 0$. Ef $A \in \overline{\mathcal{A}}_\mu$ þá látum við $E, F \in \mathcal{A}$ og $E \subset A \subset F$ og $\mu(F \setminus E) = 0$. Þá er $F^C \subset A^C \subset E^C$ og $F^C, E^C \in \mathcal{A}$ og

$$\mu(E^C \setminus F^C) = \mu(E^C \cap F) = \mu(F \setminus E) = 0$$

svo $A^C \in \overline{\mathcal{A}}_\mu$. Ef (A_k) er runa í $\overline{\mathcal{A}}_\mu$, þá finnum við (E_k), (F_k) í $\mathcal{A}$ þannig að $E_k \subset A_k \subset F_k$ og $\mu(F_k \setminus E_k) = 0$ fyrir öll k. Þá er $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k, \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k \in \mathcal{A}$, $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k$ og $(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k) \setminus (\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k) \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (F_k \setminus E_k)$ svo

$$\mu(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k) \leq \mu(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (F_k \setminus E_k)) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(F_k \setminus E_k) = 0.$$

Því er $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \overline{\mathcal{A}}_\mu$. Þar með er $\overline{\mathcal{A}}_\mu$ σ-algebra. Ef mengin í rununni (A_k) eru sundurlæg tvö og tvö, þá er runan (E_k) líka sundurlæg. Því fæst:

$$\overline{\mu}(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k) = \mu(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(E_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \overline{\mu}(A_k)$$

svo að $\overline{\mu}$ er mál á $\overline{\mathcal{A}}_\mu$. □

Skilgreining 2.31 (Fullkomnun)**.** Málrúmið $(X, \overline{\mathcal{A}}_\mu, \overline{\mu})$ kallast *fullkomnun* málrúmsins $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Segjum líka að $\overline{\mathcal{A}}_\mu$ sé *fullkomnun* $\mathcal{A}$ m.t.t. μ og $\overline{\mu}$ sé fullkomnun málsins μ.

Hjálparsetning 2.32. *Látum A vera Lebesgue-mælanlegt mengi í $\mathbb{R}^n$. Þá eru til Borel-mengi E, F í $\mathbb{R}^n$ þannig að $E \subset A \subset F$ og $\lambda(F \setminus E) = 0$.*

Sönnun. Gerum fyrst ráð fyrir að $\lambda(A) < +\infty$. Fyrir sérhvert n úr $\mathbb{N}$ er þá til þjappað mengi K_n og opið mengi U_n þannig að $K_n \subset A \subset U_n$ og $\mu(K_n) > \mu(A) - \frac{1}{n+1}$ og $\mu(U_n < \mu(A) + \frac{1}{n+1}$ (skv. einhverri fyrri setningu). Þetta gildir fyrir öll n svo að $\lambda(F \setminus E) = 0$. Í almenna tilvikin, þ.e. þegar $\lambda(A)$ er ekki nauðsynlega endanlegt, finnum við runu $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ af Lebesgue-mælanlegum mengjum A_k þannig að $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$, $\mu(A_k) < +\infty$ og Borel-mengi E_k, F_k þannig að $E_k \subset A_k \subset F_k$ og $\mu(F_k \setminus E_k) = 0$. Þá er $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \subset A \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k$, mengin $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$ og $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k$ eru Borel-mengi og

$$\mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k) \le \mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (F_k \setminus E_k)) \le \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(F_k \setminus E_k) = 0.$$

$\square$

Setning 2.33. *Málrúmið $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{\lambda_n}, \lambda_n)$ er fullkomnun málrúmsins $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n_{\mathbb{R}}, \lambda_n|\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n})$.*

Sönnun. Skv. hjálparsetningu er sérhvert Lebesgue-mælanlegt mengi A í fullkomnun $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ m.t.t. $\lambda_n|\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ og $\overline{\lambda}(A_n) = \lambda(A)$ þar sem $\overline{\lambda}$ er fullkmnun $\lambda|\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$. Þá þarf bara að sýna að sérhvert mengi í fullkomnun $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ m.t.t. $\lambda|\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ sé Lebesgue-mælanlegt. En ef A er í þeirri fullkomnun, þá eru til Borel-mengi E, F þ.a. $E \subset A \subset F$ og $\lambda(F \setminus E) = 0$. Þá er $A \setminus E \subset F \setminus E$ og þar sem Lebesgue-málið er fullkomið er $A \setminus E$ Lebesgue-mælanlegt. En þá er $A = E \cup (A \setminus E)$ líka Lebesgue-mælanlegt. $\square$

Fylgisetning 2.34. *Hlutmengi A í $\mathbb{R}^n$ er Lebesgue-mælanlegt þ.þ.a.a. til séu Borel-mengi E og núllmengi N þ.a. $A = E \cup N$.*

Athugasemd. Hlutmengi N í $\mathbb{R}^n$ er núllmengi (m.t.t. λ) þ.þ.a.a. $\lambda^*(N) = 0$, þ.e. fyrir hvert $\varepsilon > 0$ er til runa $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ af kössum þ.a. $N \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k$ og $\sum_{k\in\mathbb{N}} v(Q_k) < \varepsilon$.

Kafli 3

Mælanleg föll

Við segjum að hlutmengi U í $\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ sé *grennd um* ∞ ef það inniheldur bil $]a, +\infty]$ fyrir eitthvert $a \in \mathbb{R}$, *grennd um* $-\infty$ e fþað inniheldur bil $[-\infty, a[$, $a \in \mathbb{R}$; *grennd um rauntölu* x ef það inniheldur opið bil um x. Segjum að hlutmengi í $\tilde{\mathbb{R}}$ sé *opið* ef það er grennd um sérhvern punkt sinn. *Borel-algebran* $\mathcal{B}_{\tilde{\mathbb{R}}}$ er σ-algebran sem er spönnuð af opnum hlutmengjum í $\tilde{\mathbb{R}}$ Auðséð er að $A \in \mathcal{B}_{\tilde{\mathbb{R}}}$ þ.þ.a.a. $A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, þ.e. til er $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ þ.a. A sé eitt af mengjunum B, $B \cup \{+\infty\}$, $B \cup \{-\infty\}$, $\{-\infty, +\infty\} \cup B$.

Skilgreining 3.1. Látum $(X, \mathcal{A})$ og $(Y, \mathcal{B})$ vera mælanleg rúm.

(1) *Mælanleg vörpun* $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ er vörpun $f : X \to Y$ þannig að $f^{-1}[B] \in \mathcal{A}$ fyrir öll $B \in \mathcal{B}$.

(2) *Mælanlegt raunfall* á $(X, \mathcal{A})$ er mælanleg vörpun $(X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, *mælanlegt tvinnfall* á $(X, \mathcal{A})$ er mælanleg vörpun $(X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{C}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$. 7. feb.

Skilgreining 3.2. Látum $f : X \to Y$ vera vörpun milli mengja og $\mathcal{E}$ vera mengi af hlutmengjum í Y. Setjum

$$f^*[\mathcal{E}] := \{f^{-1}[E] : E \in \mathcal{E}\}.$$

Þá getum við umorðað skilgreiningu á mælanlegri vörpun þannig: Mælanleg vörpun frá mælanlegu rúmi $(X, \mathcal{A})$ í mælanlegt rúm $(Y, \mathcal{B})$ er vörpun $f : X \to Y$ þ.a. $f^*[\mathcal{B}] \subset \mathcal{A}$.

Setning 3.3. *(1) Ef $(X, \mathcal{A})$ er mælanlegt rúm, þá er $\mathrm{id}_X : X \to X$ mælanleg vörpun $(X, \mathcal{A}) \to (X, \mathcal{A})$.*

(2) Ef f er mælanleg vörpun frá $(X, \mathcal{A})$ í $(Y, \mathcal{B})$, og g er mælanleg vörpun frá $(Y, \mathcal{B})$ í $(Z, \mathcal{C})$, þá er $g \circ f$ mælanleg vörpun frá $(X, \mathcal{A})$ í $(Z, \mathcal{C})$.

Sönnun. Höfum $g^*[\mathcal{C}] \subset \mathcal{B}$, svo að

$$(g \circ f)^*(\mathcal{C}) = f^*(g^*(\mathcal{C})) \subset f^*(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}.$$

□

Hjálparsetning 3.4. *Látum $f : X \to Y$ vera vörpun, $\mathcal{B}$ vera σ-algebru á Y sem er spönnuð af hlutmengi $\mathcal{E}$ í $\mathcal{P}(Y)$, þá er $f^*[\mathcal{B}]$ σ-algebra á X spönnuð af $f^*[\mathcal{E}]$.*

Sönnun. Að $f^*[\mathcal{B}]$ sé σ-algebra er afleiðing af því að $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$ og

$$X \setminus f^{-1}[B] = f^{-1}[Y \setminus B] \quad \text{og} \quad f^{-1}[\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k] = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f^{-1}[B_k] \tag{3.1}$$

fyrir öll hlutmengi B í Y og allar runur $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ af hlutmengjum í Y. Látum $\mathcal{A}$ vera σ-algebruna á X sem $f^*[\mathcal{E}]$ spannar, þá er $\mathcal{A} \subset f^*[\mathcal{B}]$, því að $f^*[\mathcal{B}]$ er σ-algebra sem inniheldur $f^*[\mathcal{E}]$. Setjum nú

$$\mathcal{F} := \{B \subset Y : f^{-1}[B] \in \mathcal{A}\}.$$

Af (3.1) leiðir að $\mathcal{F}$ er σ-algebra á Y og skv. skilgreiningu á $\mathcal{F}$ er $f^*[\mathcal{F}] \subset \mathcal{A}$. En líka er $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$, því að $f^*[\mathcal{E}] \subset \mathcal{A}$, svo að $\mathcal{F}$ er σ-algebra sem inniheldur $\mathcal{E}$, en $\mathcal{B}$ er minnsta slík σ-algebran, svo að $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ og þar með

$$f^*[\mathcal{B}] \subset f^*[\mathcal{F}] \subset \mathcal{A}.$$

Því er $f^*[\mathcal{B}] = \mathcal{A}$, þ.e. $f^*[\mathcal{E}]$ spannar $f^*[\mathcal{B}]$. $\square$

Sem afleiðingu fáum við

Setning 3.5. *Ef $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ eru mælanleg rúm, $f : X \to Y$ er vörpun, $\mathcal{B}$ er σ-algebran spönnuð af hlutmengi $\mathcal{E}$ í $\mathcal{P}(Y)$ og $f^*[\mathcal{E}] \subset \mathcal{A}$, þá er f mælanleg vörpun frá $(X, \mathcal{A})$ í $(Y, \mathcal{B})$.*

Athugasemd. Ef X er mengi, $f : X \to \mathbb{R}$ er vörpun, þá er frummynd bilsins $[a, +\infty[$ mengið $\{x \in X : f(x) \geq a\}$; ef $f : X \to \tilde{\mathbb{R}}$ er vörpun, þá er $\{x \in X : f(x) \geq a\}$ frummynd mengisins $[a, +\infty]$ m.t.t. f. Eins fyrir strangar ójöfnur. Fáum:

Setning 3.6. *Látum $(X, \mathcal{A})$ vera mælanlegt rúm og f vera fall frá X í $\mathbb{R}$ eða $\tilde{\mathbb{R}}$. Þá er jafngilt:*

(i) Fallið f er mælanlegt.

(ii) Fyrir sérhverja rauntölu a er mengið $\{x \in X : f(x) \geq a\}$ mælanlegt.

(iii) Fyrir sérhverja rauntölu a er mengið $\{x \in X : f(x) > a\}$ mælanlegt.

(iv) Fyrir sérhverja rauntölu a er mengið $\{x \in X : f(x) \leq a\}$ mælanlegt.

(v) Fyrir sérhverja rauntölu a er mengið $\{x \in X : f(x) < a\}$ mælanlegt.

Vörpun $f : X \to \tilde{\mathbb{R}}$ er mælanleg þ.þ.a.a. $f^{-1}[\mathcal{B}]$ sé mælanlegt fyrir sérhver Borel-mengi í $\mathbb{R}$ og *mengin $f^{-1}[+\infty]$ og $f^{-1}[-\infty]$ séu einnig mælanleg.*

Setning 3.7. *Látum $f : X \to Y$ vera samfellda vörpun milli firðrúma (grannrúma), þá er f mælanleg vörpun frá $(X, \mathcal{B}_X)$ til $(Y, \mathcal{B}_Y)$.*

Sönnun. Látum $\mathcal{T}_X$ vera mengi opnu mengjanna í X, $\mathcal{T}_Y$ vera mengi opnu mengjanna í Y. Að f sé samfelld þýðir að $f^*[\mathcal{T}_Y] \subset \mathcal{T}_X$; en $\mathcal{T}_Y$ spannar $\mathcal{B}_Y$ og $\mathcal{T}_X$ spannar $\mathcal{B}_X$, svo að $f^*[\mathcal{B}_Y] \subset \mathcal{B}_X$ skv. setningu. $\square$

Athugasemd. Látum $\mathcal{T}_{\tilde{\mathbb{R}}}$ vera mengi opnu hlutmengjanna í $\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Við getum talað um að vörpun $f : X \to \tilde{\mathbb{R}}$ frá firðrúmi X sé *samfelld* ef $f^*[\mathcal{T}_Y] \subset \mathcal{T}_X$; eins má tala um samfelldar varpanir $\tilde{\mathbb{R}} \to X$ eða $\tilde{\mathbb{R}} \to \tilde{\mathbb{R}}$. T.d. er vörpunin $f : \tilde{\mathbb{R}} \to \tilde{\mathbb{R}}$ þ.a. $f(x) := x^2$, fyrir öll x, samfelld; hér er

$$(+\infty)^2 := +\infty =: (-\infty)^2.$$

Þessi vörpun er mælanleg. Eins er vörpun $[0, +\infty] \to [0, +\infty]$, $x \mapsto \sqrt{x}$, þar sem $\sqrt{+\infty} := +\infty$, samfelld og því mælanleg.

Setning 3.8. *Látum $(X, \mathcal{A})$ vera mælanlegt rúm og $f, g : X \to \mathbb{R}$ vera mælanleg föll og $c \in \mathbb{R}$. Þá eru föllin*

$$f + g, \quad cf, \quad fg, \quad \max(f, g), \quad \min(f, g), \quad |f|$$

mælanleg.

Athugasemd. Hér er $\max(f, g)(x) := \max(f(x), g(x))$ og $\min(f, g)(x) = \min(f(x), g(x))$.

Sönnun. Til að sjá að $f + g$ sé mælanlegt þarf að sjá að

$$A_a := \{x \in X : f(x) + g(x) < a\}$$

sé mælanlegt, ef $a \in \mathbb{R}$ er gefið. En $f(x) + g(x) < a$ jafngildir því að $f(x) < a - g(x)$, sem aftur jafngildir því að til sé ræð tala r þ.a. $f(x) < r < a - g(x)$, þ.e. $f(x) < r$ *og* $g(x) < a - r$. Því er

$$A_a = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} (\{x \in X : f(x) < r\} \cap \{x \in X : g(x) < a - r\})$$

svo að A_a er sammengi teljanlegrar fjölskyldu af mælanlegum mengjum og því mælanlegt.

Fallið cf er samskeyting f og samfellda fallsins $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto cx$ og því mælanlegt.

Fallið f^2 er samskeyting f og samfellda fallsins $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ og því mælanlegt. En þá er líka

$$fg = \frac{1}{4}((f + g)^2 - (f - g)^2)$$

mælanlegt.

Höfum

$$\{x \in X : \max(f,g)(x) \le a\} = \{x \in X : f(x) \le a\} \cap \{x \in X : g(x) \le a\},$$

$$\{x \in X : \min(f,g)(x) \le a\} = \{x \in X : f(x) \le a\} \cup \{x \in X : g(x) \le a\},$$

svo að $\max(f,g)$ og $\min(f,g)$ eru mælanleg.

Loks er $|f|$ samskeyting af f og samfellda fallinu $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ og því mælanlegt. □

Setning 3.9. *Sama setning gildir um föll $f, g \to \tilde{\mathbb{R}}$ að því gefnu að $f+g, fg$ séu skilgreind.*

Athugasemd. Getum hér

$$0 \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot 0 = 0 \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot 0 = 0.$$

Eins verður $f+g$ mælanlegt ef við setjum

$$(+\infty) + (-\infty) = (-\infty) + (+\infty) = 0.$$

11. feb.

Skilgreining 3.10. Fyrir fall $f : X \to \tilde{\mathbb{R}}$ setjum við

$$f^+ := \max\{f, 0\}, \quad f^- := \max\{-f, 0\} = -\max\{f, 0\}.$$

Höfum þá $f = f^+ - f^-$ og $|f| = f^+ + f^-$.

Fylgisetning 3.11. *Fall $f : X \to \tilde{\mathbb{R}}$ á málrúmi X er mælanlegt þ.þ.a.a. bæði föllin f^+ og f^- séu mælanleg.*

Setning 3.12. *Látum (f_k) vera runu af mælanlegum föllum $f_n : X \to \tilde{\mathbb{R}}$. Þá eru föllin*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k, \quad \inf_{k\in\mathbb{N}} f_k, \quad \limsup_{k\to+\infty} f_k, \quad \liminf_{k\to+\infty} f_k$$

mælanleg.

Sönnun. Skrifum $f := \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k$ og $g := \inf_{k\in\mathbb{N}} f_k$, þá er

$$\{x \in X : f(x) \le a\} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \{x : f_k(x) \le a\}$$

mælanlegt, og eins er

$$\{x \in X : f(x) \ge a\} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \{x : f_k(x) \ge a\}$$

mælanlegt. Þá eru

$$\limsup_{k\to+\infty} f_k = \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{j\ge k} f_j, \quad \liminf_{k\to+\infty} f_k = \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{j\ge k} f_j$$

líka mælanleg. □

Fylgisetning 3.13. *Ef (f_k) er runa af mælanlegum föllum $f_k : X \to \tilde{\mathbb{R}}$ og fyrir sérhvert $x \in X$ hefur runan $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ markgildi í $\tilde{\mathbb{R}}$, þá er $\lim_{k\to+\infty} f_k : X \to \tilde{\mathbb{R}}$ mælanlegt fall.*

Sönnun. Þá er $\lim_{k\to+\infty} f_k = \limsup_{k\to+\infty} f_k = \liminf_{k\to+\infty} f_k$. □

Skilgreining 3.14. Skilgreinum fall $\sigma_k : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ með

$$\sigma_k(x) := \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{j}{2^k}, & x \in \left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right[, j = 0, 1, \dots, k2^k - 1, \\ k & x \geq k. \end{cases}$$

Setning 3.15. *Látum X vera mengi og $f : X \to [0, +\infty]$ vera fall. Þá er $(\sigma_k \circ f)_{k\in\mathbb{N}}$ vaxandi runa af föllum þannig að $\lim_{k\to+\infty} \sigma_k \circ f = f$; ef X er mælanlegt rúm og f er mælanlegt fall, þá eru föllin $\sigma_k \circ f$ mælanleg. Ef f er takmarkað á X, þá er $(\sigma_k \circ f)$ samleitin í jöfnum mæli á X.*

Sönnun. Ljóst er að $(\sigma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ er vaxandi runa af mælanlegum föllum, og

$$\lim_{k\to+\infty} \sigma_k(t) = t^+ = \max\{t, 0\}$$

fyrir öll t. Fyrir $x \in X$ fæst þá $\lim_{k\to+\infty} \sigma_k(f(x)) = f(x)$ ef $f(x) \in [0, +\infty[$, en ef $f(x) = +\infty$, þá er $\sigma_k(f(x)) \geq k$ fyrir öll k, svo að $\lim_{k\to+\infty}(\sigma_k \circ f) = +\infty = f(x)$. Ef f er mælanlegt, þá er samskeytingin $\sigma_k \circ f$ mælanlegt fall f fyrir öll k. Ef f er takmarkað, $0 \leq f \leq M < +\infty$, þá fæst $0 \leq f(x) - (\sigma_k \circ f)(x) \leq \frac{1}{2^k}$ fyrir $k > M$ og öll x úr X, svo að samleitnin er í jöfnum mæli á X. □

Skilgreining 3.16. (1) Látum X vera mengi. Fall $f : X \to \mathbb{R}$ kallast *einfalt fall* ef það tekur bara endanlega mörg gildi, þ.e. myndmengið $f[X]$ er endanlegt.

(2) Látum X vera mengi. Fall $f : X \to \mathbb{R}$ kallast *kennifall* ef það tekur bara gildin 0 og 1; þá ákvarðast f af menginu

$$A := f^{-1}[1] = \{x \in X : f(x) = 1\},$$

og við köllum f *kennifall mengisins* (A í menginu X) og táknum það með χ_A.

