Grannfræði

Kennari: Jón Ingólfur Magnússon
Kennslubók: Munkres, James R. *Topology*, 2. útgáfa. 2003. Prentice Hall.

Vorönn 2010

Efnisyfirlit

Hluti I

Almenn grannfræði

Kafli 1

Grannrúm og samfelldar varpanir

1.1 Grannrúm

Skilgreining 1.1.1. *Grannmynstur* á mengi X er safn $\mathcal{T}$ af hlutmengjum í X sem uppfylla eftirfarandi skilyrði:

(i) $\emptyset$ og X eru í $\mathcal{T}$.

(ii) Sammengi mengja í $\mathcal{T}$ eru í $\mathcal{T}$.

(iii) Sniðmengi endanlega margra mengja í $\mathcal{T}$ er í $\mathcal{T}$.

Tvenndin $(X, \mathcal{T})$ kallast *grannrúm*. Ef ekki fer á milli mála við hvaða $\mathcal{T}$ er átt, þá tölum við um X sem grannrúm. Köllum stökin í X oft *punkta* og stökin í $\mathcal{T}$ *opin mengi*.

Athugasemd. X er sniðmengi tómu fjölskyldunnar. $\emptyset$ er sammengi tómu fjölskyldunnar.

Dæmi 1.1.1. (1) Látum (M, d) vera firðrúm. Þá mynda opnu mengin (í firðrúmaskilningi) grannmynstur á M.

(2) X mengi. Grannmynstrið sem samanstendur eingöngu af $\emptyset$ og X kallast *grófa grannmynstrið*. Grannmynstrið sem samanstendur af öllum hlutmengjum X kallast *dreifða grannmynstrið* (á X) (sérhvert mengi af gerðinni $\{x\}$ með $x \in X$ er opið).

Skilgreining 1.1.2. $\mathcal{T}$ og $\mathcal{T}'$ tvö grannmynstur á mengi X. Segjum að $\mathcal{T}'$ sé *fínna en* $\mathcal{T}$ ef $\mathcal{T}' \supseteq \mathcal{T}$. Segjum þá að $\mathcal{T}$ sé *grófara en* $\mathcal{T}'$.

Skilgreining 1.1.3. (ekki í bók) X grannrúm og $A \subseteq X$. Við segjum að $V \subseteq X$ sé *grennd um* A ef til er opið mengi U í X þannig að $A \subseteq U \subseteq V$. Grenndir einstökungs $\{x\}$ kallast líka grenndir x.

Skilgreining 1.1.4. Safn $\mathcal{B}$ af hlutmengjum í X kallast *grunnur fyrir grannmynstur á* X ef eftirfarandi gildir:

(i) Fyrir öll $x \in X$ er til a.m.k. eitt B úr $\mathcal{B}$ þ.a. $x \in B$.

(ii) Ef $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ og $x \in B_1 \cap B_2$, þá er til $B_3 \in \mathcal{B}$ þ.a. $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Setning 1.1.1. *Látum $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ vera safn allra hlutmengja U í X sem fullnægja eftirfarandi skilyrði:*

Fyrir sérhvert $x \in U$ er til B úr $\mathcal{B}$ þ.a. $x \in B \subseteq U$.

Þá er $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ grannmynstur á X og við köllum það grannmynstrið sem $\mathcal{B}$ framleiðir.

Sönnun. (i) Að $\emptyset \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ er augljóst.

(ii) $X \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$: Fyrir sérhvert $x \in X$ er til (skv. (i)) $B \in \mathcal{B}$ þ.a. $x \in B \subseteq X$.

(iii) Sammengi mengja úr $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ er í $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$: Látum $(U_\alpha)_{\alpha \in J}$ vera fjölskyldu í $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ og setjum $U := \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$. Ef $x \in U$ þá er til $\alpha \in J$ þ.a. $x \in U_\alpha$ og því er til $B \in \mathcal{B}$ þ.a. $x \in B \subseteq U_\alpha$ og þar með er $x \in B \subseteq U$. Þetta hefur í för með sér að $U \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

(iv) Endanleg sniðmengi mengja í $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ eru í $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$: Nóg að sýna að sniðmengi tveggja mengja í $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ sé í $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ og beita svo þrepun. Látum $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ og $x \in U_1, U_2$. Þá eru til $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ þ.a. $x \in B_1 \subseteq U_1$ og $x \in B_2 \subseteq U_2$. Skv. skilyrði (ii) fyrir grunna er þá til B_3 úr $\mathcal{B}$ þ.a. $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq U_1 \cap U_2$. Þar með er $U_1 \cap U_2$ í $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. □

Dæmi 1.1.2. (1) Ef $\mathcal{T}$ er grannmynstur á X, þá er $\mathcal{T}$ grunnur fyrir $\mathcal{T}$.

(2) Safn allra einstökunga $\{x\}$ er grunnur fyrir dreifða grannmynstrið á X.

(3) (M, d) firðrúm og $\mathcal{T}_d$ grannmynstrið sem d skilgreinir (safn opnu mengjanna). Setjum $B_\varepsilon(x) := \{y \in M : d(x, y) < \varepsilon\}$ fyrir öll $\varepsilon > 0$ og öll $x \in M$. Þá er $\mathcal{B} := \{B_\varepsilon(x) : \varepsilon > 0, x \in M\}$ grunnur fyirr $\mathcal{T}_d$.

Setning 1.1.2. *$\mathcal{B}$ grunnur fyrir grannmynstur $\mathcal{T}$ á mengi X. Þá er $\mathcal{T}$ jafnt safni allra sammengja af mengjum í $\mathcal{B}$.*

Sönnun. Ef $(B_\alpha)_{\alpha \in J}$ er fjölskylda í $\mathcal{B}$, þá er $(B_\alpha)_{\alpha \in J}$ jafnframt fjölskylda í $\mathcal{T}$ og þar með er $\bigcup_{\alpha \in J} B_\alpha$ í $\mathcal{T}$ (vegna þess að $\mathcal{T}$ er grannmynstur).

Öfugt, ef U er í $\mathcal{T}$, þá er fyrir sérhvert x úr U til B_x úr $\mathcal{B}$ þannig að $x \in B_x \subseteq U$. Þar með er $U = \bigcup_{x \in U} B_x$. □

Setning 1.1.3. *$\mathcal{B}$ og $\mathcal{B}'$ grunnar fyrir grannmynstur á mengi X. Þá eru eftirfarandi skilyrði jafngild:*

(i) $\mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$ er fínna en $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

(ii) Fyrir sérhvert $x \in X$ og $B \in \mathcal{B}$ sem inniheldur x er til B' úr $\mathcal{B}'$ þannig að $x \in B' \subseteq B$.

Sönnun. (i)⇒(ii): Gefið $x \in X$ og $B \in \mathcal{B}$ með $x \in B$. Nú er

$$B \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}} \underset{(i)}{\subseteq} \mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$$

svo þar sem $\mathcal{B}'$ framleiðir $\mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$ þá er til B' $\mathcal{B}'$ úr $\mathcal{B}'$ þ.a. $x \in B' \subseteq B$. g *(ii)⇒(i):* Gefið U úr $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$. Viljum sýna að $U \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$. Ef $x \in U$, þá er til B úr $\mathcal{B}$ með $4x \in B \subseteq U$. Skv. (ii) er þá til B' úr $\mathcal{B}'$ með $x \in B' \subseteq B$ og því $x \in B' \subseteq U$, en það þýðir að $U \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$. □

Athugasemd. Oft hagstæðara að vinna með grunnana.

Setning 1.1.4. *Látum $(X, \mathcal{T})$ vera grannrúm og $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$ þannig að fyrir sérhvert $U \in \mathcal{T}$ og sérhvert $x \in U$ er til C úr $\mathcal{C}$ þannig að $x \in C \subseteq U$. Þá er $\mathcal{C}$ grunnur fyirr grannmynstrið $\mathcal{T}$.*

Sönnun. Sýnum fyrst að $\mathcal{C}$ sé grunnur fyrir grannmynstur á X.

(i) Gefið x úr X. Viljum sýna að til sé C úr $\mathcal{C}$ þannig að $x \in C$. En $X \in \mathcal{T}$ svo að til er $C \in \mathcal{C}$þannig að $x \in C \subseteq X$.

(ii) Gefin séu C_1 og C_2 úr $\mathcal{C}$ og $x \in C_1 \cap C_2$. Viljum sýna að til sé C_3 úr $\mathcal{C}$ þ.a. $x \in C_3 \subseteq C_1 \cap C_2$. En C_1, C_2 eru í $\mathcal{T}$ og því $C_1 \cap C_2 \in \mathcal{T}$ og þar með er til $C_3 \in \mathcal{C}$ þannig að $x \in C_3 \subseteq C_1 \cap C_2$.

Tökum nú eftir að $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{T}}$ svo skv. síðustu setningu er $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ fínna en $\mathcal{T}$ og ljóst er að $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{T}}$ er fínna en $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ vegna þess að $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}$. Þar með er $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{C}}$. □

Dæmi 1.1.3. $\mathcal{B}$ safn allra opinna bila $]a, b[$ í $\mathbb{R}$ og $\mathcal{B}'$ safn allra hálfopinna bila af gerðinni $[a, b[$ í $\mathbb{R}$. Þá eru $\mathcal{B}$ og $\mathcal{B}'$ grunnar fyrir grannmynstur á $\mathbb{R}$. $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ er venjulega grannmynstrið á $\mathbb{R}$, en $\mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$ er stranglega fínna en $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, þ.e.a.s. $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} \subsetneq \mathcal{T}_{\mathcal{B}'}$ [lesa sjálf].

Skilgreining 1.1.5. $\mathcal{S}$ Safn hlutmengja í mengi X sem þekur X kallast *hlutgrunnur fyrir grannmynstur á X*.

Setning 1.1.5. *Ef $\mathcal{S}$ er hlutgrunnur (fyrir grannmynstur á X) og $\mathcal{B}$ er safn allra endanlegra sniðmengja af mengjum í $\mathcal{S}$ þá er $\mathcal{B}$ grunnur fyrir grannmynstur á X. Við segjum að $\mathcal{S}$* framleiði $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.

Sönnun. (i) Ef $x \in X$, þá er til S úr $\mathcal{S}$ þannig að $x \in S$ og $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$.

(ii) Ef $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, þá eru til $S_1, \ldots, S_m$ og $S'_1, \ldots, S'_n$ úr $\mathcal{S}$ þannig að $B_1 = \bigcap_{j=1}^m S_j$ og $B_2 = \bigcap_{j=1}^n S'_j$ og því $B_1 \cap B_2 = S_1 \cap \cdots \cap S_m \cap S'_1 \cap \cdots \cap S'_n$ líka úr $\mathcal{B}$. □

1.2 Röðunargrannmynstur

$(X, <)$ línulega raðað mengi og $a, b \in X$. Köllum

- $]a, b[:= \{x \in X : a < x < b\}$ *opið bil.*
- $[a, b[:= \{x \in X : a \leq x < b\}$ *hálfopið bil.*
- $]a, b] := \{x \in X : a < x \leq b\}$ *hálfopið bil.*
- $[a, b] := \{x \in X : a \leq x \leq b\}$ *lokað bil.*
- $]a, +\infty[:= \{x \in X : a < x\}$ *opinn geisla.*
- $]-\infty, a[:= \{x \in X : x < a\}$ *opinn geisla.*
- $[a, +\infty[:= \{x \in X : a \leq x\}$ *lokaðan geisla.*
- $]-\infty, a] := \{x \in X : x \leq a\}$ *lokaðan geisla.*

Skilgreining 1.2.1. $(X, <)$ línulega raðað. Látum $\mathcal{B}$ vera safn allra mengja af eftirfarandi gerðum:

(i) opin bil í X

(ii) hálfopin bil $[a_0, b[$ þar sem $a_0 := \min X$ (ef til)

(iii) hálfopin bil $]a, b_0]$ þar sem $b_0 := \max X$ (ef til).

$\mathcal{B}$ er greinilega grunnur fyrir grannmynstur á X. Við köllum $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ *röðunargrannmynstur* línulega raðaða mengisins $(X, <)$.

Dæmi 1.2.1. (1) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ með *orðabókarröðun.*
(2) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Röðunargrannmynstrið er dreifða grannmynstrið.
(3) $X = \{1, 2\} \times \mathbb{N}$ með orðabókarröðun. Dreifða grannmynstrið er fínna en röðunargrannmynstrið, vegna þess að $\{2 \times 0\}$ er ekki opið.
(4) Opnir geislar eru opin mengi í röðunargrannmynstrinu.

Skilgreining 1.2.2. X línulega raðað.

(i) Stak c úr X kallast *eftirfari* a ef $a < c$ og $]a, c[= \emptyset$.

(ii) Stak b úr X kallast *undanfari* b ef $d < b$ og $]d, b[= \emptyset$.

1.3 Faldgrannmynstur

Skilgreining 1.3.1. Látum X og Y vera grannrúm. Öll mengi af gerðinni $U \times V$ þar sem U er opið í X og V er opið í Y, mynda grunn fyrir grannmynstur á $X \times Y$ sem við köllum *faldgrannmynstrið* á $X \times Y$.

Setning 1.3.1. *Ef $\mathcal{B}$ er grunnur fyrir á X og $\mathcal{C}$ er grunnur fyrir grannmynstrið á Y, þá er safnið $\mathcal{D} := \{B \times C : B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{C}\}$ grunnur fyrir faldgrannmynstrið á $X \times Y$.*

Sönnun. Látum W vera opið í $X \times Y$ og $(x, y) \in W$. Þá er til opið U í X og opið V í Y þ.a. $(x, y) \in U \times V \subseteq W$. Þar eð $\mathcal{B}$ er grunnur fyrir $\mathcal{T}_X$ og $\mathcal{C}$ er grunnur fyrir $\mathcal{T}_Y$, þá eru til B úr $\mathcal{B}$ og C úr $\mathcal{C}$ þ.a. $x \in B \subseteq U$ og $y \in C \subseteq V$ og þar með $(x, y) \in B \times C \subseteq U \times V \subseteq W$. □

Dæmi 1.3.1 (Ganga vel úr skugga um það!)**.** Faldgrannmynstrið á $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ er venjulega grannmynstrið.

Setning 1.3.2. *Táknum ofanvörpin $\pi_1 : X \times Y \to X; (x, y) \mapsto x$ og $\pi_2 : X \times Y \to Y; (x, y) \mapsto y$. Safnið*

$$\mathcal{S} := \left\{\pi_1^{-1}(U) : U \text{ opið í } X\right\} \cup \left\{\pi_2^{-1}(V) : V \text{ opið í } Y\right\}$$

er hlutgrunnur fyrir faldgrannmynstrið.

Sönnun. Leiðir beint af því að $\pi_1^{-1}(U) \cap \pi_2^{-1}(V) = U \times V$. □

1.4 Hlutrúmsgrannmynstur

Skilgreining 1.4.1. $(X, \mathcal{T})$ grannrúm og $Y \subseteq X$. Safnið $\mathcal{T}_Y := \{Y \cap U : U \in \mathcal{T}\}$ er grannmynstur á Y, kallað *hlutrúmsgrannmynstrið* á Y. Hlutmengi í X með hlutrúmsgrannmynstrinu kallast *hlutrúm* í X.

Setning 1.4.1. *Ef $\mathcal{B}$ er grunnur fyrir grannmynstrið á X, þá er*

$$\mathcal{B}_Y := \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$$

grunnur fyrir hlutrúmsgrannmynstrið á Y.

Sönnun. Augljóst. $\square$

Setning 1.4.2. *Y hlutrúm í grannrúmi X. Ef U er opið í Y og Y er opið í X, þá er U opið í X.*

Sönnun. Augljóst. $\square$

Dæmi 1.4.1. Lítum á hlutmengin $Y_1 = [0, 1]$ og $Y_2 = [0, 1[\cup \{2\}$ í $\mathbb{R}$. Þá er hlutrúmsgrannmynstrið (í $\mathbb{R}$) og röðunargrannmynstrið eins á Y_1, en ekki á Y_2 ($\{2\}$ er ekki opið í röðunargrannmynstrinu).

Athugasemd. (dæmi 6 á bls. 91 í kennslubók): Á bili eða geisla í línulega röðuðu mengi $(X, <)$ eru röðunargrannmynstrin og hlutrúmsgrannmynstrin eins (sjá einnig almennari útgáfu: Setning 16.4 í kennslubók).

Setning 1.4.3. *A hlutrúm í grannrúmi X og B hlutrúm í grannrúmi Y. Þá er faldgrannmynstrið á $A \times B$ það sama og hlutrúmsgrannmynstrið sem $A \times B$ erfir frá $X \times Y$.*

Sönnun. U opið í X og V opið í Y. Þá er

$$\underbrace{(U \times V) \cap (A \times B)}_{\substack{\text{mynda grunn fyrir} \\ \text{hlutrúmsgrannmynstrið}}} = \underbrace{(U \cap A) \times (V \cap B)}_{\substack{\text{mynda grunn fyrir} \\ \text{faldgrannmynstrið}}}.$$

$\square$

1.5 Lokuð mengi

Skilgreining 1.5.1. Hlutmengi A í grannrúmi X er sagt *lokað* ef $X \setminus A$ er opið.

Setning 1.5.1. *X grannrúm. Þá gildir:*

(i) $\emptyset$ og X eru lokuð.

(ii) Sniðmengi lokaðra mengja í X er lokað.

(iii) Endanleg sammengi lokaðra mengja eru lokuð.

Sönnun. (i) $\emptyset = X \setminus X$ og $X = X \setminus \emptyset$.
(ii) og (iii) leiðir beint af reglum de Morgans og samsvarandi reglum fyrir opin mengi. $\square$

Dæmi 1.5.1. Í dreifðu grannmynstri eru öll mengi bæði opin og lokuð.

Setning 1.5.2. *Y hlutrúm í grannrúmi X. Hlutmengi Y er lokað í Y* þ.þ.a.a. *það sé sniðmengi Y og lokaðs mengis í X.*

Sönnun. Látum $A \subseteq Y$. Ef $A = C \cap Y$ með C lokað í X, þá er $X \setminus C$ opið í X og því $Y \setminus A = (X \setminus C) \cap Y$ opið í Y, svo A er lokað í Y.
Öfugt, ef A er lokað í Y, þá er $Y \setminus A$ opið í Y og því er $Y \setminus A = U \cap Y$, þar sem U er opið í X. Mengið $X \setminus U$ er þá lokað í X og $A = (X \setminus U) \cap Y$. $\square$

Setning 1.5.3. *Y hlutrúm í grannrúmi X. Ef A er lokað í Y og Y er lokað í X, þá er A lokað í X.*

Sönnun. Augljóst. $\square$

1.6 Lokanir og innri mengi

Skilgreining 1.6.1. A hlutmengi í grannrúmi X.

(i) Sammengi allra opinna mengja sem eru innihaldin í A er stærsta opna mengið sem A inniheldur og kallast *innra mengi* eða *innmengi* mengisins A, táknað $\overset{\circ}{A}$ eða $\operatorname{int}(A)$.

(ii) Sniðmengi allra lokaðra mengja sem innihalda A er minnsta lokaða mengið sem inniheldur A og kallast *lokun* (eða *lokunarhjúpur*) A, táknað $\overline{A}$.

Athugasemd. $\overset{\circ}{A} \subseteq A \subseteq \overline{A}$.

Dæmi 1.6.1. $X = \mathbb{R}^2, Y = [0,1[\times \{0\}$ og $A =]0,1[\times \{0\}$. Lokun A í Y, þ.e.a.s. $\overline{A}_Y = Y$. Lokun A í X er jöfn lokun Y í X, þ.e.a.s. $\overline{A}_X = \overline{Y}_X = [0,1] \times \{0\}$. Innmengi A í Y er A. Innmengi A í X er $\emptyset$.

Setning 1.6.1. *Y hlutrúm í grannrúmi X og $A \subseteq Y$. Látum $\overline{A}$ tákna lokun A í X. Þá er $\overline{A} \cap Y$ lokun A í Y.*

Sönnun. Látum B tákna lokun A í Y. Þar eð $\overline{A} \cap Y$ er lokað í Y, þá er $B \subseteq \overline{A} \cap Y$. En þar eð B er lokað í Y, þá er til C í X þ.a. $B = C \cap Y$ og því $\overline{A} \subseteq C$ og það gefur að $\overline{A} \cap Y \subseteq C \cap Y = B$. □

Setning 1.6.2. *A hlutmengi í grannrúmi X*

(i) $X \in \overline{A}$ þ.þ.a.a. *sérhver grennd U um x skeri A.*

(ii) Ef $\mathcal{B}$ er grunnur fyrir $\mathcal{T}_X$, þá gildir: $x \in \overline{A}$ þ.þ.a.a. $B \cap A \neq \emptyset$ *fyrir öll $B \in \mathcal{B}$ þ.a. $x \in B$.*

Sönnun. (i) $x \in X \setminus \overline{A}$ *þ.þ.a.a.* til sé opin grennd U um x þ.a. $x \in U \subseteq X \setminus \overline{A}$.
(ii) Augljós. □

1.7 Þéttipunktar

Skilgreining 1.7.1. A hlutmengi í grannrúmi X. Punktur x úr X er kallaður *þéttipunktur* A ef $(A \setminus \{x\}) \cap U \neq \emptyset$ fyrir allar grenndir U um x.

Athugasemd. Þéttipunktur A getur hvort sem er tilheyrt A eða ekki. A getur haft punkta sem eru ekki þéttipunktar.

Setning 1.7.1. *A hlutmengi í grannrúmi X og A' mengi allra þéttipunkta A. Þá er $\overline{A} = A \cup A'$.*

Sönnun. Ef $x \in A'$, þá gildir um sérhverja grennd U um x að $(A \setminus \{x\}) \cap U \neq \emptyset$ og því $A \cap U \neq \emptyset$. Skv. niðurstöðu (i) í síðustu setningu er þá $x \in \overline{A}$ við höfum því sýnt að $A' \subseteq \overline{A}$ og þar sem $A \subseteq \overline{A}$ skv. skilgreiningu þá gildir $A \cup A' \subseteq \overline{A}$.

Öfugt, sýnum að $\overline{A} \subseteq A \cup A'$. Látum $x \in \overline{A}$. Ef $x \in A$, þá þarf ekkert að gera. Gerum ráð fyrir að $x \in \overline{A} \setminus A$. Þá gildir um sérhverja grennd U um x að $\emptyset \neq A \cap U = (A \setminus \{x\}) \cap U$. Þar með er $x \in A$. □

Fylgisetning 1.7.1. *Hlutmengi í grannrúmi er lokað* þ.þ.a.a. *það innihaldi alla þéttipunkta sína.*

Sönnun. A er lokað *þ.þ.a.a.* $A = \overline{A}$ *þ.þ.a.a.* $A' \subseteq A$. □

1.8 T_1-rúm og Hausdorff-rúm

Skilgreining 1.8.1. Við segjum að grannrúm X sé

(i) *T_1-rúm* (eða uppfylli *T_1-frumsenduna*) ef fyrir sérhverja tvo punkta x, y úr X eru til grenndir U_x um x og U_y um y þannig að $y \notin U_x$ og $x \notin U_y$.

(ii) *Hausdorff-rúm* (eða uppfylli *T_2-frumsenduna*) ef fyrir sérhverja tvo punkta x, y úr X eru til grenndir U_x um x og U_y um y þ.a. $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Setning 1.8.1. *Endanleg mengi í T_1-rúmi X eru lokuð.*

Sönnun. Látum $A \subseteq X$ vera endanlegt og $x \in X \setminus A$. Þá er fyrir sérhvert a úr A til grennd U_a um x þ.a. $a \notin U_a$ og þar með er $\bigcap_{a \in A} U_a$ grennd um x í $X \setminus A$. Mengið $X \setminus A$ er því opið og þar með er A lokað. $\square$

Setning 1.8.2. *A hlutmengi í T_1-rúmi X. Þá er x þéttipunktur A* þ.þ.a.a. *sérhver grennd um x skeri A í óendanlega mörgum punktum.*

Sönnun. Ef sérhver grennd um x sker A í óendanlega mörgum punktum, þá sker hún $A \setminus \{x\}$ og þar með er x þéttipunktur A.

Öfugt, g.r.f. að x sé punktur úr X þ.a. til sé grennd U um x sem sker A í aðeins endanlega mörgum punktum. Þá fæst

$$(A \setminus \{x\}) \cap U = \{x_1, \dots, x_m\}.$$

En skv. síðustu setningu er $X \setminus \{x_1, \dots, x_m\}$ opið mengi í X og þar með grennd um x, sem sker ekki $A \setminus \{x\}$. Af því sést að x er ekki þéttipunktur A. $\square$

Setning 1.8.3. *(i) Línulega raðað mengi er Hausdorff-rúm með tilliti til röðunargrannmynstursins.*

(ii) Faldrúm tveggja Hausdorff-rúma er Hausdorff-rúm.

(iii) Hlutrúm í Hausdorff-rúmi er Hausdorff-rúm.

Sönnun. Dæmi 10,11 og 12 á bls. 101 í kennslubók. $\square$

1.9 Samfelldar varpanir

Skilgreining 1.9.1. Vörpun $f : X \to Y$ milli grannrúma er sögð *samfelld* ef frummynd f opnu mengi í Y er opið mengi í X; þ.e.a.s. $f^{-1}(U)$ er opið í X ef U er opið í Y.

Athugasemd. (i) $f : X \to Y$ er samfelld *þ.þ.a.a.* vörpunin $\mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X), Z \mapsto f^{-1}(Z)$ varpi $\mathcal{T}_Y$ inn í $\mathcal{T}_X$.

(ii) Ef $\mathcal{B}$ er grunnur fyrir $\mathcal{T}_Y$, þá er $f : X \to Y$ samfelld *þ.þ.a.a.* $f^{-1}(B)$ sé opið í X fyrir sérhvert B úr $\mathcal{B}$: Ef V er opið í Y, þá er $V = \bigcup_{i \in I} B_i$ $(B_i \in \mathcal{B}\ \forall i \in I)$ og $f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$.

(iii) Ef $\mathcal{S}$ er hlutgrunnur fyrir $\mathcal{T}_Y$, þá er $f : X \to Y$ samfelld *þ.þ.a.a.* $f^{-1}(S)$ sé opið í X fyrir sérhvert S úr $\mathcal{S}$: Látum $\mathcal{B}$ vera grunninn sem $\mathcal{S}$ framleiðir. Ef $B \in \mathcal{B}$, þá

$$B = S_1 \cap \cdots \cap S_m \quad (S_j \in \mathcal{S},\ j = 1, \dots, m),$$

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(S_1) \cap \cdots \cap f^{-1}(S_m).$$

Dæmi 1.9.1. (X, d_X) og (Y, d_Y) firðrúm. Vörpun $f : X \to Y$ er samfelld í firðrúmaskilningi *þ.þ.a.a.* f sé samfelld í grannrúmaskilningi.

Athugasemd. X mengi og $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ tvö grannmynstur á X. Þá er vörpunin

$$\mathrm{id}_X : (X, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T}), x \mapsto x$$

samfelld *þ.þ.a.a.* $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$, þ.e.a.s. $\mathcal{T}'$ sé fínni en $\mathcal{T}$.

Setning 1.9.1. *X og Y grannrúm og $f : X \to Y$. Þá eru eftirfarandi skilyrði jafngild:*

(i) f er samfelld.

(ii) Fyrir öll $A \subseteq X$ er $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

(iii) Fyrir sérhvert lokað hlutmengi B í Y er $f^{-1}(B)$ lokað í X.

Sönnun. *(i)⇒(ii):* Látum $A \subseteq X$ og $x \in \overline{A}$. Viljum sýna að $f(x) \in \overline{f(A)}$. Ef V er grennd um $f(x)$ í Y, þá er $f^{-1}(V)$ grennd um x í X (vegna þess að f er samfelld), svo að $f^{-1}(V) \cap A \neq \emptyset$ (vegna þess að $x \in \overline{A}$). Veljum punkt y úr $f^{-1}(V) \cap A$. Þá er $f(y) \in f(f^{-1}(V) \cap A) = V \cap f(A)$ og þar með er $V \cap f(A) \neq \emptyset$. Við höfum því sýnt að $f(x) \in \overline{f(A)}$.

(ii)⇒(iii): Látum B vera lokað í Y og sýnum að $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(B)$. Ljóst er að $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ svo ef $x \in \overline{f^{-1}(B)}$, þá gildir að

$$f(x) \in f(\overline{f^{-1}(B)}) \underset{\text{(ii)}}{\subseteq} \overline{f(f^{-1}(B))} \subseteq \overline{B} = B.$$

Þar með er $x \in f^{-1}(B)$.