Athugasemd. Kennifall mengis A í X er þá gefið með

$$\chi_A(X) = \begin{cases} 0, & x \in X \setminus A, \\ 1, & x \in A. \end{cases}$$

Ljóst er að fall $f : X \to \mathbb{R}$ er *einfalt* þ.þ.a.a. það megi skrifa sem summu

$$f = \sum_{j=1}^{k} a_j \chi_{A_j} \tag{3.2}$$

þar sem $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ og $A_1, \dots, A_k$ eru hlutmengi í X. Við getum valið $a_1, \dots, a_k$ ólík og ekki-núll, og $A_1, \dots, A_k$ sundurlæg tvö og tvö, og þá ákvarðast framsetningin ótvírætt burtséð frá röð, því að þá er $a_1, \dots, a_k$ upptalning á $f[X] \setminus \{0\}$ og $A_j = f^{-1}[a_j]$ fyrir $j = 1, \dots, k$. Ef X er málrúm og (3.2) er þannig framsetning á f, þá er f mælanlegt þ.þ.a.a. mengin $A_1, \dots, A_k$ séu öll mælanleg, því að fyrir hlutmengi B í $\tilde{\mathbb{R}}$ er $f^{-1}[B]$ sammengi einhverra af mengjunum $A_1, \dots, A_k$. Ljóst er: Ef $f = \sum_{j=1}^k a_j \chi_{A_j}$ er einhver framsetning einfalds falls og $A_1, \dots, A_k$ eru mælanleg, þá er f mælanlegt.

Af ofansögðu leiðir:

Setning 3.17. *Fall $f : X \to [0, +\infty]$ á mælanlegu rúmi er mælanlegt þ.þ.a.a. það sé markgildi runu $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ af einföldum mælanlegum föllum $u_k : X \to [0, +\infty]$ í þeim skilningi að $(u_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ hefur markgildið $f(x)$ í $\tilde{\mathbb{R}}$ fyrir sérhvert $x \in X$.*

Skilgreining 3.18. Látum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vera málrúm og $u : X \to [0, +\infty[$ vera einfalt mælanlegt fall; skrifum $u = \sum_{j=1}^k a_j \chi_{A_j}$, þar sem $a_1, \dots, a_k \in [0, +\infty[$ og $A_1, \dots, A_k$ eru mælanleg hlutmengi í X. Setjum

$$\int_X u \, d\mu := \sum_{j=1}^k a_j \mu(A_j).$$

Þurfum að sýna að þessi skilgreining sé óháð framsetningunni.

Athugasemd. Hér setjum við $0 \cdot (+\infty) = 0$.

14. feb. Þurfum fyrst að sanna:

Hjálparsetning 3.19. *Látum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vera málrúm, $f : X \to \mathbb{R}$ vera einfalt mælanlegt fall þ.a. $f \geq 0$. Setjum fallið f fram sem línulega samantekt*

$$f = \sum_{j=1}^k a_j \chi_{A_j}$$

þar sem $A_1, \dots, A_k$ eru mælanleg mengi og $a_j \geq 0$ fyrir öll $j = 1, \dots, m$. Þá er stærðin

$$\sum_{j=1}^k a_j \mu(A_j)$$

óháð valinu á þessari framsetningu. Nánar tiltekið, ef $A_{k+1}, \dots, A_l$ eru mælanleg og $a_{k+1}, \dots, a_l \in [0, +\infty]$ eru þannig að

$$\sum_{j=1}^k a_j \mu(A_j) = \sum_{j=k+1}^l a_j \mu(A_j)$$

þá er

$$\sum_{j=1}^k a_j \mu(A_j) = \sum_{j=k+1}^l a_j \mu(A_j).$$

Sönnun. Myndum öll mengi af gerðinni $\bigcap_{j=1}^{l} B_j$ þar sem $B_j = A_j$ eða $B_j = A_j^C$, og látum $C_1, \ldots, C_{2^l}$ vera upptalningu þeirra. Ljóst er að $C_1, \ldots, C_{2^l}$ eru sundurlæg tvö og tvö, því að fyrir tvö þeirra er til j þannig að annað sé í A_j en hitt í A_j^C. Hvert A_j er sammengi einhverra af mengjunum C_i. Á C_i er f fast. Því má skrifa $f = \sum_{i=1}^{2^l} c_i \chi_{C_i}$. Af samhverfuástæðum nægir þá að sýna að

$$\sum_{j=1}^{k} a_j \mu(A_j) = \sum_{j=1}^{2^l} c_i \mu(C_i).$$

En

$$c_i = \sum_{\substack{j=1 \\ C_i \subset A_j}}^{2^l} a_i$$

svo að

$$\sum_{j=1}^{k} a_j \mu(A_j) = \sum_{j=1}^{k} a_j \sum_{\substack{j=1 \\ C_i \subset A_j}}^{2^l} a_i \mu(C_i) = \cdots = \sum_{j=1}^{2^l} c_i \mu(C_i).$$

Framhald: Höfðum skilgreint mengi $C_1, \ldots, C_{2^l}$, sundurlæg tvö og tvö, þ.a. fyrir sérhvert $j = 1, \ldots, k$og $i = 1, \ldots, 2^l$ er C_i annaðhvort innihaldið í A_j eða í A_j^C og þannig að sérhvert A_j er sammengi einhverra af mengjunum C_i. Fyrir $j = 1, \ldots, k$ og $i = 1, \ldots, 2^l$ er þá χ_{A_j} fast á C_i, svo að við getum skrifað $f = \sum_{i=1}^{2^l} c_i \chi_{C_i}$ og þá

$$c_i = \sum_{\substack{j=1 \\ C_i \subset A_j}}^{k} a_j.$$

Fáum þá að

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2^l} c_i \mu(C_i) &= \sum_{i=1}^{2^l} \sum_{j=1}^{k} a_j \mu(C_i) \\
&= \sum_{(i,j) \in \{1,\ldots,2^l\} \times \{1,\ldots,k\}} a_j \mu(C_i) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \sum_{\substack{i=1 \\ C_i \subset A_j}}^{2^l} a_j \mu(C_i) \\
&= \sum_{j=1}^{k} a_j \sum_{\substack{i=1 \\ C_i \subset A_j}}^{2^l} \mu(C_i) \\
&= \sum_{j=1}^{k} a_j \mu(A_j),
\end{aligned}$$

því að

$$A_j = \bigcup_{\substack{i=1 \\ C_i \subset A_j}}^{2^l} C_i$$

og mengin C_i eru sundurlæg tvö og tvö. Sáum síðast að þetta nægði. □

Athugasemd. Sönnunin gengur óbreytt án forsendunnar $f \geq 0$ og $a_j \geq 0$ fyrir öll j, *að því gefnu* að málið μ sé endanlegt. Ef það er ekki endanlegt, þá þarf summan $\sum_{j=1}^{k} a_j \mu(A_j)$ ekki að vera vel skilgreind, ef ekki er gert ráð fyrir að $a_1, \ldots, a_k$ hafi sama formerki, því að þá gætu liðirnir $+\infty$ og $-\infty$ komið fyrir í sömu summunni.

Fyrir mælanlegt einfalt fall f þannig að $f \geq 0$ getum við skilgreint

$$\int_X f \, d\mu := \sum_{j=1}^{k} a_j \mu(A_j),$$

þar sem mengin a_j, A_j eru eins og í setningu.

Hjálparsetning 3.20. *Látum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vera málrúm, v vera einfalt mælanlegt fall á X og $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vera vaxandi runu af einföldum mælanlegum föllum á X þannig að $v \geq 0$ og $u_k \geq 0$ fyrir öll k og $v \leq \lim_{k\to+\infty} u_k$. Þá er*

$$\int_X v \, d\mu \leq \lim_{k\to+\infty} \int_X u_k \, d\mu.$$

Sönnun. Skrifum $v = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{A_j}$, þar sem $A_1, \ldots, A_m$ eru mælanleg mengi, sundurlæg tvö og tvö, og $a_j \geq 0$ fyrir $j = 1, \ldots, m$. Látum β vera fasta rauntölu, $\beta > 1$, og skilgreinum

$$B_k := \{x \in X : \beta u_k(x) \geq v(x)\}$$

fyrir $k \in \mathbb{N}$. Þá er $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vaxandi runa af mælanlegum hlutmengjum í X. Ef $v(x) = 0$, þá er $x \in B_k$ fyrir öll k; en ef $v(x) > 0$, þá er

$$\lim_{k\to+\infty} \beta u_k(x) \geq \beta v(x) > v(x)$$

svo að $x \in B_k$ fyrir öll nógu stór k. Því er $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k$. Því fæst

$$\begin{aligned}
\int_X v \, d\mu &= \sum_{j=1}^{m} a_j \mu(A_j) \\
&= \lim_{k\to+\infty} \sum_{j=1}^{m} a_j \mu(A_j \cap B_k) \\
&= \lim_{k\to+\infty} \int_X v \chi_{B_k} \, d\mu \\
&\leq \lim_{k\to+\infty} \beta \int_X u_k \, d\mu \\
&= \beta \lim_{k\to+\infty} \int_X u_k \, d\mu
\end{aligned}$$

þar sem þetta gildir fyrir öll $\beta > 1$ fæst niðurstaðan. $\square$

Fylgisetning 3.21. *Látum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vera málrúm, $f : X \to [0, +\infty]$ vera mælanlegt fall, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vera vaxandi runu af einföldum mælanlegum föllum þ.a. $u_k \geq 0$ og $\lim_{k\to+\infty} u_k = f$. Þá er*

$$\lim_{k\to+\infty} \int_X u_k\, d\mu = \sup\{\int_X v\, d\mu : v \text{ einfalt, mælanlegt og } 0 \leq v \leq f\}.$$

Sér í lagi er markgildið óháð vali á rununni.

Sönnun. "$\leq$" er augljóst. Til að sjá "$\geq$", látum við $M < \sup\{\int_X v\, d\mu : \dots\}$; þá er til einfalt mælanlegt fall v þ.a. $0 \leq v \leq f$ og $\int_X v\, d\mu > M$; skv. setningu er þá

$$\lim_{k\to+\infty} \int_X u_k\, d\mu \geq \int_X v\, d\mu > M.$$

Þar sem þetta gildir fyrir öll slík M fæst niðurstaðan. $\square$

Skilgreining 3.22. Látum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vera málrúm og $f : X \to [0, +\infty]$ vera mælanlegt fall. Við skilgreinum *heildi* fallsins f m.t.t. málsins μ með

$$\int_X f\, d\mu := \sup\{\int_X v, d\mu : \text{v er einfalt, mælanlegt og } 0 \leq v \leq f\}.$$

Athugasemd. Skv. fylgisetningu er

$$\int_X f\, d\mu = \lim_{k\to+\infty} \int_X u_k\, d\mu$$

fyrir śerhverja *vaxandi* runu (u_k) af mælanlegum einföldum föllum u_k þannig að $0 \leq u_k \leq f$ og $\lim_{k\to+\infty} u_k = f$. Slíkar runur eru alltaf til skv. setningu.

Athugasemd. Kennifall mælanlegs mengis$A$ hefur vel skilgreint heildi, og $\int_X \chi_A\, d\mu = \mu(A)$.

Setning 3.23. *Látum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vera málrúm og $f, g : X \to [0, +\infty]$ vera mælanleg föll þ.a. $f \leq g$. Þá er*

$$\int_X f\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu.$$

Sönnun. Augljóst af skilgreiningu. $\square$

Setning 3.24 (Beppo-Levi)**.** *Látum $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vera* vaxandi *runu af mælanlegum föllum $f_k : X \to [0, +\infty]$, þar sem $(X, \mathcal{A}, \mu)$ er málrúm. Þá er*

$$\lim_{k\to+\infty} \int_X f_k\, d\mu = \int_X \lim_{k\to+\infty} f_k\, d\mu.$$

Sönnun. Ljóst er að $f_k \leq \lim_{k\to+\infty} f_k$ fyrir öll k, svo að

$$\int_X f_k \, d\mu \leq \int_X \lim_{k\to+\infty} f_k \, d\mu$$

fyrir öll k og því

$$\lim_{k\to+\infty} \int_X f_k \, d\mu \leq \int_X \lim_{k\to+\infty} f_k \, d\mu.$$

Setjum $f := \lim_{k\to+\infty} f_k$. Látum u vera einfalt mælanlegt fall, $0 \leq u \leq f$ og $\beta > 1$ vera fasta rauntölu. Setjum $B_k := \{x \in X : \beta f_k(x) \geq u(x)\}$. Þá er $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vaxandi runa af mælanlegum mengjum og $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k = X$ og $\beta f_k \geq u\chi_{B_k}$, og $u\chi_{B_k}$ er einfalt, mælanlegt, og $(u\chi_{B_k})_{k\in\mathbb{N}}$ er vaxandi, $\lim_{k\to+\infty} u\chi_{B_k} = u$; svo að skv. hjálparsetningu er

$$\int_X u \, d\mu \leq \lim_{k\to+\infty} \int_X u\chi_{B_k} \, d\mu \leq \beta \lim_{k\to+\infty} \int_X f_k \, d\mu.$$

Þetta gildir fyrir öll $\beta > 1$, svo að

$$\int_X u \, d\mu \leq \lim_{k\to+\infty} \int_X f_k \, d\mu.$$

En þá er

$$\int_X f \, d\mu \leq \lim_{k\to+\infty} \int_X f_k \, d\mu.$$

□

Jafngild framsetning:

Setning 3.25. *Látum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vera málrúm og $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vera runu af mælanlegum föllum $f_k : X \to [0, +\infty]$. Þá er*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_X f_k \, d\mu = \int_X \sum_{k=0}^{+\infty} f_k \, d\mu.$$

18. feb.

Setning Beppo-Levis er oftast kölluð *setning um einhalla samleitni*. Til þess að sjá jafngildi hennar og síðustu setningar þurfum við:

Setning 3.26. *Látum $f, g : X \to [0, +\infty]$ vera mælanleg föll og $c \in \mathbb{R}, c \geq 0$. Þá er*

$$\int_X (f + g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$$

og

$$\int_X cf \, d\mu = c \int_X f \, d\mu.$$

Sönnun. Þetta er augljóst ef föllin f, g eru einföld; í almenna tilvikinu veljum við vaxandi runur (u_k) og (v_k) af einföldum mælanlegum föllum $X \to [0, +\infty]$ þannig að $\lim_{k\to+\infty} u_k = f$ og $\lim_{k\to+\infty} v_k = g$. Þá er

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty} \int_X (f+g)\, d\mu &= \lim_{k\to+\infty} \int_X (u_k + v_k)\, d\mu \\ &= \lim_{k\to+\infty} \int_X u_k + \lim_{k\to+\infty} v_k\, d\mu \\ &= \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu\end{aligned}$$

og eins er $\lim_{k\to+\infty} cu_k = cf$ og þá

$$\begin{aligned}\int_X cf\, d\mu &= \lim_{k\to+\infty} \int_X cu_k\, d\mu \\ &= c \lim_{k\to+\infty} \int_X u_k\, d\mu \\ &= c \int_X f\, d\mu.\end{aligned}$$

□

Þá fáum við: Ef (f_k) er runa af mælanlegum föllum $X \to [0, +\infty]$ og $S_k = \sum_{j=0}^{k} f_j$, þá er (S_k) vaxandi runa af föllum og setning um einhalla samleitni gefur

$$\begin{aligned}\int_X \sum_{k=0}^{+\infty} f_k\, d\mu &= \int_X \lim_{k\to+\infty} S_k\, d\mu \\ &= \lim_{k\to+\infty} \int_X S_k\, d\mu \\ &= \lim_{k\to+\infty} \int_X \sum_{j=0}^{k} f_k\, d\mu \\ &= \lim_{k\to+\infty} \sum_{j=0}^{k} \int_X f_k\, d\mu \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_X f_k\, d\mu.\end{aligned}$$

Dæmi 3.27. Látum μ vera talningarmálið á $\mathbb{N}$; sérhvert hlutmengi í $\mathbb{N}$ er mælanlegt og $\mu(\{k\}) = 1$. Fyrir sérhvert fall$f : \mathbb{N} \to [0, +\infty]$ er

$$\int_{\mathbb{N}} f\, d\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k).$$

Setningin segir þá: Ef $(a_{jk})_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ er fjölskylda af stökum í $[0, +\infty]$, þá er

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} a_{jk} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} a_{jk}.$$

Setning 3.28 (Fatou-hjálparsetningin)**.** *Látum X vera málrúm, (f_k) vera runu af mælanlegum föllum $f_k : X \to [0, +\infty]$. Þá er*

$$\int_X \liminf_{k\to+\infty} f_k \, d\mu \leq \liminf_{k\to+\infty} \int_X f_k \, d\mu.$$

Sönnun. Setjum $g_k := \inf\{f_j : j \geq k\}$; þá er (g_k) vaxandi og $\liminf_{k\to+\infty} f_k = \lim_{k\to+\infty} g_k$; auk þess er $g_k \leq f_k$ fyrir öll k. Skv. setningu um einhalla samleitni er

$$\begin{aligned}\int_X \liminf_{k\to+\infty} f_k \, d\mu &= \int_X \lim_{k\to+\infty} g_k \, d\mu \\ &= \lim_{k\to+\infty} \int_X g_k \, d\mu \\ &= \liminf_{k\to+\infty} \int_X g_k \, d\mu \\ &\leq \liminf_{k\to+\infty} \int_X f_k \, d\mu.\end{aligned}$$

□

Setning 3.29. *Látum X vera málrúm og $f : X \to [0, +\infty]$ vera mælanlegt fall. Við höfum $\int_X f \, d\mu = 0$ þ.þ.a.a. $f = 0$ næstum allsstaðar.*

Sönnun. Þetta er ljóst ef f er einfalt, $f = \sum_{k=1}^m a_k \chi_{A_k}$ þar sem $a_k > 0$. Ef $\sum_{k=1}^m a_k \mu(A_k) = 0$, þá er $a_k \mu(A_k) = 0$ og því $\mu(A_k) = 0$ fyrir öll k, og $\{x : f(x) \neq 0\} \subset \bigcup_{k=1}^m A_k$ og $\mu(\bigcup_{k=1}^m A_k) \leq \sum_{k=1}^m \mu(A_k) = 0$. Ef f er almennt mælanlegt fall og $\int_X f \, d\mu = 0$, þá er $\int_X u \, d\mu = 0$ fyrir öll einföld föll u þ.a. $0 \leq u \leq f$. Ef (u_k) er vaxandi runa af einföldum föllum þ.a. $0 \leq u_k \leq f$ og $\lim_{k\to+\infty} u_k = f$, þá er $\{x : f(x) > 0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{x : u_k(x) > 0\}$ og þetta er þá teljanlegt sammengi af núllmengjum og því núllmengi. Öfugt, ef $A := \{x : f(x) > 0\}$ er núllmengi, þá er $\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu$, þar sem

$$g(x) := \begin{cases} +\infty & x \in A, \\ 0 & x \in X \setminus A, \end{cases}$$

og $\int_X g \, d\mu = \lim_{k\to+\infty} \int k\chi_A \, d\mu = \lim_{k\to+\infty} k\mu(A) = 0$; svo að $\int_X f \, d\mu = 0$. □

Kafli 4

Heildanleg föll

Skilgreining 4.1. Látum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vera málrúm.

(1) Raunfall $f : X \to \mathbb{R}$ eða útvíkkað raunfall $f : X \to \tilde{\mathbb{R}}$ kallast *heildanlegt* ef það er mælanlegt og

$$\int_X f^+ \, d\mu < +\infty, \quad \int_X f^- \, d\mu < +\infty.$$

Skilgreinum þá *heildi* fallsins f (m.t.t. μ) sem rauntöluna

$$\int_X f \, d\mu := \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu.$$

Segjum líka að f sé *hálfheildanlegt* ef annað af heildunum $\int_X f^+ \, d\mu$ eða $\int_X f^- \, d\mu$ er endanlegt og skilgreinum þá heildið $\int_X f \, d\mu$ sem stak í $\tilde{\mathbb{R}}$ með sömu formúlu.

(2) Tvinnfall $f : X \to \mathbb{C}$ kallast *heildanlegt* (m.t.t. μ) ef það er mælanlegt og raunföllin $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f : X \to \mathbb{R}$ eru bæði heildanleg; við setjum þá

$$\int_X f \, d\mu := \int_X \operatorname{Re} f \, d\mu + i \int_X \operatorname{Im} f \, d\mu.$$

(3) Fall f á X kallast *heildanlegt yfir mælanlega hlutmengið* A í X ef $f\chi_A$ er heildanlegt; setjum þá

$$\int_A f \, d\mu = \int_X f\chi_A \, d\mu.$$

Athugasemd. Látum $f : X \to \tilde{R}$ vera heildanlegt. Þá er $\int_X f^+ \, d\mu < +\infty$, $\int_X f^- \, d\mu < +\infty$ og af því leiðir að $\{x \in X : f(x) \in \{-\infty, +\infty\}\}$ er núllmengi (sjá heimadæmi). En þá er

$$\int_X f \, d\mu = \int_X \hat{f} \, d\mu \quad \text{þar sem} \quad \hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ 0, & x \in \{-\infty, +\infty\}. \end{cases}$$

Með öðrum orðum má breyta heildanlegu útvíkkuðu raunfalli í raunfall með því að breyta gildunum aðeins á núllmengi og það breytir ekki heildinu.

Hjálparsetning 4.2. *Látum $f : X \to \tilde{\mathbb{R}}$ vera (mælanlegt) fall og gerum ráð fyrir að til séu mælanleg föll $g, h : X \to [0, +\infty]$ þannig að $f = g - h$ og $\int_X g\, d\mu < +\infty$, $\int_X h\, d\mu < +\infty$. Þá er f heildanlegt og*

$$\int_X f\, d\mu = \int_X g\, d\mu - \int_X h\, d\mu.$$

Sönnun. Ef $f(x) \geq 0$ þá er $f^+(x) = f(x) = g(x) - h(x) \leq g(x)$; ef $f(x) < 0$, þá er $f^+(x) = 0 \leq g(x)$; svo $f^+ \leq g$. Þar með fæst $0 \leq \int_X f^+\, d\mu < +\infty$, eins er $\int_X f^-\, d\mu < \infty$, svo að f er heildanlegt. Nú er $g + f^- = h + f^+$, svo að skv. setningu er

$$\int_X g\, d\mu + \int_X f^-\, d\mu = \int_X h\, d\mu + \int_X f^+\, d\mu$$

svo að

$$\int_X f\, d\mu = \int_X f^+\, d\mu - \int_X f^{-1}\, d\mu = \int_X g\, d\mu - \int_X h\, d\mu.$$

□

21. feb. - 11. mars

Athugasemd. Látum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vera málrúm og f vera heildanlegt fall á X, þát táknum við heildið stundum með

$$\int_X f(x)\, d\mu(x);$$

þetta er einkum þægilegt þegar f er háð öðrum breitum; ef t.d. T er mengi, $f : T \times X \to \mathbb{C}$ er fall og $X \to \mathbb{C}, x \mapsto f(t, x)$ er heildanlegt fyrir öll t úr T, þá má skilgreina $F : T \to \mathbb{C}$ með

$$F(t) := \int_X f(t, x)\, d\mu(x).$$

Höfum hér að $\int_X f(t, x)\, d\mu(x) := \int_X f_t\, d\mu$, þar sem $f_t(x) := f(t, x)$. Ef $(X, \mathcal{A}, \mu)$ er $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{\lambda_n}, \lambda_n)$, þá köllum við heildanlegt fall *Lebesgue-heildanlegt* og $\int_{\mathbb{R}^n} f\, d\lambda_n$ kallast *Lebesgue-heildi f*.

Hjálparsetning 4.3. *Látum $f = g - h$, þar sem $g, h : X \to [0, +\infty]$ eru heildanleg föll á málrúmi X þ.a. $g - h$ sé vel skilgreint; þá er f heildanlegt og*

$$\int_X f\, d\mu = \int_X g\, d\mu - \int_X h\, d\mu.$$

Setning 4.4. *Látum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vera málrúm, látum f, g vera heildanleg föll á X þ.a. $f + g$ sé vel skilgreint og c vera fasta; þá eru $f + g$ og cf heildanleg og*

$$\int_X (f + g)\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu, \quad \int_X cf\, d\mu = c \int_X f\, d\mu.$$

Sönnun. Athugum fyrst tilvikið þegar $f, g : X \to \tilde{\mathbb{R}}$, þá eru f^+, f^{-1},g^+ og g^- heildanleg og ≥ 0; þá er $f+g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$, og $f^+ + g^+$,$f^- + g^-$ eru heildanleg skv. fyrri setningu, sem gefur

$$\int_X (f^+ + g^+)\, d\mu = \int_X f^+\, d\mu + \int_X g^+\, d\mu,$$
$$\int_X (f^- + g^-)\, d\mu = \int_X f^-\, d\mu + \int_X g^-\, d\mu.$$

Seinasta hjálparsetning gefur þá að $f+g$ er heildanlegt og

$$\begin{aligned}\int_X (f+g)\, d\mu &= \Big(\int_X f^+\, d\mu + \int_X g^+\, d\mu\Big) - \Big(\int_X f^-\, d\mu + \int_X g^-\, d\mu\Big)\\ &= \int_X f^+\, d\mu + \int_X g^+\, d\mu - \int_X f^-\, d\mu - \int_X g^-\, d\mu\\ &= \int_X (f^+ - f^-)\, d\mu + \int_X g^+ - g^-)\, d\mu\\ &= \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu.\end{aligned}$$

Ef $c \geq 0$ þá er $cf = cf^+ - cf^-$, cf^+ og cf^- eru heildanleg og $\int_X cf^+\, d\mu = c\int_X f^+\, d\mu$ og $\int_X cf^-\, d\mu = c\int_X f^-\, d\mu$, skv. fyrri setningu, svo að $cf = cf^+ - cf^-$ er heildanlegt og

$$\begin{aligned}\int_X cf\, d\mu &= c\int_X f^+\, d\mu - c\int_X f^-\, d\mu\\ &= c\int_X (f^+ - f^-)\, d\mu\\ &= c\int_X f\, d\mu.\end{aligned}$$

Ef $c < 0$, þá eru föllin $-cf^+$ og $-cf^-$ heildanleg föll $X \to [0, +\infty]$ og niðurstaðan fæst svipað og að ofan. Ef f er tvinnfall og $c \in \mathbb{C}$, þá skrifum við $f = g + ih$, og $c = a + ib$, þar sem g, h eru raunföll og $c, g \in \mathbb{R}$; þá reiknum við smávegis og notum niðurstöður fyrir raunföll. $\square$

Setning 4.5. *G.r.f. að $(X, \mathcal{A}, \mu)$ sé málrúm, f sé mælanlegt fall á X og g sé heildanlegt fall $g : X \to [0, +\infty]$ þ.a. $|f| \leq g$ næstum allsstaðar. Þá er f heildanlegt.*

Sönnun. Fyrir $f : X \to [0, +\infty]$ fæst að $f^+, f^- \leq |f| \leq g$ næstum allsstaðar, svo að

$$\int_X f^+\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu < +\infty, \qquad \int_X f^-\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu < +\infty;$$

ef nefnilega A er núllmengi þ.a. $|f| \leq g$ á A^C, þá er $f^+ - f^+\chi_A \leq g$ næstum allsstaðar og $\int_X f^+\chi_A\, d\mu = 0$, svo að

$$\int_X f^+\, d\mu = \int_X (f^+ - f^+\chi_A)\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu;$$

eins fyrir f^-. $\square$

Setning 4.6. *Ef $f, g \to \tilde{\mathbb{R}}$ eru heildanleg föll og $f = g$ næstum allsstaðar, þá er*

$$\int_X f\, d\mu = \int_X g\, d\mu.$$

Sönnun. Sönnunin er einföld. $\square$

Setning 4.7. *Ef $f, g \to \tilde{\mathbb{R}}$ eru heildanleg föll og $f \leq g$, þá er*

$$\int_X f\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu.$$

Sönnun. Höfum $f^+ \leq g^+$ og $f^- \geq g^-$, svo að

$$\int_X f\, d\mu = \int_X f^+\, d\mu - \int_X f^-\, d\mu \leq \int_X g^+\, d\mu - \int_X g^-\, d\mu = \int_X g\, d\mu.$$

$\square$

Setning 4.8. *Látum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vera málrúm. Fall f á X er heildanlegt þ.þ.a.a. það sé mælanlegt og $|f|$ sé heildanlegt, og þá er*

$$\left|\int_X f\, d\mu\right| \leq \int_X |f|\, d\mu.$$

Sönnun. Þetta er ljóst fyrir föll $f : X \to \tilde{\mathbb{R}}$, því að $|f| = f^+ + f^-$. Fyrir tvinnföll $f : X \to \mathbb{C}$ er ljóst að

$$|\operatorname{Re} f|, |\operatorname{Im} f| \leq |f| \leq |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f|,$$

svo að f er heildanlegt þ.þ.a.a. $\operatorname{Re} f$ og $\operatorname{Im} f$ séu heildanleg, sem er svo jafngilt því að $|f|$ sé heildanlegt. Látum $\theta \in \mathbb{R}$ vera þ.a.

$$\left|\int_X f\, d\mu\right| = e^{i\theta} \int_X f\, d\mu = \int_X e^{i\theta} f\, d\mu,$$

þá er

$$\left|\int_X f\, d\mu\right| = \operatorname{Re} \int_X e^{i\theta} f\, d\mu = \int_X \operatorname{Re}(e^{i\theta} f)\, d\mu \leq \int_X |f|\, d\mu$$

vegna $|e^{i\theta} f| = |f|$. $\square$

Setning 4.9 (Lebesgue um yfirgnæfða samleitni)**.** *Látum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vera málrúm, (f_k) vera runu af mælanlegum föllum á X og g vera heildanlegt fall á X. Gerum ráð fyrir að $f = \lim_{k\to+\infty} f_k$ næstum allsstaðar og fyrir sérhvert k sé $|f_k| \leq g$ næstum allsstaðar. Þá eru f_k og f heildanleg og við höfum*

$$\lim_{k\to+\infty} \int_X f_k\, d\mu = \int_X f\, d\mu,$$

$$\lim_{k\to+\infty} \int_X (f_k - f)\, d\mu = 0.$$

Sönnun. Ljóst er að f_k eru heildanleg samkvæmt setningu og f er mælanlegt, því það er markgildi af mælanlegum föllum; með því að breyta föllunum á núllmengi má g.r.f. að f_k, f taki endanleg gildi og $\lim_{k\to+\infty} f_k = f$ allsstaðar. Okkur nægir að athuga raunföll f_k, því að fyrir tvinnföll er $|\operatorname{Re} f_k| \le |f_k| \le g$ og $|\operatorname{Im} f| \le g$. Athugum að $|f_k - f| \le |f_k| + |f| \le g + |f|$, svo að $g_k := g + |f| - |f_k - f| \ge 0$, svo að skv. *Fatou*-hjálparsetningunni er

$$\begin{aligned}\int_X (g + |f|)\,d\mu &= \int_X \liminf_{k\to+\infty} g_k\,d\mu \\ &\le \liminf_{k\to+\infty} \int_X g_k\,d\mu \\ &= \liminf_{k\to+\infty} \left(\int_X (g+|f|)\,d\mu - \int_X |f_k - f|\,d\mu\right) \\ &= \int_X (g+|f|)\,d\mu - \limsup_{k\to+\infty} \int_X |f_k - f|\,d\mu\end{aligned}$$

svo að

$$0 \le \limsup_{k\to+\infty} \int_X |f_k - f|\,d\mu \le 0$$

og þar með er $\int_X |f_k - f|\,d\mu = 0$. En þá er líka

$$\left|\lim_{k\to+\infty} f_k\,d\mu - \int_X f\,d\mu\right| \le \int_X |f_k - f|\,d\mu \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0,$$

svo að

$$\lim_{k\to+\infty} \int_X f_k\,d\mu = \int_X f\,d\mu.$$

□

Athugasemd. Almennt hefur $\lim_{k\to+\infty} f_k = f$ ekki í för með sér að $\lim_{k\to+\infty} \int_X f_k\,d\mu = \int_X f\,d\mu$.

Dæmi 4.10. Föllin

$$f_k := (k+1)\chi_{]0,1/(k+1)[}$$

eru heildanleg í λ_1 á $\mathbb{R}$ og $\lim_{k\to+\infty} f_k = 0$ allsstaðar, en $\int_{\mathbb{R}} f_k\,d\lambda = 1$ fyrir öll k, svo að

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k\,d\lambda \ne \int_{\mathbb{R}} \lim_{k\to+\infty} f_k\,d\lambda.$$

Fylgisetning 4.11. *Látum X vera málrúm, $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vera runu af heildanlegum föllum á X þannig að*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_X |f_k|\,d\mu < +\infty.$$

Þá er röðin $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ alsamleitin næstum allsstaðar og fyrir $f := \sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ næstum alsstaðar er f heildanlegt og

$$\int_X f\,d\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_X f_k\,d\mu,$$

$$\lim_{k\to+\infty} \int_X \left| f - \sum_{j=0}^{k} \right| d\mu = 0.$$

Sönnun. Fallarunan (g_k), þar sem $g_k := \sum_{j=0}^{k} |f_j|$ er vaxandi, ef g er markgildið, þá er g mælanlegt og skv. B.-Levi er

$$\int_X g\,d\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_X |f_k < \,d\mu < +\infty,$$

svo að g er heildanlegt og

$$\left| \sum_{j=0}^{k} f_j \right| \le \sum_{j=0}^{k} |f_j| \le g,$$

og niðurstaðan er nú bein afleiðing af setningu Lebesgues um yfirgnæfða samleitni. $\square$

Skilgreining 4.12. Látum f vera heildanlegt fall á málrúmi $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Við skrifum

$$\|f\|_1 := \int_X |f|\,d\mu.$$

Táknum með $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ mengi heildanlegra falla $X \to \mathbb{R}$ og með $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ mengi heildanlegra falla $X \to \mathbb{C}$. Leyfum okkur að skrifa $\mathcal{L}^1(X, \mathbb{R})$ eða álíka framsetningu.

Eftirfarandi er þá augljóst:

Setning 4.13. *Mengið $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ er línulegt rúm yfir $\mathbb{R}$ og $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$ er línulegt rúm yfir $\mathbb{C}$. Vörpunin $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, f \mapsto \|f\|_1$, hefur eftirfarandi eiginleika:*

(i) $\|f\|_1 \ge 0$*;* $\|f\| = 0$ *þ.þ.a.a* $f = 0$ *næstum allsstaðar.*

(ii) $\|cf\|_1 = |c| \cdot \|f\|_1$ *fyrir öll* $c \in \mathbb{C}$ *og öll* f *úr* $\mathcal{L}(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$*.*

(iii) $\|f + g\|_1 \le \|f\|_1 + \|g\|_1$*.*

Skilgreining 4.14. *Staðall* á línulegu rúmi V yfir $\mathbb{K}$ þar sem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$ er vörpun $V \to \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|$, þannig að

(i) $\|x\| \ge 0$; $\|x\| = 0$ þ.þ.a.a. $x = 0$.

(ii) $\|cx\| = |c| \cdot \|x\|$ fyrir öll $c \in \mathbb{K}$ og öll $x \in V$.

(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Vörpunin $\mathcal{L}^1 \to \mathbb{R}, f \mapsto \|f\|_1$ er *ekki staðall*, því að $\|f\|_1 = 0$ leyfir okkur aðeins að álykta að $f = 0$ *næstum allsstaðar*. Athugum jafngildisvensl $\sim$ á $\mathcal{L}^1$ með því að skrifa

$$f \sim g \quad \text{þ.þ.a.a.} \quad f = g \text{ næstum allsstaðar.}$$

Táknum með L^1 mengi allra jafngildisflokkanna. Þá verður L^1 að línulegu rúmi yfir $\mathbb{K}$ með því að setja

$$\begin{aligned} [f] + [g] &:= [f+g] \\ c[f] &:= [cf], \end{aligned}$$

þar sem $[f]$ er jafngildisflokkur f og $c \in \mathbb{K}$. Með því að setja

$$\|\,[f]\,\| := \|f\|_1$$

fæst þá staðall á L^1.

Athugasemd. Hefð er að gera lítinn greinamun á f og $[f]$, við skrifum $f \in L^1$ ef $f \in \mathcal{L}^1$ o.s.frv. Tökum þó eftir því að gildi f í punkti x er venjulega ekki það sama fyrir öll föll í $[f]$.

Fylgisetning 4.15. *Ef (f_k) er runa í L^1 og $\sum_{k=0}^{+\infty} \|f_k\|_1 < +\infty$, þá er til f í L^1 þannig að*

$$\lim_{k\to+\infty} \left\| f - \sum_{j=0}^{k} f_j \right\| = 0,$$

m.ö.o.: Alsamleitin röð í L^1 er samleitin í L^1.

Hér notum við:

Setning 4.16. *Ef V er staðalrúm með staðal $\|\cdot\|$, þá fæst firð d á V með því að láta*

$$d(x,y) := \|x-y\|.$$

Sönnun. Augljóst. $\square$

Skilgreining 4.17. Röð $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ í stöðluðu rúmi kallast *samleitin* ef runan (s_k) þa rsem $s_k := \sum_{j=0}^{k} x_k$, er samleitin, þ.e. til er $x \in V$ þ.a.

$$\lim_{k\to+\infty} \|x - \sum_{j=0}^{k} x_j\| = 0.$$

Hún kallast *alsamleitin* ef $\sum_{k=0}^{+\infty} \|x_k\| < +\infty$.

Setning 4.18. *Staðlað rúm V er fullkomið firðrúm þ.þ.a.a. alsamleitin röð í V sé samleitin.*

Sönnun. Sleppt. $\square$

Skilgreining 4.19. Fullkomið staðalrúm kallast *Banach-rúm.*.

Höfum sýnt að L^1 er Banach-rúm m.t.t. staðalsins $\|\cdot\|_1$ á L^1. Athugum fleiri afleiðingar af setningu Lebesgues:

Setning 4.20. *Látum $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ vera deildanlegt fall þ.a. afleiðan $f' : [a,b] \to \mathbb{C}$ sé takmarkað fall. Þá er f' Lebesgue-heildanleg fall og*

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Sönnun. Framlengjum fallið f í deildanlegt fall á öllu $\mathbb{R}$ þannig að f' sé áfram takmarkað. Segjum t.d. að $|f'| \leq M$, þar sem M er föst rauntala. Setjum nú

$$g_k(x) := \frac{f(x+\frac{1}{k}) - f(x)}{\frac{1}{k}}$$

fyrir öll x. Þá er $\lim_{k\to+\infty} g_k = f'$, svo að f' er mælanlegt, og þar eð það er takmarkað er það heildanlegt yfir $[a,b]$. Skv. meðangildissetningu er fyrir gefið x og $k > 0$ til ξ milli x og $\frac{1}{k}x$ þ.a. $g_k(x) = f'(\xi)$. Þetta þýðir að $|g_k| \leq M$ á $[a,b]$. Skv. setningu um yfirgnæfða samleitni er

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{[a,b]} g_k\,d\lambda = \int_{[a,b]} f'\,d\lambda.$$

Nú er f samfellt og hefur því stofnfall F, svo að

$$\begin{aligned}
\int_a^b g_k(x)\,dx &= k\int_a^b \left(f(x+1/x) - f(x)\right)\,dx \\
&= k(F(b+1/k) - F(b)) - k(F(a+1/k) - F(a)) \\
&\xrightarrow[k\to+\infty]{} F'(b) - F'(a) = f(b) - f(a),
\end{aligned}$$

svo að

$$\int_{[a,b]} f'\,d\lambda = f(b) - f(a).$$

$\square$

Setning 4.21. *Látum T vera firðrúm, $t_0 \in T$, $f : T \times X \to \mathbb{C}$ vera fall, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vera málrúm, og g.r.f. að eftirfarandi þremur skilyrðum sé fullnægt:*

(i) Fyrir öll t úr T er fallið $X \to \mathbb{C}, x \mapsto f(t,x)$ heildanlegt.

(ii) Fyrir næstum öll x úr X er fallið $T \to \mathbb{C}, t \mapsto f(t,x)$ samfellt í t_0.

(iii) Til er grennd U um punktinn t_0 í T og heildanlegt fall g á X þ.a. fyrir sérhvert t úr U gildi $|f(t,x)| \leq g(x)$ fyrir næstum öll $x \in X$.

Þá er fallið $F : T \to \mathbb{C}$,

$$F(t) := \int_X f(t,x)\, d\mu(x)$$

samfellt í t_0 og $\Phi : T \to L^1, \phi(t)(x) := f(t,x)$ er samfellt í t_0.

Sönnun. Þetta er bein afleiðing af setningu Lebesgues eftir smá umritun. □

Setning 4.22. *Látum I vera bil í $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $f : I \times X \to \mathbb{C}$ vera fall; X málrúm. G.r.f. að eftirfarandi skilyrðum sé fullnægt:*

(a) Fyrir sérhvert t úr I er fallið $x \to \mathbb{C}, x \mapsto f(t,x)$ heildanlegt.

(b) Fyrir sérhvert x úr X er fallið $I \to \mathbb{C}, t \mapsto f(t,x)$ deildanlegt í t_0.

(c) Til er grennd U um t_0 í $\mathbb{R}$ og heildanlegt fall g á X þ.a. fyrir öll $t \in U \cap I$ gildi

$$\left| \frac{f(t_0,x) - f(t,x)}{t_0 - t} \right| \leq g(x)$$

næstum allsstaðar.

Þá er fallið $F : I \to \mathbb{C}$, þar sem

$$F(t) := \int_X f(t,x)\, d\mu(x)$$

deildanlegt í t_0; fallið $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(t_0,x)$ er heildanlegt og

$$F'(t_0) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t_0,x)\, d\mu(x).$$

Sönnun. Þetta er bein afleiðing af síðustu setningu. □

Athugasemd. Með því að nota meðalgildissetningu fæst að sama niðurstaða gildir ef í stað (b) og (c) látum við: Til er grennd U um t_0 þ.a. fallið $t \mapsto f(t,x)$ sé deildanlegt á $U \cap I$ fyrir sérhvert $x \in X$ og til er heildanlegt fall g á X þ.a.

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) \right| \leq g(x), \quad \forall\, x \in X.$$

Setning 4.23. *Látum X vera málrúm, U vera opið hlutmengi í $\mathbb{C}$ og $f : U \times X \to \mathbb{C}$ vera fall þ.a. eftirfarandi þremur skilyrðum sé fullnægt:*

(a) Fyrir sérhvert z úr U er fallið $x \to \mathbb{C}, x \mapsto f(z,x)$ heildanlegt.

(b) Fyrir sérhvert x úr X er fallið $U \to \mathbb{C}, z \mapsto f(z,x)$ fágað.

(c) Fyrir sérhverja lokaða hringskífu K í U er til heildanlegt fall $g_K : X \to \mathbb{R}$ þ.a.

$$|f(z,x)| \leq g(x)$$

fyrir næstum öll x.

Þá er fallið $F : U \to \mathbb{C}$ þ.a.

$$F(z) := \int_X f(z,x)\, d\mu(x)$$

fágað; fyrir sérhvert $k \in \mathbb{N}$ er fallið $X \to \mathbb{C}, x \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(z,x)$ heildanlegt og

$$F^{(k)}(z) = \int_X \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(z,x)\, d\mu(x)$$

fyrir öll $z \in U$.