(iii)⇒(i): Látum V vera opið í Y. Viljum sýna að $f^{-1}(V)$ sé opið í X. Nú er $Y \setminus V$ lokað í Y svo að

$$X \setminus f^{-1}(V) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(V) = f^{-1}(Y \setminus V)$$

er lokað í X og því $f^{-1}(V)$ opið í X. □

Skilgreining 1.9.2. X, Y grannrúm og $f : X \to Y$. Við segjum að f sé *samfelld í punkti* x_0 úr X ef fyrir sérhverja grennd V um $f(x_0)$ í Y er til grennd U um x_0 í X þannig að $f(U) \subseteq V$.

Athugasemd (Æfing). X, Y grannrúm og $f : X \to Y$. Vörpunin f er samfelld *þ.þ.a.a.* f sé samfelld í sérhverjum punkti úr X.

1.10 Grannmótanir

Skilgreining 1.10.1. X og Y grannrúm og $f : X \to Y$ *gagntæk* vörpun. Ef bæði f og f^{-1} eru samfelldar, þá er f kölluð *grannmótun* (þ.e. einsmótun milli grannrúma).

Dæmi 1.10.1. (1) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$ er grannmótun ef n er oddatala.

(2) $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ er grannmótun.

Skilgreining 1.10.2. X og Y grannrúm og $f : X \to Y$ samfelld og eintæk. Þá fæst gagntæk vörpun $\hat{f} : X \to f(X)$. Hún er *samfelld*, en ef hún er grannmótun þá kallast f *greyping* og við segjum að f *greypi* X í Y.

Athugasemd. Hér er $f(X)$ að sjálfsögðu með *hlutrúmsgrannmynstrið.*

Dæmi 1.10.2. (1) $f :]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2, f(t) := (\cos(t), \sin(t))$ er greyping.

(2) $g : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2, g(t) := (\cos(t), \sin(t))$ er *ekki* greyping: T.d. er $f\left([0, \pi[\right)$ ekki opið í $f\left([0, 2\pi[\right)$.

1.11 Reglur varðandi samfelldni

Setning 1.11.1. *X, Y og Z grannrúm.*

(i) Ef $y_0 \in Y$, þá er vörpunin $f : X \to Y, f(x) := y_0$ fyrir öll $x \in X$, samfelld.

(ii) Ef A er hlutrúm í X, þá er ívarpið $j : A \hookrightarrow X, a \mapsto a$ samfellt.

(iii) Ef $f : X \to Y$ og $g : Y \to Z$ eru samfelldar, þá er $g \circ f : X \to Z$ samfelld.

(iv) Ef $f : X \to Y$ er samfelld og A er hlutrúm í X, þá er einskorðunin $f|_A : A \to Y$ samfelld.

(v) Ef $f : X \to Y$ og B hlutrúm í Y þannig að $f(X) \subseteq B$, þá er vörpunin $g : X \to B, g(x) := f(x)$ samfelld.

(v') Ef $f : X \to Y$ er samfelld og Y er hlutrúm í Z, þá er $h : X \to Z, x \mapsto f(x)$ samfelld.

(vi) Vörpunin $f : X \to Y$ er samfelld þ.þ.a.a. *til sé opin þakning $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ á X þannig að $f|_{U_\alpha} : U_\alpha \to Y$ sé samfelld fyirr öll α úr I.*

Sönnun. (i) Ef V er opið í Y þá fæst

$$f^{-1}(V) = \begin{cases} \emptyset, & \text{ef } y_0 \notin V, \\ X, & \text{ef } y_0 \in V. \end{cases}$$

(ii) Fyrir sérhvert opið U í X er $j^{-1}(U) = A \cap U$ opið í A skv. skilgreiningu á hlutrúmsgrannmynstrinu.

(iii) V opið í Z. Þá fæst

$$(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$$

opið í x vegna þess að f og g eru samfelldar.

(iv) Skv. (ii) er ívarpið $j_A : A \hookrightarrow X$ samfellt svo skv. (iii) er $f|_A = f \circ j_A$ samfelld.

(v) Fyrir U opið í B er til opið mengi V í Y þannig að $U = B \cap Y$. En þar sem $f(X) \subseteq B$, þá gildir að

$$g^{-1}(U) = g^{-1}(B \cap V) = f^{-1}(B \cap V) = f^{-1}(V)$$

sem er opið í X.

(v') $h = j_Y \circ f$, þar sem $j_Y : Y \hookrightarrow Z$ er ívarpið. Þar með er h samfelld skv. (iii).

(vi) Vitum: Ef f samfelld og $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ opin þakning, þá er $f|_{U_\alpha} : U_\alpha \to Y$ samfelld fyrir öll $\alpha \in I$. Öfugt, látum $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ vera opna þakningu á X og sýnum að f sé samfelld ef $f|_{U_\alpha}$ er samfelld $\forall\, \alpha \in I$. Sönnum á tvo vegu:

1. sönnun: Látum $x \in X$ og V vera grennd um $f(x)$ í Y. Til er α úr I þannig að $x \in U_\alpha$ og þar sem $f|_{U_\alpha}$ er samfelld þá er til opin grennd W um x í U_α þannig að $f|_{U_\alpha}(W) \subseteq V$. En U_α er opið í X svo að W er opin grennd um x í X og $f|_{U_\alpha}(W) = f(W)$.

2. sönnun: Látum V vera opið mengi í Y. Þá fæst

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap \underbrace{\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha}_{X} = \bigcup_{\alpha \in I} (f^{-1}(V) \cap U_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} \left(f|_{U_\alpha}\right)^{-1}(V)$$

sem er opið í X. ☐

Setning 1.11.2 (Samlíming)**.** *X grannrúm og A, B lokuð hlutmengi í X þannig að $X = A \cup B$. Látum Y vera grannrúm og $f : A \to Y$, $g : B \to Y$ vera samfelldar. Ef $f|_{A\cap B} = g_{A \cap B}$, þá er vörpunin $h : X \to Y$,*

$$h(x) := \begin{cases} f(x) & \text{ef } x \in A \\ g(x) & \text{ef } x \in B \end{cases}$$

samfelld.

Sönnun. Fyrir sérhvert lokað mengi C í Y er

$$\begin{aligned} h^{-1}(C) &= h^{-1}(C) \cap (A \cup B) \\ &= (h^{-1}(C) \cap A) \cup (h^{-1}(C) \cap B) \\ &= (h|_A)^{-1}(C) \cup (h|_B)^{-1}(C) \\ &= f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C) \end{aligned}$$

sem er lokað í X vegna þess að $f^{-1}(C)$ er lokað í A sem er lokað í X og $g^{-1}(C)$ er lokað í B, sem er lokað í X. ☐

Setning 1.11.3. *A, X, Y grannrúm, $\pi_1 : X \times Y \to X$ og $\pi_2 : X \times Y \to Y$ venjulegu ofanvörpin. Vörpun $f : A \to X \times Y$ er samfelld* þ.þ.a.a. *$\pi_1 \circ f$ og $\pi_2 \circ f$ séu samfelldar.*

Sönnun. Ef f er samfelld, þá eru $\pi_1 \circ f$ og $\pi_2 \circ f$ samfelldar vegna þess að π_1 og π_2 eru samfelldar.

Öfugt, ef $\pi_1 \circ f$ og $\pi_2 \circ f$ eru samfelldar, þá gildir um sérhvert grunnmengi $U \times V$ þar sem U er opið í X og V er opið í Y, að

$$f^{-1}(U \times V) = (\pi_1 \circ f)^{-1} \cap (\pi_2 \circ f)^{-1}(V)$$

sem er opið í A. ☐

1.12 Kartesísk margfeldi grannrúma

Skilgreining 1.12.1. $(X_\alpha)_{\alpha \in J}$ fjölskylda af grannrúmum.

(i) Mengin $\prod_{\alpha \in J} U_\alpha$ þar sem U_α er opið í X_α mynda grunn fyrir grannmynstur á $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$. Umrætt grannmynstur kallast *kassagrannmynstrið* á $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$.

(ii) Setjum fyrir sérhvert $\beta \in J$

$$\mathcal{S}_\beta := \left\{ \pi_\beta^{-1}(U_\beta) : U_\beta \text{ opið í } X_\beta \right\}$$

og $\mathcal{S} := \bigcup_{\beta \in J} \mathcal{S}_\beta$. Grannmynstrið sem er framleitt af hlutgrunninum $\mathcal{S}$ kallast *faldgrannmynstrið* á $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$. Mengið $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ með þessu grannmynstri kallast *faldrúm* grannrúmanna X_α.

Athugasemd. (i) Þar sem grunnur er búinn til út frá hlutgrunni með því að taka öll *endanleg* sniðmengi, þá fæst:

- Grunnur fyrir kassagrannmynstrið samanstendur af öllum hlutmengjum af gerðinni $\prod_{\alpha \in J} U_\alpha$ með U_α opið í X_α.
- Grunnur fyrir faldgrannmynstrið samanstendur af öllum hlutmengjum af gerðinni $\prod_{\alpha \in J} U_\alpha$, þar sem U_α er opið í X_α og $U_\alpha = X_\alpha$ fyrir öll nema endanlega mörg α úr J (m.ö.o. fyrir næstum öll).

(ii) Kassagrannmynstrið og faldgrannmynstrið eru eins ef J er *endanlegt* mengi.

Setning 1.12.1. *$(X_\alpha)_{\alpha \in J}$ fjölskylda grannrúma og $\mathcal{B}_\alpha$ grunnur fyrir grannmynstur á X_α fyrir sérhvert $\alpha \in J$.*

(i) Mengin $\prod_{\alpha \in J} B_\alpha$ þar sem $B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha \; \forall \alpha \in J$ mynda grunn fyrir kassagrannmynstrið á $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$.

(ii) Mengin $\prod_{\alpha \in J} B_\alpha$, þar sem $B_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha \cup \{X_\alpha\} \;\; \forall \alpha$ og $B_\alpha = X_\alpha$ fyrir næstum öll α úr J, mynda grunn fyrir faldgrannmynstrið.

Sönnun. Æfing! $\square$

Setning 1.12.2. *$(X_\alpha)_{\alpha \in J}$ fjölskylda af grannrúmum. Faldrúmið $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ uppfyllir eftirfarandi allsherjareiginleika:*

Fyrir sérhvert $\beta \in J$ látum við $\pi_\beta : \prod X_\alpha \to X_\beta$ tákna náttúrlega ofanvarpið, þ.e.a.s. ef $(x_\alpha)_{\alpha \in J} \in \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$, þá $\pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha \in J}) = x_\beta$. Tvenndin $\left(\prod_{\alpha \in J} X_\alpha, (\pi_\alpha)_{\alpha \in J}\right)$ fullnægir:

> *Látum Z vera grannrúm og $f : Z \to \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$. Þá er f samfelld* þ.þ.a.a. *vörpunin $\pi_\alpha \circ f$ sé samfelld fyrir sérhvert $\alpha \in J$.*

Sönnun. Ef $f : Z \to \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ er samfelld, þá er $f_\alpha := \pi_\alpha \circ f$ samfelld fyrir öll α vegna þess að π_α er augljóslega samfelld.

Ef f_α er samfelld fyrir öll α úr J og U er opið í X_β fyrir sérhvert β úr J, þá er $f^{-1}(\pi_\beta^{-1}(U)) = f_\beta^{-1}(U)$ opið í Z. En mengi af gerðinni $\pi_\beta^{-1}(U)$ mynda hlutgrunn fyrir faldgrannmynstrið, svo að f er samfelld. $\square$

Með allsherjareiginleika einhvers fyrirbrigðis er átt við eiginleika sem ákvarðar það burtséð frá *einkvæmt ákvarðaðri* einsmótun.

Gerum ráð fyrir að $(Y, (g_\alpha)_{\alpha \in J})$ sé þannig að Y sé grannrúm og fyrir sérhvert α úr J sé $g_\alpha : Y \to X_\alpha$ samfelld og um sérhvert grannrúm Z og sérhverja vörpun $f : Z \to Y$ gildi að hún er samfelld *þ.þ.a.a.* allar varpanirnar $g_\alpha \circ f$ séu samfelldar. Þá er til nákvæmlega ein grannmótun $h : Y \to \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ sem uppfyllir $g_\alpha = \pi_\alpha \circ h$ fyrir öll α úr J.

Sönnun.

$$\begin{tikzcd}
& X_\beta \\
Y \arrow[ur, bend left, "g_\beta"] \arrow[r, "\exists! g"] \arrow[dr, bend right, "g_\gamma"'] & \prod_{\alpha \in J} X_\alpha \arrow[u, "\pi_\beta"'] \arrow[d, "\pi_\gamma"'] \\
& X_\gamma
\end{tikzcd}$$

Ath. Það er víst eitthvað vitlaust í þessari efnisgrein eftir síðustu sönnun. Jón Ingólfur lætur okkur fá dæmi úr þessu. ☐

Setning 1.12.3. *Látum A_α vera hlutrúm í X_α fyrir sérhvert α úr J.*

(i) $\prod_{\alpha\in J}$ með kassagrannmynstrinu eru hlutrúm í $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ með kassagrannmynstrinu.

(ii) Faldrúmið $\prod_{\alpha\in J} A_\alpha$ er hlutrúm í faldrúminu $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$.

Sönnun. Æfing. ☐

Setning 1.12.4. *$(X_\alpha)_{\alpha\in J}$ fjölskylda af Hausdorff-rúmum, þá er $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ Hausdorff-rúm, hvort sem er í kassa- eða faldgrannmynstrinu.*

Sönnun. Æfing (nægir að sanna fyrir faldgrannmynstrið, því það er fínna). ☐

Dæmi 1.12.1. Setjum $\mathbb{R}^\omega := \prod_{n\in\mathbb{N}^*} X_n$ með $X_n = \mathbb{R}$ fyrir öll n. Setjum $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\omega, t \mapsto (t, t, t, \dots)$ þ.e.a.s. $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ með $f_n(t) = t$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}^*$ og öll t úr $\mathbb{R}$. Ljóst er að f er samfelld ef $\mathbb{R}^\omega$ er með faldgrannmynstrið. f er hins vegar ekki samfelld ef $\mathbb{R}^\omega$ er með kassagrannmynstrið:

$$V := \left]-1, 1\right[\times \prod_{n\geq 1} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$$

er opið í kassagrannmynstrinu, en

$$f^{-1}(V) = \bigcap_{n\geq 1} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\}$$

sem er ekki opið í $\mathbb{R}$.

1.13 Grannfræði firðrúma

Látum (X, d) vera firðrúm. Munum að opnu mengin í X (í firðrúmaskilningi) mynda grannmynstur, þar sem opnu kúlurnar mynda grunn. Það kallast *grannmynstrið sem d framleiðir.*

Skilgreining 1.13.1. Grannrúm X er sagt *firðanlegt* ef til er firð á X sem framleiðir grannmynstrið.

Skilgreining 1.13.2. (X, d) firðrúm. Hlutmengi A í X er sagt *takmarkað* ef $\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(a, b) : a, b \in A\} < +\infty$.

Athugasemd. Takmörkun er ekki grannfræðilegt hugtak, þ.e.a.s. grannmynstur á tilteknu mengi getur verið framleitt á ólíkum firðum þannig að ákveðið hlutmengi sé takmarkað í sumum þeirra, en ekki í öðrum.

Setning 1.13.1. *(X, d) firðrúm og setjum*

$$\overline{d} : X \times X \to \mathbb{R}_+, (x, y) \mapsto \min\{d(x, y), 1\}.$$

Þá er $\overline{d}$ firð á X sem framleiðir sama grannmynstur og d á X.

Skilgreining 1.13.3. Firðin $\overline{d}$ kallast *staðlaða takmarkaða firðin* sem tilheyrir d.

Sönnun á síðustu setningu. Ljóst að $\overline{d}(x, y) \geq 0$ og að $\overline{d}(x, y) = \overline{d}(y, x)$ fyrir öll x, y úr X. Sýnum nú að fyrir öll x, y, z úr X gildi

$$\overline{d}(x, z) \leq \overline{d}(x, y) + \overline{d}(y, z).$$

Ef $d(x, y) \geq 1$ eða $d(y, z) \geq 1$, þá er $\overline{d}(x, z) \leq 1 \leq \overline{d}(x, y) + \overline{d}(y, z)$. Ef hins vegar $d(x, y) < 1$ og $d(y, z) < 1$, þá fæst

$$\overline{d}(x, z) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = \overline{d}(x, y) + \overline{d}(y, z).$$

Ennfremur gildir: Ef $\varepsilon > 0$, þá $B_d(x, \varepsilon) \subseteq B_{\overline{d}}(x, \varepsilon)$ og ef $\delta \leq \min\{\varepsilon, 1\}$ þá $B_{\overline{d}}(x, \delta) \subseteq B_d(x, \varepsilon)$. Þar með er sýnt að firðirnar framleiða sama grannmynstur. ☐

Skilgreining 1.13.4. Látum $(V, \|\cdot\|)$ vera staðalrúm (staðlað vigurrúm) og skilgreinum firð á V með $d : V \times V \to [0, +\infty[\,, (x, y) \mapsto \|x-y\|$. Við segjum að grannmynstrið sem þessi firð framleiðir sé *framleitt af staðlinum.* Segjum að tveir staðlar séu *jafngildir* ef þeir framleiða sama grannmynstrið.

Setning 1.13.2. *$(V, \|\cdot\|)$ staðlað rúm.*

(i) Línuleg vörpun $L : V \to V$ er samfelld þ.þ.a.a. *til sé fasti $k > 0$ þ.a. $\|L(x)\| \leq k \cdot \|x\|$ fyrir öll x úr V.*

(ii) Staðall $\|\cdot\|_1$ á V er jafngildur $\|\cdot\|$ þ.þ.a.a. *til séu fastar $m > 0$ og $M > 0$ þ.a. $m \cdot \|x\| \leq \|x\|_1 \leq M \cdot \|x\|$ fyrir öll x úr V.*

(iii) Allir staðlar á endanlega víðu $\mathbb{R}$-vigurrúmi eru jafngildir.

Sönnun. Æfing (sjá dæmablað 4). □

Setning 1.13.3. *Sérhver staðall á $\mathbb{R}^n$ framleiðir faldgrannmynstrið.*

Sönnun. Nóg að sanna niðurstöðuna fyrir staðalinn

$$\|x\| := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

fyrir sérhvert $x = (x_1, \dots, x_n)$ úr $\mathbb{R}^n$. Látum $\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty[$ vera tilheyrandi firð. Þá gildir fyrir sérhvert $x = (x_1, \dots, x_n)$ úr $\mathbb{R}^n$ og sérhvert $\varepsilon > 0$ að

$$B_\rho(x, \varepsilon) = \,]x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon[\, \times \cdots \times \,]x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon[$$

tilheyrir grunninum sem framleiðir faldgrannmynstrið. Hins vegar gildir fyrir sérhvert hlutmengi

$$B = \,]a_1, b_1[\, \times \cdots \times \,]a_n, b_n[$$

úr umræddum grunni og $x = (x_1, \dots, x_n)$ úr B að til eru $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0$ þ.a.

$$]x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon[\, \subseteq \,]a_i, b_i[$$

fyrir $i = 1, \dots, n$. Setjum $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ og fáum $B_\rho(x, \varepsilon) \subseteq B$. □

Skilgreining 1.13.5. Látum d vera venjulegu firðina á $\mathbb{R}$ og $\overline{d}$ vera tilheyrandi staðlaða takmarkaða firð. Fyrir mengið J skilgreinum við firðina $\overline{\rho}$ á $\mathbb{R}^J$ með

$$\overline{\rho}(x, y) := \sup\left\{\overline{d}(x_\alpha, y_\alpha) : \alpha \in J\right\}$$

þar sem $x = (x_\alpha)_{\alpha \in J}$ og $y = (y_\alpha)_{\alpha \in J}$. Köllum þessa firð *jafnmælisfirðina* á $\mathbb{R}^J$ og tilheyrandi grannmynstur *jafnmælisgrannmynstrið* á $\mathbb{R}^J$.

Setning 1.13.4. Jafnmælisgrannmynstrið *á $\mathbb{R}^J$ er stranglega fínna en faldgrannmynstrið ef J er óendanlegt mengi.*

Sönnun. Látum $\prod_{\alpha \in J} U_\alpha$ vera grunnmengi fyrir faldgrannmynstrið og $x = (x_\alpha)_{\alpha \in J} \in \prod_{\alpha \in J} U_\alpha$. Látum $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ vera þau stök ú J þ.a. $U_\alpha \neq \mathbb{R}$. Þá eru til $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0$ þ.a. $B_{\overline{d}}(X_{\alpha_i}, \varepsilon_i) \subseteq U_{\alpha_i}$ fyrir $i = 1, \dots, n$. Setjum $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ og fáum að $B_{\overline{\rho}}(x, \varepsilon) \subseteq \prod_{\alpha \in J} U_\alpha$. Hins vegar er ljóst að $B_{\overline{\rho}}(x, 1/2)$ getur ekki innihaldið mengi af gerðinni $\prod_{\alpha \in J} U_\alpha$ þar sem $U_\alpha = \mathbb{R}$ fyrir eitthvert α úrJ. □

Setning 1.13.5. *Látum $\overline{d}$ vera stöðluðu takmörkuðu firðina á $\mathbb{R}$ og setjum*

$$D : \mathbb{R}^\omega \times \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sup\left\{\frac{\overline{d}(x_i, y_i)}{i} : i \in \mathbb{N}^*\right\},$$

þar sem $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ og $y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$. Þá er D firð sem framleiðir faldgrannmynstrið á $\mathbb{R}^\omega$.

Sönnun. (1) *D er firð:* Ljóst að $D(x,y) \geq 0$, $D(x,y) = 0$ þ.þ.a.a. $x = y$; og $D(x,y) = D(y,x)$ fyrir öll x, y úr $\mathbb{R}^\omega$. Látum $x = (x_i)$, $y = (y_i)$ og $z = (z_i)$. Þá gildir fyrir sérhvert i úr $\mathbb{N}^*$ að

$$\frac{\overline{d}(x_i, z_i)}{i} \leq \frac{\overline{d}(x_i, y_i)}{i} + \frac{\overline{d}(y_i, z_i)}{i} \leq D(x,y) + D(y,z)$$

og þar með $D(x,z) = \sup_{i \in \mathbb{N}^*} \frac{\overline{d}(x_i, z_i)}{i} \leq D(x,y) + D(y,z)$.

(2) *D framleiðir faldgrannmynstrið:* Látum U vera opið í firðgrannmynstrinu og $x = (x_i) \in U$. Sýnum að til sé opið mengi V í faldgrannmynstrinu þ.a. $x \in V \subseteq U$. Veljum ε-kúlu $B_D(x, \varepsilon)$ og veljum svo N úr $\mathbb{N}^*$ þannig að $1/N < \varepsilon$. Setjum

$$V :=]x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon[\times \cdots \times]x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots$$

Fyrir öll $y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ úr $\mathbb{R}^\omega$ og öll $i \geq N$ gildir að

$$\frac{\overline{d}(x_i, y_i)}{i} \leq \frac{1}{N},$$

svo að

$$D(x,y) \leq \max \left\{ \frac{\overline{d}(x_1, y_1)}{1}, \frac{\overline{d}(x_2, y_2}{2}, \ldots, \frac{\overline{d}(x_N, y_N)}{N}, \frac{1}{N} \right\}.$$

Þar með er $D(x,y) < \varepsilon$ fyri öll y úr V og því $V \subseteq B_D(x, \varepsilon)$.

Öfugt, látum $U = \prod_{n \in \mathbb{N}^*} U_n$ vera grunnmengi fyrir faldgrannmynstrið á $\mathbb{R}^\omega$ og $x = (x_n)$ vera stak úr U. Viljum sýna að til sé opið mengi í firðgrannmynstrinu þ.a. $x \in V \subseteq U$. Látum I vera endanlegt hlutmengi í $\mathbb{N}^*$ þ.a. $U_n = \mathbb{R}$ ef $n \notin I$. Fyrir sérhvert n úr I veljum við ε_n þ.a. $0 < \varepsilon_n < 1$ og $]x_n - \varepsilon_n, x_n + \varepsilon_n[\subseteq U_n$. Setjum svo $\varepsilon := \min\{\varepsilon_n / n : n \in I\}$. Þá er fljótséð að $B_D(x, \varepsilon) \subseteq U$. □

Skilgreining 1.13.6. Runa (x_n) í grannrúmi X er sögð *samleitin að punkti x úr X* ef fyrir sérhverja grennd U um x er til jákvæð heil tala N þ.a. $x_n \in U$ fyrir öll $n \geq N$. Köllum þá x *markgildi* rununnar. Táknum þetta $x_n \longrightarrow x$ eða $\lim_{n \to +\infty} x_n = x$.

Athugasemd. Í Hausdorff-rúmi getur runa í mesta lagi haft eitt markgildi.

Skilgreining 1.13.7. X grannrúm og $x \in X$.

(i) Setjum að x hafi *teljanlegan grenndagrunn í X* eða að X hafi *teljanlegan grenndagrunn um x* ef til er safn $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ af grenndum um x þannig að sérhver grennd U um x innihaldi a.m.k. eitt U_n.

(ii) Segjum að X fullnægi *fyrstu teljanleika-frumsendu (f.t.f)* ef X hefur teljanlegan grenndagrunn um sérhvern punkt sinn.

Athugasemd. Firðrúm fullnægir f.t.f.

Setning 1.13.6. *X grannrúm, $A \subseteq X$ og $x \in X$.*

(i) Ef til er runa (x_n) í A þ.a. $x_n \longrightarrow x$, þá er $x \in \overline{A}$.

(ii) Ef X fullnægir f.t.f., þá gildir öfugt: Ef $x \in \overline{A}$, þá er til runa (x_n) í A þ.a. $x_n \longrightarrow x$.

Sönnun. (i) Látum (x_n) vera runu í A þ.a. $x_n \longrightarrow x$. Þá inniheldur sérhver grennd um x punkt úr A svo að $x \in \overline{A}$.

(ii) G.r.f. að X uppfylli f.t.f. og $x \in \overline{A}$. Látum $(U_n)_{n \geq 1}$ vera teljanlegan grenndagrunn um x í X og setjum $U'_n := U_1 \cap \cdots \cap U_n$ fyrir öll $n \geq 1$. Veljum svo fyrir sérhvert n punkt x_n úr $A \cap U'_n$. Þá er ljóst að $x_n \longrightarrow x$. □

Setning 1.13.7. *X, Y grannrúm og g.r.f. að X fullnægi f.t.f. Vörpun $f : X \to Y$ er samfelld* þ.þ.a.a. *um sérhverja samleitna runu (x_n) í X gildi að*

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \to \infty} x_n\right) \tag{1.1}$$

Sönnun. G.r.f. að f sé samfelld, $x_n \longrightarrow x$, og V sé grennd um $f(x)$ í Y. Þá er $f^{-1}(V)$ grennd um x (vegna þess að f er samfelld), svo að til er N þ.a. $x_n \in f^{-1}(V)\ \forall n \geq N$ og þar með $f(x_n) \in V\ \forall n \geq N$.

Öfugt, g.r.f. að um allar samleitnar runur (x_n) í X gildi (1.1). Látum C vera lokað mengi í Y og $x \in \overline{f^{-1}(C)}$. Viljum sýna að $x \in f^{-1}(C)$. Veljum runu (x_n) úr $f^{-1}(C)$ þ.a. $x_n \longrightarrow x$. Þá gildir að $f(x_n) \longrightarrow f(x)$, og þar með er $f(x) \in C$ vegna þess að C er lokað, og þar með er $x \in f^{-1}(C)$. □

Setning 1.13.8. *V staðalrúm (yfir $\mathbb{R}$). Þá eru varpanirnar $\mathbb{R} \times V \to V, (\lambda, x) \mapsto \lambda x$ og $V \times V \to V, (x, y) \mapsto x + y$ samfelldar ($\mathbb{R} \times V$ og $V \times V$ með faldgrannmynstri).*

Sönnun. Æfing. □

Setning 1.13.9. *X grannrúm og $f, g : X \to \mathbb{R}$ samfelldar. Þá eru $f + g$, $f - g$ og $f \cdot g$ frá X til $\mathbb{R}$ líka samfelldar.*

Sönnun. $h : X \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $h(x) := (f(x), g(x))$ er samfelld. Notum svo annars vegar að samskeyting samfelldra varpana er samfelld vörpun og hins vegar síðustu setningu. □

Skilgreining 1.13.8. X mengi, (Y, d) firðrúm og (f_n) runa af vörpunum frá X í Y. Við segjum að runan (f_n) sé *samleitin í jöfnum mæli* (j.m) að vörpun $f : X \to Y$ ef fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ er til jákvæð heil tala N þannig að $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ fyrir sérhvert x úr X og öll $n \geq N$.

Setning 1.13.10. *(f_n) runa af samfelldum vörpunum frá grannrúmi X yfir í firðrúm Y. Ef (f_n) er samleitin í j.m. að vörpun $f : X \to Y$, þá er f samfelld.*

Sönnun. (Þekkt) æfing. □

Dæmi 1.13.1. (1) $\mathbb{R}^\omega$ með kassagrannmynstrinu er *ekki* firðanlegt. Setjum

$$A := \{(x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\omega : x_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Þá er $\mathbf{0} = (0, 0, \dots) \in \overline{A}$ vegna þess að sé $\mathbf{0} \in B =]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[\times \cdots$, þá er $(\frac{1}{2}b_1, \frac{1}{2}b_2, \dots) \in B \cap A$. Hins vegar er ekki til nein runa í A sem hefur $\mathbf{0}$ sem markgildi: Látum $(\mathbf{a}_n)$ vera runu í A og skrifum $\mathbf{a}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{in}, \dots)$ með $a_{in} > 0\ \forall i$ og $\forall n$. Mengið $B' :=]-a_{11}, a_{11}[\times]-a_{22}, a_{22}[\times \cdots$ er þá grennd um $\mathbf{0}$ sem inniheldur ekki neitt $\mathbf{a}_n$, því að $a_{nn} \notin]-a_{nn}, a_{nn}[$ fyrir sérhvert n.

(2) $\mathbb{R}^J$ með faldgrannmynstrinu er ekki firðanlegt ef J er óteljanlegt. Látum J vera óteljanlegt og látum A vera hlutmengi allra $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ úr $\mathbb{R}^J$ þ.a. $x_\alpha = 0$ fyrir endanlega mörg α og $x_\alpha = 1$ fyrir hin α. Þá er $\mathbf{0} \in \overline{A}$: Ef $\prod_{\alpha \in J} U_\alpha$ er grunngrennd um $\overline{0}$ með $U_\alpha = \mathbb{R}$ fyrir öll α úr $J \setminus I$, þar sem I er endanlegt hlutmengi í J, þá eru allir punktar $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ úr A sem uppfylla $x_\alpha = 0$ ef $\alpha \in I$ líka í $\prod_{\alpha \in J} U_\alpha$.

Sýnum nú að engin runa í A hafi $\mathbf{0}$ sem markgildi: Látum $(\mathbf{a}_n)$ vera runu í A og skrifum $\mathbf{a}_n = (a_{n\alpha})_{\alpha \in J}$. Skilgreinum mengi $J_n := \{\alpha \in J : a_{n\alpha} = 0\}$. Þá er J_n endanlegt og því $\bigcup_n J_n$ teljanlegt, þar með er $J \setminus \bigcup_n J_n \neq \emptyset$. Veljum β úr $J \setminus \bigcup_n J_n$ og fáum $a_{n\beta} = 1$ fyrir öll n. Þar með inniheldur opna grenndin $\pi_\beta^{-1}(]-1, 1[)$ ekkert $\mathbf{a}_n$.

1.14 Deildagrannrúm

Upprifjun: X mengi, R jafngildisvensl á X. R skilgreinir *deildaskiptingu* á X (skiptingu ekki tómra hlutmengja X_i í X, $i \in I$, þ.a. $X_i \cap X_j = \emptyset$ ef $i \neq j$ og $\bigcup_{i \in I} X_i = X$). Öfugt, ef $(X_i)_{i \in I}$ er deildaskipting á X, þá skilgreinir hún jafngildisvensl R: Segjum að xRy þ.þ.a.a. x og y séu úr sömu deild. Táknum með X/R mengið af deildunum, þ.e.a.a. $X/R = \{X_i : i \in I\}$, og ef $x \in X$, þá látum við $[x]$ tákna tilheyrandi deild.

Skilgreining 1.14.1. Látum X vera grannrúm og R vera jafngildisvensl á X. Látum $\pi : X \to X/R$ vera ofanvarpið á deildamengið sem R skilgreinir. Skilgreinum grannmynstur á X/R með því að $U \subseteq X/R$ sé opið *þ.þ.a.a.* $\pi^{-1}(U)$ sé opið í X. Köllum þetta *deildagrannmynstrið* á X/R og segjum að X/R sé *deildagrannrúm X m.t.t. R.*

Athugasemd. Deildagrannmynstrið á X/R er *fínasta* grannmynstrið á X/R þ.a. ofanvarpið $\pi : X \to X/R$ sé samfellt!

Setning 1.14.1. *Y grannrúm og X, R eins og áður. Vörpun $f : X/R \to Y$ er samfelld* þ.þ.a.a. *$f \circ \pi : X \to Y$ sé samfelld.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f\circ\pi"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/R \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Sönnun. Ef V er opið í Y, þá er $f^{-1}(V)$ opið í X/R *þ.þ.a.a.* $(f \circ \pi)^{-1}(V) = \pi^{-1}(f^{-1}(V))$ sé opið í X. □

Fylgisetning 1.14.1. *Ef Y er grannrúm (X, π, R eins og áður) og $f : X \to Y$ er samfelld og föst á trefjum π (þ.e. ef xRy, þá $f(x) = f(y)$) þá er ótvírætt ákvarðaða vörpunin $\tilde{f} : X/R \to Y$ líka samfelld ($\tilde{f} = f \circ \pi$).*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/R \arrow[ur, "\exists!\,\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Sönnun. Leiðir beint af síðustu setningu. □

Setning 1.14.2. *X og Y grannrúm, R jafngildisvensl á X. Ef $f : X \to Y$ er samfelld og föst á trefjum $\pi : X \to X/R$, þá getum við skrifað f sem samskeytingu þriggja samfelldra varpana:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi", "ofanv."'] & X/R \arrow[r, "g", "{[x]\mapsto f(x)}"'] & f(X) \arrow[r, hook, "\iota", "ívarpið"'] & Y \end{tikzcd}$$

Ennfremur gildir að vörpunin g er grannmótun þ.þ.a.a.

(i) $f(x) = f(y)$ þ.þ.a.a. *xRy (g gagntæk)*

(ii) $V \subseteq f(X)$ er opið í $f(X)$ (með hlutrúmsgrannmynstrinu) þ.þ.a.a. *$f^{-1}(V)$ sé opið í X (*þ.þ.a.a. *$g^{-1}(V)$ sé opið í X/R vegna $f^{-1}(V) = (g \circ \pi)^{-1}(V)$).*

Sönnun. Vörpunin g er ótvírætt ákvörðuð og samfelld. Skilyrði (i) þýðir að g sé gagntæk og skilyrði (ii) að g sé opin vörpun. □

Skilgreining 1.14.2. X, Y grannrúm og $f : X \to Y$. Skilgreinum jafngildisvensl R á X með $x_1 R x_2$ *þ.þ.a.a.* $f(x_1) = f(x_2)$. Við segjum að f sé *deildavörpun* ef f er samfelld og átæk og g-ið úr síðustu setningu er grannmótun, m.ö.o. ótvírætt ákvarðaða vörpunin $\tilde{f} : X/R \to Y$ sé grannmótun.

Skilgreining 1.14.3. Hlutmengi U í X er sagt *mettað* (*e.* saturated) m.t.t. jafngildisvensla R á X ef eftirfarandi gildir:

Ef $x \in U$ og xRy, þá $y \in U$.

Athugasemd. (i) Mengi U í X er mettað *þ.þ.a.a.* $\pi^{-1}(\pi(U)) = U$ þar sem $\pi : X \to X/R$.

(ii) X, Y grannrúm og $f : X \to Y$ átæk. Þá er f deildavörpun *þ.þ.a.a.* f sé samfelld og varpi opnum mettuðum mengjum á opin mettuð mengi (jafngilt því að V sé opið í Y *þ.þ.a.a.* $f^{-1}(V)$ sé opið í X).

Dæmi 1.14.1. (1) X og Y grannrúm, A hlutmengi í Y og $f : A \to X$ samfelld. Á sundurlæga sammenginu $X \coprod Y$ skilgreinum við vensl R með því að skilgreina deildirnar $\{y\}$ ef $y \in Y \setminus A$ og $\{y, f(y)\}$ ef $y \in A$ og $\{x\}$ ef $x \in X \setminus f(A)$. Deildagrannrúmið $(X \coprod Y)/R$ er táknað $X \cup_f Y$. Við segjum að $X \cup_f Y$ fáist með því að *líma Y við X með f*.

T.d. fæst áhugavert dæmi með því að skoða $X = \mathbb{R}^2$, $S^1 = \partial D(0,1)$, $f : S^1 \to \mathbb{R}^2, s \mapsto s$ og $Y = \overline{D(0,1)}$. Þá verður $X \cup_f Y$ grannmóta rúmi sem fæst með því að líma hálfkúlu í $\mathbb{R}^3$ með geisla 1 ofan á einingarskífuna í $\mathbb{R}^2$.

(2) Ef $X = \{*\}$ er einn punktur, þá skrifum við $\{*\} \cup_A Y$ í stað $\{*\} \cup_f Y$ og segjum að $\{*\} \cup_A Y$ fáist með því að *draga A saman í einn punkt.* T.d. $Y = [0,1]$ og $A = \{0,1\}$, þá er $\{*\} \cup_A Y \cong S'$ (grannmóta) vegna þess að $Y \to S'; t \mapsto e^{2\pi i t}$ er deildamótun.

Annað dæmi: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ og $A = S^1 = \partial D$. Þá er $\{*\} \cup_{S^1} D \cong S^2$ (sjáum það síðar).

Kafli 2

Samhengni og þjöppun

2.1 Samanhangandi rúm

Skilgreining 2.1.1. (1) *Strjált rúm* er grannrúm með strjála grannmynstrinu.

(2) *Opin tvískipting* á grannrúmi X er safn $\{U, V\}$ þar sem U og V eru opin í X, $X = U \cap V$, $U \cap V = \emptyset$ og $U, V \neq \emptyset$.

Setning 2.1.1. *Eftirfarandi skilyrði eru jafngild fyrir grannrúm X:*

(i) X á sér enga opna tvískiptingu.

(ii) Einu hlutmengin í X sem eru bæði opin og lokuð eru $\emptyset$ og X.

(iii) Sérhver samfelld vörpun frá X inn í strjált grannrúm er föst (þ.e.a.s. tekur bara eitt gildi).

Skilgreining 2.1.2. Grannrúm sem fullnægir skilyrðum (i), (ii) og (iii) að ofan er sagt *samanhangandi* (*e.* connected).

Sönnun á síðustu setningu. (i)⇒(ii): Ef U er opið og lokað í X, þá er $X \setminus U$ líka opið og lokað í X. Þá er ljóst að $\{U, X \setminus U\}$ er opin tvískipting á X nema $U = \emptyset$ eða $U = X$.

(ii)⇒(iii): Ef Y er strjált, $f : X \to Y$ samfelld og $x \in X$, þá er $f^{-1}(f(x))$ bæði opið og lokað í X. Þar með er $f^{-1}(f(x)) = X$ vegna þess að $x \in f^{-1}(f(x))$.

(iii)⇒(i): G.r.f. að $X = U \cup V$ þar sem U og V eru opin og $U \cap V = \emptyset$. Þá er vörpunin $f : X \to \{0, 1\}$,

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x \in U \\ 1 & x \in V, \end{cases}$$

samfelld og þá fasti. Þar með gildir að $U = \emptyset$ eða $V = \emptyset$. □

Dæmi 2.1.1. (1) Grannrúm, sem inniheldur bara einn punkt, er samanhangandi.

(2) Strjált rúm er samanhangandi *þ.þ.a.a.* það innihaldi bara einn eða engan punkt.

(3) Samanhangandi hlutrúm í $\mathbb{R}$ er bil ($\emptyset$ og $\mathbb{R}$ meðtalin).

(4) Samanhangandi hlutrúm í $\mathbb{Q}$ er $\emptyset$ eða einstökungur.

Setning 2.1.2. *X grannrúm.*

(i) Látum Y vera grannrúm og $f : X \to Y$ samfellda. Ef X er samanhangandi, þá er $f(X)$ samanhangandi.

(ii) Ef $A \subseteq X$ er samanhangandi og $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, þá er B samanhangandi.

(iii) Ef $X = \bigcup_{i \in I} A_i$ með A_i samanhangandi fyrir öll $i \in I$ og $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, þá er X samanhangandi.

Sönnun. (i) Ef $\{U, V\}$ opin tvískipting á $f(X)$, þá er $\left\{f^{-1}(U), f^{-1}(V)\right\}$ opin tvískipting á X.

(ii) Ef $f : \overline{B \to Y}$ er samfelld og Y strjált, þá er f föst á A og því einnig á B vegna þess að $f(B) \subseteq f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} = \overline{\{*\}} = \{*\}$.

(iii) Ef f er samfelld vörpun frá X inn í strjált rúm, þá er f föst á sérhverju A_i og þá einnig á X. □

Dæmi 2.1.2. $A := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, \sin(1/x) = y\right\}$ er samanhangandi vegna þess að A er mynd samfelldu vörpunarinnar

$$]0, +\infty[\ \to \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, \sin(x)),$$

þar með er lokun A í $\mathbb{R}^2$,

$$\overline{A} = A \cup \left\{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\right\},$$

líka samanhangandi.

Setning 2.1.3. *$A \neq \emptyset$ samanhangandi hlutrúm í grannrúmi X. Sammengi allra samanhangandi hlutrúma í X sem innihalda A er lokað og samanhangandi hlutrúm í X.*

Sönnun. Sammengi þessara rúma er samanhangandi vegna þess að sniðmengi þeirra er ekki tómt (sjá síðustu setningu) og þar sem lokun samanhangandi hlutrúms er samanhangandi, þá er það lokað (sjá síðustu setningu). □

Skilgreining 2.1.3. Ef x er punktur í grannrúmi X, þá táknum við með C_x sammengi allra samanhangandi hlutmengja í X sem hafa x sem stak. Köllum C_x *samhengisþátt x í X.*

Athugasemd. (i) Samhengisþættir X eru hér stök í safni allra samanhangandi hlutmengja í X (m.t.t. íveruröðunar[1]).

(ii) Samhengisþættir eru lokuð hlutmengi, en ekki endilega opin; t.d. $X := \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}^*\}$ sem hlutrúm í $\mathbb{R}$: $C_{1/n} = \{1/n\}$ bæði opið og lokað, en $C_0 = 0$ er ekki opið.

Skilgreining 2.1.4. Grannrúm X er sagt *algerlega ósamanhangandi* ef $C_x = \{x\}$ fyrir öll x úr X.

Dæmi 2.1.3. (1) Strjál grannrúm eru algerlega ósamanhangandi. Hins vegar þurfa algerlega ósamanhangandi grannrúm ekki að vera strjál; t.d. er X úr athugasemd (ii) að ofan ekki strjált.

(2) Ef $A \subseteq \mathbb{R}$ hefur þann eiginleika að fyrir sérhver x og y úr A er til z úr $\mathbb{R} \setminus A$ þ.a. $x < z < y$, þá er A algerlega ósamanhangandi. Þetta hefur m.a. í för með sér að $\mathbb{Q}$ er algerlega ósamanhangandi.

Setning 2.1.4. *Á grannrúmi X eru venslin*

$$x \sim y \text{ þ.þ.a.a. } x \in C_y$$

jafngildisvensl og deildarúmið $X/\sim$ er algerlega ósamanhangandi.

Sönnun. Æfing. □

Skilgreining 2.1.5. *Vegur* í grannrúmi X er samfelld vörpun $\gamma : [0, 1] \to X$. Segjum að γ tengi (saman) punktana $\gamma(0)$ og $\gamma(1)$. Köllum $\gamma(0)$ *upphafspunkt*, $\gamma(1)$ *lokapunkt*; þeir kallast saman *endapunktar* γ.

Skilgreining 2.1.6. Grannrúm er sagt *vegsamanhangandi* ef sérhverja punkta í X er unnt að tengja með vegi í X.

Setning 2.1.5. *Vegsamanhangandi grannrúm X er samanhangandi.*

Sönnun. Tökum a úr X. Fyrir sérhvert x úr X veljum við veg γ_x frá a til x. Þá er

$$X = \bigcup_{x \in X} \gamma_x([0, 1])$$

samanhangandi vegna þess að $\bigcup_{x \in X} \gamma_x([0, 1]) \ni a$ □

Skilgreining 2.1.7. *Vegsamhengisþáttur* punkts x í grannrúmi X er mengi allra punkta í X sem unnt er að tengja við x með vegi í X.

[1] röðunin í veldismenginu, $\mathcal{P}(X)$

Athugasemd. (i) Vegsamhengisþáttur x er innihaldinn í C_x en getur verið ólíkur og þarf ekki að vera lokaður.

(ii) Vegsamhengisþættir grannrúms X mynda deildaskiptingu á X.

Dæmi 2.1.4. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = \sin(1/x)\}$ er vegsamanhangandi, en $\overline{A}$ er ekki vegsamanhangandi (Sönnun: æfing).

Skilgreining 2.1.8. Segjum að grannrúm sé *staðsamanhangandi* [*staðvegsamanhangandi*] ef það hefur grunn af samanhangandi [vegsamanhangandi] opnum mengjum. Þetta þýðir að fyrir sérhvert opið mengi U og sérhvern punkt $x \in U$ er til [veg]samanhangandi opið mengi V þ.a. $x \in V \subseteq U$.

Dæmi 2.1.5. (1) Fyrir öll $n \geq 0$ er $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^0 = \{0\}$) vegsamanhangandi og staðvegsamanhangandi.

(2) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ er staðvegsamanhangandi, en ekki samanhangandi.

(3) $A = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}^*\}$. Hlutmengið $(A \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{0\})$ í $\mathbb{R}^2$ kallast *hárgreiðan*. Það er vegsamanhangandi, en ekki staðsamanhangandi.

Athugasemd. (i) Í staðsamanhangandi grannrúmi eru samhengisþættirnir bæði opin og lokuð hlutmengi.

(ii) Í staðvegsamanhangandi grannrúmi eru samhengisþættirnir opin mengi. En þar sem þeir mynda skiptingu þá eru þeir líka lokaðir.

Setning 2.1.6. *Grannrúm sem er samanhangandi og staðvegsamanhangandi er vegsamanhangandi.*

Sönnun. Sérhver vegsamhengisþáttur er bæði opið og lokað hlutmengi í samanhangandi rúmi. Þar með er hann allt rúmið. □

Fylgisetning 2.1.1. *Í staðvegsamanhangandi grannrúmi eru vegsamhengisþættirnir og samhengisþættirnir þeir sömu.*

Sönnun. Ljóst. □

Setning 2.1.7. $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ *fjölskylda af grannrúmum.*

(i) Ef X_α er samanhangandi fyrir öll $\alpha \in I$, þá er $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ samanhangandi.

(ii) Ef X_α er vegsamanhangandi fyrir öll $\alpha \in I$, þá er $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ vegsamanhangandi.

Sönnun. (i) Sjá dæmi 10 á bls. 152. (ii) Er létt æfing.

(ii) Létt æfing. □

2.2 Stefnan tekin á pólsku martröðina

Upprifjun

- Ef (X,d) firðrúm, þá kallast talan
$$\operatorname{diam}(X) := \sup\{d(x,y) : x, y \in X\}$$
þvermál X.
- Firðrúm er sagt fullkomið ef sérhver Cauchy-runa í því er samleitin.

Setning 2.2.1. *Ef $(X_n)_{n\geq 0}$ er minnkandi runa (m.t.t. $\subseteq$) af ekki-tómum, lokuðum hlutmengjum í fullkomnu firðrúmi X þ.a.*
$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(X_n) = 0,$$
þá inniheldur $\bigcup_{n\geq 0} X_n$ nákvæmlega einn punkt. l

Sönnun. Fyrir sérhvert $n \in \mathbb{N}$ tökum við a_n úr X_n. Sýnum að (a_n) sé Cauchy-runa: Látum $\varepsilon > 0$, þá er til N þ.a. $\operatorname{diam}(X_n) < \varepsilon$ fyrir öll $n \geq N$; ef $n, m \geq N$ er þá $a_n, a_m \in X_N$ og því $d(a_n, a_m) < \varepsilon$.

Setjum $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ og fáum auðveldlega að $a \in \bigcup X_n$ vegna þess að X_n-in eru lokuð. □

Setning 2.2.2 (Baire)**.** *Látum X vera fullkomið firðrúm og $(A_n)_{n\geq 0}$ vera teljanlega fjölskyldu af lokuðum mengjum sem hvert um sig hefur engan innri punkt, þ.e.a.s.* $\operatorname{int}(A) = \emptyset$. *Þá hefur $\bigcup_{n\geq 0} A_n$ engan innri punkt, þ.e.a.s.* $\operatorname{int}\left(\bigcup_{n\geq 0} A_n\right) = \emptyset$.

Sönnun. $\operatorname{int}\left(\bigcup_{n\geq 0} A_n\right) = \emptyset$ jafngildir því að $X \setminus \bigcup_{n\geq 0} A_n$ sé þétt í X, þ.e.a.s. skeri sérhvert opið og ekki tómt mengi í X. Látum U vera opið og ekki tómt mengi í X. Þá er $U \nsubseteq A_0$ og því $U \setminus A_0 \neq \emptyset$. Þar eð $U \setminus A_0$ er opið þá er til opin kúla B_1 í X með $\overline{B}_1 \subseteq U \setminus A_0$ og $\operatorname{diam}(B_1) < 1$. Nú er $B_1 \nsubseteq A_1$ svo að $B_1 \setminus A_1 \neq \emptyset$ og því er til opin kúla B_2 með $\overline{B}_2 \subseteq B_1 \setminus A_1$ og $\operatorname{diam}(B_2) < 1/2$. Með þrepun fæst minnkandi runa af kúlum $B_0 \supseteq B_1 \supseteq \cdots$ þ.a. $\overline{B}_{n+1} \cap A_n = \emptyset$ og $\operatorname{diam}(B_n) < 1/n$ fyrir öll $n \geq 0$. Skv. síðustu setningu er til x úr X þ.a. $\{x\} = \bigcap_{n\geq 0} \overline{B}_n$. Þá er $x \in U$ og $x \notin A_n$ fyrir öll $n \geq 0$, svo að $x \in U \cap \left(X \setminus \bigcup_{n\geq 0} A_n\right)$. □

Skilgreining 2.2.1. Grannrúm X er sagt vera *Baire-rúm* eða fullnægja *Baire-eiginleikanum* ef sérhver teljanleg fjölskylda af lokuðum hlutmengjum innri punkta í X hefur sammengi, sem hefur engan innri punkt.

Athugasemd. (i) Baire-eiginleikinn er oft orðaður svona: Ef $(A_n)_{n\geq 0}$ er runa af hlutmengjum í X þ.a. $\operatorname{int}(\overline{A}_n) = \emptyset \, \forall n$, þá er $X \setminus \bigcup_{n\geq 0} A_n$ þétt í X. Mengi B sem uppfyllir $\operatorname{int}(\overline{B}) = \emptyset$ kallast *hvergi þétt.*

(ii) Jafngild framsetning á Baire-setningu fæst með því að skoða fyllimengi: Ef $(U_n)_{n\geq 0}$ er runa af opnum þéttum hlutmengjum í firðrúmi X, þá er $\bigcap_{n\geq 0} U_n$ líka þétt.

Fylgisetning 2.2.1. *X fullkomið firðrúm og $X = \bigcup_{n\geq 0} A_n$ þar sem A_n er lokað fyrir öll n, þá er til n úr $\mathbb{N}$ þ.a.* $\operatorname{int}(A_n) \neq \emptyset$.

2.3 Pólsk martröð

Látum C tákna Cantor-mengið með hlutrúmsgrannmynstrinu. Það er búið til með því að taka burt opna miðþriðjunginn úr $[0,1]$, og síðan opnu miðþriðjungana úr bilunum sem eftir verða, o.s.frv.

Sérhverja tölu úr $[0,1]$ er unnt að setja fram sem $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ með $a_n \in \{0,1,2\}$. Cantor-mengið er myndað úr þeim tölum þar sem öll a_n-in eru annaðhvort 0 eða 2. Endapunktar allra miðþriðjunganna sem numdir eru burt mynda þétt hlutmengi í C, táknum það með C_{A}, og setjum $C_{\text{Ó}} := C \setminus C_{\text{A}}$ (hér stendur A fyrir aðgengilegur, Ó fyrir óaðgengilegur). Látum X_{A} vera keiluna yfir C_{A} með toppunkt $(\frac{1}{2}, 1)$, þ.e.a.s. mengi allra línustrika frá $(\frac{1}{2}, 1)$ til punktanna í C_{A}. Eins látum við $X_{\text{Ó}}$ tákna keiluna yfir $C_{\text{Ó}}$ með toppunkt $(\frac{1}{2}, 1)$. Látum Y_{A} vera mengi allra punkta (x,y) úr X_{A} þ.a. y sé ræð. Látum $Y_{\text{Ó}}$ vera mengi allra punkta (x,y) úr $X_{\text{Ó}}$ þ.a. y sé óræð *eða* 0 *eða* 1. Setjum $Y := Y_{\text{A}} \cup Y_{\text{Ó}}$.

Setning 2.3.1. *Y er samanhangandi, en $Y \setminus \{(\frac{1}{2}, 1)\}$ er algerlega ósamanhangandi.*

Fylgisetning 2.3.1. *Y er samanhangandi, en allir vegsamhengisþættir Y eru einstökungar.*

Við þurfum á eftirfarandi niðurstöðu að halda:

Hjálparsetning 2.3.1. *Y hlutmengi í firðrúmi X. Ef Y er* ekki *samanhangandi, þá eru til opin mengi U og V í X þ.a. $Y \subseteq U \cup V$, $U \cap Y \neq \emptyset$, $V \cap Y \neq \emptyset$ og $U \cap V = \emptyset$.*

Sönnun. Æfing. □

Sönnun á setningu 2.3.1. Beitum óbeinni sönnun; g.r.f. að U og V séu opin sundurlæg mengi í $\mathbb{R}^2$ þannig að $Y \subseteq U \cup V$ og $(\frac{1}{2}, 1) \in U$ og $V \cap Y \neq \emptyset$. Fyrir sérhvert $r > 0$ setjum við $W(r) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > r\}$ og fyrir sérhvert x úr C látum við $\ell(x)$ vera lokaða línustrikið sem tengir $(x,0)$ og $(\frac{1}{2}, 1)$. Skilgreinum (aðgreiningar-)fall $f : C \to [0,1]$ með

$$f(x) := \inf\{r : W(r) \cap \ell(x) \subseteq U\}.$$

Til hagræðis skilgreinum við svo fall

$$g : C \to [0,1]$$

með því að

$$(g(x), f(x)) \in \ell(x).$$

Tökum eftir

$$(g(x), f(x)) = \begin{cases} \text{hæsti punktur á } \ell(x)\text{, sem er ekki í } U, & \text{ef } \ell(x) \nsubseteq U. \\ (x, 0) & \text{ef } \ell(x) \subseteq U. \end{cases}$$

Þar með er $(g(x), f(x))$ hvorki í U né V ef $f(x) \neq 0$. Tökum einnig eftir að $f(x) > 0$ *þ.þ.a.a.* $\ell(x') \cap V \neq 0$ í grennd við x. Þetta þýðir að til er opið bil í $[0, 1]$ þ.a. $f(x) > 0$ fyrir öll x úr bilinu. Nú er C búið til með því að endurtaka í sífellu sömu aðgerðina (þ.e. brottnám miðþriðjunga), svo að umrætt opið bil inniheldur mengi C' sem er eins og C. Við getum því einfaldlega gert ráð fyrir að $f(x) > 0$ fyrir öll x úr C. Setjum

$$Z := \{(g(x), f(x)) : x \in C_{\text{Ó}}\}.$$

Nú er $Z \cap (U \cup V) = \emptyset$, og því $\overline{Z} \cap (U \cup V) = \emptyset$ vegna þess að $U \cup V$ er opið; sér í lagi $\overline{Z} \cap Y = \emptyset$. Einnig er ljóst að $\overline{Z}$ er innihaldið í keilunni $X_{\text{A}} \cup X_{\text{Ó}}$ yfir C vegna þess að hún er lokuð. Af þessu leiðir að fyrir (a, b) úr $\overline{Z}$ gildir:

- Ef b er óræð, þá er $(a, b) \in \ell(x)$ með $x \in C_{\text{A}}$.
- Ef b er ræð, þá er $(a, b) \in \ell(x)$ með $x \in C_{\text{Ó}}$.