Sönnun. Látum $K := \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \leq 2r\} \subset U$; þá er

$$f(z,x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha_{2r}(a)} \frac{f(\zeta,x)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad |z-a| < 2r$$

skv. Cauchy-formúlu, þar sem $\alpha_{2r}(a)$ er vegurinn $[0,2\pi] \to U, t \mapsto a + 2re^{it}$. Þá er fyrir fast $z \in C$ með $|z-a| < 2r$:

$$= \int_X \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha_{2r}(a)} \frac{f(\zeta,x)}{(\zeta - z)(\zeta - w)}\, d\zeta\, d\mu(x)}_{=:\varphi_w(\zeta,w)}.$$

Látum (w_k) vera runu í $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}$ þ.a. $w_k \neq z$, en $\lim_{k\to+\infty} w_k = z$. Þá er fallið $x \to \varphi_{w_k}(z,x)$ mælanlegt og $|\varphi_{w_k}(z,x)| \leq \frac{2}{r} g_k(x)$ næstum allsstaðar; niðurstaðan fæst nú út frá fyrri setningu. □

Setning 4.24. *Látum $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ vera takmarkað fall sem er núll fyrir utan þjappað mengi K. Fallið f er* Riemann-*heildanlegt yfir K þ.þ.a.a. það sé samfellt næstum allsstaðar; ef svo er, þá er það líka heildanlegt m.t.t.* Lebesgue-*málsins λ_n á $\mathbb{R}^n$, og Lebesgue-heildið er jafnt Riemann-heildinu.*

Sönnun. Sjá stærðfræðigreiningu IIA; viðbótin að Lebesgue- og Riemann-heildin séu þau sömu er augljós. □

Athugasemd. Fyrir föll $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ þ.a. f sé Riemann-heildanlengt yfir sérhvert takmarkað bil í $\mathbb{R}$ má *stundum* skilgreina *óeiginlegt* Riemann-heildi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx := \lim_{r\to+\infty}\int_0^r f(x)\, dx + \lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^0 f(x)\, dx,$$

nefnilega, ef þessi markgildi eru bæði til. Óeiginlega Riemann-heildið getur verið til án þes að fallið sé Lebesgue-heildanlegt: Ef f er Lebesgue-heildanlegt, þá er $|f|$ það líka, en óeiginlega heildið $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ getur verið til án þess að $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ sé það. En ef f og $|f|$ hafa óeiginleg Riemann-heildi, þá er f Lebesgue-heildanlegt, og Lebesgue-heildið er það sama og Riemann-heildið.

Dæmi 4.25. Látum p vera rauntölu, $p > -1$, og athugum $f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = x^p$. Setjum $f_n := f \cdot \chi_{[1/n,1]}$ fyrir $n \geq 2$. Þá er (f_n) vaxandi runa sem stefnir á f; f_n er heildanlegt og

$$\int_0^1 f_n\,dx = \int_{1/n}^1 x^p\,dx = \frac{1}{p+1}(1-(1/n)^{p+1})$$

og þar eð $p > -1$ stefnir þetta á $1/(p+1)$ þegar $n \to +\infty$, svo að skv. Levi er f heildanlegt og heildið er $1/(p+1)$. Setjum

$$F(p) := \int_0^1 x^p\,dx = \frac{1}{p+1}.$$

Sýnum að deilda má F með því að deilda undir heildinu m.t.t. p: Athugum að

$$\frac{\partial^n}{\partial p^n}(x^p) = \frac{\partial^n}{\partial p^n}(e^{p\log x}) = x^p \log^n x.$$

Látum $a > b > -1$ vera föst og $n \in \mathbb{N}$. Fyrir öll $p \geq a$ og öll $x \in]0,1]$ er

$$x^{p-b}|\log x|^n \leq x^{a-b}|\log x|^n$$

og $g(x) := x^{a-b}|\log x|^n$ er samfellt á $]0,1]$ og vegna $a > b$ er $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$; þar með er g Riemann-heildanlengt á $[0,1]$ ef við setjum $g(0) := 0$ og því Lebesgue-heildanlegt; það er takmarkað af fasta $C = C(a,b,n)$; höfum

$$|x^p \log^n(x)| \leq Cx^b, \quad \forall\, p \geq a.$$

Fallið $x \mapsto Cx^p$ er heildanlegt á $]0,1]$. Notum setninguna um deildun undir heildi n sinnum og fáum

$$F^{(n)}(p) = \int_0^1 x^p \log^n x\,dx$$

fyrir öll $p > a$; en a má vera hvaða tala sem vera skal þ.a. $a > -1$; svo þetta gildir fyrir öll $p > -1$. Nú er líka auðvelt að deilda $F(p) = \frac{1}{1+p}$ beint. Fáum þá

$$\int_0^1 x^p \log^n x\,dx = (-1)^n \frac{n!}{(p+1)^{a+1}}$$

fyrir öll $p > -1$ og öll n úr $\mathbb{N}$. Fyrir öll $x \in]0,1]$er

$$\frac{\log x}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \log x.$$

Hins vegar er óeiginlega Riemann-heildið $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ samleitið, því'að með hlutheildun fæst

$$\int_1^r \frac{\sin x}{x}\, dx = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_1^r - \int_1^r \frac{\cos x}{x^2}\, dx$$

og $|(\cos x)/x| \leq 1/x^2$, og $1/x^2$ er heildanlegt yfir $[1, +\infty[$, svo að $\lim_{r\to+\infty} \int_1^r \frac{\sin x}{x}\, dx$ er til og þá líka

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx := \lim_{r\to+\infty} \int_0^r \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Ekki er til einfalt stofnfall fyrir $(\sin x)/x$, en tökum eftir að fyrir fast $t > 0$ er

$$f(x,t) := e^{-tx}\frac{\sin x}{x}$$

heildanlegt fall af x yfir $[0, +\infty[$, því að fyrir $x \geq 1$ er $|f(x,t)| \leq e^{-tx}$ og $x \mapsto e^{-tx}$ er heildanlegt yfir $[0, +\infty[$. Setjum

$$F(t) := \int_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Nú höfum við

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = -e^{-tx}\sin x$$

og fyrir fast $a > 0$ og öll $t \in [a, +\infty[$ að

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq e^{-ax}.$$

Setning segir að við megum deilda undir heildinu:

$$F'(t) = -\int_0^{+\infty} e^{-tx}\sin x\, dx,$$

þetta heildi er auðvelt að reikna, því að $x \mapsto e^{-tx}\sin x$ hefur stofnfall $x \mapsto -e^{-tx}(t\sin x + \cos x)/(1+t^2)$, svo að

$$F'(t) = -\frac{1}{1+t^2}$$

og þá $F(t) = C - \arctan x$, þar sem C er fasti. Til að finna C tökum við eftir að $f_n(x) := e^{-nx}\frac{\sin x}{x}$ gildir

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = 0, \quad |f_n(x)| \leq e^{-x}, \quad \text{ef } n \geq 1,$$

svo að skv. setningu um yfirgnæfða samleitni fæst

$$\lim_{n\to+\infty} F(n) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx = 0$$

svo að $0 = \lim_{n\to-\infty}(C - \arctan n) = C - \pi/2$, svo að

$$F(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan x.$$

Viljum nú sýna að $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{t\to 0} F(t)$, en *getum ekki* notað setningu um yfirgnæfða samleitni, því að $(\sin x)/x$ er ekki heildanlegt. En með hlutheildun fæst

$$\int e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx = -\frac{e^{-tx}}{x}\cdot\frac{t\sin x + \cos x}{1+t^2} - \int \frac{e^{-tx}}{x^2}\cdot\frac{t\sin x + \cos x}{1+t^2}\,dx$$

þar sem

$$\left| e^{-tx}\cdot\frac{t\sin x + \cos x}{1+t^2}\right| \le \frac{t+1}{t^2+1} < 2$$

svo að

$$\left|\int_r^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| \le \frac{4}{r}$$

fyrir öll $t \ge 0$. Látum nú $\varepsilon > 0$ vera gefið. Finnum $r > 0$ þannig að $4/r < \varepsilon/4$. Nú er $(\sin x)/x$ heildanlegt yfir $[0, r]$ og þar er $f(x,t)$ yfirgnæft af $|(\sin x)/x|$, svo að fyrir fast r er

$$\lim_{t\to 0}\int_0^r e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^r \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Við getum þá fundið $t > 0$ þannig að

$$\left|\int_0^r \frac{\sin x}{x}\,dx - \int_0^r e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{4},$$

og að auki þ.a.

$$\left|\frac{\pi}{2} - F(t)\right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Þar eð $F(t) = \int_0^r e^{-tx}(\sin x)/x\,dx + \int_r^{+\infty} e^{-tx}(\sin x)/x\,dx$ fæst

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx - \frac{\pi}{2}\right| \\
&\le \left|\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx - \int_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| + \left|F(t) - \frac{\pi}{2}\right| \\
&\le \left|\int_0^{r}\frac{\sin x}{x}\,dx - \int_0^{r} e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| \\
&\quad + \left|\int_r^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| + \left|\int_r^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx\right| + \left|F(t) - \frac{\pi}{2}\right| \\
&\le \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Þar eð þetta gildir fyrir öll $\varepsilon > 0$ fæst

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Rifjum upp: Ef $p, q > 1$ og $1/p + 1/q = 1$, þá er

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{4.1}$$

fyrir öll $a, b \geq 0$.

Skilgreining 4.26. Látum f vera mælanlegt fall á málrúmi X þ.a. $|f|^p$ sé heildanlegt, $p > 1$ fast. Setjum

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}.$$

Fáum:

Setning 4.27 (Hölder)**.** *Látum $p, q \in \mathbb{R} > 1$, þ.a. $1/p + 1/q = 1$. Fyrir öll mælanleg föll $f, g : X \to \mathbb{C}$ á málrúmi X er*

$$\int_X |fg| \, d\mu \leq \left(\int_X |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_X |g|^q\right)^{1/q},$$

m.ö.o.

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

(Hér er $(+\infty)^{1/p} = (+\infty)^{1/q} := +\infty$).

Sönnun. Þetta er augljóst ef $\|f\|_p = 0$ eða $\|g\|_q = 0$, því þá er $fg = 0$ næstum allsstaðar; eins ef $\|f\|_p = +\infty$ eða $\|g\|_q = +\infty$. Getum gert ráð fyrir að

$$a := \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}, \quad b := \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$$

séu vel skilgreindar tölur í $[0, +\infty[$ fyrir öll x. Ójafnan (4.1) gefur

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} \leq \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p} + \frac{|g(x)|^q}{q\|g\|_q}.$$

Heildum yfir X og fáum

$$\frac{1}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} \int_X |fg| \, d\mu \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Margföldum nú báðar hliðar með $\|f\|_p \|g\|_q$. □

Fyrir $p = q = 2$ fæst *Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky*-ójafnan: Fyrir mælanleg föll $f, g : X \to \mathbb{C}$ er

$$\int_X |fg| \, d\mu \leq \sqrt{\int_X |f|^2 \, d\mu} \cdot \sqrt{\int_X |g|^2 \, d\mu}.$$

Setning 4.28 (Minkowski-ójafnan)**.** *Látum* $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$. *Fyrir öll mælanleg föll* $f, g : X \to \mathbb{C}$ *á málrúmi* X *gildir*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Sönnun. Augljóst ef $p = 1$ eða ef vinstri hliðin er 0. Að öðrum kosti má skrifa

$$|f+g|^p \leq |f+g|^{p-1}(|f|+|g|)$$

svo að

$$\begin{aligned}\int_X |f+g|^p \, d\mu &\leq \int_X |f||f+g|^{p-1} \, d\mu + \int_X |g||f+g|^{p-1} \, d\mu \\ &\leq \|f\|_p \|(f+g)^{p-1}\|_q + \|g\|_p \|(f+g)^{p-1}\|_q \\ &\leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \left(\int_X |f+g|^p \right)^{1/q}\end{aligned}$$

þar sem q er þannig að $1/p + 1/q = 1$, þ.e. $(p-1)q = p$, svo að

$$\|f+g\|_p = \left(\int_X |f+g|^p \, d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int_X |f+g|^p \, d\mu \right)^{1-1/q} \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

□

Skilgreining 4.29. Látum $p \in \mathbb{R}$, $p > 1$ og

$$\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(X) = \mathcal{L}^p(\mathbb{C}, \mathcal{A}, \mu)$$

vera mengi allra falla $X \to \mathcal{C}$ þannig að fallið $|f|^p$ sé heildanlegt, þ.e.

$$\int_X |f|^p \, d\mu < +\infty$$

og táknum með

$$L^p = L^p(X) = L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$$

mengi allra jafngildisflokka falla úr $\mathcal{L}^p$ m.t.t. jafngildisvenslanna

$$f \sim g \quad \text{þ.þ.a.a.} \quad f = g \text{ næstum allsstaðar.}$$

Athugasemd. Skrifum oft $f \in L^p$ þegar við meinum $f \in \mathcal{L}^p$; þ.e. við notum gjarnan sama bókstaf fyrir fallið og jafngildisflokkinn.

Fáum nú:

Setning 4.30. *Mengið* L^p *er línulegt rúm yfir* $\mathbb{C}$ *og vörpunin* $L^p \to \mathbb{R}, f \mapsto \|f\|_p$ *er staðall á* L^p.

Athugasemd. Staðall á línulegu rúmi er sértilvik af því sem kallast stundum *núllfirð*: Látum G vera víxlgrúpu með aðgerð sem við skrifum sem samlagningu. *Núllfirð* á G er vörpun $G \to \mathbb{R}$ þannig að gildi:

(1) $\|x\| \geq 0$ fyrir öll $x \in G$; og $\|x\| = 0$ þ.þ.a.a. $x = 0$.

(2) $\|-x\| = \|x\|$ fyrir öll x úr G.

(3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ fyrir öll $x, y \in G$.

Núllfirð gefur af sér firð d á G með $d(x,y) = \|x-y\|$; hún er *hliðrunartrygg*, sem þýðir að $d(x+z, y+z) = d(x,y)$ fyrir öll x, y, z í G. Sérhver hliðrunartrygg firð d á G kemur frá núllfirð, nefnilega $\|x\| = d(x,0)$. Segjum að röð $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ af stökum í G sé *samleitin* ef runan (s_k) af hlutsummunum $s_k := \sum_{j=0}^{k} a_j$ er samleitin m.t.t. firðarinnar; en *alsamleitin* ef $\sum_{k=0}^{+\infty} \|x_k\| < +\infty$.

Höfum þá:

Setning 4.31. *Víxlgrúpa G er fullkomið firðrúm m.t.t. hliðrunartryggrar firðar þ.þ.a.a. sérhver alsamleitin röð í G sé samleitin.*

Sönnun. G.r.f. að G sé fullkomið firðrúm og að röð $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ sé alsamleitin; fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ er til k_0 þ.a. $\sum_{k=k_0}^{+\infty} \|a_k\| < \varepsilon$. Látum $k \geq j \geq k_0$; þá er

$$\|s_k - s_j\| = \left\| \sum_{i=j+1}^{k} a_i \right\| \leq \sum_{i=j+1}^{k} \|a_i\| \leq \sum_{i=k_0}^{+\infty} \|a_i\| < \varepsilon,$$

svo að runan (s_k) af hlutrunununum er *Cauchy*-ruan og því samleitin. Gerum nú ráð fyrir að sérhver alsamleitin röð í G sé samleitni og látum $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vera *Cauchy*-runu í G. Fyrir sérhvert $i \in \mathbb{N}$ er þá til tala $l_i \in \mathbb{N}$ þ.a. $\|u_k - u_j\| < \frac{1}{2^{i+1}}$ fyrir öll $k, j \geq l_i$. Búum nú til stranglega vaxandi runu $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ með þrepun þ.a. $k_0 = l_0$ og $k_{i+1} = \max\{k_i, l_i, l_{i+1}\}$. Þá er $k_i, k_{i+1} \geq l_i$ fyrir öll i og því $\|u_{k_{i+1}} - u_{k_i}\| \leq \frac{1}{2^{i+1}}$. Það þýðir að röðin $\sum_{i=0}^{+\infty}(u_{k_{i+1}} - u_{k_i})$ er alsamleitin og því samleitin. En þetta er kíkisröð; höfum því

$$\sum_{i=0}^{j}(u_{k_{i+1}} - u_{k_i}) = u_{k_{j+1}} - u_{k_0}$$

svo að runan (u_{k_i}) er samleitin hlutruna í rununni (u_k). En að Cauchy-runa sem hefur samleitna hlutrunu er sjálf samleitin: Látum $\varepsilon > 0$ vera gefið; látum $u = \lim_{i\to+\infty} u_{k_i}$, finnum i_0 þ.a. $\|u - u_{k_i}\| \leq \varepsilon/2$ fyrir $i \geq i_0$ og $\|u_k - u_j\| < \varepsilon/3$ e f$k, j \geq i_0$. Fyrir $k \geq i_0$ veljum við $i > i_0$ þ.a. $k_i > i_0$; þá er

$$\|u - u_k\| \leq \|u - u_{k_i}\| + \|u_{k_i} - u_k\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Þar með er $\lim_{k\to+\infty} u_k = u$. □

Setning 4.32. *Rúmið L^p er fullkomið m.t.t. firðarinnar sem staðallinn $L^p \to \mathbb{R}, f \mapsto \|f\|_p$, gefur af sér.*

Sönnun. Samkvæmt ofansögðu nægir að sýna að alsamleitin röð í L^p sé samleitin. Látum (f_k) vera runu af tvinnföllum á X þ.a. $\sum_{k=0}^{+\infty} \|f_k\|_p < +\infty$. Setjum $g_k := \sum_{j=0}^{k} |f_k|$ og $g := \lim_{k\to+\infty} g_k : X \to [0, +\infty]$. Við höfum $\|g_k\|_p \leq \sum_{j=0}^{k} \|f_j\|_p \leq B$, svo að skv. Levi er

$$\int_X g^p \, d\mu = \lim_{k\to+\infty} \int_X g_k^p \, d\mu = \lim_{k\to+\infty} \|g_k\|_p^p \leq B^p < +\infty$$

svo að $g \in L^p$. Þá er $g < +\infty$ næstum allsstaðar; svo að $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ er alsamleitin næstum allsstaðar. Setjum

$$f := \begin{cases} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k, & g(x) < +\infty, \\ 0, & g(x) = +\infty. \end{cases}$$

Þá er $f : X \to \mathbb{C}$ vel skilgreint fall og $|f| < g$, svo að $f \in L^p$ og fyrir öll $k \in \mathbb{N}$ er

$$\left| f - \sum_{j=0}^{k} f_j \right|^p \leq (g + g)^p = (2g)^p \in L^1$$

svo að skv. setningu Lebesgues um yfirgnæfða samleitni er

$$\lim_{k\to+\infty} \left\| f - \sum_{j=0}^{k} f_j \right\|^p = \lim_{k\to+\infty} \int_X \left| f - \sum_{j=0}^{k} f_j \right|^p \, d\mu = 0$$

og því

$$\lim_{k\to+\infty} \left\| f - \sum_{j=0}^{k} f_j \right\|^p = 0,$$

sem þýðir að röðin $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ er samleitin í L^p með markgildi f. □

Athugasemd. Skoðum nú sérstaklega tilfellið $p = 2$. Skv. Hölder-ójöfnu, sem verður að Cauchy-Schwarz ójöfnu í þessu tilfelli, er

$$\int_X |fg| \, d\mu \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 < +\infty$$

fyrir $f, g \in L^2$, það þýðir að fallið $f\bar{g}$ er heildanlegt, og viðgetum skilgreint

$$\langle f, g \rangle := \int_X f\bar{g} \, d\mu.$$

Setning 4.33. *Þetta skilgreinir* hermískt innfeldi *á rúmið L^2, það þýðir:*

(1) *Vörpunin $L^2 \times L^2 \to \mathbb{C}, (f, g) \mapsto \langle f, g \rangle$ er* hálflínuleg*, þ.e. línuleg í fyrri breytistærðinni en andlínuleg í seinni, þ.e.*

$$\begin{aligned} \langle f_1 + f_2, g \rangle &= \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle \\ \langle f, g_1 + g_2 \rangle &= \langle f, g_1 \rangle + \langle f, g_2 \rangle \\ \langle cf, g \rangle &= c\langle f, g \rangle \\ \langle f, cg \rangle &= \bar{c}\langle f, g \rangle \end{aligned}$$

fyrir öll f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 í L^2 og $c \in \mathbb{C}$.

(2) Hún er hermískt samhverf, *þ.e.*

$$\langle g, f\rangle = \overline{\langle f, g\rangle}.$$

(3) Fyrir öll $f \in L^2$ er $\langle f, f\rangle \geq 0$; og $\langle f, f\rangle = 0$ þ.þ.a.a. $f = 0$.

Við höfum

$$\|f_2\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}.$$

Athugasemd. Fyrir gefið $\mathbb{C}$-línulegt rúm V ásamt vörpun $V \times V \to \mathbb{C}, (x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ þ.a. skilyrðum (1-3) að ofan er fullnægt, fæst staðall $V \mapsto \mathbb{R}, x \mapsto \|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$; og við fáum *Cauchy-Schwarz* ójöfnu

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

fyrir öll $x, y \in V$.