Fyrir sérhverja ræða tölu q er mengið $\overline{Z} \cap \{y = q\}$ lokað og því er keiluofanvarp þess á x-ásinn líka lokað, þ.e.a.s. mengið

$$Z(q) := \{x \in C : \ell(x) \cap \{y = q\} \cap \overline{Z} \neq \emptyset\}$$

er lokað. Fyrir x úr $C_{\text{Ó}}$ er $f(x)$ ræð svo að $x \in Z(f(x))$ og þar með er

$$C_{\text{Ó}} = \bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ 0 \leq q < 1}} Z(q).$$

Fáum þá

$$C = C_{\text{Ó}} \coprod C_{\text{A}} = \underbrace{\left(\bigcup_{z \in \mathbb{Q}} Z(q) \right) \cup \left(\bigcup_{a \in C_{\text{A}}} \{a\} \right)}_{\substack{\text{teljanlegt sammengi} \\ \text{lokaðra hlutmengja í } C}}.$$

Skv. Baire-setningu er til q úr $\mathbb{Q}$ þ.a. $Z(q)$, og þar með $C_{\text{Ó}}$, innihaldi opið mengi í C (C er þjappað firðrúm og því fullkomið), en það er í mótsögn við að C_{A} er þétt í C og $C_{\text{A}} \cap C_{\text{Ó}} = \emptyset$.

Sýnum að $Y \setminus \{(\frac{1}{2}, 1)\}$ sé algerlega ósamanhangandi: Keiluofanvarpið $\pi : Y \setminus \{(\frac{1}{2}, 1)\} \to \mathbb{R}$ er samfelld vörpun. Látum B vera samanhangandi og ekki tómt hlutmengi á $Y \setminus \{(\frac{1}{2}, 1)\}$. Þá er $\pi(B)$ samanhangandi. En þar sem C er algerlega ósamanhangandi, þá er til x úr C þ.a. $\pi(B) = \{x\}$, þ.e.a.s. $B \subseteq \ell(x)$. Látum $p_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vera venjulega ofanvarpið á y-hnitið, þá er $p_2(B)$ samanhangandi og tilheyrandi vörpun $B \to p_2(B) \subseteq [0, 1[$ gagntæk.

- Ef $x \in C_{\text{A}}$, þá er $p_2(B) \subseteq \mathbb{Q}$ og þar með er $p_2(B)$ einstökungur.
- Ef $x \in C_{\text{Ó}}$, þá er $p_2(B) \subseteq (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\}$, og þar með er $p_2(B)$ einstökungur.

$\square$

2.4 Þjöppuð rúm

Skilgreining 2.4.1. Grannrúm X er sagt *þjappað* ef sérhver opin þakning á X hefur endanlega hlutþakningu.

Athugasemd. Víða í stærðfræðiritum er *hálfþjappað* (quasi-compact) notað í stað *þjappað* og þau sögð *þjöppuð* sem bæði eru hálfþjöppuð og Hausdorff.

Setning 2.4.1. *(i) Hlutrúm Y í grannrúmi X er þjappað* þ.þ.a.a. *sérhver þakning á Y með opnum mengjum í X hefur endanlega hlutþakningu.*

(ii) Lokuð hlutmengi í þjöppuðum rúmum eru þjöppuð.

Sönnun. (Næstum augljós) æfing. $\square$

Setning 2.4.2. *Þjappað hlutrúm Y í Hausdorff-rúmi X er lokað.*

Sönnun. Sýnum að $X \setminus Y$ sé opið. Látum $x_0 \in X \setminus Y$. Fyrir sérhvert y úr Y eru til opnar grenndir W_y um x_0 og V_y um y í X þ.a. $W_y \cap V_y = \emptyset$ vegna þess að X er Hausdorff. Þá er $Y \subseteq \bigcup_{y \in Y} V_y$ svo til eru $y_1, \ldots, y_l$ úr Y þ.a. $Y \subseteq V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_l}$ vegna þess að Y er þjappað. Af því leiðir að $Y \cap (W_{y_1} \cap \cdots \cap W_{y_l}) \subseteq (V_{y_1} \cup \cdots \cup V_{y_l}) \cap (W_{y_1} \cap \cdots \cap W_{y_l}) = \emptyset$ svo að $W_{y_1} \cap \cdots \cap W_{y_l}$ er grennd um x_0 í $X \setminus Y$. $\square$

Setning 2.4.3. *X þjappað grannrúm og $f : X \to Y$ samfelld. Þá er $f(X)$ þjappað.*

Sönnun. Ef $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ er opin þakning á $f(X)$, þá er $\left(f^{-1}(U_\alpha)\right)_{\alpha \in I}$ opin þakning á X. Þar með er til endanlegt hlutmengi J í I þ.a. $X \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} f^{-1}(U_\alpha)$ og því

$$f(X) \subseteq f\left(\bigcup_{\alpha \in J} f^{-1}(U_\alpha)\right) \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$$

þ.e.a.s. $(U_\alpha)_{\alpha \in J}$ er endanleg hlutþakning á $f(X)$. $\square$

Setning 2.4.4. *Látum $f : X \to Y$ vera gagntæka og samfellda vörpun. Ef X er þjappað og Y er Hausdorff, þá er f grannmótun.*

Sönnun. Okkur nægir að sýna að f sé lokuð vörpun. Ef A er lokað í X, þá er A þjappað og þar með $f(A)$ þjappað í Y. En Y er Hausdorff, svo að $f(A)$ er lokað skv. þarsíðustu setningu. $\square$

Hjálparsetning 2.4.1. *X, Y grannrúm og Y þjappað. Ef $x_0 \in X$ og W er opin grennd um $\{x_0\} \times Y$ í $X \times Y$, þá er til grennd U um x_0 í X þ.a. $U \times Y \subseteq W$.*

Sönnun. Fyrir sérhvert y úr Y veljum við opin mengi U_y í X og V_y í Y þ.a.

$$(x_0, y) \in U_y \times V_y \subseteq W.$$

Þá er $(V_y)_{y \in Y}$ opin þakning á Y. Tökum endanlega undirþakningu $\{V_{y_1}, \ldots, V_{y_k}\}$ og setjum $U = \bigcap_{i=1}^{k} U_{y_i}$. Þá fæst að

$$\{x_0\} \times Y \subseteq U \times Y = U \times \left(\bigcup_{i=1}^{k} V_{y_i}\right) = \bigcup_{i=1}^{k} (U \times V_{y_i}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} (U_{y_i} \times V_{y_i}) \subseteq W.$$

$\square$

Setning 2.4.5. *Faldrúm endanlelga margra þjappaðra rúma er þjappað.*

Sönnun. Nóg að sanna setninguna fyrir tvö þjöppuð rúm og beita svo þrepun. Látum X og Y vera þjöppuð og $\mathcal{A}$ vera opna þakningu á $X \times Y$. Ef $x \in X$, þá er $\{x\} \times Y$ þjappað og því til $A_1, \ldots, A_l$ úr $\mathcal{A}$ þ.a. $\{x\} \times Y \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_l$. Skv. síðustu setningu er þá til opin grennd W_x um x í X sem uppfyllir $W_x \times Y \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_l$. Nú er $\{W_x : x \in X\}$ opin þakning á X svo hún hefur endanlega hlutþakningu $\{W_1, \ldots, W_k\}$. Þar með er $X \times Y = \left(\bigcup_{j=1}^{k} W_j\right) \times Y = \bigcup_{j=1}^{k} (W_j \times Y)$ og sérhvert $W_j \times Y$ er þakið með endanlega mörgum stökum úr $\mathcal{A}$. $\square$

Athugasemd. Almennt gildir að faldrúm hvaða fjölskyldu sem er af þjöppuðum grannrúmum er þjappað . Þetta er hin svokallað *Tychonoff-setning*, sem verður sönnuð síðar (umtalsvert erfiðari).

Setning 2.4.6. *Grannrúm X er þjappað* þ.þ.a.a. *það fullnægi eftirfarandi skilyrði:*

> *Ef $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ er fjölskylda af lokuðum mengjum þ.a. $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset$ fyrir öll endanleg hlutmengi J í I, þá er $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset$.*

Sönnun. G.r.f. að X sé þjappað og $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ sé fjölskylda af lokuðum hlutmengjum í X þ.a. $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \emptyset$, þá er

$$\bigcup_{\alpha\in I}\underbrace{(X\setminus A)}_{\text{opið}} = X\setminus\bigcap A_\alpha = X.$$

Þar sem X er þjappað, þá hefur opna þakningin $\{X\setminus A_\alpha : \alpha\in I\}$ endanlega hlutþakningu, þ.e.a.s. til er endanlegt hlutmengi J í I þ.a. $\bigcup_{\alpha\in J}(X\setminus A_\alpha) = X$ og þá $\bigcap_{\alpha\in J} A_\alpha = \emptyset$ skv. de Morgan.

Öfugt, g.r.f. að X fullnægi skilyrðinu og látum $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ vera opna þakningu á X. Setjum $A_\alpha = X\setminus U_\alpha$. Þá er $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha = \emptyset$ skv. de Morgan og þar með er til endanleg hlutþakning á J í I þ.a. $\bigcap_{\alpha\in J} A_\alpha = \emptyset$, en það jafngildir því að $\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha = X$. □

Fylgisetning 2.4.1. *Ef $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er minnkandi runa (þ.e.a.s. $C_n \supseteq C_{n+1}\forall n$) af lokuðum hlutmengjum í þjöppuðu rúmi þ.a. $C_n \neq \emptyset \forall n\in\mathbb{N}$, þá er $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$.*

Upprifjun $(X,\leq)$ línulega raðað og $A\subseteq X$. Stak b úr X þ.a. $a\leq b$ fyrir öll a úr A kallast *yfirstak* A. Ef mengi allra yfirstaka mengisins A á sér minnsta stak, þá kallast það *efra mark* A.

Dæmi 2.4.1. (1) Vitum að sérhvert hlutmengi í $\mathbb{R}$, sem er takmarkað að ofan, á sér efra mark.

(2) Hlutmengið $A = \{r\in\mathbb{Q} : 0 < r, r^2 < 2\}$ í $\mathbb{Q}$ á sér ekki efra mark í $\mathbb{Q}$.

Höfum samsvarandi hluti fyrir *neðra mark*.

Setning 2.4.7. *Látum X vera línulega raðað mengi þar sem sérhvert hlutmengi, sem er takmarkað að ofan, hefur efra mark í X. Þá er sérhvert lokað bil í X þjappað (í röðunargrannmynstrinu).*

Sönnun. Látum $a,b\in X$ og $\mathcal{A}$ vera opna þakningu á $[a,b]$. Sýnum að unnt sé að þekja $[a,b]$ með endanlega mörgum stökunum úr $\mathcal{A}$.

(1) Sýnum fyrst: Ef $x\in[a,b]$ og $x\neq b$, þá er til $y > x$ úr $[a,b]$ og $A,B\in\mathcal{A}$ þ.a. $[x,y]\subseteq A\cup B$.

- Ef $]x,b]$ hefur minnsta stak, y, þá er $[x,y] = \{x,y\}$. Veljum þá A og B úr $\mathcal{A}$ þ.a. $x\in A$ og $y\in B$.
- Ef $]x,b]$ hefur ekki minnsta stak, þá veljum við eitthvert A úr $\mathcal{A}$ þ.a. $x\in A$. Þa rsem $x\neq b$ og A er opið, þá er til $c > x$ þ.a. $[x,c[\,\subseteq A$. Veljum síðan y úr $[x,c[$ og fáum að $[x,y]\subseteq A$; tökum svo $B = A$.

(2) Setjum

$$C := \{y\in\,]a,b] : \text{hægt er að þekja } [a,y] \text{ með endanlega mörgum stökum úr } \mathcal{A}\}.$$

Setjum $c := \sup C$. Þá, skv. (1), er $a < c \leq b$. Sýnum að $c\in C$, þ.e. að hægt sé að þekja $[a,c]$ með endanlega mörgum stökum úr $\mathcal{A}$. Veljum A úr $\mathcal{A}$ þ.a. $c\in A$. Þar sem A er opið, þá er til $d < c$ úr $[a,b]$ sem uppfyllir $]d,c]\subseteq A$. Þar sem c er efra mark C, þá er til c' úr C þ.a. $d < c' \leq c$, og því $[c',c]\subseteq A$. Nú eru til $A_1,\ldots,A_m$ úr $\mathcal{A}$ þ.a. $[a,c']\subseteq A_1\cup\cdots\cup A_m$ og þar með

$$[a,c] = [a,c']\cup[c',c]\subseteq A_1\cup\cdots\cup A_m\cup A.$$

Ljúkum nú sönnuninni með því að sýna að $c = b$: Ef ekki, þá er er til $y > c$ úr $[a,b]$ þ.a. $[c,y]$ sé hægt að þekja með endanlega mörugm stökum úr $\mathcal{A}$. Það sama gildir þá um $[a,y] = [a,c]\cup[c,y]$ og það þýðir að $y\in C$; í mótsögn við að $y > c = \sup C$. □

Fylgisetning 2.4.2. *Lokuð bil í $\mathbb{R}$ eru þjöppuð.*

Sönnun. Augljóst. □

Setning 2.4.8 (Heine-Borel)**.** *Hlutmengi í $\mathbb{R}^n$ er þjappað* þ.þ.a.a. *það sé lokað og takmarkað.*

Sönnun. Látum $A\subseteq\mathbb{R}^n$. Ef A er þjappað, þá er A lokað vegna þess að $\mathbb{R}^n$ er Hausdorff. Nú er $A\subseteq\mathbb{R}^n = \bigcup_{r>0} B(0,r)$ svo til eru $r_1,\ldots,r_k > 0$ þ.a. $A\subseteq B(0,r_1)\cup\cdots\cup B(0,r_k) = B(0,r_0)$ þar sem $r_0 := \max_{1\leq i\leq k}$. Þar með er A takmarkað.

Öfugt, g.r.f. að A sé lokað og takmarkað. Þá er til $r > 0$ þ.a.

$$A\subseteq B(0,r)\subseteq[-r,r]\times\cdots\times[-r,r]$$

sem er þjappað, vegna þess að endanlegt faldrúm þjappaðra rúma er þjappað. Af þessu sést að A er lokað mengi í þjöppuðu rúmi, og þar með þjappað. □

Setning 2.4.9. *$f : X \to Y$ samfelld þar sem Y er línulega raðað með röðunargrannmynstrinu. Ef X er þjappað, þá eru til c og d úr X þ.a. $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ fyrir öll x úr X.*

Sönnun. Ef $f(X)$ hefur ekkert stærsta stak, þá mynda mengin $]-\infty, y[$ með $y \in f(X)$ opna þakningu á $f(X)$. En $f(X)$ er þjappað, svo að til eru $y_1, \ldots, y_l$ úr $f(X)$ þ.a. $f(X) \subseteq \,]-\infty, y_1[\, \cup \cdots \cup \,]-\infty, y_l[\, = \,]-\infty, y_0[$, þar sem $y_0 = \max_{1 \leq i \leq l} y_i$, í mótsögn við að $y_0 \in f(X)$.

Tilvist minnsta staks í $f(X)$ fæst á svipaðan hátt. □

Setning 2.4.10. *X þjappað og ekki-tómt Hausdorff-rúm. Ef sérhver punktur úr X er þéttipunktur, þá er X óteljanlegt.*

Sönnun. Sýnum að ekki sé til átæk vörpun $f : \mathbb{N} \to X$. G.r.f að $f : \mathbb{N} \to X$ sé átæk og setjum $x_n := f(n)$. Veljum opið mengi V_1 í X þ.a. $x_1 \notin \overline{V}_1$. Almennt veljum við V_n opið í X þ.a. $\overline{V}_n \subseteq \overline{V}_{n-1}$ og $x_n \notin \overline{V}_n$. Þar sem X er þjappað, þá er $\bigcap_{n \geq 1} V_n \neq \emptyset$, en ljóst er að $f(\mathbb{N}) \cap \left(\bigcap_{n \geq 1} V_n\right) = \emptyset$ svo að $f(\mathbb{N}) \neq X$. □

Fylgisetning 2.4.3. *Látum $a, b \in \mathbb{R}$ þ.a. $a < b$. Þá er $[a, b]$ óteljanlegt.*

Sönnun. Leiðir beint af síðustu setningu. □

Upprifjun Línulega raðað mengi er sagt *velraðað* ef sérhvert ekki-tómt hlutmengi þess hefur minnsta stak. Setjum þá að röðunin sé *velröðun*. *Velröðunarfrumsenda* segir að sérhverju mengi megi velraða. Af henni leiðir: Til er velraðað óteljanlegt mengi. Látum nú X vera línulega raðað mengi og $\alpha \in X$. Hlutmengið

$$S_\alpha := \{x \in X : x < \alpha\}$$

kallast *snið* (í X).

Setning 2.4.11. *Til er óteljanlegt velraðað mengi þar sem sérhvert snið er teljanlegt.*

Sönnun. Sýnum fyrst að til er velraðað mengi sem hefur óteljanlegt snið: Láum X vera óteljanlegt og velraðað. Þá er $\{1, 2\} \times X$ velraðað með orðabókarröðun, og sérhvert snið af gerðinni $S_{(2,x)}$ er óteljanlegt.

Látum nú Y vera eitthvert velraðað mengi sem hefur óteljanlegt snið og setjum

$$\Omega := \min\{\alpha \in Y : S_\alpha \text{ er óteljanlegt}\}.$$

Þá er S_Ω óteljanlegt og velraðað og sérhvert snið í því er teljanlegt. □

Skilgreining 2.4.2 (ritháttur)**.** $\overline{S}_\Omega = S_\Omega \cup \{\Omega\}$.

Athugasemd. S_Ω er þétt í $\overline{S}_\Omega$.

Fylgisetning 2.4.4. *Ef A er teljanlegt hlutmengi í S_Ω, þá er A takmarkað að ofan.*

Sönnun. Mengið $\bigcup_{a \in A} S_a =: B$ er teljanlegt svo að $B \subsetneq S_\Omega$. Ef $x \notin B$, þá er $a \leq x \; \forall a \in A$, því annars fengist $a > x$ fyrir eitthvert $a \in A$, og þar með $x \in S_a \subseteq B$, sem er mótsögn. □

2.4.1 Nokkrir eiginleikar S_Ω og $\overline{S}_\Omega$

Táknum minnsta stakið í S_Ω með 0.

(i) Séhrvert takmarkað hlutmengi í S_Ω hefur efra mark í S_Ω.

(ii) Sérhvert hlutmengi á sér efra mark í $\overline{S}_\Omega$.

(iii) $\overline{S}_\Omega$ er þjappað og S_Ω er þétt í $\overline{S}_\Omega$.

(iv) Sérhver runa í S_Ω hefur samleitna hlutrunu.

Sönnun. (i) Látum $A \subseteq S_\Omega$ vera takmarkað. Þá er $B := \{b \in S_\Omega : a \leq b \forall a \in A\}$ ekki tómt $\sup A = \min B$.

(ii) Ef $A \subseteq \overline{S}_\Omega$, þá er $\sup A = \min\{b \in \overline{S}_\Omega : a \leq b \; \forall a \in A\}$.

(iii) Þar sem öll hlutmengi í $\overline{S}_\Omega$ hafa efra mark, þá er $\overline{S}_\Omega = [0, \Omega]$ þjappað.

(iv) Æfing. □

Æfing. Látum X tákna $\mathbb{N} \times [0, 1[$ með orðabókargrannmynstrinu. Sýnið að X sé grannmóta $[0, +\infty[$.

2.4.2 Langa (hálf)línan og langa bilið

$L := S_\Omega \times [0,1[$ með orðabókarröðun kallast *langa (hálf)línan* og $L^+ := (S_\Omega \times [0,1[) \cup (\Omega, 0)$ kallast *langa bilið*. Unnt er að sýna: Fyrir sérhvert $\alpha \in L$ er S_α einsmóta $[0,1[\cong [0,+\infty[$, en L er ekki grannmóta $[0,1[$. Skoðum þetta rúm betur í heimadæmum.

2.5 Runulegur þjappleiki (eða runuþjappleiki)

Setning 2.5.1. *X firðanlegt grannrúm. Þá eru eftirfarandi skilyrði jafngild:*

(i) X er þjappað.

(ii) Sérhvert óendanlegt hlutmengi í X hefur þéttipunkt.

(iii) Sérhver runa í X hefur samleitna hlutrunu.

Sönnun. Þekkt. □

Skilgreining 2.5.1. Grannrúm sem uppfyllir (iii) kallast *runuþjappað*.

Athugasemd. S_Ω er ekki þjappað, vegna þess að S_Ω er ekki lokað í $\overline{S}_\Omega$ og $\overline{S}_\Omega$ er Hausdorff. Hins vegar er S_Ω runuþjappað. Sér í lagi er S_Ω ekki firðanlegt.

Setning 2.5.2 (Viðbót við setningu 2.5.1)**.** *Fyrir grannrúm X gildir að (i)$\Rightarrow$(ii) og (iii)$\Rightarrow$(ii).*

Sönnun. (iii)$\Rightarrow$(ii): Látum A vera óendanlegt mengi í X. Þá er til eintæk vörpun $\mathbb{N} \to A$, þ.e.a.s. til er runa $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ í A þ.a. $x_n \neq x_m$ ef $n \neq m$. Skv. (iii) hefur hún samleitna hlutrunu og markgildi hennar er bersýnilega þéttipunktur A.

(i)$\Rightarrow$(ii): Ef A hefur enga þéttipunkta í X, þá er A lokað í X og því þjappað í strjála grannmynstrinu, svo það er endanlegt. □

Hinar áttirnar gilda almennt ekki í grannrúmi: Auðséð er að við höfum (iii)$\not\Rightarrow$(i), (ii)$\not\Rightarrow$(i). Að (i)$\not\Rightarrow$(iii) (og þar með (ii)$\not\Rightarrow$(iii)) fæst með $X := \{0,1\} \subseteq \mathbb{R}$. Það er greinilega þjappað, svo að skv. setningu Tychonoffs (verður sönnuð síðar) er $X^{[0,1]}$ líka þjappað. Minnumst þess að sérhver tala $t \in [0,1]$ hefur tvíundarframsetningu $t = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{2^n}$ þar sem $a_n \in \{0,1\}$, þar af er nákvæmlega ein framsetning fyrir hverja tölu gefin með óendanlegri summu. Skilgreinum $\phi_n : [0,1] \to \{0,1\} = X$ þ.a. $\phi_n(t) = a_n$ ef $t = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{2^n}$ er óendanleg. Sýnum að Sýnum að $(\phi_n)_{n\geq 1}$ eigi sér enga samleitna hlutrunu: Ef $(\varphi_{n_k})_{k\geq 0}$ væri slík hlutruna, þá gilti sér í lagi að $(\phi_{n_k}(t))_{k\geq 0}$ væri samleitin fyrir sérhvert t úr $[0,1]$. Skilgreinum runu $(a_n)_{n\geq 1}$ með því að setja $a_n = 0$ ef $n \notin \{n_k : k \geq 0\}$, $a_{n_{2k}} = 1$ og $a_{n_{2k+1}} = 0$ og setjum $t_0 = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{2^n}$. Þá fæst

$$\phi_{n_k}(t_0) = \begin{cases} 1 & \text{ef } k \text{ er slétt,} \\ 0 & \text{ef } k \text{ er oddatala} \end{cases}$$

sem er ekki samleitin; mótsögn!

2.6 Staðþjöppuð rúm

Skilgreining 2.6.1. X grannrúm og $x \in X$. Ef til er þjöppuð grennd um x í X, þá er sagt að X sé *staðþjappað í x*. Segjum að X sé *staðþjappað* ef það er staðþjappað í öllum punktum sínum.

Athugasemd. Víða í stærðfræðibókum þýðir staðþjappað að rúmið sé staðþjappað *og Hausdorff*.

Setning 2.6.1. *Ef Hausdorff-rúm X er staðþjappað í x, þá mynda þjöppuðu grenndirnar grenndagrunn um x; nánar tiltekið: Ef U er grennd um x í X, þá er til þjöppuð grennd B um x þ.a. $B \subseteq U$.*

Sönnun. Látum C vera þjappaða grennd um x í X og U vera opna grennd um x í X. Þá er $C \cap (X \setminus U)$ lokað mengi í C og þar með þjappað. Þa rsem $x \notin C \cap (X \setminus U)$, þá eru til opin sundurlæg mengi V' og W' þ.a. $f \in V'$ og $C \cap (X \setminus U) \subseteq W'$. Af þessu leiðir að $\overline{V'} \cap C \cap (X \setminus U) = \emptyset$. Setjum nú $V := V' \cap C^\circ$ og fáum að $\overline{V} \subseteq C$ og því

$$\overline{V} \cap (X \setminus U) = \overline{V} \cap (X \setminus U) \cap C = \emptyset$$

og þar með $\overline{V} \subseteq U$. □

Setning 2.6.2. *Látum X vera staðþjappað grannrúm og veljum punkt $\infty_X \notin X$. Setjum $\hat{X} := X \coprod \{\infty_x\}$ og skilgreinum grannmynstur á $\hat{X}$ með því að kalla hlutmengi U í $\hat{X}$* opið *ef annað hvort eftirfarandi skilyrða er uppfyllt*

(a) $U \subseteq X$ og U er opið í X.

(b) $\infty_X \in U$ og $U \cap X = X \setminus K$ þar sem K er þjappað (þ.e. grenndirnar um ∞_X eru fyllimengi þjappaðra hlutmengja í X).

Þá gildir:

(i) $\hat{X}$ er þjappað og X er hlutrúm í $\hat{X}$ (þ.e.a.s. hlutrúmsgrannmynstur X er sama og upphaflega grannmynstur X).

(ii) Ef X er ekki þjappað, þá er X þétt í $\hat{X}$.

(iii) Ef X er þjappað, þá er ∞_X einangraður punktur í $\hat{X}$.

(iv) Ef X er Hausdorff, þá er $\hat{X}$ Hausdorff.

Sönnun. Til þess að sýna að (a) og (b) ákvarði grannmynstur á $\hat{X}$, þá nægir að sýna að endanlegt sniðmengi opinna gennda um ∞_X sé opin grennd um ∞_X (sjá vikublað 1). En ef K_1 og K_2 eru þjöppuð í X, þá er $K_1 \cup K_2$ þjappað í X og $(X \setminus K_1) \cap (X \setminus K_2) = X \setminus (K_1 \cup K_2)$.

(i) Látum $\mathcal{U}$ vera opna þakningu á $\hat{X}$ og veljum V úr $\mathcal{U}$ þ.a. $\infty_X \in V$. Þá er til þjappað hlutmengi K í X þ.a. $X \cap V = X \setminus K$ og safnið $\{X \cap U : U \in \mathcal{U}\}$ er opin þakning á $X \setminus (V \cap X) = K$. Þar með eru til $U_1, \ldots, U_l$ úr $\{X \cap U : U \in \mathcal{U}\}$, þ.e. $K \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_l$. En það hefur bersýnilega í för með sér að $\hat{X} \subseteq V \cup U_1 \cup \cdots \cup U_l$.

(ii) og (iii). ∞_X er einangraður í $\hat{X}$ *þ.þ.a.a.* $\{\infty_X\}$ sé opið í $\hat{X}$ *þ.þ.a.a.* $\emptyset = \{\infty_X\} \cap X = X \setminus K$ þar sem K er þjappað *þ.þ.a.a.* X sé þjappað.

(iv) Látum $x, y \in \hat{X}$. Ef $x, y \in X$, þá þarf ekkert að gera. Ef $x = \infty_X$, þá tökum við þjappaða grennd C um y og setjum $U := \hat{X} \setminus C$, þá eru U og C° sundurlægar opnar grenndir um ∞_X og y. $\square$

Skilgreining 2.6.2. Rúmið $\hat{X}$ kallast *Alexandroff-þjöppun* (eða *einspunktsþjöppun*) grannrúmsins X.

Athugasemd. Þó svo X sé ekki staðþjappað, þá má búa $\hat{X}$ til á sama hátt og áður, en þá verður $\hat{X}$ aldrei Hausdorff (lesandi skal sanna það!).