Skilgreining 4.34. *Hilbert-rúm* er $\mathbb{C}$-línulegt rúm með hermísku innfeldi þ.a. firðin sem samsvarandi staðall gefur af sér gerir rúmið að fullkomnu firðrúmi.

Höfum:

Setning 4.35. *L^2 er Hilbert-rúm.*

Athugasemd. Skoðum sérstaklega talningarmálið τ á $\mathbb{N}$. Þá er rúmið

$$\ell^2 = \ell^2_{\mathbb{C}} = L^2(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \tau)$$

mengi allra runa $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ þ.a.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|^2 < +\infty.$$

Fyrir $a = (a_k)$ og $b = (b_k)$ er

$$\langle a, b\rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \bar{b}_k$$

og Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky-ójafnan verður

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k^2|} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} |b_k^2|}.$$

Eins má athuga talningarmálið á $\mathbb{Z}$, sem gerir mengið af öllum tvöföldum runum $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ þ.a.

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |a_k|^2 < +\infty,$$

þetta rúm er líka táknað $\ell^2_{\mathbb{C}}$, því að gagntæk vörpun $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ gefur af sér einsmótun L^2-rúmanna.

14. mars

Kafli 5

Fourier-raðir

Skilgreining 5.1. *Fourier-röð* er fallaröð af gerðinni

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

þar sem $a_n, b_n \in \mathbb{C}$. Við segjum ekkert um samleitni raðarinnar í bili, heldur lítum á hana sem runu af hlutsummunum $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$, þar sem

$$s_N(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Þegar við segjum að röðin sé samleitin í einhverjum skilningi, þá meinum við að fallarunan $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ sé þannig samleitin.

Við getum líka skrifað

$$s_N(x) := \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$$

þar sem

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

fyrir $n \geq 0$ (setjum alltaf $b_0 = 0$). Stuðlarnir c_n ákvarða stuðlana a_n og b_n, við höfum að

$$a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

Gerum ráð fyrir að röðin sé samleitin í sérhverjum punkti úr $\mathbb{R}$, þá skilgreinir hún fall f á $\mathbb{R}$,

$$f(x) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} := \lim_{N\to+\infty} s_N(x).$$

Vegna þess að föllin $x \mapsto e^{inx}$ eru öll lotubundin með lotu 2π verður f lotubundið með lotu 2π. Við höfum

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

fyrir öll $x \in \mathbb{R}$. Gerum ráð fyrir að f sé heildanlegt yfir $[-\pi, \pi]$ (m.t.t. λ) og að við megum skipta um röð á summu og heildi; t.d. ef samleitnin er í jöfnum mæli á $[-\pi, \pi]$, eða almennar yfirgnæfð af heildanlegu falli á $[-\pi, \pi]$; þá fáum við að

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i(k-n)x}\,dx \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)x}\,dx \\
&= 2\pi c_n
\end{aligned}$$

því að

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}\,dx = \begin{cases} 2\pi, & m = 0, \\ 0, & m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{cases}$$

því að fyrir $m \neq 0$ hefur $x \mapsto e^{imx}$ stofnfallið $\frac{1}{im}e^{imx}$, sem tekur sömu gildi í $\pm\pi$. Við höfum

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx.$$

Látum nú f vera *eitthvert* heildanlegt fall á $[-\pi, \pi]$, þá er $x \mapsto f(x)e^{-inx}$ líka heildanlegt og við getum skilgreint stuðla c_n með þessari formúlu.

Skilgreining 5.2. Látum $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vera lotubundið fall með lotu 2π þ.a. f sé heildanlegt yfir $[-\pi, \pi]$ m.t.t. *Lebesgue*-málsins á $\mathbb{R}$. Talan

$$\hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx$$

kallast *n-ti Fourier-stuðull* fallsins f og röðin

$$\sum_{n=+\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)e^{inx}$$

kallast *Fourier-röð* fallsins f.

Athugasemd. Samsvarandi stuðlar a_n, b_n eru gefnir með

$$\begin{aligned}
a_n &= \hat{f}(n) + \hat{f}(-n) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \\
b_n &= i(\hat{f}(n) - \hat{f}(-n)) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx.
\end{aligned}$$

Athugasemd. Fourier-röð falls þarf ekki að vera samleitin í neinum punkti. Fall getur ekki ákvarðast ótvírætt af Fourier-röð sinni, því að föll sem eru eins næstum allsstaðar hafa sömu Fourier-röð. Hins vegar gildir

Setning 5.3. *Látum f, g vera lotubundin með lotu 2π og heildanleg yfir $[-\pi, \pi]$. Ef f, g hafa sömu Fourier-stuðla, þá er $f = g$ næstum allsstaðar.*

Hjálparsetning 5.4. *Látum $f \in L^1_{\mathbb{C}}([-\pi, \pi])$ vera þannig að*

$$\int_{-\pi}^{t} f(x)\, dx = 0$$

fyrir öll $t \in [-\pi, \pi]$. Þá er $f = 0$ næstum allsstaðar.

Sönnun á hjálparsetningu. Fyrir $s, t \in [-\pi, \pi]$, $s < t$, er

$$\int_{]s,t[} f\, dx = \int_{-\pi}^{t} f\, dx - \int_{-\pi}^{s} f\, dx = 0,$$

þar sem sérhvert opið mengi er teljanlegt sammengi af opnum bilum er

$$\int_U f\, dx = 0$$

fyrir öll opin hlutmengi U í $[-\pi, \pi]$. Sýnum að hið sama gildir fyrir mælanleg mengi í $[-\pi, \pi]$. Látum $A \subset [-\pi, \pi]$ vera mælanlegt og $\varepsilon > 0$, þá er til opið mengi U þ.a. $A \subset U$ og $\lambda(U) \leq \lambda(A) + \varepsilon$. Höfum þá minnkandi runu (U_n) af opnum mengjum þ.a. $A \subset U_n$ og $\lim_{n\to+\infty} \lambda(U_n) = \lambda(A)$; því er $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ mælanlegt; $A \subset B$ og $B \setminus A$ er núllmengi svo að

$$\int_A f(x)\, dx = \int_B f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f\chi_B\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f\chi_{U_n}\, dx = 0.$$

Með því að leysa upp í raunhluta og þverhluta má gera ráð fyrir að f sé raungilt. Setjum $A^+ := \{x : f(x) > 0\}$, $A^- := \{x : f(x) < 0\}$. Þá eru A^+, A^- mælanleg og $\int_{[-\pi,\pi]} f^+\, dx = \int_{A^+} f\, dx = 0$; eins er $\int_{[-\pi,\pi]} f^-\, dx = 0$, svo að

$$\int_{[-\pi,\pi]} |f|\, dx = \int_X f^+ + \int_X f^- = 0,$$

en þá er $f = 0$ næstum allsstaðar. $\square$

Sönnun á setningu 5.3. Okkur nægir að sýna: Ef $f \in \mathcal{L}^1([-\pi, \pi])$ og $\hat{f}(n) = 0$ fyrir öll $n \in \mathbb{Z}$, þá er $f = 0$ næstum allsstaðar. En ef $\hat{f}(n) = 0$ fyrir öll n, þá fæst fyrir $s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$, þar sem c_k eru fastar, að

$$\int_{-\pi}^{\pi} f s_n\, dx = \sum_{k=-n}^{n} c_k \hat{f}(-k) = 0.$$

Látum $t \in [-\pi, \pi]$. Þá má finna runu (g_n) af samfelldum föllum, línulegum á köflum, þ.a. $0 \leq g_n \leq 1$, $g(-\pi) = g(\pi) = 0$ og $\lim_{n\to+\infty} g_n = \chi_{]-\pi,t[}$; þá má framlengja g í lotubundið fall á $\mathbb{R}$ með lotu 2π. Skv. hjálparsetningu, sem við sönnum næst, þá stefnir Fourier-röð fallsins (g_n) á g_n í jöfnum mæli á öllu $\mathbb{R}$; því má finna hlutsummu hennar sem p_n þ.a. $|p_n - s_n| < \frac{1}{n}$. Þá gildir

$$f\chi_{[-\pi,t[} = \lim_{n\to+\infty} f \cdot p_n$$

á $[-\pi, \pi]$ og $(fp_n) \leq |f|(|g_n| + \frac{1}{n}) \leq 2|f|$, svo að samkvæmt setningu Lebesgue um yfirgnæfða samleitni er

$$\int_{-\pi}^{t} f\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f\chi_{]-\pi,t[}\,dt = \lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi} fp_n\,dx = 0;$$

skv. hjálparsetningu er þá $f = 0$ næstum allsstaðar. $\square$

Hér átti eftir að sanna eftirfarandi:

Hjálparsetning 5.5. *Ef g er lotubundið með lotu 2π, samfellt og $g|_{[-\pi,\pi]}$ er línulegt á köflum, þá stefnir Fourier-röð g á g í jöfnum mæli á $\mathbb{R}$.*

15. mars

Byrjum hins vegar á því að reikna dæmi:

Dæmi 5.6. Skilgreinum fall $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ með þeim skilyrðum að

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & -\pi < x < \pi, \\ 0, & x = -\pi \end{cases}$$

og f er lotubundið með lotu 2π. Við höfum $\hat{f}(0) = 0$, því að f er oddstætt á $]-\pi, \pi[$ og fyrir $n \neq 0$ er

$$\begin{aligned}
\hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2}e^{-inx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{x}{2in}e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi in}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\,dx \\
&= -\frac{1}{4\pi in}(\pi e^{-\pi in} + \pi e^{\pi in}) + 0 \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{2in}.
\end{aligned}$$

Hlutsummur Fourier-raðarinnar verða

$$s_N(x) = \sum_{\substack{n=-N \\ n\neq 0}}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{2in}e^{inx} = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

Athugum að

$$\frac{1}{in}e^{inx} = \int_0^x e^{int}\,dt + \frac{1}{in}.$$

Nú er

$$\sum_{\substack{n=-N\\n\neq 0}}^{N} \frac{1}{in} = 0,$$

svo að við fáum

$$\begin{aligned} s_N(x) &= \int_0^x \sum_{\substack{n=-N\\n\neq 0}}^{N} \frac{1}{2}(-1)^{n+1}e^{int}\,dt \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\int_0^x \sum_{n=-N}^{N}(-1)^n e^{int}\,dt. \end{aligned}$$

Fyrir $-\pi < t < \pi$ er

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^{N}(-1)^n e^{int} &= \sum_{n=0}^{2N}(-1)^{n-N}e^{i(n-N)t} \\ &= (-1)^N e^{-iNt}\sum_{n=0}^{2N}(-e^{it})^n \\ &= (-1)^N e^{-iNt}\frac{1-(-1)^{2N+1}e^{i(2N+1)t}}{1+e^{it}} \\ &= (-1)^N e^{-iNt-\frac{it}{2}}\frac{1+e^{i(2N+1)t}}{e^{-\frac{it}{2}}+e^{\frac{it}{2}}} \\ &= (-1)^N \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})t}+e^{-i(N+\frac{1}{2})t}}{e^{-\frac{it}{2}}+e^{\frac{it}{2}}} \\ &= (-1)^N \frac{\cos((N+\frac{1}{2})t)}{\cos\frac{t}{2}}. \end{aligned}$$

Látum $0 < a < \pi$. Fyrir $|x| \le a$ er

$$\begin{aligned} &\left|\frac{x}{2} - s_N(x)\right| \\ &\le \left|\frac{1}{2}\int_0^x \frac{\cos((N+\frac{1}{2})t)}{\cos\frac{t}{2}}\,dt\right| \\ &\le \frac{1}{2}\left|\left[\frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{(N+\frac{1}{2})\cos\frac{t}{2}}\right]_0^x + \frac{1/2}{N+1/2}\int_0^x \sin((2N+1)t)\frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos^2\frac{t}{2}}\,dt\right| \\ &\le \frac{1}{2N+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\cos\frac{a}{2}} + \frac{a}{2\cos^2\frac{a}{2}}\right) \end{aligned}$$

svo að

$$\lim_{N\to+\infty} s_N(x) = \frac{x}{2}$$

í jöfnum mæli á $[-a, a]$ fyrir sérhvert a úr $]0, \pi[$. Einnig er $s_N(-\pi) = s_N(\pi) = 0$ fyrir öll N, svo að $\lim_{N\to+\infty} s_N(x) = f(x)$ fyrir öll $x \in \mathbb{R}$, þ.e.

$$f(x) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2in} e^{inx} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

Þar sem samleitnin er í jöfnum mæli á $[-a, a]$ fyrir öll a úr $]0, \pi[$, þá má heilda frá 0 til x, $x \in]-\pi, \pi[$, og skipta um rö ðá summu og heildi; svo að fyrir $x \in]-\pi, \pi[$ er

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{4} &= \int_0^x \frac{t}{2}\,dt \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{2in} \int_0^x e^{int}\,dt \\
&= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2(in)^2}(e^{inx} - 1) \\
&= \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2} e^{inx} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.
\end{aligned}$$

En þessi röð er alsamleitin í jöfnum mæli á öllu $\mathbb{R}$ og skilgreinir því samfellt fall, svo að jafnan gildir fyrir x á *lokaða* bilinu $[-\pi, \pi]$; og við höfum

$$F(x) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2} e^{inx} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

þar sem að F ákvarðast af því að $F(x) = \frac{x^2}{4}$ fyrir $x \in [-\pi, \pi]$ og F er lotubundið með lotu 2π. Setjum $x = \pi$; fáum

$$\frac{\pi^2}{4} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

En nú er

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} 1n^2.$$

Fáum

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Skoðum aftur fallið $f(x)$, sem hefur stökkpunkta í punktum $x_n := \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Höfum

$$f(x_n) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_n+} f(x) + \lim_{x\to x_n-} f(x)\right).$$

Látum nú $s, t \in [-\pi, \pi[$ og setjum

$$g(x) := f(x-s) - f(x-t).$$

Fallið er þrepafall á $[-\pi, \pi]$ og lotubundið með lotu 2π. Fallið g fullnægir áfram skilyrðinu

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(\lim_{t\to x-} g(t) + \lim_{t\to x+} g(t).\right)$$

Auðvelt er að reikna Fourier-röð fallsins g útfrá Fourier-röð falsins f: Ef $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$, þá er

$$f(x-s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-ins} e^{inx}.$$

Fourier-röð fallsins g er allsstaðar samleitin, g er markgildi hennar, og samleitnin er í jöfnum mæli á sérhverju lokuðu bili sem inniheldur engan stökkpunkt fallsins g. En sérhvert fall sem fæst úr þrepafalli á $[-\pi, \pi[$ með því að framlengja það í lotubundið fall með lotu 2π er línuleg samantekt af föstu falli og endanlega mörgum föllum af sama tagi og g (þ.e. fyrir ólík s, t), *nema* í stökkpunktum. Köllum slíkt fall *lotubundið þrepafall.*

Fáum

Setning 5.7. *Látum h vera lotubundið þrepafall með lotu 2π. Þá er Fourier-röð fallsins h samleitin á öllu $\mathbb{R}$, samleitnin er í jöfnum mæli á sérhverju lokuðu bili sem inniheldur ekki stökkpunkt fallsins h. Röðin stefnir á h í öllum punktum nema stökkpunktunum, en í stökkpunkti x stefnir hún á*

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{t\to x-} h(t) + \lim_{t\to x+} h(t)\right).$$

19. og 21. mars

Á sama hátt fæst líka hjálparsetning 5.5, sem sagði að fall sem er lotubundið með lotu 2π, samfellt og línulegt á köflum, hefur Fourier-röð sem er alsamleitin í jöfnum mæli á öllu $\mathbb{R}$ og stefnir á fallið í sérhverjum punkti. Þetta þurfti til þess að ljúka sönnun setningar 5.3.

Athugasemd. Varðandi fyrri skilgreiningu, þá er venja að kalla röð af gerðinni

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

hornafallaröð, en nota orðið *Fourier-röð* einungis um slíkar raðir

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{inx},$$

sem eru skilgreindar út frá Fourier-stuðlum gefins falls f. Síðan er flókið verkefni að kanna, hvaða hornafallaraðir eru á annað borð Fourier-raðir.

Athugasemd. (1) Hér að ofan þurftum við að nota að skipta mætti um röð á heildi og summu fyrir runur sem eru samleitnar í jöfnum mæli á takmörkuðu bili. Látum almennar $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vera málrúm þ.a. $\mu(X) < +\infty$ og (f_k) vera runu af heildanlegum föllum sem stefnir á fall f í jöfnum mæli á X, þá er f heildanlegt og

$$\lim_{k\to+\infty} \int_X f_k \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Til að sjá það, athugum við að til er k_0 þ.a. $|f - f_{k_0} \leq 1$ allsstaðar og þá $|f| = |f - f_{k_0} + f_{k_0}| \leq 1 + |f_{k_0}|$, svo að f er heildanlegt og við höfum

$$\left| \int_X f \, d\mu - \int_X f_k \, d\mu \right| \leq \int_X |f - f_k| \, d\mu \leq \mu(X) \sup_{x\in X} |f(x) - f_k(x)| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

Ekki má sleppa forsendunni $\mu(X) < +\infty$: Athugum t.d. $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_k := \frac{1}{k+1} \chi_{[0,k+1]}.$$

Þá er $\int_X f_k \, d\lambda = 1$ fyrir öll k, en (f_k) stefnir á 0 í jöfnum mæli á $\mathbb{R}$.

(2) Látum f vera samfellt fall á $\mathbb{R}$ með lotu 2π og g.r.f. að Fourier-röð þess sé samleitin í jöfnum mæli á öllu $\mathbb{R}$. Þá stefnir hún allsstaðar á f. Til að sjá það setjum við

$$g(x) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{inx}.$$

Skv. (1) er þá

$$\begin{aligned}
\hat{g}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-inx} \, dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{i(k-n)x} \, dx \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)x} \, dx \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(x) \delta_n \\
&= \hat{f}(n),
\end{aligned}$$

fyrir öll n. Skv. setningu er $f = g$ næstum allsstaðar. En f og g eru bæði samfelld, svo $f = g$.

(3) Látum f vera mælanlegt fall á málrúmi X þ.a. $\mu(X) < +\infty$. Skv. Hölder-ójöfnu er fyrir $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$

$$\|f\|_1 = \int_X |f| \, d\mu = \int_X |f \cdot 1| \, d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|1\|_q = \|f\|_p \cdot (\mu(X))^{1/q}.$$

Við sjáum að

$$\mathcal{L}^p(X) \subset \mathcal{L}^1(X)$$

fyrir öll $p \geq 1$. Sér í lagi, ef $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ er mælanlegt, lotubundið með lotu 2π og $|f|^p$ er heildanlegt yfir $[-\pi, \pi]$, þá er f einnig heildanlegt yfir $[-\pi, \pi]$ og Fourier-röð f vel skilgreind. *Athugum sérstaklega* tilvikið $p = 2$. Við táknum með $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ mengi allra lotubundinna tvinnfalla með lotu 2π þ.a. $|f|^2$ sé heildanlegt yfir $[-\pi, \pi[$ og með $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ samsvarandi *Hilbert-rúm* af jafngildisflokkum $[f]$, þa rsem föll eru jafngild ef þau eru eins næstum allsstaðar. Skrifum venjulega f í stað $[f]$. Rithátturinn kemur af því að við lítum á föllin f sem föll á deildagrúpunni $\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$: Ef $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ er náttúrlega ofanvarpið og $g : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ er fall, þá er $f := g \circ \phi$ lotubundið með lotu 2π og öll föll með lotu 2π fást þannig. Til er einsmótun frá $\mathbb{U}$ til $\mathbb{T}$. Almennt kallast mælanlegt fall á málrúmi X þ.a. $|f|^2$ sé heildanlegt *ferningsheildanlegt* fall á X. Við notum á $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ innfeldið

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\bar{g}\, d\lambda$$

og setjum til samræmis

$$\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 \, d\lambda \right)^{1/2}.$$

Veljum stuðulinn $\frac{1}{2\pi}$ þ.a. gildi:

Skilgreining 5.8. Fyrir $n \in \mathbb{Z}$ táknum við með

$$e_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

fallið þ.a. $e_n(x) = e^{inx}$; höfum þá

$$\bar{e}_n(x) = e_{-n}(x) = e^{-inx}$$

og

$$\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Fyrir $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ er

$$\hat{f}(n) = \langle f, e_n \rangle$$

og Fourier-röð fallsins f er því

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle f, e_n \rangle e_n.$$

Athugasemd. Við skilgreinum innfeldi og staðal á $\mathcal{L}^2(\mathbb{T})$ m.t.t. málsins $\frac{1}{2\pi}\lambda$, þar sem λ er Lebegue-málið.

Setning 5.9 (Riesz-Fischer). *Látum* $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *vera fjölskyldu af tvinntölum þ.a.*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 < +\infty,$$

þ.e. $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *er stak í* $\ell^2_{\mathbb{C}} = L^2(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}), \tau)$; *þá er röðin*

$$f := \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n$$

samleitin í $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ *og*

$$\hat{f}(n) = c_n$$

fyrir öll $n \in \mathbb{Z}$.

Sönnun. Setjum

$$s_n := \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k.$$

Fyrir $m > n > 0$ er

$$\begin{aligned}
\|s_n - s_m\|_2^2 &= \left\langle \sum_{n<|k|\le m} c_k e_k, \sum_{n<|j|\le m} c_j e_j, \right\rangle \\
&= \sum_{\substack{n<|k|\le m \\ n<|j|\le m}} c_k \bar{c}_j \langle e_k, e_j\rangle \\
&= \sum_{\substack{n<|k|\le m \\ n<|j|\le m}} c_k \bar{c}_j \delta_{kj} \\
&= \sum_{n<|k|\le m} |c_k|^2
\end{aligned}$$

og síðasta summan stefnir á 0 þegar $m, n \longrightarrow +\infty$. Þar með er (s_n) Cauchy-runa í $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ og því samleitin; köllum markgildið f. Við höfum fyrir $m \ge n$:

$$\langle s_m, e_n\rangle = \sum_{k=-m}^{m} c_k \langle e_k, e_n\rangle = c_n$$

og með Cauchy-Schwarz-ójöfnum fæst

$$\begin{aligned}
|\langle f, e_n\rangle - \langle s_m, e_n\rangle| &= |\langle f - s_m, e_k\rangle| \\
&\le \|f - s_m\|_2 \cdot \|e_m\|_2 \\
&= \|f - s_m\|_2 \\
&\xrightarrow[m\to+\infty]{} 0,
\end{aligned}$$

svo að $\hat{f}(n) = \langle f, e_n\rangle = c_n$ fyrir öll $n \in \mathbb{Z}$. □

Hjálparsetning 5.10. *Látum $f \in L^2_{\mathbb{C}}$ og setjum*

$$s_n = \sum_{k=-n}^{n} \langle f, e_k \rangle e_k.$$

Þá er $\|s_n\|_2 \leq \|f\|_2$ fyrir öll n og

$$\lim_{n \to +\infty} \|f - s_n\|_2 = 0.$$

Sönnun. Við höfum

$$\begin{aligned}
\langle f, s_n \rangle &= \left\langle f, \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e_k \right\rangle \\
&= \sum_{k=-n}^{n} \langle f, e_k \rangle \overline{\hat{f}(k)} \\
&= \sum_{k=-n}^{n} \left| \hat{f}(k) \right|^2
\end{aligned}$$

og

$$\langle s_n, s_n \rangle = \left\langle \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e_k, \sum_{k=-n1}^{n} \hat{f}(k) e_k \right\rangle = \sum_{k=-n}^{n} \left| \hat{f}(k) \right|^2$$

svo að

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|f - s_n\|_2^2 \\
&= \langle f - s_n, f - s_n \rangle \\
&= \langle f, f \rangle - \langle f, s_n \rangle - \langle s_n, f \rangle + \langle s_n, s_n \rangle \\
&= \|f\|_2^2 - \langle f, s_n \rangle - \overline{\langle s_n, f \rangle} + \langle s_n, s_n \rangle \\
&= \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} \left| \hat{f}(k) \right|^2
\end{aligned}$$

svo að

$$\sum_{k=-n}^{n} \left| \hat{f}(k) \right|^2 = \|s_n\|_2^2 \leq \|f\|_2^2.$$

Látum þá $n \longrightarrow +\infty$ og fáum

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \left| \hat{f}(k) \right|^2 \leq \|f\|_2^2.$$

Skv. Riesz-Fischer-setningu er til g úr $\mathcal{L}^2_C(\mathbb{T})$ þ.a. $\hat{g}(n) = \hat{f}(n)$ fyrir öll n og $\lim_{n \to +\infty} \|g - s_n\|_2 = 0$. En skv. setningu er þá $f = g$ næstum allsstaðar, svo að $\lim_{n \to +\infty} \|f - s_n\|_2 = 0$. $\square$

Setning 5.11 (Parseval-jöfnur). *Látum $f, g \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$. Þá er*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\bar{g}\, d\lambda$$

og

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}(n)\right|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 \, d\lambda.$$

Sér í lagi eru raðirnar samleitnar.

Sönnun. Setjum $s_n := \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e_k$, $t_n := \sum_{k=-n}^{n} \hat{g}(k)e_k$. Þá er

$$\begin{aligned}\langle s_n, t_n\rangle &= \sum_{k=-n}^{n} \sum_{j=-n}^{n} \hat{f}(k)\overline{\hat{g}(j)}\langle e_k, e_j\rangle \\ &= \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)}.\end{aligned}$$

Með Cauchy-Schwarz fæst:

$$\begin{aligned}\left|\langle f, g\rangle - \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)}\right| &= |\langle f, g\rangle - \langle s_n, t_n\rangle| \\ &\leq |\langle f - s_n, g\rangle| + |\langle s_n, g - t_n\rangle| \\ &\leq \|f - s_n\|_2 \cdot \|g\|_2 \cdot \|s_n\|_2 \cdot \|g - t_n\|_2 \\ &\leq \|f - s_n\|_2 \cdot \|g\|_2 \cdot \|f\|_2 \cdot \|g - t_n\|_2 \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Því er

$$\langle f, g\rangle = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)},$$

sem gefur fyrri jöfnuna, sú seinni fæst með því að setja $g = f$. □

Tökum saman:

Setning 5.12 (Meginsetning um Fourier-raðir ferningsheildanlegra falla). *Fourier-röð falls í $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ er samleitin og stefnir á f í $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$. Vörpunin*

$$T : L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T}) \to \ell^2_{\mathbb{C}}, [f] \mapsto (\hat{f}(k))_{k\in\mathbb{Z}}$$

er línuleg og gagntæk *og varðveitir innfeldi, þ.e.*

$$\langle T(f), T(g)\rangle_{\ell^2_{\mathbb{C}}} = \langle f, g\rangle_{L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})},$$

m.ö.o. er hún einsmótun Hilbert-rúma*.*

Athugasemd. Látum $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ og $s_n := \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e_k$. Skv. setningu stefnir s_n á f í $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$, þ.e. $\lim_{n\to+\infty} \|f - s_n\|_2 = 0$. En hvað þýðir það? Ef við lítum á sönnunina á að $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ sé fullkomið, þá fáum við: Til er hlutruna í (s_n) sem stefnir á f næstum allsstaðar.

Það var ekki fyrr en árið 1966 sem sanna tókst:

Setning 5.13 (Carleson). *Ef $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$, þá er $\lim_{n\to+\infty} s_n = f$ næstum allsstaðar.*

Tveimur árum seinna kom alhæfing:

Setning 5.14 (R. Hunt). *Ef $1 < p < +\infty$ og $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$, þá er $\lim_{n\to+\infty} s_n = f$ næstum allsstaðar.*

Fyrir 1966 var ekki einu sinni vitað hvort þetta gilti fyrir samfelld föll. Eftirfarandi er oft þægilegt:

Setning 5.15. *Ef f er lotubundið með lotu 2π, samfellt og samfellt deildanlegt á köflum, þá er Fourier-röð þess alsamleitin í jöfnum mæli á $\mathbb{R}$ og stefnir á f í hverjum punkti.*

Athugasemd. Forsendan þýðir að til sé skipting $-\pi = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = \pi$ á $[-\pi, \pi]$ þ.a. $f|_{]a_{k-1}, a_k[}$ sé deildanlegt með samfellda afleiðu þ.a. $\lim_{x\to a_{k-1}+} f'(x)$ og $\lim_{x\to a_k -} f'(x)$ séu til.

Sönnun á setningunni. Föllin f, f' eru augljóslega bæði í $\mathcal{L}^2(\mathbb{T})$. Vegna

$$\frac{d}{dx}(f(x)e^{-inx}) = f'(x)e^{-inx} - in\, f(x)e^{-inx}$$

fæst með heildun frá $-\pi$ til π að

$$\hat{f'}(n) - in\,\hat{f}(n) = \Big[f(x)e^{-inx}\Big]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

sem er jafngilt

$$in\,\hat{f}(n) = \hat{f'}(n).$$

Vegna $f' \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$ er

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f'}(n)\right|^2 < +\infty.$$

Cauchy-Schwarz fyrir endanlegar summur gefur

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-n}^{n} \left|\hat{f}(k)\right| &= \left|\hat{f}(0)\right| + \sum_{\substack{k=-n \\ k\neq 0}}^{n} \frac{1}{k} \left|\hat{f'}(k)\right| \\
&\le \left|\hat{f}(0)\right| + \left(\sum_{\substack{k=-n \\ k\neq 0}}^{n} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{\substack{k=-n \\ k\neq 0}}^{n} \left|\hat{f'}(k)\right|^2 \right)^{1/2} \\
&\le C < +\infty
\end{aligned}$$

þar sem C er fasti óháður n, svo að

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\hat{f}(n)\right| < +\infty.$$

□

Setningin verður þá afleiðing af:

Setning 5.16. *Ef f er samfellt og $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}(n)\right| < +\infty$, þá er*

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)e^{-inx}$$

fyrir öll $x \in \mathbb{R}$.

Sönnun. Skilyrðið þýðir að Fourier-röð f er alsamleitin í jöfnum mæli á $\mathbb{R}$ og skilgreinir samfellt fall g á $\mathbb{R}$; g hefur sömu Fourier-stuðla og f, því er $g = f$ næstum allsstaðar; þar eð bæði eru samfelld er $f = g$. □

Kafli 6

Margfeldi málrúma

Látum $\mathcal{A}$ vera mengjaalgebru á mengi X og μ vera innihald á $\mathcal{A}$ þannig að gildi 25. mars

> Ef $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ er sundurlæg runa af mengjum sem eru stök í $\mathcal{A}$ þannig að $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathcal{A}$, þá er $\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(A_k)$.

Þá er μ oft kallað *formál* á $\mathcal{A}$. Sáum í dæmi 12 á dæmablaði 3: Ef μ er formál og μ^* er ytra málið sem μ skilgreinir, þá er sérhvert stak úr $\mathcal{A}$ mælanlegt m.t.t. μ^* og $\mu^*(A) = \mu(A)$ fyrir öll A úr $\mathcal{A}$.

Látum μ vera formál á algebru $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^\sigma$ vera σ-algebruna sem $\mathcal{A}$ spannar, $\mathcal{C}$ vera σ-algebru allra mælanlegra mengja m.t.t. ytra málsins μ^*, þá sjáum við að $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ og því $\mathcal{A}^\sigma \subset \mathcal{C}$.

Skilgreining 6.1. Látum $\mathcal{A}$ vera mengi af hlutmengjum í mengi X og $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ vera vörpun. Við segjum að X sé *σ-endanlegt* m.t.t. μ ef til er runa $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ af stökum í $\mathcal{A}$ þ.a. $\mu(A_k) < +\infty$ fyrir öll k og $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Málrúm $(X, \mathcal{A}, \mu)$ kallast *σ-endanlegt* ef X er σ-endanlegt m.t.t. μ; eins fyrir formál.

Dæmi 6.2. Lebesgue-málið á $\mathbb{R}^n$ og talningarmálið á $\mathbb{Z}$ eru σ-endanleg en talningarmálið á $\mathbb{R}$ er það ekki.

Setning 6.3. *Látum $\mathcal{A}$ vera mengjaalgebru á X og $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ vera formál þ.a. X sé σ-endanlegt m.t.t. μ, þá er $\mu^*|\mathcal{A}^\sigma$ eina málið á $\mathcal{A}^\sigma$ sem einskorðað við $\mathcal{A}$ gefur μ; og $(X, \mathcal{C}, \mu^*|\mathcal{C})$ er fullkomnun $(X, \mathcal{A}^\sigma, \mu^*|\mathcal{A}^\sigma)$. (Hér er $\mathcal{C}$ σ-algebra mælanlegu mengjanna m.t.t. ytra málsins μ^* sem μ skilgreinir).*

Sönnun. Látum $\mathcal{D}$ vera $\mathcal{A}^\sigma$ eða $\mathcal{C}$ og ν vera mál á $\mathcal{D}$ þ.a. $\nu|\mathcal{A} = \mu$. Viljum sýna að $\nu = \mu^*|\mathcal{D}$. Látum $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$ vera vaxandi runu af stökum í $\mathcal{A}$ þ.a. $\mu(X_j) < +\infty$ fyrir öll j og $X = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} X_j$. Látum j vera fast, $A \in \mathcal{D}$ og $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vera vaxandi runu í $\mathcal{A}$ þ.a. $A \cap X_j \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Þá er

$$\nu(A \cap X_j) \leq \nu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \nu(A_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(A_k)$$

þannig að $\nu(A \cap X_j) \leq \mu^*(A \cap X_j)\mu^*(X_j) = \mu(X_j) < +\infty$, þetta gildir eins fyrir A^C, svo að

$$\nu(A \cap X_j) + \nu(A^C \cap X_j) = \nu(X_j) = \mu^*(X_j) = \mu^*(A \cap X_j) + \mu^*(A^C \cap X_j).$$

En þá er $\nu(A \cap X_j) = \mu^*(A \cap X_j)$ (ef $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $0 \leq a \leq c$ og $0 \leq b \leq d$ og $a + b = c + d$, þá er $a = c$ og $b = d$). En þá er

$$\nu(A) = \nu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} (A \cap X_j)\right) = \lim_{j \to +\infty} \nu(A \cap X_j) = \lim_{j \to +\infty} \mu^*(A \cap X_j) = \mu^*(A)$$

svo að $\nu = \mu^*|\mathcal{D}$. Látum nú $\overline{\mathcal{A}^\sigma}$ vera fullkomnun $\mathcal{A}^\sigma$ m.t.t. $\mu^*|\mathcal{A}^\sigma$. Þar sem $\mathcal{C}$ er fullkomin σ-algebra m.t.t. $\mu^*|\mathcal{C}$ er næsta ljóst að $\overline{\mathcal{A}^\sigma} \subset \mathcal{C}$. Þurfum að sýna að $\mathcal{C} \subset \overline{\mathcal{A}^\sigma}$ (það þýðir: Látum $A \in \mathcal{C}$, þá eru til mengi $E, F \in \mathcal{A}^\sigma$ þannig að $E \subset A \subset F$ og $\mu^*(F \setminus E) = 0$). Gerum fyrst ráð fyrir að $\mu^*(A) < +\infty$. Fyrir sérhvert $n \in \mathbb{N}$ er til runa $(A_{nk})_{k \in \mathbb{N}}$ í $\mathcal{A}$ þ.a. fyrir $B_n := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_{nk}$ gildi $A \subset B_n$ og

$$\mu^*(B_n) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(A_{nk}) \leq \mu^*(A) + \frac{1}{n+1} < +\infty.$$

Fyrir $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$ er $A \subset B, B \in \mathcal{A}^\sigma$ og

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B) \leq \limsup_{n \to +\infty} \mu^*(B_n) \leq \mu^*(A).$$

Þá er

$$\mu^*(B \setminus A) = \mu^*(B) - \mu^*(A) = 0$$

því að A, B eru bæði mælanleg. En þá er $B \setminus A \in \overline{\mathcal{A}^\sigma}$ og því $A = B(\setminus B \setminus A) \in \overline{\mathcal{A}^\sigma}$. Ef $\mu^*(A) = +\infty$ finnum við runu (X_j) í $\mathcal{A}$ þannig að $X = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} X_j$ og $\mu(X_j) < +\infty$. Þá er $A \cap X_j \in \overline{\mathcal{A}^\sigma}$ skv. ofansögðu, svo að $A = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (A \cap X_j) \in \overline{\mathcal{A}^\sigma}$. □

Við getum skilgreint margfeldi endanlega margra málŕuma; til að spara skriftir látum við nægja að taka tvö. Látum X og Y vera mengi, A og C vera hlutmengi í X og B og D vera hlutmengi í Y. Þá er

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

og

$$(A \times B)^C = (X \times B^C) \cup (A^C \times B).$$

Af þessu leiðir: Ef $\mathcal{A}$ er mengjaalgebra á X og $\mathcal{B}$ er mengaalgebra á Y, þá mynda öll sammengi

$$\bigcup_{j=1}^{k} (A_j \times B_j)$$

þa rsem $A_j \in \mathcal{A}$ og $B_j \in \mathcal{B}$ mengjaalgebru á $X \times Y$. Við getum valið $A_j \times B_j$ þannig að þau verði sundurlæg tvö og tvö. Þetta er ljóst ef $k = 1$. Ef $A_1 \times B_1, \ldots, A_k \times B_k$ eru sundurlæg tvö og tvö, þá er

$$\begin{aligned}\bigcup_{j=0}^{k+1}(A_j \times B_j) &= \bigcup_{j=1}^{k}((A_j \times B_j) \setminus (A_{k+1} \times B_{k+1})) \cup (A_k \times B_{k+1}) \\ &= \left(\bigcup_{j=1}^{k}((A_j \cap A_{k+1}) \times (B_j \setminus B_{j+1})\right) \\ &\quad \cup \left(\bigcup_{j=1}^{k}((A_j \setminus A_{k+1}) \times B_j)\right) \cup (A_{k+1} \times B_{k+1}),\end{aligned}$$

þessi sammengi mynda minnstu mengjaalgebru sem inniheldur margfeldi $A \times B$, þar sem $A \in \mathcal{A}$ og $B \in \mathcal{B}$. Sönnuðum síðast: 28. mars

Hjálparsetning 6.4. *Látum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ og $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ vera málrúm og $(A_i \times B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ og $(C_j \times D_j)_{j \in \{1,\ldots,k\}}$ vera sundurlægar fjölskyldur þ.a. $A_i, C_j \in \mathcal{A}$ og $B_i, D_j \in \mathcal{B}$ fyrir öll i og j og*

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \times B_i = \bigcup_{j=1}^{k} C_j \times D_j.$$

Þá er

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A)\nu(B_i) = \sum_{j=1}^{k} \mu(C_j)\nu(D_j).$$

Athugasemd. Hér, *eins og alltaf*, er $0 \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot 0 = 0$.

Skilgreining 6.5. (1) Látum $(X, \mathcal{A})$ og $(Y, \mathcal{B})$ vera mælanleg rúm. Við táknum með

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$$

σ-algebruna sem er spönnuð af menginu

$$\mathcal{E} := \{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}.$$

(2) Látum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ og $(Y, \mathcal{A}, \nu)$ vera málrúm, látum $\mathcal{E}$ vera eins og í (1) og skilgreinum vörpun $v : \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ með

$$v(A \times B) := \mu(A) \times \nu(B).$$

Látum κ^* vera ytra málið á $X \times Y$ sem v gefur af sér, þ.e.

$$\kappa^*(E) := \inf\left\{\sum_{i=0}^{+\infty} \mu(A_i)\nu(B_i) : A_i \in \mathcal{A}, B_i \in \mathcal{B} \text{ fyrir öll } i \in \mathbb{N}\right\}.$$

Látum $\mathcal{C}$ vera $\sigma - algebru$ allra κ^*-mælanlegra mengja og setjum

$$\mu \times \nu := \kappa^* \mid \mathcal{C};$$

við köllum $\mu \times \nu$ *Carathéodory-margfeldi* málanna μ og ν og $(X \times Y, \mathcal{C}, \mu \times \nu)$ *Carathéodory-margfeldi* málrúmanna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ og $(Y, \mathcal{B}, \nu)$.

Setning 6.6. *Látum $(X \times Y, \mathcal{C}, \mu \times \nu)$ vera Carathéodory-margfeldi málrúmanna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ og $(Y, \mathcal{B}, \nu)$. Þá er*

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subset \mathcal{C}$$

og

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$$

fyrir öll $A \in \mathcal{A}$ og $B \in \mathcal{B}$.

Sönnun. Höfum séð að minnsta mengjaalgebran sem inniheldur öll mengi $A \times B$ með $A \in \mathcal{A}$ og $B \in \mathcal{B}$ samanstendur af öllum sammengjum

$$E = \bigcup_{j=1}^{k} A_j \times B_j$$

þar sem $(A_j \times B_j)_{j\in\{1,\dots,k}$ er *sundurlæg* fjölskylda af mengjum þ.a. $A_j \in \mathcal{A}$ og $B_j \in \mathcal{B}$. Fyrir slíkt mengi E setjum við

$$w(E) := \sum_{j=1}^{k} \mu(A_j)\nu(B_j).$$

Hjálparsetningin sýnir í fyrsta lagi að þessi skilgreining er óháð valinu á sundurlægu fjölskyldunni $(A_j \times B_j)_{j\in\{1,\dots,k\}}$; og í öðru lagi að er w er *formál* á mengjaalgebrunni sem $\mathcal{E} = \{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$ spannar. Þá segir setning að ytra maĺið κ^* sem w skilgreinir fullnægi $\kappa^*(E) = w(E)$ fyrir E úr algebrunni, og að $\mathcal{C}$ inniheldur σ-algebruna sem algebran spannar, en það er $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. □

Setning 6.7. *Ef málrúm $(X, \mathcal{A}, \mu)$ og $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ eru σ-endanleg, þá er $\mu \times \nu \mid \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ eina málið á $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ þannig að $(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ og $\mu \times \nu : \mathcal{C} \to [0, +\infty]$ er fullkomnun $\mu \times \nu \mid \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.*

Sönnun. Þetta er bein afleiðing af síðustu setningu og setningu úr síðasta fyrirlestri, því að formálið á $X \times Y$ verður líka σ-endanlegt: Ef $X = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} X_j$, $Y = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Y_j$, þar sem $X_j \in \mathcal{A}$ $Y_j \in \mathcal{B}$, $\mu(X_j) < +\infty$, $\mu(Y_j) < +\infty$, þá er $X \times Y = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (X_j \times Y_j)$ og $v(X_i \times Y_j) = \mu(X_j)\nu(Y_j) < +\infty$. □

Athugasemd. (1) Sumir höfundar láta $\mu \times \nu$ vera það sem við skrifum um $\mu \times \nu \mid \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Með okkar rithætti er ljóst að fyrir Lebesgue-málin λ_n á $\mathbb{R}^n$ og λ_m á $\mathbb{R}^m$ er

$$\lambda_n \times \lambda_m = \lambda_{n+m}.$$

(2) Ef við höfum þrjú σ-endanleg málrúm $(X_k, \mathcal{A}_k, \mu_k)$, $k = 1, 2, 3$, þá er

$$(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \otimes \mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_1 \otimes (\mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3),$$

því að hvort tveggja er σ-algebran spönnuð af mengjum $A_1 \times A_2 \times A_3$ með $A_k \in \mathcal{A}_k$ og $(\mu_1 \times \mu_2) \times \mu_3 = \mu_1 \times (\mu_2 \times \mu_3)$.