Kafli 3

Ýmis dæmi og skilgreiningar

3.1 Zariski-grannmynstur á K^n

Zariski-grannmynstur á K^n þar sem K er kroppur/svið. Segjum að $A \subseteq K^n$ sé *algebrulegt* ef til er mengi M af margliðum í $K[X_1, \ldots, X_n]$ þ.a. $A = N(M) := \{x \in K^n : f(x) = 0 \forall f \in M\}$. Fáum

(i) $K^n = N(\{0\})$ og $\emptyset = N(K[x_1, \ldots, x_n]) = N(\{1\})$.

(ii) Ef $A = N(M)$ og $B = N(L)$, þá er $A \cup B = N(M \cdot L)$, þar sem $M \cdot L = \{p \cdot q : p \in M, q \in L\}$: Ef $x \in A$, þá er $p(x) = 0 \; \forall p \in M$ og $(p \cdot q)(x) = 0 \; \forall p \in M$ og $\forall q \in L$, og þar með $x \in N(M \cdot L)$. Þar með er sýnt að $A \subseteq N(M \cdot L)$ og á sama hátt er $B \subseteq N(M \cdot L)$. Öfugt, ef $x \notin A \cup B$, þá eru til p úr M og q úr L þ.a. $p(x) \neq 0$, $q(x) \neq 0$ og því $(p \cdot q)(x) \neq 0$ og þar með $x \notin N(M \cdot L)$.

(iii) Ef $A_\alpha = N(M_\alpha)$, $\alpha \in I$, þá gildir

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = N\left(\cup_{\alpha \in I} M_\alpha\right).$$

(i), (ii) og (iii) hafa í för með sér að algebrulegu mengin í K^n eru lokuðu mengin í grannmynstrinu á K^n; svokölluðu *Zariski-grannmynstri.*

Almennt er þetta *ekki* Hausdorff (m.ö.o. T_2), en það er T_1. Algebruleg mengi í K eru bara endanleg mengi í K svo að Zariski-grannmynstrið á K er Hausdorff *þ.þ.a.a.* K sé endanlegur kroppur.

3.2 (Grannfræðilegar) víðáttur

Grannrúm X kallast *n-víð víðátta* [e. manifold] ef sérhver punktur x úr X hefur opna grennd U, sem er grannmoa opnu mengi í $\mathbb{R}^n$.

Athugasemd. Aðeins eitt n kemur til greina því unnt er að sýna fram á með algebrulegri grannfræði að ef opið mengi í $\mathbb{R}^n$ er grannóta opnu mengi í $\mathbb{R}^k$, þá er $n = k$.

Af skilgreiningunni leiðir strax:

(i) Víðáttur eru staðvegsamanhangandi og þar með staðsamanhangandi.

(ii) Samanhangandi víðáttur eru vegsamanhangandi.

(iii) Víðáttur eru staðþjappaðar.

Dæmi 3.2.1. (a) Algebrulega mengið $A := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\big\}$ er ekki víðátta. Hins vegar er $A \setminus \{(0, 0)\}$ einvíð víðátta sem hefur 4 samhengisþætti.

(b) Algebrulegt mengi

$$A := \{x \in \mathbb{R}^n : f_1(x) = \cdots = f_k(x) = 0\} \qquad (k \leq n)$$

er $(n - k)$-víð víðátta ef Jacobi-fylkið $J(f_1, \ldots, f_k)$ hefur metorðið k, skv. setningu um fólgin föll.

(c) Í skilgreiningu á víðáttu er þess oftast krafist að X sé Hausdorff. Þó svo að víðátta sé *stað-Hausdorff*, þá kemur ekki í sjálfu sér að hún sé Hausdorff. T.d. $\mathbb{R} \coprod \mathbb{R}/\sim$ með $x \sim x$ ef $x \neq 0$. Þessi víðátta er T_1.

(d) I bil, vefjum $I \times I$ upp í sívalning og sívalningnum í kleinuhring, þá fæst víðátta sem er grannmóta $S^1 \times S^1$.

(e) Langa línan (þ.e.a.s. langa hálflínan án upphafspunkts) er víðátta.

Skilgreining 3.2.1. Tvívíðar víðáttur kallast yfirleitt *fletir* og einvíðar *ferlar*.

3.3 Varprúm (yfir $\mathbb{R}$)

Látum $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ tákna mengi allra lína gegnum núllpunkt í $\mathbb{R}^{n+1}$. Fyrir x úr $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ látum við $\overline{0x}$ tákna línuna gegnum 0 og x og skilgreinum átæka vörpun

$$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}_n(\mathbb{R}), x \mapsto \overline{0x}.$$

Setjum deildagrannmynstrið á $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ og köllum grannrúmið $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ *n-víða varprúmið yfir* $\mathbb{R}$.

Sýnum að $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ sé n-víð víðátta: Táknum einingarkúluhvelið í $\mathbb{R}^{n+1}$ með S^n. Vörpunin $\pi|_{S^n} : S^n \to \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ er átæk og hefur trefjarnar $\{-x, x\}$. Skilgreinum vensl $\sim$ á S^n með $x \sim y$ *þ.þ.a.a.* $y = \pm x$. Þá fæst samfelld og gagntæk vörpun $\hat{\pi} : S^n/\sim \to \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$. En $S^n/\sim$ er þjappað og $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ er Hausdorff (gangið úr skugga um það), svo að $\hat{\pi}$ er grannmótun. Hins vegar er ljóst að $S^n/\sim$ er n-víð víðátta: Ef $x \in S^n$ og U er opið hálfhvel sem inniheldur x, þá er $\hat{\pi}|_U : U \to \hat{\pi}(U)$ grannmótun og $\hat{\pi}(U)$ er opin grennd um $\hat{\pi}(x)$.

Skilgreining 3.3.1. *Verkun granngrúpu G á grannrúm X* er samfelld vörpun $G \times X \to X, (g, x) \mapsto gx$ þ.a. fyrir öll x úr X og g, h úr G gildi

$$e_G x = x, \qquad (gh)x = g(hx),$$

þar sem e_G er hlutleysa á G. Fáum jafngildisvensl á X með

$$x \sim y \qquad \text{þ.þ.a.a.} \qquad \text{til sé } g \in G \text{ með } gx = y.$$

Jafngildisflokkur staks x úr X er

$$Gx := \{gx : g \in G\}$$

og kallast *braut* staksins x (m.t.t. verkunarinnar). Setjum $X/G := X/\sim$ með deildagrannmynstrinu og köllum X/G *brautarúm* verkunarinnar.

Athugasemd. Fyrir sérhvert g úr G er vörpunin

$$\phi_g : X \to X, x \mapsto gx$$

grannmótun; andhverfan er $\phi_{g^{-1}}$.

Fáum sértilfelli: Ef $G = (\mathbb{R}, +)$, þá kallast grannrúm X, sem $\mathbb{R}$ verkar á, *hreyfikerfi* (e. dynamical system). Í þessu tilfelli er litið á X sem mengi af *ástöndum* einhvers kerfis. Fyrir hvert ástand x er ákveðið hvert ástandið verður eftir t tímaeiningar; táknum það ástand tx. Höfum $0 \cdot x = x$, $(t + s)x = t(sx)$.

Dæmi 3.3.1. (1) $\mathbb{U} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, (u, w) \mapsto uw$. Brautirnar eru annars vegar hringir með miðju o og hins vegar $\{o\}$. Brautarúmið $\mathbb{C}/\mathbb{U}$ er grannmóta $[0, +\infty[$.

(2) $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, ((m, n), (x, y)) \mapsto (x + m, y + n)$. *Sýnið:* Brautarúmið er grannmóta $S^1 \times S^1$.

Kafli 4

Teljanleiki og aðskiljanleiki

4.1 Teljanleikaskilyrði

Upprifjun Grenndagrunnur fyrir punkt x í grannrúmi er mengi $\mathcal{U}(x)$ af (opnum) grenndum um x þ.a. sérhver grennd um x innihaldi stak úr $\mathcal{U}(x)$.

Dæmi 4.1.1. Ef (X, d) er firðrúm, þá er

$$\mathcal{U}(x) := \left\{ B_d(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

grenndagrunnur fyrir x úr X.

Skilgreining 4.1.1. Segjum að

(i) fullnægi *fyrsta teljanleikaskilyrðinu* ef sérhver punktur úr X hefur teljanlegan grenndagrunn,

(ii) fullnægi *öðru teljanleikaskilyrðinu* ef $\mathcal{T}_X$ hefur teljanlegan grunn,

(iii) sé *Lindelöf-rúm* ef sérhver opin þakning á X hefur teljanlega hlutþakningu,

(iv) sé *sundurgreinanlegt* ef það hefur teljanlegt þétt hlutmengi.

Setning 4.1.1. *Annað teljanleikaskilyrðið hefur öll hin í för með sér (en almennt ekki öfugt). Ef X er firðanlegt, þá er (i) alltaf uppfyllt og hin þrjú eru jafngild.*

Sönnun. Einföld æfing, sjá bls. 191 og dæmi 5 í grein 30 í kennslubók. □

Setning 4.1.2. *(i) X grannrúm og $Y \subseteq X$. Ef X fullnægir fyrsta [öðru] teljanleikaskilyrðinu, þá gerir Y það líka.*

(ii) Ef grannrúm $X_1, \ldots, X_n$ uppfylla fyrsta [annað] teljanleikaskilyrðið, þá gerir $\prod_{i=1}^n X_i$ það líka.

Sönnun. Næsta ljóst, sjá bls. 191 í kennslubók. □

Dæmi 4.1.2. Látum $\mathbb{R}_\ell$ vera $\mathbb{R}$ með grannmynstrinu sem grunnurinn $\{[a, b[: a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ framleiðir.

(i) $\mathbb{R}_\ell$ fullnægir fyrsta teljanleikaskilyrðinu: Ef $x \in \mathbb{R}_\ell$, þá er $\{[x, x + 1/n[: n \in \mathbb{N}^*\}$ teljanlegur grenndagrunnur fyrir x.

(ii) $\mathbb{R}_\ell$ er sundurgreinanlegt vegna þess að $\mathbb{Q}$ er þétt í $\mathbb{R}_\ell$.

(iii) $\mathbb{R}_\ell$ fullnægir ekki öðru teljanleikaskilyrðinu: Látum $\mathcal{B}$ vera grunn fyrir $\mathbb{R}_\ell$. Fyrir sérhvert $x \in \mathbb{R}_\ell$ veljum við B_x úr $\mathcal{B}$ þ.a. $x \in B_x \subseteq [x, x + 1[$. Þá er auðséð að $B_x \neq B_y$ ef $x \neq y$ og þar með er $\mathcal{B}$ ekki teljanlegur.

(iv) $\mathbb{R}_\ell$ er Lindöf: Látum $\mathcal{A}$ vera opna þakningu á $\mathbb{R}_\ell$. Þá er til fínni þakning á $\mathbb{R}_\ell$ af grunnstökum, við getum því gert ráð fyrir að

$$\mathcal{A} = \{[a_\alpha, b_\alpha[\, : \alpha \in J\}\,.$$

Setjum $C := \bigcup_{\alpha \in J}]a_\alpha, b_\alpha[$ og lítum á C sem hlutrúm í $\mathbb{R}$ (með venjulega grannmynstrinu). Þar sem $\{]a_\alpha, b_\alpha[\, : \alpha \in J\}$ er opin þakning á C, þá hefur hún teljanlega hlutþakningu

$$\mathcal{A}' = \{]a_\alpha, b_\alpha[\, : \alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots\}\,.$$

Okkur nægir því að sýna að $\mathbb{R} \setminus C$ sé teljanlegt: Ef $x \in \mathbb{R} \setminus C$, þá er til α úr J þ.a. $x = a_\alpha$. Veljum q_x úr $]a_\alpha, b_\alpha[\cap \mathbb{Q}$ og fáum að $]x, q_x[\subseteq]a_\alpha, b_\alpha[\subseteq C$. Fyrir $x, y \in \mathbb{R} \setminus C$ þ.a. $x < y$ gildir að $q_x < q_y$ því annars væri $y \in]x, q_x[\subseteq C$. Þetta gefur stranglega vaxandi fall $\mathbb{R} \setminus C \to \mathbb{Q}$, svo að $\mathbb{R} \setminus C$ er teljanlegt.

Dæmi 4.1.3. Faldrúm tveggja Lindelöf-rúma þarf ekki að vera Lindelöf. $\mathbb{R}_\ell$ er Lindelöf, en $\mathbb{R}_\ell^2 := \mathbb{R}_\ell \times \mathbb{R}_\ell$, svokölluð *Sorgenfrey-slétta*, er ekki Lindelöf:

- $L := \{x \times (-x) : x \in \mathbb{R}_\ell\}$ er lokað í $\mathbb{R}_\ell^2$.
- Þekjum $\mathbb{R}_\ell^2$ með öllum mengjum af gerðinni $[a, b[\times [-a, d[$ og $\mathbb{R}_\ell^2 \setminus L$. Sýnum að þessi opna þakning eigi sér enga teljanlega hlutþakningu: $L \cap (\mathbb{R}_\ell^2 \setminus L) = \emptyset$ og $L \cap ([a, b[\times [-a, d[) = \{a \times (-a)\}$ og L er óteljanlegt.

Dæmi 4.1.4. Hlutrúm í Lindelöf-rúmi þarf ekki að vera Lindelöf: $I^2 = I \times I$ ($I = [0,1]$) með orðabókargrannmynstrinu er þjappað og þar með Lindelöf-rúm. Hlutrúmið $I \times]0,1[$ í I^2 er hins vegar ekki Lindelöf-rúm því að opna þakningin $\{\{t\} \times]0,1[\, : t \in I\}$ á sér enga teljanlega hlutþakningu (þetta er skipting).

4.2 Aðskilnaðarskilyrði

Skilgreining 4.2.1. (i) Grannrúm X er sagt *reglulegt* eða T_3, ef það er T_1 (þ.e. einstökungarnir eru lokuð mengi) og fyrir sérhvert lokað mengi $A \subseteq X$ og sérhvert b úr $X \setminus A$ eru til sundurlægar opnar grenndir U um a og V um b.

(ii) Grannrúm X er sagt *normlegt* eða T_4, ef það er T_1 og fyrir öll sundurlæg lokuð mengi A og B í X eru til sundurlægar opnar grenndir U um A og V um B.

Setning 4.2.1. *Látum X vera T_1-rúm.*

(i) X er reglulegt þ.þ.a.a. *fyrir sérhvern punkt x úr X og sérhverja grennd U um x sé til grennd V um x þ.a. $\overline{V} \subseteq U$.*

(ii) X er normlegt þ.þ.a.a. *fyrir sérhvert lokað mengi A í X og sérhverja grennd U um A sé til grennd V um A þ.a. $\overline{V} \subseteq U$.*

Sönnun. Auðséð (sjá bls. 196 í kennslubók). □

Setning 4.2.2. *(i) Hlutrúm í Hausdorff-rúmi [reglulegu rúmi] er Hausdorff [reglulegt].*

(ii) Faldrúm Hausdorff-rúma [reglulegra rúma] er Hausdorff [reglulegt].

Sönnun. Höfum þegar séð Hausdorff-tilfellin svo við látum okkur nægja að sanna fullyrðingarnar fyrir regluleg rúm.

(i) Y hlutrúm í reglulegu rúmi X, B lokað í Y og $x \in Y \setminus B$. Þar sem $\overline{B} \cap Y = B$, þá er $x \notin \overline{B}$ og því eru til sundurlægar opnar grenndir U um $\overline{B}$ og V um x í X. Þar með eru $U \cap Y$ og $V \cap Y$ sundurlægar opnar grenndir um B og x í Y.

(ii) $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ fjölskylda af reglulegum grannrúmum og $x = (x_\alpha)_{\alpha \in I} \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$. Látum U vera opna grennd um x og sýnum að x eigi sér lokaða grenndí $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ sem sé innihaldin í U (sjá síðustu setningu). Veljum grunngrennd $\prod_{\alpha \in I} U_\alpha$ um x í U. Ef $U_\alpha \neq X_\alpha$, þá veljum við grennd V_α um x_α í X_α þ.a. $\overline{V}_\alpha \subseteq U_\alpha$. Ef $U_\alpha = X_\alpha$, þá setjum við $V_\alpha = X_\alpha$. Þá er $\prod_{\alpha \in I} V_\alpha$ grennd um x og

$$\overline{\prod_{\alpha \in I} V_\alpha} = \prod_{\alpha \in I} \overline{V}_\alpha \subseteq \prod_{\alpha \in I} U_\alpha \subseteq U.$$

□

Dæmi 4.2.1. $\mathbb{R}_K$ er Hausdorff en er ekki reglulegt. Mengið $K = \{1/n : n \in \mathbb{N}^*\}$ er lokað í $\mathbb{R}_K$. Sýnum að ekki séu til opnar sundurlægar grenndir um 0 og K. Ef U er opin grennd um 0 og V er opin grennd um K, þá er til grunngrennd $]a, b[\setminus K$ um 0 sem er innihaldin í U. Tökum $1/n$ úr $]a, b[$ og veljum c, d úr $\mathbb{R}$ þ.a. $0 < c < d$ og $\frac{1}{n} \in]c, d[\subseteq V$. Þá er $]c, d[\cap (]a, b[\setminus K) \neq \emptyset$.

Dæmi 4.2.2. $\mathbb{R}_\ell$ er normlegt: Látum A og B vera sundurlæg lokuð mengi í $\mathbb{R}_\ell$. Fyrir sérhvert a úr A veljum við $x_a > a$ þ.a. $[a, x_a[\cap B = \emptyset$ og fyrir sérhvert b úr B veljum við $x_b > b$ þ.a. $[b, x_b[\cap A = \emptyset$. Þá er $U := \bigcup_{a\in A} [a, x_a[$ opin grennd um A og $V := \bigcup_{b\in B} [b, x_b[$ opin grennd um B, $U \cap V = \emptyset$ því að $[a, x_a[\cap [b, x_b[= \emptyset$ fyrir öll a úr A og b úr B.

Setning 4.2.3. *(i) Firðanleg grannrúm eru normleg.*

(ii) Þjöppuð Hausdorff-rúm eru normleg.

(iii) Regluleg Lindelöf-rúm eru normleg.

Sönnun. (i) Látum A og B vera sundurlæg lokuð mengi í firðrúmi (X, d). Fyrir sérhvert x úr A veljum við $\varepsilon_x > 0$ þ.a. $B_d(x, \varepsilon_x) \cap B = \emptyset$ og fyrir sérhvert y úr B veljum við $\varepsilon_y > 0$ þ.a. $B_d(y, \varepsilon_y) \cap A = \emptyset$. Þá eru $U := \bigcup_{x\in A} B_d(x, \varepsilon_x/2)$ og $V := \bigcup_{x\in B} B_d(y, \varepsilon_x/2)$ opnar sundurlægar grenndir um A og B í X.

(ii) Látum A og B vera sundurlæg lokuð mengi í þjöppuðu Hausdorff-rúmi X. Þá eru A og B þjöppuð svo fyrir sérhvert x úr B eru til sundurlægar opnar grenndir U_x um A og V_x um x. Nú er $\{V_x : x \in B\}$ opin þakning á B svo til eru $x_1, \ldots, x_k$ úr B þ.a. $B \subseteq V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_k}$. Setjum $U := U_{x_1} \cap \cdots \cap U_{x_k}$ og $V := V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_k}$. Þá fæst að $B \subseteq V$, $A \subseteq U$ og $V \cap U = \emptyset$.

(iii) Tökum fyrst eftir því að þó svo hlutrúm í Lindelöf-rúmi þurfi ekki að vera Lindelöf (sjá æfingu 5 bls. 193 í kennslubók), þá er *lokað* hlutrúm í Lindelöf-rúmi alltaf Lindelöf-rúm (bætum bara fyllimengi þess við þakninguna). Látum A og B vera sundurlæg lokuð hlutmengi í reglulegu Lindelöf-rúmi X. Fyrir sérhvert x úr A veljum við opnar sundurlægar grenndir U_x um x og W_x um B. Þá er $U_x \subseteq X \setminus W_x$ sem er lokað svo að $\overline{U}_x \subseteq X \setminus W_x$, þar með er $\overline{U}_x \cap B = \emptyset$. Safnið $(U_x)_{x\in A}$ er opin þakning á A og hefur því teljanlega hlutþakningu $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vegna þess að A er lokað. Með því að setja $U_0 \cup \cdots \cup U_n$ í stað U_n, þá getum við gert ráð fyrir að $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sé vaxandi. Með sama hætti fáum við opna vaxandi þakningu $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ á B þ.a. $\overline{V}_n \cap A = \emptyset$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$. Setjum nú

$$U'_n := U_n \setminus \overline{V}_n, \qquad V'_n := V_n \setminus \overline{U}_n, \qquad U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U'_n, \qquad V := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V'_n.$$

Þá er $A \subseteq U$ og $B \subseteq V$. Sýnum að $U \cap V = \emptyset$. Ef $x \in U \cap V$, þá eru til $n, m \in \mathbb{N}$ með $x \in U'_n$ og $x \in V'_m$. Segjum t.d. að $n \leq m$. Þá er $x \in V_m \setminus \overline{U}_m$ og $x \in U'_n \subseteq U_n \subseteq U_m$, sem er mótsögn! $\square$

Fylgisetning 4.2.1. *Staðþjöppuð Hausdorff-rúm eru regluleg.*

Sönnun. Látum X vera staðþjappað Hausdorff-rúm. Þá er Alexandroff-þjöppunin $\hat{X}$ þjappað Hausdorff-rúm, svo skv. (ii) úr síðustu setningu er það normlegt. Af því leiðir að $\hat{X}$ er reglulegt og þar með er X reglulegt sem hlutrúm í $\hat{X}$. $\square$

Fylgisetning 4.2.2. *Staðþjöppuð Hausdorff-rúm eru Baire-rúm.*

Sönnun. Látum X vera staðþjappað Hausdorff-rúm. Látum $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vera fjölskyldu af opnum mengjum í X þ.a. um öll $n \in \mathbb{N}$ gildi $\overline{U}_n = X$. Sýnum að $\overline{\bigcap_{n\geq 0} U_n} = X$. Látum V vera opið ekki-tómt hlutmengi í X. Skilgreinum runu $(V_n)_{n\geq 0}$ af ekki-tómum opnum mengjum í X með eftirfarandi hætti

- $V_0 := V$.
- G.r.f. að við höfum valið opið-ekki-tómt mengi V_n. Þar sem U_n er þétt í X, þá er $U_n \cap V_n \neq \emptyset$ og þar sem X er reglulegt skv. fylgisetningu 4.2.1, þá er til opið ekki-tómt hlutmengi V_{n+1} í X þ.a. $\overline{V}_{n+1} \subseteq U_n \cap V_n$.

Þar eð X er staðþjappað, þá getum við valið V_1 þ.a. $\overline{V}_1$ sé þjappað og fáum þá minnkandi runu af lokuðum ekki-tómum hlutmengjum

$$\overline{V}_1 \supseteq \overline{V}_2 \supseteq \overline{V}_3 \supseteq \cdots$$

í þjappaða rúminu $\overline{V}_1$ og þar með

$$\emptyset \neq \bigcap_{n\geq 0} \overline{V}_n \subseteq V \cap \left(\bigcap_{n\geq 0} U_n \right).$$

□

Setning 4.2.4. *Velröðuð mengi eru normleg m.t.t. röðunargrannmynstursins.*

Sönnun. Látum X vera velraðað mengi. Tökum fyrst eftir að sérhvert bil af gerðinni $]x, y]$ er opið í X. Látum A og B vera lokuð sundurlæg hlutmengi í X. Fyrir sérhvert $a \in A$ látum við I_a vera opið mengi af gerðinni $]x_a, a]$ þ.a. $I_a \cap B = \emptyset$ ef $a \neq \min X$. Ef $a = \min X$ þá látum við I_a vera opna mengið $\{a\} =]-\infty, a^+[$. Á samsvarandi hátt skilgreinum við I_b fyrir öll b úr B. Þá er fljótséð að $U := \bigcup_{a\in A} I_a$ og $V := \bigcup_{b\in B} I_b$ eru opnar sundurlægar grenndir um A og B. □

Athugasemd. Hægt á að vera (JIM sagði að stæði í Munkres) að sanna tilsvarandi niðurstöðu fyrir hvaða línulega röðuð mengi sem er.

Dæmi 4.2.3. $S_\Omega \times \overline{S}_\Omega$ er *ekki* normlegt rúm. Áður en við sýnum fram á þetta skulum við veita nokkrum atriðum eftirtekt

- S_Ω og $\overline{S}_\Omega$ eru normleg skv. síðustu setningu og því regluleg. Hér er því dæmi um reglulegt rúm, sem er ekki normlegt. Jafnframt sýnir þetta að faldrúm normlegra rúma þarf ekki að vera normlegt.

- $\overline{S}_\Omega \times \overline{S}_\Omega$ er þjappað Hausdorff-rúm og þar með normlegt svo þetta dæmi sýnir að hlutrúm í normlegu rúmi er ekki endilega normlegt.

Látum nú Δ tákna hornalínuna í $\overline{S}_\Omega \times \overline{S}_\Omega$. Þá er Δ lokað í $\overline{S}_\Omega \times \overline{S}_\Omega$,vegna þess að $\overline{S}_\Omega$ er Hausdorff, og þar með er $A := \Delta \cap (S_\Omega \times \overline{S}_\Omega) = \Delta \setminus \{\Omega \times \Omega\}$ lokað í $S_\Omega \times \overline{S}_\Omega$. Einnig er ljóst að $B := S_\Omega \times \{\Omega\}$ er lokað i $S_\Omega \times \overline{S}_\Omega$ því að $\overline{S}_\Omega$ er T_1. A og B eru því sundurlæg lokuð mengi í $S_\Omega \times \overline{S}_\Omega$. Sýnum að þau eigi sér ekki sundurlægar opnar grenndir. Beitum óbeinni sönnun og g.r.f. að til séu sundurlæg opin mengi U og V í $S_\Omega \times \overline{S}_\Omega$ þ.a. $A \subseteq U$ og $B \subseteq V$. Fyrir sérhvert x úr S_Ω setjum við

$$\beta(x) := \min \left\{ \beta \in \overline{S}_\Omega : x < \beta, x \times \beta \notin U \right\}$$

sem er vel skilgreint þvi að $x \times \Omega \notin U$ og þar sem $V \cap U = \emptyset$ þá er $\beta(x) \in S_\Omega$. Skilgreinum runu $(x_n)_{n\geq 0}$ í S_Ω sem svo:

$$\begin{aligned} x_0 &:= \text{einhver punktur í } S_\Omega, \\ x_{n+1} &:= \beta(x_n) \text{ fyrir öll } n \geq 0. \end{aligned}$$

Þá er runan stranglega vaxandi: $x_0 < x_1 < \cdots$. Setjum $b := \sup_n x_n$ (alltaf til í S_Ω) og fáum $\lim_{n\to\infty} x_n = b$ og því $\beta(x_n) = x_{n+1} \longrightarrow b$ og þar með $x_n \times \beta(x_n) \longrightarrow b \times b$. Þetta er í mótsögn við að U er opin grennd um $b \times b$ og $x_n \times \beta(x_n) \notin U$ fyrir öll n.

Skilgreining 4.2.2. Látum A og B vera lokuð hlutmengi í grannrúmi X. Við segjum að unnt sé að *aðskilja A og B með samfelldu falli* ef til er samfellt fall $f : X \to [0, 1]$ þ.a. $f|_A = 0$ og $f|_B = 1$.

Skilgreining 4.2.3. Grannrúm er sagt *fullkomlega reglulegt* ef það er T_1 og hægt er að aðskilja sérhvert lokað hlutmengi A í X og sérhvern einstökung $\{x\}$ þar sem $x \notin A$ með samfelldu falli.