Skilgreining 6.8. Látum X vera mengi. Mengi $\mathcal{B}$ af hlutmengjum í X kallast *einhalla (mengja)flokkur* ef eftirfarandi tveimur ksilyrðum er fullnægt:

(i) Ef $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ er vaxandi runa af mengjum í $\mathcal{B}$, þá er $\bigcup_{k\ni\mathbb{N}} B_k \in \mathcal{B}$.

(ii) Ef $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ er fallandi runa af mengjum í $\mathcal{B}$, þá er $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k \in \mathcal{B}$.

Hjálparsetning 6.9 (Um einhalla flokka)**.** *Látum $\mathcal{A}$ vera mengjaalgebru á mengi X. Minnsti einhalla flokkur sem inniheldur $\mathcal{A}$ er σ-algebran sem $\mathcal{A}$ spannar.*

Athugasemd. Ef $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$, þá er til minnsti einhalla flokkur sem inniheldur $\mathcal{E}$, þ.e.

$$\bigcap\{\mathcal{B} : \mathcal{B} \text{ er einhalla flokkur og } \mathcal{E} \subset \mathcal{B}\}.$$

Sönnun á hjálparsetningu. Látum $\mathcal{A}^\sigma$ vera σ-algebruna sem $\mathcal{A}$ spannar. Þá er $\mathcal{A}^\sigma$ einhalla flokkur því að sérhver σ-algebra er það ljóslega; því fæst

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{A}^\sigma$$

þar sem $\mathcal{B}$ er minnsti einhalla flokkur sem inniheldur $\mathcal{A}$. Fyrir $A \in \mathcal{B}$ setjum við

$$\mathcal{B}_A := \{B \in \mathcal{B} : A \setminus B, B \setminus A, A \cap B \in \mathcal{B}\}.$$

Við höfum $\emptyset, A \in \mathcal{B}_A$, og $\mathcal{B}_A$ er einhalla flokkur. Höfum

$$B \in \mathcal{B}_A \quad \text{þ.þ.a.a.} \quad A \in \mathcal{B}.$$

Ef $A \in \mathcal{A}$, þá er $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}_A$, því að $\mathcal{A}$ er algebra. En skv. skilgreiningu á $\mathcal{B}$ er þá $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_A$. Þetta sýnir: Ef $A \in \mathcal{A}$ og $B \in \mathcal{B}$, þá er $B \in \mathcal{B}_A$, svo að $A \in \mathcal{B}_B$. Þa rmeð er $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}_B$ fyrir öll B úr $\mathcal{B}$. En þá er $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_B$ fyrir öll B úr $\mathcal{B}$, þ.e.

Ef $A, B \in \mathcal{B}$, þá er $A \setminus B \in \mathcal{B}$ og $A \cap B \in \mathcal{B}$.

En þar með er $\mathcal{B}$ mengjaalgebra. Mengjaalgebra sem er lokuð m.t.t. vaxandi sammengja er σ-algebra. Vegna $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ og $\mathcal{B}$ er σ-algebra, er $\mathcal{A}^\sigma \subset \mathcal{B}$. Og því er $\mathcal{A}^\sigma = \mathcal{B}$. $\square$

Hjálparsetning 6.10. *Látum $(X, \mathcal{A})$ og $(Y, \mathcal{B})$ vera mælanleg rúm og $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ vera mælanlegt fall m.t.t. $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Fyrir sérhvert $x \in X$ er fallið*

$$f_x : Y \to [0, +\infty], y \mapsto f(x, y)$$

mælanlegt m.t.t. $\mathcal{B}$, og fyrir sérhvert y úr Y er fallið

$$f^y : X \to [0, +\infty], x \mapsto f(x, y)$$

mælanlegt m.t.t. $\mathcal{A}$.

Sönnun. Vegna samhverfu nægir að sanna fyrri fullyrðinguna. Fyrir $x \in X$ og $E \subset X \times Y$ setjum við

$$E_x := \{y \in Y : (x, y) \in E\}.$$

Nú er ljóst að

$$\mathcal{E} := \{E \subset X \times Y : E_x \in \mathcal{B} \text{ fyrir öll } x \in X\}$$

er σ-algebra þ.a. $A \times B \in \mathcal{E}$ fyrir öll $A \in \mathcal{A}$ og $B \in \mathcal{B}$. Því er $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subset \mathcal{E}$, svo að við höfum: Ef $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, þá er $E_x \in \mathcal{B}$ fyrir öll $x \in X$. Ef nú $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ er $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-mælanlegt og $a \in [0, +\infty]$, þá er

$$E := \{(x, y) \in X \times Y : f(x, y) < a\} \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$$

svo að

$$\{y \in Y : f_x(y) < a\} = E_x \in \mathcal{B}$$

fyrir öll $a \in [0, +\infty]$ og $x \in X$, svo að f_x er mælanlegt fyrir öll $x \in X$. $\square$

1. apríl

Látum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ og $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ vera málrúm og $(X \times Y, \mathcal{C}, \mu \times \nu)$ vera margfeldi þeirra. Við setjum

$$\mu \otimes \nu := \mu \times \nu | \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}.$$

Þá er $\mu \times \nu$ fullkomnun málsins $\mu \otimes \nu$.

Setning 6.11 (Tonelli-setning, fyrri gerð)**.** *Látum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ og $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ vera σ-endanleg málrúm og $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ vera $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-mælanlegt. Þá gildir*

(1) Fallið $X \to [0, +\infty], x \mapsto \int_Y f_x \, d\nu = \int_Y f(x, y) \, d\nu(y)$ er $\mathcal{A}$-mælanlegt og fallið $Y \to [0, +\infty], y \mapsto \int_Y f_y \, d\mu = \int_X f(x, y) \, d\mu(x)$ er $\mathcal{B}$-mælanlegt.

(2) Við höfum

$$\begin{aligned}\int_{X \times Y} f \, d(\mu \otimes \nu) &= \int_X \left(\int_Y f(x, y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_Y \left(\int_X f(x, y) \, d\mu(x) \right) d\nu(y).\end{aligned}$$

Sönnun. Látum $\mathcal{T}$ vera mengi allra $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$-mælanlegra falla f þ.a. fullyrðingarnar (1) og (2) séu sannar. Af setningu um einhalla samleitni leiðir: Ef $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ er vaxandi runa í $\mathcal{T}$, þá er $\lim_{k\to+\infty} f_k \in \mathcal{T}$. Því nægir í fyrsta lagi að sanna setninguna í því tilviki að $\mu(x) < +\infty, \mu(Y) < +\infty$; því að í almenna tilvikinu eru til vaxandi runur (X_n) af $\mathcal{A}$-mælanlegum mengjum og (Y_n) af $\mathcal{B}$-mælanlegum mengjum þ.a. $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, $Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ og $\mu(X_n) < +\infty, \nu(Y_n) < +\infty$ fyrir öll n; en þá er f markgildi vaxandi rununnar $(f\chi_{X_n\times Y_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Í öðru lagi nægir að athuga einföld mælanleg föll, því að sérhvert mælanlegt fall $X\times Y \to [0,+\infty]$ er markgildi vaxandi runu af einföldum mælanlegum föllum $X\times Y \to [0,+\infty]$. En þar sem heildið er línulegt og einfalt mælanlegt er línuleg samantekt af kenniföllum nægir að sanna setninguna fyrir kenniföll mælanlegra mengja, þ.e. fyrir $f = \chi_E$ þar sem $E \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. Setjum

$$\mathcal{E} := \{E \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B} : \chi_E \in \mathcal{T}\}.$$

Ljóst er að fyrir $A \in \mathcal{A}$ og $B \in \mathcal{B}$ er $A\times B \in \mathcal{E}$: Fyrir $f = \chi_{A\times B}$ er

$$\int_Y f(x,y)\,d\nu(y) = \int_Y \chi_{A\times B}(x,y)\,d\nu(y) = \begin{cases} \nu(B) & x\in A, \\ 0 & x\notin A, \end{cases}$$

svo að

$$x \mapsto \int_Y f(x,y)\,d\nu(y) = \nu(B)\cdot\chi_A,$$

og

$$\begin{aligned} \int_X\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)d\mu(x) &= \mu(A)\nu(B) \\ &= (\mu\otimes\nu)(A\times B) \\ &= \int_{X\times Y} \chi_{A\times B}\,d\mu\otimes v. \end{aligned}$$

Eins á hinn veginn. En þá er líka ljóst að $\mathcal{E}$ inniheldur öll sammengi $\bigcup_{j=1}^k A_j\times B_j$ þar sem $(A_j\times B_j)_{j\in\{1,\dots,k\}}$ er *sundurlæg* fjölskylda af mengjum þ.a. $A_j \in \mathcal{A}$ og $B_j \in \mathcal{B}$ fyrir $j = 1,\dots,k$. En þau mynda algebru og $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ er minnsta σ-algebra sem inniheldur þá algebru; skv. HS er $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ minnsti einhalla flokkur sem inniheldur þá algebru. Það nægir því að sýna að $\mathcal{E}$ sé einhalla flokkur, því að þá fæst $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}\subset\mathcal{E}$. Látum $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vera vaxandi runu í $\mathcal{E}$ og $E := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$, þá er (χ_{E_k}) vaxandi runa í $\mathcal{T}$, svo að $\chi_E = \lim_{k\to+\infty}\chi_{E_k} \in \mathcal{T}$ og því $E \in \mathcal{E}$. En ef $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ er fallandi runa í $\mathcal{E}$ og $E := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} E_k$, þá er $\chi_{X\times Y} - \chi_{E_k}$ vaxandi runa með markgildi $\chi_{X\times Y} - \chi_E$ og þar sem

$$\int_{X\times Y} \chi_{X\times Y}\,d(\mu\otimes\nu) = \int_{X\times Y} 1\cdot d\mu\otimes\nu = \mu(X)\cdot\nu(Y) < +\infty,$$

svo að $\chi_E \in \mathcal{T}$ og því $E \in \mathcal{E}$. $\square$

Fylgisetning 6.12. *Látum $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ vera σ-endanleg málrúm og E vera núllmengi m.t.t. $\mu \otimes \nu$. Fyrir μ-næstum öll $x \in X$ er $E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}$ ν-núllmengi og fyrir ν-næstum öll $y \in Y$ er $E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}$ μ-núllmengi.*

Sönnun. Notum Tonelli I á χ_E; fáum

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{X \times Y} \chi_E \, d\mu \otimes \nu \\ &= \int_X \left(\int_Y \chi_E(x, y) \, d\nu(y) d\mu(x) \right) \\ &= \int_X \int_Y \chi_{E_x}(y) \, d\nu(y) d\mu(x) \\ &= \int_X \nu(E_x) \, d\mu(x) \end{aligned}$$

svo að $x \mapsto \nu(E_x)$ er núll μ-næstum allsstaðar; eins fyrir $y \mapsto \mu(E^y)$. $\square$

Athugasemd. Látum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vera málrúm og f vera fall sem er skilgreint næstum allsstaðar á X. Það þýðir að til er mælanlegt mengi E í X þ.a. E^C sé núllmengi og f sé skilgrient á E. Nú má tala um að f sé mælanlegt eða heildanlegt eftir atvikum; það jafngildir því að f hafi mælanlega, eða þá heildanlega, framlengingu g á X. Heildið $\int_X g \, d\mu$, ef til er, er óháð framlengingunni og við táknum það einfaldlega með $\int_X f \, d\mu$.

Setning 6.13 (Tonelli-setning, seinni gerð)**.** *Látum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ og $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ vera fullkomin σ-endanleg málrúm og $(X \times Y, \mathcal{C}, \mu \times \nu)$ vera Carathéodory-margfeldi þeirra. Látum $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ vera $\mu \times \nu$-mælanlegt fall. Þá gildir:*

(1) Fyrir μ-næstum öll $x \in X$ er fallið $f_x : Y \to [0, +\infty], y \mapsto f(x, y)$ mælanlegt, og heildið $\int_Y f(x, y) \, d\nu(y)$ því skilgreint; og fyrir ν-næstum öll y úr Y er fallið $f^y : X \to [0, +\infty], x \mapsto f(x, y)$ mælanlegt og heildið $\int_X f(x, y) \, d\mu(x)$ því skilgreint.

(2) Vörpunin $x \mapsto \int_Y f(x, y) \, d\nu(y)$ sem er skilgreind μ-næstum allsstaðar á X er mælanleg og vörpunin $y \mapsto \int_X f(x, y) \, d\mu(x)$, sem er skilgreind ν-næstum allsstaðar á Y er mælanleg.

(3) Við höfum

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} f \, d\mu \times \nu &= \int_X \int_Y f(x, y) \, d\nu(y) d\mu(x) \\ &= \int_Y \int_X f(x, y) \, d\mu(x) d\nu(y). \end{aligned}$$

Sönnun. Málið $\mu \times \nu$ er fullkomnun málsins $\mu \otimes \nu$. Fyrir sérhvert $\mu \times \nu$-mælanlegt mengi E eru til $\mu \otimes \nu$-mælanleg mengi F og G þ.a. $F \subset E \subset G$ og $\mu \otimes \nu(G \setminus F) = 0$. Þá er $\chi_E = \chi_F$ $\mu \otimes \nu$-næstum allsstaðar, svo að fyrir $\mu \times \nu$-mælanlegt einfalt fall u er til $\mu \otimes \nu$-mælanlegt einfalt fall v þ.a. $u = v$ $\mu \otimes \nu$-næstum allsstaðar. En $\mu \times \nu$-mælanlegt fall $X \times Y \to [0, +\infty]$ er markgildi vaxandi runu af einföldum $\mu \times \nu$-mælanlegum föllum og því markgildi vaxandi runu af $\mu \otimes \nu$-mælanlegum einföldum föllum $\mu \otimes \nu$-næstum allsstaðar, svo að til er $\mu \otimes \nu$-mælanlegt fall $\tilde{f} : X \times Y \to [0, +\infty]$ þ.a. $f = \tilde{f}$ $\mu \otimes \nu$-næstum allsstaðar. Af fylgisetningu við Tonelli I er fallið f_x jafnt fallinu $\tilde{f}_x$ ν-næstum allsstaðar; og skv. HS er $\tilde{f}_x$ ν-mælanlegt; og þar sem $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ er fullkmoið er f_x líka ν-mælanlegt. Eins er $\tilde{f}^y$ μ-mælanlegt, og niðurstaðan fæst með Tonelli I. □

4. apríl

Fylgisetning 6.14. *Látum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ og $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ vera fullkomin σ-endanleg málrúm og $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ vera $\mu \times \nu$-mælanlegt. Ef*

$$\int_X \left(\int_Y |f(x,y)| \, d\nu(y) \right) d\mu(x) < +\infty,$$

þá er f heildanlegt m.t.t. $\mu \times \nu$.

Sönnun. Skv. Tonelli II er $\int_{X \times Y} |f(x,y)| \, d(\mu \times \nu) < +\infty$ svo að $|f|$ er heildanlegt og þá f líka m.t.t. $\mu \times \nu$. □

Setning 6.15 (Fubini)**.** *Látum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ og $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ vera fullkomin σ-endanleg málrúm og f vera $\mu \times \nu$-heildanlegt fall á $X \times Y$. Þá gildir:*

(1) Fyrir μ-næstum öll $x \in X$ er fallið $f_x : y \mapsto f(x,y)$ ν-heildanlegt og fallið $x \mapsto \int_Y f(x,y) \, d\nu(y)$, sem er μ-næstum allsstaðar skilgreint, er μ-heildanlegt yfir X.

(2) Fyrir næstum öll y úr Y er fallið $f^y : x \mapsto f(x,y)$ μ-heildanlegt og fallið $y \mapsto \int_X f(x,y) \, d\mu(x)$, sem er ν-næstum allsstaðar skilgreint, er ν-heildanlegt yfir Y.

(3) Við höfum

$$\int_{X \times Y} f \, d(\mu \times \nu) = \int_X \int_Y f(x,y) \, d\nu(y) d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x,y) \, d\mu(x) d\nu(y).$$

Sönnun. Fyrir fall $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ eða $f : X \times Y \to \tilde{\mathbb{R}}$ notum við Tonelli II á f^+ og f^-, fyrir fall $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ notum við þá niðurstöðu á $\operatorname{Re} f$ og $\operatorname{Im} f$. □

Athugasemd. Gefa má dæmi um fall $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ þannig að öll föllin $f_x : Y \to [0, +\infty]$, $f^y : X \to [0, +\infty]$ séu heildanleg, en f sé ekki mælanlegt.

Kafli 7

Tvinnmál

Skilgreining 7.1. Látum $\mathcal{A}$ vera σ-algebru á X og μ vera fall á $\mathcal{A}$ með gildum í $\tilde{\mathbb{R}}$ (eða $\mathbb{R}$ eða $\mathbb{C}$). Segjum að μ sé *útvíkkað raunmál* (eða *raunmál* eða *tvinnmál*) ef $\mu(\emptyset) = 0$ og fyrir sundurlæga runu (A_k) af mengjum í $\mathcal{A}$ gildi

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}})A_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(A_k), \tag{7.1}$$

og við krefjumst þess líka að μ taki bara annað af gildunum $-\infty, +\infty$.

Athugasemd. (1) Látum μ vera raunmál eða tvinnmál í $\mathcal{A}$ og $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vera sundurlæga runu af mengjum í $\mathcal{A}$, í jöfnu (7.1) er vinstri hliðin óháð röðinni á mengjunum A_k; við fáum þá að

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mu(A_{\alpha(k)}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(A_k)$$

fyrir allar gagntækar varpanir $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$; það jafngildir því að röðin $\sum_{k=0}^{+\infty} \mu(A_k)$ sé *alsamleitin.*

(2) Ljóst er að fyrir tvö tvinnmál λ, μ á $\mathcal{A}$ og tvinntölur a, b er $a\lambda + b\mu$, sem er skilgreint með

$$(a\lambda + b\mu)(A) := a\lambda(A) + b\mu(A),$$

líka tvinnmál; og tvinnmálin mynda $\mathbb{C}$-línulegt rúm. Eins mynda raunmálin á $\mathcal{A}$ $\mathbb{R}$-línulegt rúm.

(3) Notum orðalagið „almennt mál” ef við erum að tala um útvíkkað raunmál, raunmál eða tvinnmál, og „jákvætt mál” fyrir venjulegt mál, ef við viljum taka fram að við séum ekki að tala um almennt mál.

Skilgreining 7.2. Látum $(X, \mathcal{A})$ vera mælanlegt rúm og μ vera tvinnmál á $\mathcal{A}$. Fyrir $A \in \mathcal{A}$ setjum við

$$|\mu|(A) := \sup\left\{\sum_{k=0}^{+\infty} |\mu(A_k)| : (A_k) \text{ er sundurlæg runa í } \mathcal{A} \text{ og } A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right\}.$$

Athugasemd. Þetta er rithháttur sem viðgengst allsstaðar, en er óheppilegur því að $|\mu|(A)$ er *ekki* nauðsynlega sama og $|\mu(A)|$. Við höfum augljóslega

$$|\mu(A)| \leq |\mu|(A).$$

Setning 7.3. *Látum μ vera tvinnmál á σ-algebru $\mathcal{A}$. Þá er $|\mu|$ (jákvætt) mál á $\mathcal{A}$. Það er minnsta jákvæða málið λ þ.a. $|\mu(A)| \leq \lambda(A)$ fyrir öll A úr $\mathcal{A}$.*

Sönnun. Ef λ er jákvætt mál á $\dashv$ og $|\mu(A)| \leq \lambda(A)$ fyrir öll A og $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ er sundurlæg runa af mengjum í $\mathcal{A}$ þ.a. $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = A$, þá er

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |\mu(A_k)| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda(A_k) = \lambda(A)$$

svo að $|\mu|(A) = \sup\{\sum_{k\in\mathbb{N}} |\mu(A_k)|\} \leq \lambda(A)$ fyrir öll A, sem við getum skrifað $|\mu| \leq \lambda$.