Setning 4.2.5 (Hjálparsetning Urysohns)**.** *Tvö lokuð og sundurlæg hlutmengi í normlegu rúmi er unnt að aðskilja með samfelldu falli.*

Sönnun. Látum A og B vera sundurlæg lokuð mengi í normlegu rúmi X. Segjum að endanlega runu af opnum mengjum $C = (C_0, C_1, \ldots, C_m)$ sé *(leyfileg) keðja af lengd m* ef

$$A \subseteq C_0 \subseteq C_1 \subseteq \cdots \subseteq C_m \subseteq X \setminus B$$

og $\overline{C}_{k-1} \subseteq \overline{C}_k$; $k = 1, \ldots, m$. Setjum $C_{-1} = \emptyset$ og $C_{m+1} = X$ og köllum opnu mengin $C_{k+1} \setminus \overline{C}_{k-1}$ *opnu stalla* keðjunnar C, $k = 0, \ldots, m$. Tökum eftir að opnu stallarnir mynda (opna) þakningu á X. Fyrir slíkt C skilgreinum við $\chi_C : X \to [0,1]$ með því að setja fyrir sérhvert k úr $\{0, \ldots, m\}$

$$\chi_C(x) = \begin{cases} \frac{k}{m}, & \text{ef } x \in C_k \setminus \overline{C}_{k-1} \\ 1, & \text{ef } x \in X \setminus C_m. \end{cases}$$

Tökum eftir að á stallinum $C_{k+1} \setminus \overline{C}_{k-1}$ tekur χ_C bara gildin $\frac{k+1}{m}$ og $\frac{k}{m}$ og munur þeirra er $\frac{1}{m}$. Búum til runu $(C^{(n)})_{n \geq 1}$ af leyfilegum keðjum, þar sem $C^{(n)}$ er af lengd 2^n:

$$C^{(1)} := (C_0, C_1) \text{ þar sem } C_1 = X \setminus B \text{ og } C_0 \text{ er valið þ.a. } A \subseteq C_0 \subseteq \overline{C}_0 \subseteq C_1.$$

Eftir að hafa búið til leyfilega keðju $C^{(n)}$ af lengd 2^n, þá búum við til keðju $C^{(n+1)}$ af lengd 2^{n+1} með eftirfarandi hætti: Fyrir sérhvert k úr $\{1, \ldots, 2^n\}$ veljum við opið mengi C' þ.a.

$$\overline{C_{k-1}^{(n)}} \subseteq C' \subseteq \overline{C'} \subseteq C_k^{(n)}$$

og bætum því við keðjuna; tölusetjum síðan upp á nýtt í vaxandi röð. Ljóst er að C^{n+1} er af lengd 2^{n+1}.

Setjum $\chi_n := \chi_{C^{(n)}}$ og fáum minnkandi runu af föllum $X \to [0,1]$. Hún hefur markgildi $f := \lim_{n\to\infty} \chi_n$. Ljóst er að $f|_A = 0$ og $f|_B = 1$. Sýnum að f sé samfellt:

Fljótséð er að

$$0 \leq \chi_n - f = \sum_{k=n}^{\infty} (\chi_k - \chi_{k+1}) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^n},$$

og þar með $\chi_n - \frac{1}{2^n} \leq f \leq \chi_n$. Munurinn á stærsta og minnsta gildi χ_n á opnu stöllum keðjunar $C^{(n)}$ er $\frac{1}{2^n}$ svo að munurinn á gildum f í tveimur punktum úr sama stalli $C^{(n)}$ er $\leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$. Látum $x \in X$ og $\varepsilon > 0$. Veljum n þannig að $\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$. Opnu stallar keðjunnar $C^{(n)}$ mynda opna þakningu á X. Tökum stall sem inniheldur x. Hann er opin grennd um x í X og $|f(x) - f(y) \leq \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$ fyrir öll y úr honum. □

Upprifjun (sjá líka næsta dæmablað) Látum X vera mengi, $f : X \to \mathbb{R}$ vera takmarkað fall og $A \subseteq X$. setjum

$$\|f\|_A := \sup\{|f(x)| : x \in A\}.$$

Þá er $\|\cdot\|_X$ staðall á vigurrúmi allra takmarkaðra falla á X. Ef X er grannrúm, þá er vigurrúm allra *samfelldra* takmarkaðra falla $X \to \mathbb{R}$ með stalinum $\|\cdot\|_X$ fullkomið staðalrúm (þ.e.a.s. Banach-rúm).

Setning 4.2.6 (Framlengingarsetning Tietze-Urysohns). *Fyrir grannrúm X eru eftirtalin skilyrði jafngild:*

(i) X er normlegt.

(ii) Fyrir sérhvert lokað mengi A í X og sérhvert samfellt fall $f : A \to [0,1]$ er til samfellt fall $F : X \to [0,1]$ með $F|_A = f$.

Hjálparsetning 4.2.1. *Látum X vera normlegt rúm, A vera lokað í X og $f : A \to \mathbb{R}$ vera takmarkað og samfellt. Þá er til samfellt fall $F : X \to \mathbb{R}$ með $\|f - F\|_A \leq \frac{2}{3}\|f\|_A$ og $\|F\|_X = \frac{1}{3}\|f\|_A$.*

Athugasemd. Ef A, B lokuð í grannrúmi X og unnt er að aðskilja A og B með samfelldu falli $f : X \to [0,1]$, þ.e.a.s. $f|_A = 0$ og $f|_B = 1$, þá er, fyrir öll a, b úr $\mathbb{R}$ þ.a. $a < b$, hægt að finna samfellt fall $g : X \to [a,b]$ þ.a. $g|_A = a$ og $g|_B = b$, þ.e. fallið

$$g(x) := a + (b - a)f(x).$$

Sönnun á hjálparsetningu 4.2.1. Látum $r := \|f\|_A = \sup\{|f(a)| : a \in A\}$. Mengin $B := f^{-1}([r/3, r])$ og $C := f^{-1}([-r, -r/3])$ eru sundurlæg og lokuð í X, svo skv. Urysohn er til samfellt fall $F : X \to [-r/3, r/3]$ þ.a. $F|_C = -r/3$ og $F|_B = r/3$. Fljótséð er að F fullnægir umbeðnum skilyrðum. □

Setning 4.2.7 (Framlengingarsetning Tietze-Urysohn)**.** *Fyrir grannrúm X eru eftirtalin skilyrði jafngild:*

(i) X er normlegt.

(ii) Fyrir sérhvert lokað mengi A í X og sérhvert samfellt fall $f : A \to [0,1]$ er til samfellt fall $F : X \to [0,1]$ með $f|_A = f$.

Sönnun. (ii)⇒(i): Látum A og B vera lokuð og sundurlæg í X. Þá er $f : A \cup B \to [0,1]$, $f|_A = 0$ og $f|_B = 1$ samfellt fall. Það framlengist í samfellt fall $F : X \to [0,1]$ skv. (ii) og $F^{-1}([0,1/2[)$ og $F^{-1}(]1/2,1])$ eru opnar sundurlægar grenndir um A og B.

(i)⇒(ii): Með þrepun búumm við til runu $(F_n)_{n\geq 1}$ af samfelldum föllum $F_n : X \to \mathbb{R}$ þ.a.

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} F_k \right\|_A \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \|f\|_A \tag{4.1}$$

og

$$\|F_n\|_X \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot \|f\|_A. \tag{4.2}$$

Sýnum á eftir hvernig smíða má rununa. Út frá (4.2) fæst að

$$\sum_{n=1}^{\infty} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot \|f\|_A = \|f\|_A < +\infty$$

og þar með er $\sum_{n\geq 1} F_n$ samleitin í jöfnum mæli á X og hefur samfellt fall F sem markgildi. Út frá (4.1) fæst svo að

$$\|f - F\|_A = \lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} F_k \right\|_A = 0$$

Smíði rununnar: Skv. síðustu hjálparsetningu er til samfellt fall $F_1 : X \to \mathbb{R}$ þ.a. $\|f - F_1\|_A \leq \frac{2}{3}\|f\|_A$ og $\|F_1\|_X = \frac{1}{3}\|f\|_A$. Þegar $F_1, \dots, F_n$ eru fengin þá getum við beitt hjálparsetningu á flalið $g := f - \sum_{k=1}^{n} F_k$ til þess að finna samfellt fall $F_{n+1} : X \to \mathbb{R}$ þ.a.

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n+1} F_k \right\|_A = \|g - F_{n+1}\|_A \leq \frac{2}{3}\|g\|_A \leq \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \|f\|_A = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \|f\|_A.$$

□

Viðbót: Skilyrðin (i) og (ii) eru jafngild eftirfarandi skilyrði:

(iii) Fyrir sérhvert lokað mengi A í X og sérhvert samfellt $f : A \to \mathbb{R}$ er til samfellt fall $F : X \to \mathbb{R}$ með $F|_A = f$.

(iii)⇒(i): Ef A og B eru sundurlæg lokuð hlutmengi í X, þá er fallið $f : A \cup B \to \mathbb{R}$, $f|_A = 0$ og $f|_B = 1$ samfellt svo skv. (iii) framlengist það í samfellt fall $F : X \to \mathbb{R}$ og $F^{-1}(]-\infty, 1/2[)$ og $F^{-1}(]1/2, +\infty[)$ eru þá opnar sundurlægar grenndir um A og B.

(ii)⇒(iii): A lokað í X og $f : A \to \mathbb{R}$ samfellt. Þá er $g = \frac{2}{\pi} \arctan \circ f : A \to]-1,1,[$ samfellt og hefur samfellda framlengingu $G : X \to [-1,1]$. Mengið $B := G^{-1}(\{-1,1\})$ er lokað og $A \cap B = \emptyset$; þar með er til (skv. (ii)) samfellt fall $\varphi : X \to [0,1]$ þ.a. $\varphi|_A = 1$ og $\varphi|_B = 0$. Þá er $\varphi \cdot G : X \to]-1,1[$ og $\varphi \cdot G|_A = G|_A = g$ (ath að $\varphi|_A = 1$) svo að fallið $F := \tan \circ (\frac{\pi}{2} \cdot \varphi \cdot G) : X \to \mathbb{R}$ er samfellt og $F|_A = f$.

Setning 4.2.8 (Greypingarsetning)**.** *Látum X vera grannrúm og*

$$\{f_\alpha : X \to Y_\alpha : \alpha \in I\}$$

vera fjölskyldu af samfelldum vörpunum þ.a.

(i) Ef $x, y \in X$ og $x \neq y$, þá er til $\alpha \in I$ þ.a. $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$ (sagt að fjölskyldan $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ aðgreini punkt í X).

(ii) Ef A er lokað *í X og $x \in X \setminus A$, þá er til $\alpha \in I$ þ.a. $f_\alpha(x) \notin f_\alpha(A)$.*

Þá er vörpunin $f := (f_\alpha)_{\alpha \in I} : X \to \prod_{\alpha \in I} Y_\alpha$ greyping.

Sönnun. Vörpunin $f : X \to \prod_{\alpha \in I} Y_\alpha$ er samfelld og skv. (i) er hún eintæk. Viljum sýna að hún gefi af sér grannmótnun $X \to f(X)$, en til þess nægir að sýna að $f(U)$ sé opið í $f(X)$ fyrir sérhvert opið U í X.

Látum U vera opið í X og $y \in f(U)$. Veljum x úr U þ.a. $f(x) = y$. Þar eð $X \setminus U$ er lokað og $x \notin X \setminus U$, þá er skv. (ii) til α úr I þ.a. $f_\alpha(x) \notin \overline{f_\alpha(X \setminus U)}$. Mengið $V := \pi_\alpha^{-1}(Y_\alpha \setminus \overline{f_\alpha(X \setminus U)}) = \left\{(y_\beta)_{\beta \in I} y_\alpha \notin \overline{f_\alpha(X \setminus U)}\right\}$ er opið í $\prod_{\alpha \in I} Y_\alpha$. Sýnum að $V \cap f(X) \subseteq f(Y)$: Ef $z \in X$ og $f(z) \in V$, þá er $f_\alpha(z) \notin \overline{f_\alpha(X \setminus U)}$ og því $z \notin X \setminus U$ sem þýðir að $z \in U$. Þar með er sýnt að $f(U)$ er opið í $f(X)$. □

Athugasemd. Ef X er T_1-rúm, þá leiðir (ii) til (i).

Setning 4.2.9 (Firðanleikasetning Urysohns)**.** *Reglulegt grannrúm sem hefur teljanlegan grunn er firðanlegt.*

Sönnun. Látum X vera reglulegt rúm þ.a. $\mathcal{T}_X$ eigi sér teljanlegan grunn $\mathcal{B}$. Þar sem X er reglulegt Lindelöf-rúm, þá er það normlegt. Fyrir sérhvert (B, C) úr $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ sem uppfyllir $\overline{B} \subseteq C$, getum við fundið samfellt fall $f : X \to [0, 1]$ þ.a. $f|_{\overline{B}} = 0$ og $f|_{X \setminus C} = 1$. Fjöldi slíkra spyrða (tvennda) er teljannlegur; látum $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vera upptalningu á tilheyrandi föllum. Sýnum að safnið $\{f_n : X \to [0, 1] \mid n \in \mathbb{N}\}$ fullnægi skilyrði (ii) úr greypingarsetningunni og þar með einnig skilyrði (i) úr greypingarsetningunni:

Ef A er lokað í X og $x \in X \setminus A$, þá er til C úr $\mathcal{B}$ með $x \in C \subseteq X \setminus A$. Finnum opna grennd V um X með $\overline{V} \subseteq C$ og síðan B úr $\mathcal{B}$ þ.a. $x \in B \subseteq V$. Þá er $x \in B \subseteq \overline{B} \subseteq C$. Látum f_n vera fallið sem tilheyrir (B, C). Ljóst er að $f_n(x) = 0$ og $f_n|_A = 1$ svo að sýnt er að $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fullnægir forsendum greypingarsetningarinnar.

Fáum því greypingu $f = (f_n)_{n \in \mathbb{N}} : X \to [0, 1]^\omega$. En $[0, 1]^\omega$ er firðanlegt vegna þess að það er hlutrúm í $\mathbb{R}^\omega$, sem er firðanlegt. □

4.3 Hlutun á einum

Skilgreining 4.3.1. Látum X vera grannrúm og $f : X \to \mathbb{C}$ vera vörpun. Skilgreinum

$$\operatorname{supp}(f) := \{x \in X : f(x) \neq 0\},$$

og köllum þetta mengi *stoð f*.

Athugasemd. Almennar, í staðinn fyrir $\mathbb{C}$ getum við sett $\mathbb{R}$, eða bara eitthvert rúm sem hefur núllstak.

Skilgreining 4.3.2. Látum $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ vera opna þakningu á grannrúmi X. *Hlutun á einum (á X) m.t.t. þakningarinnar* $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$ er fjölskylda af samfelldum föllum $(\phi_\alpha : X \to [0, 1])_{\alpha \in I}$ sem fullnægir eftirfarandi skilyrðum:

(i) $\operatorname{supp}(\phi_\alpha) \subseteq U_\alpha$ fyrir öll $\alpha \in I$.

(ii) Mengjafjölskyldan $(\operatorname{supp} \phi_\alpha)_{\alpha \in I}$ er *staðendanleg* (þ.e. sérhver punktur x úr X á sér grennd sem sker aðeins endanlega mörg mengi úr fjölskyldunni).

(iii) $\sum_{\alpha \in I} \phi_\alpha(x) = 1$ fyrir sérhvert x úr X.

Athugasemd. Skilyrði (iii) hefur merkingu vegna (ii).

Setning 4.3.1. *Látum $U_1, \ldots, U_n$ vera opna þakningu á normlegu rúmi X. Þá er til hlutun á einum m.t.t. þakningarinnar.*

Sönnun. Sýnum fyrst með þrepun að X eigi sér opna þakning $V_1, \ldots, V_n$ þ.a. $\overline{V}_i \subseteq U_i$ fyrir $i = 1, \ldots, n$.

- $A := X \setminus U_2 \cup \cdots \cup U_n$ er lokað í X og innihaldið í U_1 svo til er opin grennd V_1 um A þ.a. $\overline{V}_1 \subseteq U_1$ vegna þess að X er normlegt. Ljóst er að $V_1, U_2, \ldots, U_n$ er opin þakning á X.

- G.r.f. að við höfum opin mengi $V_1, \dots, V_{k-1}$ ($k \geq 2$) þ.a. $V_1, \dots, V_{k-1}, U_k, \dots, U_n$ þeki X og $\overline{V}_i \subseteq U_i$ fyrir $i = 1, \dots, k-1$. Þá er $A := X \setminus V_1 \cup \cdots \cup V_{k-1} \cup U_{k+1} \cup \cdots \cup U_n$ lokað í X og innihaldið í U_k. Veljum þá opna grennd V_k um A þ.a. $\overline{V}_k \subseteq U_k$ og fáum opna þakningu $V_1, \dots, V_k, U_{k+1}, \dots, U_n$ með $\overline{V}_i \subseteq U_i$ fyrir $i = 1, \dots, k$.

Sýnum nú fram á tilvist hlutunarinnar. Athugum að skilyrðið (ii) er sjálfkrafa uppfyllt. Veljum opna þakningu $W_1, \dots, W_n$ á X þ.a. $\overline{W}_i \subseteq V_i$ fyrir $i = 1, \dots, n$. Skv. hjálparsetningu Urysohns er, fyrir sérhvert i úr $\{1, \dots, n\}$, til samfellt fall $\psi_i : X \to [0,1]$ þ.a. $\psi_i|_{\overline{W}_i} = 1$ og $\psi_i|_{X \setminus V_i} = 0$. Þar sem ψ_i er núll alls staðar utan lokaða mengisins $\overline{V}_i$, þá er $\operatorname{supp} \psi_i \subseteq \overline{V}_i \subseteq U_i$. Skilgreinum samfellt fall $\Psi : X \to \mathbb{R}$ með $\Psi(x) := \sum_{i=1}^n \Psi_i(x)$ fyrir öll $x \in X$. Þar eð $X = W_1 \cup \cdots \cup W_n$, þá er $\Psi(x) > 0$ fyrir öll $x \in X$. Föllin $\phi_1, \dots, \phi_n$ sem skilgreind eru með $\phi_i(x) := \psi_i(x)/\Psi(x)$ $\forall x \in X$ mynda því bersýnilega hlutun á einum með tilliti til $U_1, \dots, U_n$. $\square$

Fylgisetning 4.3.1. *Á þjappaðri víðáttu er til hlutun á einum m.t.t. hvaða endanlegrar opinnar þakningar sem er.*

Sönnun. Þjöppuð víðátta er normleg. $\square$

Athugasemd. Reyndar er hægt að sýna fram á eftirfarandi niðurstöðu: Á víðáttu sem er teljanleg í óendanlegu (þ.e. ∞ hefur teljanlegan grunn í Alexandroff-þjöppuninni) eru alltaf til hlutanir á einum.

Dæmi 4.3.1. X þjöppuð m-víð víðátta. Sýnum að unnt sé að greypa X inn í $\mathbb{R}^N$ fyrir einhverja náttúrlega tölu N. Þar sem X er þjöppuð, þá eru til opin mengi $U_1, \dots, U_n$ í X þannig að $X = U_1 \cup \cdots \cup U_n$ og fyrir sérhvert i er til grannmótun $g_i : U_i \to \underbrace{g(U_i)}_{\text{opið}} \subseteq \mathbb{R}^m$. Veljum hlutun á einum $\phi_1, \dots, \phi_n$ m.t.t. $U_1, \dots, U_n$ og skilgreinum fyrir sérhvert i úr $\{1, \dots, n\}$ samfellda vörpun $h_i : X \to \mathbb{R}^m$ með

$$h_i(x) := \begin{cases} \phi_i(x) \cdot g_i(x), & \text{ef } x \in U_i, \\ 0_{\mathbb{R}^m}, & \text{ef } x \in X \setminus \operatorname{supp} \phi_i. \end{cases}$$

Sýnum að vörpunin

$$F : X \to (\underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ sinnum}}) \times (\underbrace{\mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m}_{n \text{ sinnum}}), \quad F(x) := (\phi_1(x), \dots, \phi_n(x), h_1(x), \dots, h_n(x))$$

sé greyping: Ljóst er að F er samfelld, svo okkur nægir að sýna að F sé eintæk vegna þess að X er þjappað. G.r.f. að $F(x) = F(y)$. Þar sem $\sum_{i=1}^n \phi_i(x) = 1$, þá er til i þ.a. $\phi_i(x) = \phi_i(y) > 0$ svo að $x, y \in U_i$. Þá fæst að $h_i(x) = \phi_i(x) g_i(x) = \phi_i(y) g_i(y) = h_i(y)$ og því $g_i(x) = g_i(y)$. En g_i er eintæk svo að $x = y$.

4.4 Tychonoff-setningin

Skilgreining 4.4.1. Segjum að safn hlutmengja í titleknu mengi hafi *ekki tómt endanlegt snið* (skammstafað e.e.s.) ef sniðmengi sérhvers endanlegs hlutsafns er ekki tómt.

Athugasemd (Upprifjun). Grannrúm X er þjappað *þ.þ.a.a.* um sérhvert safn $\mathcal{C}$ í $\mathcal{P}(X)$ sem hefur e.e.s., gildir að $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} \overline{C} \neq \emptyset$.

Hjálparsetning 4.4.1. *Látum X vera mengi og $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ þ.a. $\mathcal{A}$ hafi e.e.s. Þá er til $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ þ.a. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ hefur e.e.s. og $\mathcal{D}$ er óstækkanlegt m.t.t. þessara eiginleika, þ.e.a.s. ef $\mathcal{D}'$ hefur e.e.s. og $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}'$, þá er $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$.*

Sönnun. Látum $\mathbb{A}$ vera mengi allra safna $\mathcal{B}$ í $\mathcal{P}(X)$ þannig að $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ og $\mathcal{B}$ hafi e.e.s. og röðum stökunum í $\mathbb{A}$ með *íveruröðuninni* $\subsetneq$. Við viljum sýna að $\mathbb{A}$ hafi óstækkanlegt stak. Skv. hjálparsetningu Zorn nægir að sýna að sérhvert línulega raðað hlutmengi í $\mathbb{A}$ sé takmarkað að ofan. Látum $\mathbb{B}$ vera línulega raðað hlutmengi í $\mathbb{A}$ og setjum $\mathcal{C} := \bigcup_{\mathcal{B} \in \mathbb{B}} \mathcal{B}$ og sýnum að $\mathcal{C} \in \mathbb{B}$ (þá er $\mathcal{C}$ stærsta stakið í $\mathbb{B}$ og þar með $\mathbb{B}$ takmarkað að ofan).

- Augljóslega gildir $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$.

- $\mathcal{C}$ *hefur e.e.s.:* Látum $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{C}$. Þá gildir um sérhvert i að til er $\mathcal{B}_i$ úr $\mathbb{B}$ þannig að $C_i \in \mathcal{B}_i$. Nú er $\{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n\}$ endanlegt hlutmengi í línulega raðaða menginu $\mathbb{B}$ og hefur því stærsta stak, m.ö.o. er til k úr $\{1, \dots, n\}$ þ.a. $\mathbb{B}_i \subseteq \mathbb{B}_k$ fyrir $i = 1, \dots, n$; þar með eru $C_1, \dots, C_n$ stök úr $\mathcal{B}_k$ og $\mathcal{B}_k$ hefur e.e.s., svo að $C_1 \cap \dots \cap C_n \neq \emptyset$.

$\square$

Hjálparsetning 4.4.2. *Látum X vera mengi og $\mathcal{D}$ vera safn hlutmengja í X sem hefur e.e.s. og er óstækkanlegt m.t.t. þess eiginleika. Þá gildir*

(a) Endanlegt sniðmengi af stökum úr $\mathcal{D}$ er stak í $\mathcal{D}$.

(b) Ef $A \subseteq X$ og A sker sérhvert stak úr $\mathcal{D}$, þá er A í $\mathcal{D}$.

Sönnun. (a) Látum $\mathcal{B}$ vera sniðmengi endanlega margra staka úr $\mathcal{D}$ og setjum $\mathcal{E} := \mathcal{D} \cup \{B\}$. Okkur nægir að sýna að $\mathcal{E}$ hafi e.e.s., því þá er $\mathcal{D} = \mathcal{E}$ og þar með $B \in \mathcal{D}$. Skrifum $B = \bigcap_{C \in \mathcal{C}'} C$ með $\mathcal{C}'$ sem endanlegt hlutmengi í $\mathcal{D}$. Látum nú $\mathcal{C}$ vera endanlegt hlutmengi í $\mathcal{E}$. Ef $B \notin \mathcal{C}$, þá er $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ og því $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset$ vegna þess að D hefur e.e.s. Ef hins vegar $B \in \mathcal{C}$, þá setjum við $\mathcal{C}'' := (C \setminus \{B\}) \cup \mathcal{C}'$, þá er $\mathcal{C}''$ endanlegt hlutmengi í $\mathcal{D}$ og þar með

$$\emptyset \neq \bigcap_{C \in \mathcal{C}''} C = \left(\bigcap_{C \in \mathcal{C} \setminus \{B\}} C \right) \cap \left(\bigcap_{C \in \mathcal{C}'} C \right) = \left(\bigcap_{C \in \mathcal{C} \setminus \{B\}} C \right) \cap B = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C.$$

(b) Setjum $\mathcal{E} := \mathcal{D} \cup \{A\}$. Ef $D_1, \dots, D_n \in \mathcal{D}$, þá er $D_1 \cap \dots \cap D_n \in \mathcal{D}$ skv. (a) og því $D_1 \cap \dots \cap D_n \cap A \neq \emptyset$; þar með hefur $\mathcal{E}$ e.e.s., svo $\mathcal{E} = \mathcal{D}$ og því $A \in \mathcal{D}$. $\square$

Setning 4.4.1 (Tychonoff). *Faldrúm þjappaðra grannrúma er þjappað.*

Sönnun. Látum $X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ með X_α þjappað fyrir öll $\alpha \in J$. Látum $\mathcal{A}$ ver safn hlutmengja í X þ.a $\mathcal{A}$ hafi e.e.s. Sýnum að $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} \overline{A} \neq \emptyset$: Skv. hjálparsetningu 4.4.1 er til óstækkanlegt $\mathcal{D}$ þannig að $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$. Látum $\alpha \in J$ og látum $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ vera α-ta ofanvarpið. Safnið $\{\pi_\alpha(D) \mid D \in \mathcal{D}\}$ í $\mathcal{P}(X_\alpha)$ hefur e.e.s. svo $\bigcap_{D \in \mathcal{D}} \overline{\pi_\alpha(D)} \neq \emptyset$ vegna þess að X_α er þjappað. Fyrir sérhvert $\alpha \in J$ veljum við x_α úr $\prod_{\alpha \in J} \overline{\pi_\alpha(D)}$ og setjum $\mathbf{x} = (x_\alpha)_{\alpha \in J} \in X$. Okkur nægir að sýna að $\mathbf{x} \in \overline{D}$ fyrir öll $D \in \mathcal{D}$. Látum nú $D \in \mathcal{D}$. Þá gildir um sérhvert $\alpha \in J$ og sérhverja grennd U_α um x_α að $U_\alpha \cap \pi_\alpha(D) \neq \emptyset$ vegna þess að $x_\alpha \in \overline{\pi_\alpha(D)}$. Þar með er

$$\pi_\alpha \left(\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \cap D \right) = U_\alpha \cap \pi_\alpha(D) \neq \emptyset$$

og því $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \neq \emptyset$. Skv. hjálparsetningu 4.4.2 (b) er því $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \in \mathcal{D}$ fyrir sérhverja grennd U_α um x_α og skv. hjálparsetningu 4.4.2 (a) sker sérhver grunngrennd um x öll D úr $\mathcal{D}$ (því að slík grennd er endanlegt sniðmengi af gerðinni $\pi^{-1}(U_\alpha)$). Af því leiðir að $\mathbf{x} \in \overline{D}$ fyrir öll $D \in \mathcal{D}$. $\square$

4.5 Grannmynstur á fallarúmum

Skilgreining 4.5.1. Látum X vera mengi og Y grannrúm. Fyrir sérhvert $x \in X$ og sérhvert opið mengi U í Y setjum við

$$S(x, U) := \left\{ f \in Y^X \mid f(x) \in U \right\}.$$

Mengin $S(x, U)$ mynda hlutgrunn fyrir grannmynstur á Y^X sem kallast *grannmynstur vejulegrar samleitni*.

Athugasemd. Umrætt grannmynstur er bara faldgrannmynstur á Y^X.

Setning 4.5.1. *Látum X vera mengi og Y grannrúm. Fallaruna $(f_n : X \to Y)_{n \in \mathbb{N}}$ stefnir á fall $f : X \to Y$ í ofangreindu grannmynstri* þ.þ.a.a. *$f_n(x) \to f(x)$ fyrir öll x úr X.*

Sönnun. Létt æfing. $\square$

Dæmi 4.5.1 (Æfing)**.** X grannrúm og (Y,d) firðrúm. Fyrir sérhvert f úr Y^X, sérhvert þjappað C í Xog sérhvert $\varepsilon > 0$ setjum við

$$B_C(f,\varepsilon) := \left\{ g \in Y^X \mid \sup_{x\in C} d(f(x),g(x)) < \varepsilon \right\}.$$

Sýna á að mengin $B_C(f,\varepsilon)$ myndi grunn fyrir grannmynstur á Y^X.

Skilgreining 4.5.2. Þetta grannmynstur kallast *grannmynstur þjappaðrar samleitni.*

Setning 4.5.2. *X grannrúm og (Y,d) firðrúm. Runa (f_n) í Y^X stefnir á f í grannmynstri þjappaðrar samleitni* þ.þ.a.a. *$(f_n|_C)$ stefni í jöfnum mæli á $f|_C$ fyrir sérhvert C þjappað í X.*

Sönnun. Augljóst. □

Skilgreining 4.5.3. Grannrúm X er sagt *þjapplega framleitt* ef það fullnægir eftirfarandi skilyrði

> Hlutmengi A í X er opið [lokað] *þ.þ.a.a.* $A \cap C$ sé opið [lokað] í C fyrir sérhvert þjappað C í X.

Hjálparsetning 4.5.1. *Grannrúm X er þjapplega framleitt ef það fullnægir öðru hvoru eftirfarandi skilyrða:*

(i) X er staðþjappað.

(ii) Sérhver punktur í X á sér teljanlegan grenndagrunn.

Sönnun. (i) Látum $A \subseteq X$ þ.a. $A \cap C$ sé opið fyrir sérhvert þjappað C í X. Ef $x \in A$, þá er til opin grennd U um x í X þ.a. $\overline{U}$ sé þjappað. Þá er $A \cap \overline{U}$ opið í $\overline{U}$ og þar með er $A \cap U$ opið í U og því einnig í X. Punkturinn x er því innri punktur í A.

(ii) Látum $A \subseteq X$ þ.a. $A \cap C$ sé lokað í C fyrir sérhvert þjappað C í X. Látum $x \in \overline{A}$ og sýnum að $x \in A$. Til er runa $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ í A þannig að $x_n \longrightarrow x$ (í X). Þar með er $C := \{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ þjappað í X svo að $A \cap C$ er lokað í C og inniheldur þar með x. □

Hjálparsetning 4.5.2. *Látum X og Y vera grannrúm og g.r.f. að X sé þjapplega framleitt. Þá er vörpun $f : X \to Y$ samfelld* ef og aðeins ef *$f|_C : C \to Y$ er samfelld fyrir sérhvert þjappað C í X.*

Sönnun. Ef $f : X \to Y$ er samfelld, þá er $f|_C : C \to Y$ samfelld fyrir sérhvert hlutmengi C í X. Öfugt, g.r.f. að $f : X \to Y$sé vörpun þ.a. $f|_C : C \to Y$ sé samfelld fyrir sérhvert þjappað C í X: Látum V vera opið í Y. Fyrir sérhvert þjappað $C \subseteq X$ fæst þá að $f^{-1}(V) \cap C = (f|_C)^{-1}(V)$ er opið í C og þar með er $f^{-1}(V)$ það líka, því X er þjapplega framleitt. □

Athugasemd (Ritháttur). Fyrir grannrúm X og Y táknum við með $\mathcal{C}(X,Y)$ mengi allra samfelldra varpana frá X inn í Y.

Setning 4.5.3. *Látum X vera þjapplega framleitt grannrúm og (Y,d) vera firðrúm. Þá er $\mathcal{C}(X,Y)$ lokað í Y^X í grannmynstri þjapplegrar samleitni.*

Sönnun. Látum f vera þéttipunkt $\mathcal{C}(X,Y)$ í Y^X og sýnum að $f \in \mathcal{C}(X,Y)$. Til þess nægir að sýna að $f|_C : C \to Y$ sé samfelld fyrir sérhvert þjappað $C \subseteq X$. Látum C vera þjappað í X. Veljum, fyrir sérhvert n úr $\mathbb{N}^*$, f_n úr $B_C(f,1/n) \cap \mathcal{C}(X,Y)$. Þá er auðséð að $f_n|_C \longrightarrow f|_C$ í jöfnum mæli og þar með er $f|_C$ samfelld. □

Fylgisetning 4.5.1. *Látum X vera þjapplega framleitt grannrúm og (Y,d) vera firðrúm. Ef runa af samfelldum vörpunum $(f_n : X \to Y)_{n\in\mathbb{N}}$ stefnir á f í grannmynstri þjappaðrar samleitni á Y^X, þá er f samfelld.*

Sönnun. Augljóst. □

Dæmi 4.5.2 (Æfing)**.** Látum X vera grannrúm og (Y,d) vera firðrúm. Látum $\mathcal{T}_1$ vera grannmynstur venjulegrar samleitni á Y^X, $\mathcal{T}_2$ vera grannmynstur þjappaðrar samleitni á Y^X og $\mathcal{T}_3$ vera jafnmælis-grannmynstrið á Y^X. Þá gildir

$$\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_3.$$

Ef X er strjált, þá er $T_1 = T_2$; ef X er þjappað þá er $T_2 = T_3$.

Látum X og Y vera grannrúm. Fyrir sérhvert þjappað hlutmengi C í X og sérhvert opið hlutmengi U í Y setjum við

$$S(C,U) := \{f \in \mathcal{C}(X,Y) : f(C) \subseteq U\}.$$

Ljóst er að mengin $S(C,U)$ þekja $\mathcal{C}(X,Y)$ og mynda því hlutgrunn fyrir grannmynstur á $\mathcal{C}(X,Y)$.

Skilgreining 4.5.4. Umrætt grannmynstur kallast *þjappað-opna* (eða *þjopna*) grannmynstrið á $\mathcal{C}(X,Y)$.

Setning 4.5.4. *Látum X vera grannrúm og (Y,d) vera firðrúm. Þá er þjopna grannmynstrið á $\mathcal{C}(X,Y)$ jafnt grannmynstri þjappaðrar samleitni.*

Sönnun. Fyrir sérhvert A í Y og sérhvert $\varepsilon > 0$ setjum við

$$U(X,\varepsilon) := \{y \in Y : d(y,A) < \varepsilon\}.$$

Tökum eftir: Ef A er þjappað og V er opin grennd um A, þá er til $\varepsilon > 0$ þ.a. $U(A,\varepsilon) \subseteq V$.

- Látum $S(C,U)$ vera eitt af hlutgrunnsstökum þjopna grannmynstursins og $f \in S(C,U)$. Þá er $f(C)$ þjappað hlutmengi í U svo að til er $\varepsilon > 0$ þ.a. $U(f(C),\varepsilon) \subseteq U$. Fyrir sérhvert g úr $B_C(f,\varepsilon)$ gildir ljóslega að $g(x) \in U(f(C),\varepsilon)$ fyrir öll x úr C svo að $g(C) \subseteq U$ og þar með $B_C(f,\varepsilon) \subseteq S(C,U)$. Af þessu sést að grannmynstur þjappaðrar samleitni er fínna en þjopna grannmynstrið.

- Öfugt, látum $f \in \mathcal{C}(X,Y)$, C vera þjappað í X og $\varepsilon > 0$. Sérhver punktur x úr X á sér opna grennd V_x þ.a. $f(\overline{V}_x) \subseteq B(f(x),\varepsilon/3)$. Þar sem C er þjappað, þa'eru til $x_1,\dots,x_n$ úr C þ.a. $C \subseteq V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_n}$. Setjum $C_j := \overline{V}_{x_j} \cap C$ fyrir $j = 1,\dots,n$. Þá eru C_j-in þjöppuð og fljótséð er að $f \in S(C,B(f(x),\varepsilon/3)) \cap \cdots S(C_n,B(f(x_n),\varepsilon/3)) \subseteq B_C(f,\varepsilon)$. Þar með er sýnt að þjopna grannmynstrið er fínna en grannmynstur þjappaðrar samleitni.

$\square$

Athugasemd. X grannrúm og Y firðanlegt rúm. Þá segir setningin okkur að grannmynstur þjappaðrar samleitni á $C(X,Y)$ er óháð valinu á firð sem skilgreinir grannmynstur á Y. Sér í lagi gildir þetta þegar X er þjappað; þ.e.a.s. jafnmælisgrannmynstrið er óháð valinu á firð sem skilgreinir grannmynstrið á Y.

Setning 4.5.5. *Látum X vera staðþjappað Hausdorff-rúm og Y vera grannrúm. Þá er vörpunin*

$$e : X \times \mathcal{C}(X,Y) \to Y, e(x,f) := f(x)$$

samfelld þegar $\mathcal{C}(X,Y)$ er með þjopna grannmynstrið.

Skilgreining 4.5.5. Vörpunin e kallst *gildistökuvörpunin*

Sönnun á síðustu setningu. Látum $(x,f) \in X \times \mathcal{C}(X,Y)$ og V vera opna grennd um $f(x) = e(x,f)$ í Y. Þar sem f er samfelld og X er staðþjappað og Hausdorff, þá er til opin grennd U um x í X þ.a. $\overline{U}$ sé þjappað og $f(\overline{U}) \subseteq V$: Þá er $U \times S(\overline{U},V)$ opin grennd um (x,f) í $X \times \mathcal{C}(X,Y)$ og fyrir sérhvert (x',f') úr $U \times S(\overline{U},V)$ gildir augljóslega að $e(x',f') = f'(x') \in V$. Þar með er sýnt að e er samfelld. $\square$

Sérhver vörpun $f : X \times Z \to Y$ gefur af sér vörpun $F : Z \to Y^X$ sem er skilgreind með $(F(z))(x) := f(x,z)$, m.ö.o. er $F(z) = f(\cdot,z)$. Öfugt, sérhver vörpun $F : Z \to Y^X$ gefur af sér vörpun $f : X \times Z \to Y$, sem skilgreind er með $f(x,z) := (F(z))(x)$. Þessar varpanir eru sagðar tilheyra hvor annarri.

Athugasemd. Ef $f : X \times Z \to Y$ er samfelld, þá tekur F gildi sín í $\mathcal{C}(X,Y)$ og þá lítum við ávallt á F sem vörpun $Z \to \mathcal{C}(X,Y)$.

Setning 4.5.6. *Látum X, Y og Z vera grannrúm og setjum þjopna grannmynstrið á $\mathcal{C}(X,Y)$.*

(i) Ef $f : X \times Z \to Y$ er samfelld, þá er tilheyrandi vörpun $F : Z \to \mathcal{C}(X,Y)$ líka samfelld.

(ii) G.r.f. að X sé staðþjappað og Hausdorff. Ef $F : Z \to \mathcal{C}(X,Y)$ er samfelld, þá er tilheyrandi vörpun $f : X \times Z \to Y$ líka samfelld.

Sönnun. (i) G.r.f. að $f : X \times Z \to Y$ sé samfelld og látum z_0 vera punkt úr Z. Til að sýna að F sé samfelld í z_0 nægir að sýna að fyrir sérhvert opið hlutmengi af gerðinni $S(C, U)$ í $\mathcal{C}(X, Y)$ sem inniheldur $F(z_0)$ sé til opin grennd W um z_0 í Z þ.a. $F(W) \subseteq S(C, U)$. Nú er $F(z_0) \in S(C, U)$, svo $(F(z_0))(C) \subseteq U$, en það jafngildir því að $f(x, z_0) \in U$ fyrir öll $x \in C$, svo $f(C \times \{z_0\}) \subseteq U$. Þar eð f er samfelld, þá er $f^{-1}(U)$ opin grennd um z_0 af gerðinni tiltekið $C \times \{z_0\}$, í $C \times Z$. Skv. hólkasetningunni er þá til opin grennd W um z_0 í Z þ.a. $C \times W \subseteq f^{-1}(U)$ því C er þjappað. Það þýðir að $(F(z))(x) = f(x, z) \in U$ fyrir öll $x \in C$ og öll $z \in W$, svo $F(W) \subseteq S(C, U)$.

(ii) Athugum að $f = \mathrm{id}_X \times F \circ e$ svo f er samskeyting tveggja samfelldra varpana og því samfelld. $\square$

Hluti II

Algebruleg grannfræði

Kafli 5

Ýmis verkefni í grannfræði

Meðal verkefna sem við höfum áhuga á eru

1. Er til samfelld vörpun $f : B^n \to B^n$ sem hefur engan kyrrapunkt ($n = 0$ er fáfengilegt, $n = 1$ er milligildissetningin)?

2. Er til samfelld vörpun $f : B^n \to S^{n-1}$ þ.a. $f(x) = x$ fyrir öll x úr S^{n-1}? Slík vörpun kallast *inndráttur* (tilfellið $n = 1$ er einfalt, þar er þetta ekki hægt því ekki til samfelld vörpun frá samanhangandi bilinu $[-1, 1]$ yfir í $\{-1, 1\}$).

3. Er til samfellt vigursvið á S^n sem verður hvergi núll? M.ö.o., er til samfelld vörpun $f : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ þ.a. $f(x) \cdot x = 0$ (innfeldi) fyrir öll $x \in S^n$? (Ef $n = 1$ þá greinilega hægt).

   Ef S er hlutvíðátta í $\mathbb{R}^n$ og fyrir öll $x \in S$ látum við T_xS vera snertisléttu S í x, þá er *vigursvið* samfelld vörpun $F : S \to \mathbb{R}^n$ þ.a. $F(x) \in T_xS$.

4. Er fyrir öll $\varepsilon > 0$ til samfelld vörpun $\gamma : S^n \to S^n$ sem hefur engan kyrrapunkt og uppfyllir $\|\gamma(x) - x\| < \varepsilon$ fyrir öll $x \in S^n$?

   Ef $\varepsilon > 2$, þá er $\gamma = -\operatorname{id}$ slík vörpun. Ef ε er nógu lítið, $n = 0$, þá er þetta ekki hægt, en ef $n = 1$ þá er þetta auðveldlega hægt með því að snúa kúluhvelinu.

5. Getur $\mathbb{R}^n$ verið grannmóta $\mathbb{R}^m$ ef $n \neq m$? ($n = 1$ og $m > 1$ er einfalt tilfelli, sést með því að taka einn punkt úr hvoru menginu).

6. Er S^2 grannmóta hringfeldinu $S^1 \times S^1$?

7. Er hringfeldið $S^1 \times S^1$ (kleinuhringur) grannmóta kleinuhring með tveimur götum?

Athugasemd (Ritháttur). Fyrir $x := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ setjum við $\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Látum hér

$$\begin{aligned} B^n &:= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\} \\ S^n &:= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}. \end{aligned}$$

Skilgreining 5.0.6. Látum X vera grannrúm og $A \subseteq X$. Samfelld vörpun $r : X \to A$ þ.a. $r(a) = a$ fyrir öll $a \in A$ kallast *inndráttur*; ef slík vörpun er til þá er sagt að A sé *inndrægi (af X)*.

5.1 Samtoganir

Skilgreining 5.1.1. Samfelldar varpanir $f, g : X \to Y$ eru sagðar *samtoga*, táknað $f \simeq g$, ef til er samfelld vörpun $F : X \times I \to Y$ ($I = [0, 1]$) þannig að $F(x, 0) = f(x)$ og $F(x, 1) = g(x)$ fyrir öll $x \in X$. Vörpunin F kallast *samtogun frá f til g*.

Almennar, látum $A \subseteq X$. Við segjum að F sé *samtogun frá f til g með tilliti til A* (og þá að f *sé samtoga g m.t.t. A*) ef $F : X \times I \to Y$ er samtogun frá f til g og $F(a, t) = f(a)$ fyrir öll $t \in I$ ef $a \in A$. Táknum þetta með $f \simeq g$ $(\operatorname{rel} A)$.

Setning 5.1.1. *$f \simeq g$ $(\operatorname{rel} A)$ eru jafngildisvensl á Y^X.*

Sönnun. **Sjálfhverfa** $f \simeq f\ (\operatorname{rel} A)$ vegna þess að $F : X \times [0,1] \to Y, F(x,t) = f(x)$ er samtogun frá f til f með tilliti til A.

Samhverfa Ef $H : X \times [0,1] \to Y$ er samtogun frá f til g m.t.t. A, þá er $G : X \times [0,1] \to Y, G(x,t) := H(x, 1-t)$ samtogun frá g til f m.t.t. A.

Gegnvirkni Ef $F : f \simeq g\ (\operatorname{rel} A)$ og $G : g \simeq h\ (\operatorname{rel} A)$, þá fæst $H : f \simeq h\ (\operatorname{rel} A)$ með því að setja

$$H(x,t) := \begin{cases} F(x, 2t), & 0 \le t \le 1/2, \\ G(x, 2t-1), & 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

□

Athugasemd. $g(x) = F(x,1) = G(x,0)$.

Dæmi 5.1.1. Til er inndráttur $f : B^n \to S^{n-1}$ *þ.þ.a.a.* $\mathrm{id} : S^{n-1} \to S^{n-1}$ sé samtoga fastri vörpun.

Sönnun. Ef $f : B^n \to S^{n-1}$ er inndráttur, þá setjum við

$$H : S^{n-1} \times [0,1] \to S^{n-1}; (x,t) \mapsto f(tx).$$

Þá er $H(x,1) = f(x) = x$ fyrir öll $x \in S^{n-1}$ og $H(x,0) = f(0)$, þ.e.a.s. $H : f(0) \simeq \mathrm{id}_{S^{n-1}}$.

Öfugt, ef $H : S^{n-1} \times [0,1] \to S^{n-1}$ er samfelld með $H(x,0) = c$ og $H(x,1) = x$ fyrir öll $x \in S^{n-1}$ þá skilgreinum við inndrátt $f : B^n \to S^{n-1}$ með

$$f(x) := \begin{cases} H(x/\|x\|, \|x\|), & x \neq 0, \\ c, & x = 0. \end{cases}$$

Fljótséð er að f er samfelld vörpun (æfing). □

Dæmi 5.1.2. Köllum $a_n : S^n \to S^n, x \mapsto -x$ *andfætisvörpun*. Ef til er samfellt vigursvið á S^n sem er hvergi núll, þá er $a_n \simeq \mathrm{id}_{S^n}$.

Sönnun. G.r.f. að $f : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ sé samfelld og uppfylli $f(x) \neq 0$ og $f(x) \cdot x = 0$ fyrir öll $x \in S^{n-1}$. Setjum $H(x,t) = a(t) \cdot x + b(t,x) \cdot f(x)$. Til þess að H sé vörpun frá $S^n \times [0,1]$ yfir í S^n, þá þarf að gilda $\|H(x,t)\| = 1$, þ.e.a.s.

$$\begin{aligned} 1 &= \|a(t)x + b(t,x)f(x)\|^2 \\ &= a(t)^2 \underbrace{\|x\|}_{1} + b(t,x)^2 \|f(x)\|^2 \\ &= a(t)^2 + b(t,x)^2 \underbrace{\|f(x)\|^2}_{0}. \end{aligned}$$

Tökum $a(t) = 1 - 2t$ og þá $b(t,x) := \frac{2\sqrt{t-t^2}}{\|f(x)\|}$. □

Setning 5.1.2. *Látum $f_1, f_2 : X \to Y$ og $g_1, g_2 : Y \to Z$ vera samfelldar og $A \subseteq X$. Ef $f_1 \simeq f_2\ (\operatorname{rel} A)$ og $g_1 \simeq g_2\ (\operatorname{rel} f_1(A))$, þá er $g_1 \circ f_1 \simeq g_2 \circ f_2\ (\operatorname{rel} A)$.*

Sönnun. $F : f_1 \simeq f_2\ (\operatorname{rel} A)$, $G : g_1 \simeq g_2\ (\operatorname{rel} f(A))$. Skilgreinum $H : X \times [0,1] \to Z$ með $H(x,t) := G(F(x,t), t)$. Þá er $H : g_1 \circ f_1 \simeq g_2 \circ f_2\ (\operatorname{rel} A)$. □

5.2 Ríkjafræði

Skilgreining 5.2.1. *Ríki* $\mathcal{C}$ samanstendur af

(i) Safni, $\operatorname{Ob} \mathcal{C}$, af *hlutum*.

(ii) Fyrir sérhverja raðspyrðu (X, Y) af hlutum úr $\operatorname{Ob} \mathcal{C}$ er gefið mengi $\operatorname{Hom}(X,Y)$ (eða $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$). Stökin í $\operatorname{Hom}(X,Y)$ nefnast *mótanir frá X til Y*.

(iii) Fyrir sérhverja raðaða þrennd (X, Y, Z) af hlutum úr $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ er gefin vörpun $\mathrm{Hom}(X, Y) \times \mathrm{Hom}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}(X, Z), (f, g) \mapsto g \circ f$ sem við köllum *samskeytingu*.

Skrifum oft $f : X \to Y$ eða $X \xrightarrow{f} Y$ í stað $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$. Jafnframt er þess krafist að eftirfarandi gildi:

Tengiregla Ef $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ og $h : Z \to W$, þá er $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Tilvist hlutleysu Fyrir sérhvert Y úr $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ er til mótun 1_Y úr $\mathrm{Hom}(Y, Y)$ þ.a. fyrir öll f úr $\mathrm{Hom}(X, Y)$ og öll g úr $\mathrm{Hom}(Y, Z)$ gildi að $1_Y \circ f = f$ og $g \circ 1_Y = g$.

Athugasemd. Stundum er skrifað id_Y í stað 1_Y. Tökum eftir að 1_Y er ótvírætt ákvörðuð.

Skilgreining 5.2.2. Við segjum að f úr $\mathrm{Hom}(X, Y)$ sé *einsmótun* ef til er g úr $\mathrm{Hom}(Y, X)$ þ.a. $g \circ f = 1_X$ og $f \circ g = 1_Y$.

Dæmi 5.2.1. (1) Mengjaríkið **Men**: $\mathrm{Ob}\,\mathbf{Men}$ er safn sallra mengja,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Men}}(X, Y) = Y^X.$$

(2) Grúpuríkið **Grp**: $\mathrm{Ob}\,\mathbf{Grp}$ er safn allra grúpa, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}$ er mengi allra grúpumótana $X \to Y$.

(3) Mótlaríkið $\mathbf{Mot}_R$, þar sem R er baugur: $\mathrm{Ob}\,\mathbf{Mot}_R$ er safn allra (vinstri) R-mótla, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Mot}_R}(X, Y)$ er mengi allra R-línulegra varpana (R-mótla mótlana) $X \to Y$.

(4) Grannrúmaríkið **Top**: $\mathrm{Ob}\,\mathbf{Top}$ er safn allra grannrúma, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y) = \mathcal{C}(X, Y)$.

(5) X og Y grannrúm og $f : X \to Y$ samfelld. Látum $[f]$ vera *samtogunarflokk* f, þ.e.a.s. jafngildisflokk f m.t.t. venslanna $\simeq$. Þá getum við skilgreint $[g] \circ [f] := [g \circ f]$ (óháð valinu á fulltrúum skv. setningu 5.1.2); fáum *samtogunarríkið* **Hot**: $\mathrm{Ob}\,\mathbf{Hot}$ er safn allra grannrúma, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Hot}}(X, Y)$ er mengi allra samtogunarflokka samfelldra varpana $X \to Y$.

Skilgreining 5.2.3. Látum $\mathcal{C}$ og $\mathcal{C}'$ vera tvö ríki.

1. *Varpi* (functor) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ er vörpun sem úthlutar hverjum hlut X úr $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ ákveðnum hlut $F(X)$ í $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}'$ og sérhverri mótun f úr $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ákveðinni mótun $F(f)$ úr $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(X), F(Y))$ þannig að eftirfarandi skilyrði séu uppfyllt:

   (i) Ef $f : X \to Y$ og $g : Y \to Z$ eru mótanir í $\mathcal{C}$, þá er $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

   (ii) Fyrir öll X úr $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ er $F(1_X) = 1_{F(X)}$.

2. *Hjávarpi* (cofunctor) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ er vörpun sem úthlutar hverjum hlut X úr $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ ákveðnum hlut $F(X)$ úr $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}'$ og hverri mótun f úr $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ákveðinni mótun $F(f)$ úr $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(Y), F(X))$ þannig að eftirfarandi gildi:

   (i) Ef $f : X \to Y$ og $g : Y \to Z$ eru mótanir í $\mathcal{C}$, þá er $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

   (ii) Fyrir öll X úr $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ er $F(1_X) = 1_{F(X)}$.

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightsquigarrow F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z) \qquad \text{(varpi)}$$

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightsquigarrow F(X) \xleftarrow[F(f)]{} F(Y) \xleftarrow[F(g)]{} F(Z) \qquad \text{(hjávarpi)}$$

Mynd 5.1: Varpi og hjávarpi

Dæmi 5.2.2. (1) R-víxlbaugur. Fyrir R-mótul M setjum við $M^* := \mathrm{Hom}_R(M, R)$ (svokallaður *nykurmótull M*). Setjum $D : \mathbf{Mot}_R \to \mathbf{Mot}_R, D(M) = M^*$ og fyrir $f : M \to N, D(f) : N^* \to M^*, D(f) = f^*$. Þá er D hjávarpi.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "l\circ f = f^*(l) = D(f)(l)"'] & N \arrow[d, "l \in N^*"] \\ & R \end{tikzcd}$$

þar sem $n \cdot x = (\underbrace{1_R + \cdots + 1_R}_{n\text{liðir}}) \cdot x$.

(2) Fyrir grannrúm X setjum við $F(X) = X$ og fyrir $f : X \to Y$ setjum við $F(f) = [f]$ sem samtogunarflokk f. Þá er $F : \mathbf{Top} \to \mathbf{Hot}$ varpi.

(3) *Gleymskuvarpar*:

(i) $\mathbf{Mot}_R \to \mathbf{Mot}_{\mathbb{Z}}$.

(ii) $\mathbf{Mot}_{\mathbb{Z}} \to \mathbf{Grp}$.

(iii) $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Men}$.

5.3 Vegsamtoganir

Skrifum $I := [0, 1]$. *Vegur* í grannrúmi X er samfelld vörpun $I \to X$.

Skilgreining 5.3.1. X grannrúm og $\alpha, \beta : I \to X$ vegir. Segjum að α og β séu *vegsamtoga* ef $\alpha \simeq \beta$ (rel$\{0, 1\}$) og skrifum þá $\alpha \simeq_p \beta$ (p stendur fyrir *path*).

Látum $\alpha, \beta : I \to X$ vera vegi þannig að $\alpha(1) = \beta(0)$ og skilgreinum $\alpha * \beta : I \to X$ með

$$(\alpha * \beta)(t) := \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ \beta(2t-1) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

og köllum þennan nýja veg frá $\alpha(0)$ til $\beta(1)$ *samsetningu* veganna α og β.

Setning 5.3.1. *Ef $\alpha_1 \simeq_p \alpha_2$ og $\beta_1 \simeq_p \beta_2$ og $\alpha_1(1) = \beta_1(0)$ (og þar með einnig $\alpha_2(1) = \beta_2(0)$), þá er $\alpha_1 * \beta_1 \simeq_p \alpha_2 * \beta_2$.*

Sönnun. Fyrir $H_1 : \alpha_1 \simeq_p \alpha_2$ og $H_2 : \beta_1 \simeq_p \beta_2$ setjum við

$$H(t, s) := \begin{cases} H_1(2t, s) & 0 \le t \le 1/2 \\ H_2(2t-1, s) & 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

Þá er $H : \alpha_1 * \beta_1 \simeq_p \alpha_2 * \beta_2$. □

Athugasemd (ritháttur). Látum $[\alpha]$ tákna jafngildisflokk α með tilliti til venslanna $\simeq_p$.

Skilgreining 5.3.2 (byggir á síðustu setningu)**.** Ef $\alpha(1) = \beta(0)$ þá setjum við $[\alpha] * [\beta] := [\alpha * \beta]$ (vorum að sanna að þetta er óháð vali á fulltrúum flokkanna).

Setning 5.3.2. *Fyrir sérhvert grannrúm X getum við skilgreint ríki $\Pi(X)$ þannig að hlutirnir í $\Pi(X)$ séu punktarnir í X og mótanir frá x til y séu jafngildisflokkarnir $[\alpha]$ þar sem α er vegur frá x til y. Allar mótanir þessa ríkis eru einsmótanir.*

Athugasemd (ritháttur). Skrifum $\Pi(x, y)$ í stað $\mathrm{Hom}_{\Pi(X)}(x, y)$ fyrir mengi allra jafngildisflokka vega milli x og y.

Athugasemd. Um $\Pi(X)$ gildir að $\mathrm{Ob}\,\Pi(X) = X$ er mengi og allar mótanirnar eru einsmótanir. Slík ríki kallast *grýpi* (e. *groupoid*) og sér í lagi köllum við $\Pi(X)$ *undirstöðugrýpi X*.