Eftir er að sýna að $|\mu|$ sé mál. Ljóst er að $|\mu|(\emptyset) = 0$. Látum (A_k) vera sundurlæga runu í $\mathcal{A}$ og $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Veljum $t_k < |\mu|(A_k)$ fyrir öll k. Þá er sundurlæg runa $(B_{kj})_{j\in\mathbb{N}}$ þ.a. $A_k = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_{kj}$ og $\sum_{j=0}^{+\infty} |\mu(B_{kj})| > t_k$. Þá er $(B_{kj})_{(k,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ teljanleg sundurlæg fjölskylda með sammengi A, svo að

$$\sum_{k=0}^{+\infty} t_k \leq \sum_{k,j\in\mathbb{N}} |\mu(B_{kj})| \leq |\mu|(A).$$

Tökum efra mark af vinstri hlið fyrir allar slíkar fjölskyldur (t_k) og fáum

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |\mu(A_k)| \leq |\mu|(A).$$

Ójafnan í hina áttina: Látum C_j vera sundurlæga runu þ.a. $A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} C_j$. Þá er $(A_k \cap C_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sundurlæg runa með sammengi A_k, svo að

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{+\infty} |\mu(C_j)| &= \sum_{j=0}^{+\infty} \left| \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(C_j \cap A_k) \right| \\
&\leq \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} |\mu(C_j \cap A_k)| \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} |\mu(C_j \cap A_k)| \\
&\leq \sum_{k=0}^{+\infty} |\mu|(A_k).
\end{aligned}$$

Þar sem þetta gildir fyrir allar svona runur (C_j) fæst

$$|\mu|(A) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |\mu|(A_k).$$

$\square$

Hjálparsetning 7.4. *Ef $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, þá er til hlutmengi S í $\{1, \dots, n\}$ þ.a.*

$$\left| \sum_{k \in S} z_k \right| \geq \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Sönnun. Skiptum $\mathbb{C}$ upp í fjórðunga með línum $x = \pm y$; einum þeirra, segjum $Q = \{x + iy : |y| \leq x\}$ inniheldur stök úr $\{z_1, \dots, z_n\}$ þ.a. summa algilda þeirra sé a.m.k. $\frac{1}{4}t$, $t = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$. Fyrir $z \in \mathbb{Q}$ er $\operatorname{Re} z \geq \frac{|z|}{\sqrt{2}}$. Ef $S = \{k : z_k \in Q\}$ er

$$\left| \sum_{k \in S} z_k \right| \geq \operatorname{Re} \sum_{j \in S} z_j \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j \in S} |z_j| \geq \frac{t}{4\sqrt{2}} \geq \frac{t}{6}.$$

$\square$ 8. apríl

Setning 7.5. *Látum $(X, \mathcal{A})$ vera mælanlegt rúm og μ vera tvinnmál á $\mathcal{A}$. Þá er $|\mu|(X) < +\infty$, m.ö.o. er $(X, \mathcal{A}, |\mu|)$ endanlegt málrúm.*

Sönnun. Sýnum fyrst: Ef $A \in \mathcal{A}$, og $|\mu|(A) = +\infty$, þá má skrifa $A = B \cup C$ þar sem $B, C \in \mathcal{A}$, $B \cap C = \emptyset$, $|\mu(B)| \geq 1$ og $|\mu(C)| = +\infty$: Skv. skilgreiningu $|\mu|$ er til sundurlæg runa $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ í $\mathcal{A}$ þ.a. $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = A$ og $\sum_{k=0}^{+\infty} |\mu(A_k|$ sé hversu stórt sem vera skal; veljum rununa þ.a. $\sum_{k=0}^{+\infty} |\mu(A_k) > t := 6(1 + |\mu(A)|)$. En þá er líka til tala n þ.a. $\sum_{k=0}^{n} |\mu(A_k)| > t$; og skv. HS er til hlutmengi S í $\{0, 1, \dots, n\}$ þ.a. $\sum_{k \in S} |\mu(A_k)| > \frac{t}{6}$. Setjum $B := \bigcup_{k \in S} A_k$. Þá er $B \in \mathcal{A}, B \subset A$ og $|\mu(B)| > \frac{t}{6} \geq 1$. Setjum $C := A \setminus B \in \mathcal{A}$. Þá er $|\mu(C)| = |\mu(A) - \mu(B)| \geq |\mu(B)| - |\mu(A)| > \frac{t}{6} - |\mu(A)| = 1$. Nú er $|\mu|$ mál, svo að $|\mu|(A) = |\mu|(B) + |\mu|(C)$, og $|\mu|(A) = +\infty$, svo að annaðhvort er $|\mu|(B) = +\infty$ eða $|\mu|(C) = +\infty$. Ef $|\mu|(C) < +\infty$, þá skiptum við um nöfn og B og C og fáum niðurstöðuna.

Gerum nú ráð fyrir að $|\mu|(X) = +\infty$. Þá má skrifa $X = B_0 \cup C_0$ þar sem $B_0, C_0 \in \mathcal{A}$, $|\mu(B_0)| \geq 1$ og $|\mu|(C) = +\infty$. Með þrepun fást runur (B_k) og (C_k) af stökum í $\mathcal{A}$ þannig að

$$C_n = B_{n+1} \cup C_{n+1}, \quad B_{n+1} \cap C_{n+1} = \emptyset, \quad |\mu(B_{n+1})| \geq 1, |\mu(C_{n+1})| = +\infty.$$

Þá er $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sundurlæg runa í $\mathcal{A}$ og því

$$\mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(B_k),$$

sér í lagi er þessi síðasta runa (al)samleitin í $\mathbb{C}$; en það er fráleitt, því að $|\mu(B_k)| \geq 1$. $\square$

Athugasemd. Af setningunni er ljóst að

$$\mu \mapsto |\mu|(X)$$

er staðall á línulegu rúmi allra tvinnmála á $\mathcal{A}$.

7.1 Innskot um samfelld línuleg föll á Hilbert-rúmi

Hjálparsetning 7.6. *Látum H vera staðlað rúm yfir $\mathbb{R}$ eða $\mathbb{C}$ og $L : H \to \mathbb{R}$ eða $\mathbb{C}$ vera línulega vörpun. Þá eru eftirtalin skilyrði jafngild:*

(i) Vörpunin L er samfelld í 0.

(ii) Til er fasti $C > 0$ þ.a. $|L(X)| \leq C\|x\|$ fyrir öll $x \in H$.

(iii) Vörpunin L er Libschitz-samfelld, þ.e. itl er $C > 0$ þ.a. $|L(x) - L(y)| < C\|x - y\|$ fyrir öll $x, y \in H$.

(iv) L er samfelld í sérhverjum punkti.

Sönnun. LJóst er að (iv)$\Rightarrow$(i), (ii)$\Rightarrow$(iii) vegna $L(x) - L(y) = L(x - y)$ og að (iii)$\Rightarrow$(iv). Þá þarf bara að sanna (i)$\Rightarrow$(ii). Ef vörpunin L er samfelld í 0, þá er til $\delta > 0$ þ.a. $|L(X)| < 1$ fyrir öll $x \in H$ þ.a. $|x| < \delta$. Fyrir $x \in H$, $x \neq 0$, er

$$\left\| \frac{\delta x}{2\|x\|} \right\| = \frac{\delta}{2} < \delta,$$

svo að

$$1 > \left| L\left(\frac{\delta x}{2\|x\|}\right) \right| = \left| \frac{\delta}{2\|x\|} L(x) \right| = \frac{\delta}{2\|x\|} |L(x)|,$$

svo að

$$|L(x)| \leq C\|x\|,$$

þar sem $C := \frac{2}{\delta} > 0$. Þetta gildir líka fyrir $x = 0$. $\square$

Hjálparsetning 7.7. *Í Hilbert-rúmi (almennar í innfeldisrúmi) gildir* sam-síðungsójafna*:*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2\,.$$

Sönnun. Beinir reikningar: $\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \ldots$ $\square$

Hjálparsetning 7.8. *Ef K er lokað línulegt hlutmengi í Hilbert-rúmi og $x \in H$, þá er til stak $y \in K$ þ.a.*

$$\|x - y\| = d(x, K) = \inf_{z \in K} \|x - z\|\,.$$

Sönnun. Látum (y_k) vera runu í K þ.a.

$$\lim_{k\to+\infty} \|x-y_k\| = \delta := d(x,K).$$

Af samsíðungsójöfnunni leiðir að

$$\begin{aligned}\|y_k-y_j\|^2 &= 2\|x-y_k\|^2 + 2\|x-y_j\|^2 - 4\left\|x-\frac{1}{2}(y_k+y_j)\right\|^2\\ &\leq 2\|x-y_k\|^2 + 2\|x-y_j\|^2 - 4\delta^2\\ &\xrightarrow[j,k\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Því er (y_k) Cauchy-runa og því samleitin. Þar sem K er lokað er $y := \lim_{k\to+\infty} y_k \in K$, og

$$\|x-y\| = \lim_{k\to+\infty} \|x-y_k\| = \delta.$$

□

Hjálparsetning 7.9. *Látum L vera lokað línulegt hlutrúm í Hilbert-rúmi H og*

$$L^\perp := \{x \in H : \langle x,y\rangle = 0 \text{ fyrir öll } y \in L\}$$

Þá er $L^\perp$ lokað hlutrúm í H og

$$H = L \oplus L^\perp.$$

Sönnun. Vegna Cauchy-Schwarz-ójöfnunnar er vörpunin $\phi_y : H \to \mathbb{C}$ (eða $\mathbb{R}$), sem gefin er með $\phi_y(x) := \langle x,y\rangle$ fyrir öll $x \in H$, línuleg og samfelld, því að $|\phi_y(x)| = |\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\cdot\|y\| = C\cdot\|x\|$, þar sem $C := \|y\|$. En þá er

$$L^\perp = \bigcap_{y\in L} \operatorname{Ker}\phi_y$$

sniðmengi lokaðra línulegra hlutrúma í H og því lokað og línulegt hlutrúm í H. Látum $x \in H$. Skv. HS 7.8 er til y þ.a. $\|x-y\| = \delta := \delta(x,L)$. Setjum $z := x-y$. Fyrir $y_1 \in L$ og $c \in \mathbb{C}$ (eða $\mathbb{R}$) er $y + cy_1 \in L$ og því

$$\begin{aligned}0 &\leq \|x-(y+cy_1)\|^2 - \|x-y\|\\ &= \|z-cy_1\|^2 - \|z\|^2\\ &= \langle z-cy_1, z-cy_1\rangle - \|z\|^2\\ &= -c\langle y_1,z\rangle - \bar{c}\langle z,y_1\rangle + |c|^2\cdot\|y_1\|^2.\end{aligned}$$

Látum nú $\lambda \in \mathbb{R}$ og $c = \lambda\langle z,y_1\rangle$ og fáum

$$0 \leq -2\lambda|\langle z,y_1\rangle|^2 + \lambda^2\left|\langle z,y_1\rangle^2\right|\cdot\|y_1\|^2$$

fyrir öll $\lambda\in\mathbb{R}$, svo að $\langle z,y_1\rangle = 0$. En y_1 var hvaða stak sem vera skal í L, svo að $z \in L^\perp$ og $x = y+z \in L+L^\perp$. Ef $x \in L\cap L^\perp$, þá er $\langle x,x\rangle = 0$ og því $\|x\|^2 = 0$ og því $x = 0$. Því er $L\cap L^\perp = \{0\}$ og $H = L\oplus L^\perp$. □

Setning 7.10. *Látum $\phi : H \to \mathbb{C}$ (eða $\mathbb{R}$) vera línulegt og samfellt fall á Hilbert-rúmi (yfir $\mathbb{C}$ eða $\mathbb{R}$). Þá er til nákvæmlega eitt stak y í H þ.a.*

$$\phi(x) = \langle x, y \rangle$$

fyrir öll $x \in H$.

Sönnun. Ef $\phi = 0$, þá setjum við $y = 0$. Annars er $L := \operatorname{Ker} \phi \neq \{0\}$ og $H = L \oplus L^{\perp}$. Látum $y_1 \in L^{\perp}$, $y_1 \neq 0$; setjum $y = cy_1$, þar sem

$$c := \overline{\phi(y_1)}/\|y_1\|^2.$$

Fyrir $x \in H$ er þá

$$\phi\left(x - \frac{\phi(x)}{\phi(y_1)} y_1\right) = \phi(x) - \frac{\phi(x)}{\phi(y_1)} \phi(y_1) = 0$$

þ.e. $x - \frac{\phi(x)}{\phi(y_1)} y_1 \in L$, svo að

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle x - \frac{\phi(x)}{\phi(y_1)} y_1, y \right\rangle \\ &= \langle x, y \rangle - \left\langle \frac{\phi(x)}{\phi(y_1)} y_1, cy_1 \right\rangle \\ &= \langle x, y \rangle \frac{\phi(x)}{\phi(y_1)} \cdot \frac{\phi(y_1)}{\|y_1\|^2} \langle y_1, y_1 \rangle \\ &= \langle x, y \rangle - \phi(x) \end{aligned}$$

þ.e. $\phi(x) = \langle x, y \rangle$ fyrir öll $x \in H$. Ef líka $\phi(x) = \langle x, z \rangle$ fyrir öll x þá er $\langle x, y - z \rangle = 0$ fyrir öll x, líka fyrir $x = y - z$, svo að $\|y - z\| = 0$ og $y = z$. □

11. apríl

[VANTAR]
(3) Segjum að almenn mál λ_1, λ_2 séu *sundurlæg* og skrifum

$$\lambda_1 \perp \lambda_2$$

ef til eru sundurlæg mengi A_1 og A_2 þ.a. λ_k sé afmarkað við A_k fyrir $k = 1, 2$.

Einfaldar reglur:

Setning 7.11. *Látum μ vera jákvætt mál og $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ vera tvinnmál á sömu σ-algebru $\mathcal{A}$. Þá gildir:*

(1) Ef λ er afmarkað við mengi A, þá er $|\lambda|$ líka afmarkað við A.

(2) Ef $\lambda_1 \ll \mu, \lambda_2 \ll \mu$ og $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, þá er $c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 \ll \mu$.

(3) Ef $\lambda_1 \perp \mu, \lambda_2 \perp \mu$ og $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, þá er $c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 \perp \mu$.

(4) Ef $\lambda_1 \ll \mu$ og $\lambda_2 \perp \mu$, þá er $\lambda_1 \perp \lambda_2$.

(5) Ef $\lambda \ll \mu$, þá er $|\lambda \ll \mu$.

Fylgisetning 7.12. *(1) Ef $\lambda_1 \perp \lambda_2$, þá $|\lambda_1| \perp |\lambda_2|$.*

(2) Ef $\lambda \ll \mu$ og $\lambda \perp \mu$, þá er $\lambda = 0$.

Sönnun. Í heimadæmi. □

Setning 7.13. *Látum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vera σ-endanlegt mælanlegt rúm og λ vera tvinnmál á $\mathcal{A}$.*

(1) (Lebesgue-sundurliðun) *Til eru ótvírætt ákvörðuð tvinnmál λ_1, λ_2 á $\mathcal{A}$. þ.a.*

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \lambda_1 \ll \mu, \quad \text{og} \quad \lambda_2 \perp \mu.$$

(2) (Radon-Níkodým-setning) *Ef $\lambda_1 \ll \mu$ er til ótvírætt ákvarðað fall h úr $L^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ þ.a.*

$$\lambda_1(A) = \int_A h\, d\mu$$

fyrir öll A úr $\mathcal{A}$.

Skilgreining 7.14. Látum μ vera raunmál á σ-algebru $\mathcal{A}$. Við setjum

$$\mu^+ := \frac{1}{2}(|\mu| + \mu), \quad \mu^- := \frac{1}{2}(|\mu| - \mu)$$

og höfum þá skrifað

$$\mu = \mu^+ - \mu^-$$

sem mismun tveggja jákvæðra mála; köllum þetta *Jordan-liðun* málsins μ.

Sönnun setningar 7.13. Notum Jordan-liðun á $\operatorname{Re}\lambda$ og $\operatorname{Im}\lambda$ og sjaúm að það nægir að sanna setninguna fyrir jákvæð mál λ. Líka má gera ráð fyrir að $\mu(X) < +\infty$; þá má í almenna itlvikinu skrifa X sem sammengi sundurlægrar runu $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$ af stökum í $\mathcal{A}$; ef við höfum setninguna fyrir sérhvert X_j, þá „límast lausnirnar saman” í lausnir á X.

Sýnum fyrst ótvíræðni: Í lið (a) látum við $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = \nu_1 + \nu_2$, þar sem $\lambda_1, \nu_1 \ll \mu$ og $\lambda_2, \nu_2 \perp \mu$. Þá er $\lambda_1 - \nu_1 = \nu_2 - \lambda_2$, $\lambda_1 - \nu_1 \ll \mu$ og $\nu_2 - \lambda_2 \perp \mu$ svo að skv. reglu er $\lambda_1 - \nu_1 = \nu_2 - \lambda_2 = 0$ og því $\lambda_1 = \nu_1$, $\lambda_2 = \nu_2$. Í lið (b) látum við h_1, h_2 vera föll í $L^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ þ.a. $\int_A h_1\, d\mu = \int_A h_2\, d\mu$ fyrir öll A úr $\mathcal{A}$. Setjum $g := \operatorname{Re}(h_1 - h_2)$ og fáum $\int_A g\, d\mu = 0$ fyrir $A = \{x : g(x) > 0\}$, svo að $g\chi_A = 0$ næstum allsstaðar; eins $g\chi_B = 0$ n.a., þar sem $B = \{x : g(x) < 0\}$. Þar með er $g = 0$ n.a. Eins er $\operatorname{Im}(h_1 - h_2) = 0$ n.a., svo að $h_1 = h_2$ n.a., þ.e. $h_1 = h_2$ í $L^1_{\mathbb{C}}(\mu)$.

Sýnum næst tilvist: Skrifum $\nu := \lambda + \mu$. Þá er

$$\int_X f\, d\nu = \int_X f\, d\lambda + int_X f\, d\mu$$

fyrir öll mælanleg föll $f : X \to [0, +\infty]$, eins og við sjám fyrst fyrir kenniföll, næst fyrir einföld föll og loks fyrir markgildi runu af mælanlegum einföldum föllum. Fyrir f úr $L^2(X, \mathcal{A}, \nu)$ er

$$\left|\int_X f\,d\lambda\right| \leq \int_X |f|\,d\lambda \leq \int_X f\,d\nu \leq \left(\int_X |f|^2 d\nu\right)^{1/2} \cdot C$$

skv. Cauchy-Schwarz, þar sem $C = (\int_X 1\,d\nu)^{1/2} = \nu(X)^{1/2}$. Þetta þýðir að fallið

$$L^2_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \nu) \to \mathbb{R}, f \mapsto \int_X f\,d\lambda$$

er samfellt línulegt fall á Hilbert-rúmi yfir $\mathbb{R}$, skv. setningu er þá til ótvírætt ákvarðað fall g úr $L^2(X, \mathcal{A}, \nu)$ þ.a.

$$\int_X f\,d\lambda = \int_X fg\,d\nu.$$

Fyrir χ_A með $A \in \mathcal{A}$ gefur þetta

$$0 \leq \lambda(A) = \int_X \chi_A g\,d\nu = \int_A g\,d\nu.$$

Vegna $\lambda \leq \nu$ fæst

$$0 \leq \lambda(A) \leq \int_A g\,d\nu \leq \nu(A) = \int_A 1\,d\nu,$$

þ.e. $\int_A (1-g)\,d\nu \geq 0$ fyrir öll $A \in \mathcal{A}$. Látum $A = \{x \in X : g(x) < 0\}$ og fáum $0 \leq \int_A g\,d\nu = \int_X \chi_A g\,d\nu$. Svo að $\chi_A g = 0$ ν-næstum allsstaðar, sem þýðir að $g \geq 0$ næstum allsstaðar. Með sama hætti fæst að $1 - g \geq 0$ næstum allsstaðar. Með því að breyta g á núllmengi má gera íað fyrir að $0 \leq g$ł11 allsstaðar. Nú höfum við

$$\int_X f\,d\lambda = \int_X fg\,d\nu = \int_X fg\,d\lambda + \int_X fg\,d\mu,$$

þ.e.

$$\int_X (1-g)f\,d\lambda = \int_X fg\,d\mu \tag{7.2}$$

fyrir öll f úr $L^2(\nu)$. Setjum

$$E := \{x \in X : 0 \leq g(x) < 1\}, \quad F := \{x \in X : g(x) = 1\}$$

og skilgreinum mál λ_1, λ_2 á $\mathcal{A}$ með

$$\lambda_1(A) = \lambda(A \cap E), \quad \lambda_2(A) := \lambda(A \cap F).$$

Höfum þá $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. TÖkum $f = \lambda_F$ í (7.2) og fáum $\lambda(F) = 0$. Þar með er $\lambda_2 \perp \mu$. Látum $A \in \mathcal{A}$ og setjm $f := (1 + g + \cdots + g^k)\chi_A$ inn í (7.2) og fáum

$$\int_A (1 - g^{k+1})\,d\lambda = \int_A (1 + g + \cdots + g^k)g\,d\mu.$$

Látum $k \to +\infty$ og athugum að $\lim_{k\to+\infty}(1-g^k) = \chi_E$; fáum

$$\lambda_1(A) = \lambda(A \cap F) = \int_A h\, d\mu$$

þar sem $h := \lim_{k\to+\infty}(1+\cdots+g^k)g$ skv. setningu um einhalla samleitni. Þar sem $h \geq 0$ og $\lambda(E) = \int_X h\, d\mu$ er $h \in L^1(\mu)$, og sönnun er lokið. $\square$

Radon-Níkodým segir: Ef $(X, \mathcal{A}, \mu)$ er σ-endanlegt málrúm og λ er tvinnmál á X þ.a. $\lambda \ll \mu$, þá er til fall h á $L^1_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ þ.a.

$$\lambda(A) = \int_A h\, d\mu$$

fyrir öll $A \in \mathcal{A}$.

Skilgreining 7.15. Fallið h kallast *Radon-Níkodým-afleiða* málsins λ m.t.t. málsins μ, og er oft táknað

$$h =: \frac{d\lambda}{d\mu}.$$

Atriðisorðaskrá