Sönnun á síðustu setningu. Sýnum fyrst að $\Pi(X)$ sé ríki.

Tengiregla Látum α, β og γ vera vegi í X þannig að $\alpha(1) = \beta(0)$ og $\beta(1) = \gamma(0)$. Við viljum sýna að $(\alpha * \beta)\gamma \simeq_p \alpha * (\beta * \gamma)$. Höfum nú að

$$(\alpha * \beta) * \gamma = \begin{cases} \alpha(4t), & 0 \leq t \leq 1/4, \\ \beta(4t-1), & 1/4 \leq t \leq 1/2, \\ \gamma(2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

og

$$\alpha * (\beta * \gamma) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \beta(4t-2), & 1/2 \leq t \leq 3/4, \\ \gamma(4t-3), & 3/4 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

(Æfing) Finnum $H : (\alpha * \beta) * \gamma \simeq_p \alpha * (\beta * \gamma)$. Nú gildir að ef $\alpha : I \to X$ er vegur í X, $h : I \to I$ er samfelld þ.a. $h(0) = 0$ og $h(1) = 1$, $\beta = \alpha \circ h$, þá er $\alpha \simeq_p \beta$ því vörpunin

$$H : I \times I \to X, H(t, s) := \alpha(sh(t) + (1-s)t)$$

er vegsamtogun frá α til β.

Tilvist hlutleysa Fyrir sérhvert $x \in X$ setjum við $e_x : I \to X, t \mapsto x$ (fastavegur). Látum $\alpha : I \to X$ vera veg þannig að $\alpha(0) = x$ og $\alpha(1) =: y$. Þá er $e_x * \alpha \simeq_p \alpha$ og $\alpha \simeq_p e_y \simeq_p \alpha$ skv. fullyrðingunni hér að ofan. Þar með er $[e_x]$ hlutleysan í $\Pi(x, x)$ og sýnt er að $\Pi(X)$ er ríki.

Sýnum nú að allar mótanirnar séu einsmótanir: Ef α er vegur frá x til y í X, þá er $\overline{\alpha} : I \to X, t \mapsto \alpha(1-t)$ vegur frá y til x og $H : I \times I \to X$,

$$H(t, s) := \begin{cases} \alpha(2st), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \alpha(2s(1-t)), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

er vegsamtogun frá e_x til $\alpha * \overline{\alpha}$. En það þýðir að $[\alpha] * [\overline{\alpha}] = [e_x]$ og þar með er $[\alpha]$ einsmótun. $\square$

Athugasemd. Fyrir sérhvert $x \in X$ er $\Pi(x, x)$ grúpa m.t.t. aðgerðarinnar $*$.

Skilgreining 5.3.3. Látum X vera grannrúm og $x_0 \in X$. Setjum $\pi_1(X, x_0) := \Pi(x_0, x_0)$ og köllum *undirstöðugrúpu* (eða *Poincaré-grúpu* X í punkti x_0 (eða með *grunnpunkt* x_0).

Athugasemd. $\pi_1(X, x_0)$ er grúpa jafngildisflokka vega sem byrja og enda í x_0.

Setning 5.3.3. *Látum α vera veg frá x_0 til x_1 í grannrúmi X. Vörpunin*

$$\hat{\alpha} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1),\ \hat{\alpha}([\beta]) := [\overline{\alpha} * \beta * \alpha] = [\overline{\alpha}] * [\beta] * [\alpha]$$

er grúpueinsmótun. Ef α_1 er annar vegur frá x_0 til x_1, þá eru einsmótanirnar $\hat{\alpha}$ og $\hat{\alpha}_1$ samoka.

Sönnun. Höfum nú að

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}([\beta] * [\beta']) &= [\overline{\alpha}] * [\beta] * [\beta'] * [\alpha] \\ &= [\overline{\alpha}] * [\alpha] * [\overline{\alpha}] * [\beta'] * [\alpha] \\ &= \hat{\alpha}([\beta]) * \hat{\alpha}([\beta']), \end{aligned}$$

svo $\hat{\alpha}$ er grúpumótun. En ljóst er að $\hat{\overline{\alpha}}$ er andhverfa $\hat{\alpha}$ svo að $\hat{\alpha}$ er einsmótun. Fáum svo að

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_1([\beta)] &= [\overline{\alpha}_1] * [\beta] * [\alpha_1] \\ &= [\overline{\alpha}_1] * [\alpha] * [\overline{\alpha}] * [\beta] * [\alpha] * [\overline{\alpha}] * [\alpha_1] \\ &= [\overline{\alpha}_1 * \alpha] * [\overline{\alpha}] * [\beta] * [\alpha] * [\overline{\alpha} * \alpha_1] \\ &= \underbrace{[\overline{\alpha}_1 * \alpha]}_{\in \pi_1(X, x_1)} * \hat{\alpha}([\beta]) * [\overline{\alpha} * \alpha]^{-1}. \end{aligned}$$

$\square$

Fylgisetning 5.3.1. *Ef x_0 og x_1 eru í sama vegsamhengisþætti, þá eru $\pi_1(X, x_0)$ og $\pi_1(X, x_1)$ einsmóta.*

Sönnun. Augljóst. $\square$

Skilgreining 5.3.4. Grannrúm X er sagt *einfaldlega samanhangandi* ef það er vegsamanhangandi og $\pi_1(X, x_0)$ er einstökungur (bara hlutleysa) fyrir eitthvert (og þar með öll) x_0 úr X. Skrifum þetta of $\pi_1(X, x_0) = 0$.

Setning 5.3.4. *Í einfaldlega samanhangandi grannrúmi X eru sérhverjir vegir í X sem hafa sama upphafs- og endapunkt vegsamtoga.*

Sönnun. Látum $\alpha, \beta : I \to X$ með $\alpha(0) = \beta(0) =: x_0$ og $\alpha(1) = \beta(1) =: x_1$. Þá er $[\overline{\alpha} * \beta] = [e_{x_1}]$ og þar með

$$[\beta] = [e_{x_0} * \beta] = [(\alpha * \overline{\alpha}) * \beta] = [\alpha * (\overline{\alpha} * \beta)] = [\alpha * e_{x_1}] = [\alpha].$$

$\square$

5.4 Undirstöðugrúpan og samfelldar varpanir

Látum $f : X \to Y$ vera samfellda vörpun. Ef α er vegur frá x til y, þá er $f \circ \alpha$ vegur frá $f(x)$ til $f(y)$ í Y. Jafnframt gildir:

(i) Ef $[\alpha] = [\beta]$, þá eer $[f \circ \alpha] = [f \circ \beta]$.

(ii) Ef $\alpha(1) = \beta(0)$, þá er $f \circ (\alpha * \beta) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta)$.

Af þessu sést að f gefur af sér vörpun

$$f_* : \Pi(X) \to \Pi(Y) \quad \text{þ.a.} \quad f_*([\alpha] * [\beta]) = f_*([\alpha]) * f([\beta]) \quad \text{ef} \quad \alpha(1) = \beta(0).$$

Setning 5.4.1. *Látum $f : X \to Y$ vera samfellda vörpun, $x_0 \in X$.*

(i) f skilgreinir grúpumótun $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$

(ii) Ef $f = \mathrm{id}_X$, þá $f_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$

(iii) Ef $g : Y \to Z$ er samfelld, þá er $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Sönnun. Augljóst. $\square$

Fylgisetning 5.4.1. *Ef $f : X \to Y$ er grannmótun, þá er $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ grúpumótun fyrir hvaða x_0 úr X sem er. Ennfremur gildir að $(f_*)^{-1} = (f^{-1})_*$.*

Sönnun. Augljóst. $\square$

Athugasemd. Ofangreint er unnt að setja fram á máli ríkjafræðinnar:

(1) Π : **Top** $\to$ **Grypi** sem tekur X í $\Pi(X)$ og f í $\Pi(f)$ er varpi.

(2) Látum **Top*** vera ríki allra tvennda (X, x) þar sem X er grannrúm og $x \in X$ og mótunin $f : (X, x) \to (Y, y)$ er samfelld vörpun $X \to Y$ þ.a. $f(x) = y$ (stundum kallað *ríki punktaðra rúma*). Fáum þá varpa π_1 : **Top*** $\to$ **Grp**, $(X, x) \rightsquigarrow \pi_1(X, x)$ og

$$((X, x) \xrightarrow{f} (Y, y)) \rightsquigarrow (\pi_1(X, x) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, y))$$

Setning 5.4.2. *Ef $f, g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ eru samfelldar (mótanir í* **Top****) og $f \simeq g$ $(\mathrm{rel}\{x_0\})$, þá er $f_* = g_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$.*

Sönnun. $f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha] = [g \circ \alpha] = g_*([\alpha])$. $\square$

Athugasemd. Skilgreinum ríkið $\mathbf{Hot}^*$ þar sem hlutirnir eru punktuð rúm (X, x) og mótunin $(X, x) \to (Y, y)$ er samtogunarflokkurinn af samfelldum vörpunum $(X, x) \to (Y, y)$ m.t.t. venslanna $\simeq$ (rel$\{x\}$). Skv. síðustu setningu fæstþá varpi $\pi_1 : \mathbf{Hot}^* \to \mathbf{Grp}$. Fáum víxlið örvarit

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Top}^* \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\text{sjálfgefna vörpunin}"'] & \mathbf{Grp} \\ \mathbf{Hot}^* \arrow[ur, "\pi_1"'] & \end{tikzcd}$$

Skilgreining 5.4.1. Grannrúm X er *samdraganlegt* ef id_X er samtoga fastri vörpun $X \to X$.

Setning 5.4.3. *Ef X er samdraganlegt, þá er $\pi_1(X, x_0) = 0$ fyrir öll x_0 úr X.*

Sönnun. Ljóst. $\square$

Dæmi 5.4.1. $\pi_1(\mathbb{R}^n, 0) = 0$ og almennt er $\pi_1(X, x) = 0$ ef X er $*$-laga hlutmengi í $\mathbb{R}^n$.

Athugasemd (upprifjun). X grannrúm og Y hlutrúm í X, $i : Y \hookrightarrow X$ ívarpið. Segjum að Y sé *inndragi* (af) X ef til er samfelld vörpun $r : X \to Y$ þ.a. $r \circ i = \mathrm{id}_Y$. Þá kallast r *inndráttur*.

Setning 5.4.4. *Ef Y er inndragi X og $x_0 \in Y$ og $i : Y \hookrightarrow X$ ívarpið, þá er $i_* : \pi(Y, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ eintæk.*

Sönnun. Látum $r : X \to Y$ vera inndrátt. Þá er $r \circ i = \mathrm{id}_Y$ og því

$$\begin{tikzcd} \pi_1(Y, x_0) \arrow[r, "i_*"] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}"] & \pi_1(X, x_0) \arrow[r, "r_*"] & \pi_1(Y, x_0) \end{tikzcd}$$

svo að i_* er átæk (og r_* átæk). $\square$

Skilgreining 5.4.2. Y hlutrúm í grannrúmi X og $i : Y \hookrightarrow X$ ívarpið. Segjum að vörpun $r : X \to Y$ sé *inndráttur með samtogun* ef $i \circ r \simeq \mathrm{id}_X$ (rel Y). Segjum þá að Y sé *inndragi með samtogun af X*.

Athugasemd. (1) Inndráttur með samtogun er inndráttur.

(2) $r : X \to Y$ er inndráttur með samtogun ef til er samtogun $H : X \times I \to X$ þ.a.

(i) $H(x, 1) = x \; \forall x \in X$.

(ii) $H(x, 0) = r(x) \; \forall x \in X$.

(iii) $H(y, t) = y \; \forall y \in Y, \forall t \in I$.

Dæmi 5.4.2. (1) S^n er inndragi með samtogun af $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$,

$$H : (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \times I \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \qquad H(x, t) = tx + (1 - t)\frac{x}{\|x\|}.$$

(2) $\{0\} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ er inndragi með samtogun:

$$H(x, t) = tx.$$

Setning 5.4.5. *Látum X og Y vera grannrúm og $P_X : X \times Y \to X$, $P_Y : X \times Y \to Y$ vera ofanvörpin. Ef $(x_0, y_0) \in X \times Y$, þá er*

$$((P_X)_*, (P_Y)_*) : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

einsmótun.

Sönnun. Ef $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ og $[\beta] \in \pi_1(Y, y_0)$ þá er $\alpha \times \beta$ vegur í $X \times Y$ sem byrjar og endar í (x_0, y_0) og $((P_X)_*, (P_Y)_*)([\alpha \times \beta]) = ([\alpha], [\beta])$. Þar með er sýnt að $((P_X)_*, (P_Y)_*)$ er átæk.

Sýnum að $((P_X)_*, (P_Y)_*)$ sé eintæk: Ef α er vegur í $X \times Y$ með (x_0, y_0) sem upphafspunkt og endapunkt og

$$H_X : P_X \circ \alpha \simeq_P e_{x_0}, \qquad \text{(jafngilt því að } (P_X)_*([\alpha]) = 0)$$

og

$$H_Y : P_Y \circ \alpha \simeq_P e_{y_0}, \qquad \text{(jafngilt því að } (P_Y)_*([\alpha]) = 0)$$

þá er

$$H_X \times H_Y : \alpha = (P_X \circ \alpha) \times (P_Y \circ \alpha) \simeq_P e_{(x_0, y_0)}.$$

$\square$

Fylgisetning 5.4.2. *Ef Y er einfaldlega samanhangandi, þá leiðir ofanvarpið $P_X : X \times Y \to X$ af sér grúpueinsmótun $(P_X)_* : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0)$ fyrir öll $(x_0, y_0) \in X \times Y$.*

Sönnun. Augljóst. $\square$

Fylgisetning 5.4.3. *Ef X og Y eru einfaldlega samanhangandi, þá er $X \times Y$ það líka.*

Sönnun. Ljóst. $\square$

Setning 5.4.6. *Ef X er grannrúm og $i : Y \hookrightarrow X$ er* inndragi með samtogun*, þá er $i_* : \pi_1(Y, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ einsmótun fyrir sérhvert x_0 úr Y.*

Sönnun. Vitum að i_* er eintæk. Nú er

$$(\mathrm{id}_X)_* = (i \circ r)_* = i_* \circ r_*$$

svo að i_* er líka átæk. $\square$

Dæmi 5.4.3. (1) $X = S^1 \times S^1$ og $y_0 \in S^1$. Setjum $Y = S^1 \times \{y_0\}$: Þá er Y inndrægi af X vegna þess að $S^1 \times S^1 \to S^1 \times \{y_0\}, (x, y) \mapsto (x, y_0)$ er samfelld. Hér er hins vegar ekki um inndrátt með samtogun að ræða því að $\pi_1(S^1, y_0) \neq 0$ (sjáum það síðar).

(2) $\pi_1(S^n, x)$ er einsmóta $\pi_1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, x)$ fyrir öll $x \in S^n$.

(3) Ef $0 \leq n < m$, þá er $\mathbb{R}^m \setminus \mathbb{R}^n$ grannmóta $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^{m-n} \setminus \{0\})$ svo að $\pi_1(\mathbb{R}^m \setminus \mathbb{R}^n, x)$ er einsmóta $\pi_1(S^{m-n-1}, x)$ fyrir öll $x \in \{0\} \times S^{m-n-1}$.

(4) $\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{C}, x)$, $x \in \mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{C}$, er einsmóta $\pi_1(S^1, *)$ ($*$ þýðir að hér getum við tekið hvaða punkt sem er).

5.5 Þekjurúm

Skilgreining 5.5.1. Látum B vera grannrúm. *Þekjurúm* yfir B er grannrúm E ásamt átækri samfelldri vörpun (eins konar ofanvarpi) $\pi : E \to B$, svonefndri *þekjuvörpun*, sem uppfyllir eftirfarandi skilyrði:

> Fyrir sérhvert $b \in B$ er til opin grennd U um b í B þ.a. $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in J} V_\alpha$ með $V_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$ ef $\alpha \neq \beta$ og $\pi|_{V_\alpha} : V_\alpha \to U$ er grannmótun fyrir sérhvert $\alpha \in J$.

Athugasemd. (i) Þetta skilyrði má einnig orða svona: Fyrir sérhvert $b \in B$ er til opin grennd U um b í B, strjált rúm F og grannmótun $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times F$ þannig að örvaritið

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\pi|_{\pi^{-1}(U)}"'] & & U \times F \arrow[dl, "P_U"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

sé víxlið.

(ii) Segjum að $\pi : E \to B$ sé *lausblaða* ef við höfum víxlið örvarit

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "\pi"'] & & B \times F \arrow[dl, "p_B"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

með F strjált og $\sim$ þýðir að þarna er grannmótun.

Athugasemd. Samfelld vörpun er þekjuvörpun *þ.þ.a.a.* sérhvert b úr B eigi sér opna grennd U þ.a. vörpunin $\pi^{-1}(U) \to U, y \mapsto \pi(y)$ sé lausblaða þekjuvörpun.

(Æfing) Ef $\pi : E \to B$ er þekjuvörpun og $A \subseteq B$, þá er $\pi^{-1}(A) \to A, y \mapsto \pi(y)$ þekjuvörpun.

Dæmi 5.5.1. (1) $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ er þekjuvörpun.

(2) $\mathbb{R} \to S^1, t \mapsto e^{it}$ er þekjuvörpun (skv. æfingunni og (1)).

(3) Fyrir sérhverja heiltölu $n > 0$ er $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, z \mapsto z^n$ þekjuvörpun.

(4) $S^n \to \mathbb{P}_n(\mathbb{R}), x \mapsto [x]$ (þ.e. línan gegnum 0 og x) er þekuvörpun. Hér er $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ mengi lína gegnum núllpunkt í $\mathbb{R}^{n+1}$. Jafngildisvenslin $\sim$ á $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ eru skilgreind með $x \sim y$ *þ.þ.a.a.* x og y liggi á sömu línu gegnum 0. Setjum deildagrannmynstrið sem $\sim$ skilgreinir á $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$. Ath að S^n er þjappað og $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ er Hausdorff, svo deildavörpunin er grannmótun.

   (Æfing) Látum $\pi : E \to B$ vera þekjuvörpun. Ef B er samanhangandi, þá hefur $\pi^{-1}(b)$ sömu fjöldatölu fyrir öll $b \in B$. Þessi tala kallast *blaðafjöldi* π.

(5) Ef $\pi_1 : E_1 \to B_1$ og $\pi_2 : E_2 \to B_2$ eru þekjuvarpanir, þá er $\pi_1 \times \pi_2 : E_1 \times E_2 \to B_1 \times B_2$ líka þekjuvörpun.

Skilgreining 5.5.2. Látum $\pi : E \to B$ vera þekjuvörpun og $f : X \to B$ vera samfellda vörpun. *Lyfting á f (m.t.t. π)*

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

er samfelld vörpun $\tilde{f} : X \to E$ þ.a. $\pi \circ \tilde{f} = f$.

Athugasemd. Þegar þekjuvörpunin sem um ræðir er $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, þá kallast $\tilde{f}$ *(samfelldur) logri af f* (þ.e.a.s. $e^{\tilde{f}} = f$).

Setning 5.5.1. *Látum $\pi : E \to B$ vera þekjuvörpun, $f : X \to B$ vera samfellda vörpun og $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ vera lyftingar á f m.t.t. π. Ef X er samanhangandi og til er x_0 úr X þ.a. $\tilde{f}_1(x_0) = \tilde{f}_2(x_0)$, þá er $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$.*

Sönnun. Setjum $X_1 := \{x \in X : \tilde{f}_1(x) = \tilde{f}_2(x)\}$ og sýnum að X_1 sé bæði opið og lokað í X. Af því leiðir að $X_1 = X$ (og þar með $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$) vegna þess að X er samanhangandi og $x_0 \in X_1$ (og þar með $x_1 \neq \emptyset$). Látum $x \in X$ og veljum opna grennd U um $f(x)$ í B þ.a. til sé grannmótun $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times F$ þar sem F er strjált grannmrúm og örvaritið

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times F \arrow[dl, "p_U"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

sé víxlið. Þá eru til α, β úr F þ.a. $\Phi(\tilde{f}_1(x)) = (f(x), \alpha)$ og $\Phi(\tilde{f}_2(x)) = (f(x), \beta)$. Þá er til opin grennd V um x í X þ.a. $\Phi \circ \tilde{f}_1)(V) \subseteq U \times \{\alpha\}$ og $(\Phi \circ \tilde{f}_2)(V) \subseteq U \times \{\beta\}$. Ef $x \notin X_1$, þá er $\alpha \neq \beta$ og því $\tilde{f}_1(V) \cap \tilde{f}_2(V) = \emptyset$ og þar með $V \subseteq X \setminus X_1$. Ef $x \in X_1$, þá er $\alpha = \beta$ og því $\tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)$ fyrir öll $y \in V$; þar með er $V \subseteq X_1$. Við höfum því sýnt að bæði X_1 og $X \setminus X_1$ eru opin, en það sýnir að X_1 er bæði opið og lokað. $\square$

Setning 5.5.2 (Samtogunarlyftingarsetningin). *Látum $\pi : E \to B$ vera þekjuvörpun, $H : Y \times I \to B$ ($I = [0,1]$) vera samfellda vörpun (samtogun) með $H(y,0) = f(y)$ fyrir öll y úr Y. Ef $\tilde{f} : Y \to E$ er lyfting á $f : Y \to B$ m.t.t. π, þá er til nákvæmlega ein lyfting $\tilde{H} : Y \times I \to E$ á H m.t.t. π þ.a. $\tilde{H}(y,0) = \tilde{f}(y)$ fyrir öll $y \in Y$.*

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\pi"] \\ Y \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\pi"] \\ Y \times I \arrow[ur, "\tilde{H}"] \arrow[r, "H"] & B \end{tikzcd}$$

Sönnun. Fyrir sérhvert y úr Y þekjum við $H(\{y\}\times)$ með opnum mengjum $(U_j)_{j\in J}$ þ.a. $\pi^{-1}(U_j) \to U_j, x \mapsto \pi(x)$ sé lausblaða fyrir sérhvert $j \in J$. Mengin $(H^{-1}(U_j))_{j\in J}$ mynda opna þakningu á $\{y\} \times I$ svo ekki er til skipting $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = 1$ þ.a. fyrir sérhvert $k \in \{1, \ldots, m\}$ sé $\{y\}\times[t_{k-1}, t_k]$ innihaldið í $H^{-1}(U_{j(k)})$ fyrir eitthvert $j(k)$ úr J. Þar eð $[t_{k-1}, t_k]$ er þjappað, þá er til opin grennd V_y um y í Y þ.a. $V_y \times [t_{k-1}, t_k] \subseteq H^{-1}(U_j(k))$, fyrir $k = 1, \ldots, m$. Setjum $U := U_{j(1)}$ og veljum grannmótun $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times F$ þar sem F er strjált þ.a. örvaritið

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr] & & U \times F \arrow[dl, "p_U"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

verði víxlið. Nú er $H(V_y \times [t_0, t_1]) \subseteq U$ ($t_0 = 0$) svo að $f(V_y) \subseteq U$ og þar með $\Phi(\tilde{f}(x)) = (f(x), j_0)$ fyrir eitthvert $j_0 \in J$ og öll $x \in V_y$ (með því að minnka e.t.v. grenndina V_y). Skilgreinum lyftingu $\tilde{H}_1$ á $H|_{V_y\times[t_0,t_1]}$ með $\tilde{H}_1(x,t) := \Phi^{-1}(H(x,t), j_0)$. Þá er $\tilde{H}_1(x,0) = \tilde{H}_1(x,t_0) = \tilde{f}(x)$ fyrir öll $x \in V_y$. Lítum á $x \mapsto H(x,t_1)$ í stað f og $x \mapsto \tilde{H}_1(x,t_1)$ í stað $\tilde{f}$ og fáum lyftingu á $H|_{V_y\times[t_1,t_2]}$ m.t.t. π. Með þessum hætti fæst eftirfarandi niðurstaða: Fyrir sérhvert $y \in Y$ er til opin grennd V_y og lyfting $\tilde{H}_y : V_y \times I \to E$ á $H|_{V_y\times I}$ m.t.t. π þ.a. $\tilde{H}_y(x,0) = \tilde{f}(x)$ fyrir öll $x \in V_y$. Látum y_1 og y_2 vera ólíka punkta úr Y og $z \in V_{y_1} \cap V_{y_2}$. Þá er $t \mapsto H(z,t)$ þ.a. $\tilde{H}_{y_1}(z,0) = \tilde{H}_{y_2}(z,0) = \tilde{f}(z)$ svo skv. síðustu setningu er $\tilde{H}_{y_1}(z,t) = \tilde{H}_{y_2}(z,t)$ fyrir sérhvert $t \in I$. Þetta sýnir að einskorðanir $\tilde{H}_{y_1}$ og $\tilde{H}_{y_2}$ við $(V_{y_1} \cap V_{y_2}) \times I = (V_{y_1} \times I) \cap (V_{y_2} \times I)$ eru eins, og þar sem $(V_y \times I)_{y\in Y}$ er opin þakning á $Y \times I$, þá límast varpanirnar $\tilde{H}_y$ saman í lyftingu $\tilde{H} : Y \times I \to E$ þ.a. $\tilde{H}(y,0) = \tilde{f}(y)$ fyrir öll y úr Y.

Höfum sýnt fram á tilvist $\tilde{H}$. Sýnum að aðeins sé til ein slík. Ef $\tilde{H}_1 : Y \times I \to E$ er önnur slík lyfting, þá eru $t \mapsto \tilde{H}(y,t)$ og $t \mapsto \tilde{H}_1(y,t)$ lyftingar á ferlinum $t \mapsto H(y,t)$ fyrir sérhvert $y \in Y$ og þar með $\tilde{H}(y,t) = \tilde{H}_1(y,t)$ fyrir öll $t \in I$ skv. síðustu setningu. $\square$

Fylgisetning 5.5.1. *Ef $p : E \to B$ er þekjuvörpun, $f : I^n \to B$ er samfelld vörpun og $e \in E$ þ.a. $p(e) = f(\mathbf{0})$, þá er til nákvæmlega ein lyfting $\tilde{f}$ á f m.t.t. p sem uppfyllir að $\tilde{f}(\mathbf{0}) = e$. Sér í lagi er alltaf hægt að lyfta vegi ($n = 1$) og vegsamtogun ($n = 2$).*

Sönnun. Augljóst fyrir $n = 0$. Beitum svo síðustu setningu og þrepum. $\square$

Fylgisetning 5.5.2. *Látum $p : E \to B$ vera þekjurúm, α og β vera vegsamtoga vegi í B. Ef $\tilde{\alpha}$ og $\tilde{\beta}$ eru lyftingar á α og β m.t.t. p með $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0)$, þá eru $\tilde{\alpha}$ og $\tilde{\beta}$ vegsamtoga. Sér í lagi gildir $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$.*

Sönnun. Látum $H : \alpha \simeq_p \beta$ og $\tilde{H} : I \times I \to E$ vera lyftingar á H m.t.t. p þ.a. $\tilde{H}(0,0) = \tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0)$. Nú er $H(0,s) = \alpha(0) = \beta(0)$ fyrir öll $s \in I$ svo að $\tilde{H}(0,s) \in p^{-1}(\alpha(0))$ fyrir öll $s \in I$. En $p^{-1}(\alpha(0))$ er strjált rúm og því $\tilde{H}(0,s)$ fast, þ.e. $\tilde{H}(0,s) = \tilde{\alpha}(0)$ fyrir öll $s \in I$. Á sama hátt fæst að $\tilde{H}(1,s)$ er fast. Varpanirnar $t \mapsto \tilde{H}(t,s)$ og $t \mapsto \tilde{\alpha}(t)$ eru lyftingar á α og $\tilde{(}0,0) = \tilde{\alpha}(0)$ svo að $\tilde{H}(t,0) = \tilde{\alpha}(t)$ fyrir öll $t \in I$. Á sama hátt fæst að $\tilde{H}(t,1) = \tilde{\beta}(t)$ fyrir öll $t \in I$. Þar með fæst $\tilde{H} : \tilde{\alpha} \simeq_p \tilde{\beta}$. $\square$

Athugasemd. Lyfting á lykkju (þ.e.a.s. lokuðum vegi) þarf *alls ekki* að vera lykkja.

Setning 5.5.3. $\pi_1(S^1, *) \cong \mathbb{Z}$

Sönnun. Lítum á S^1 sem einingarhringinn í $\mathbb{C}$ og reiknum út $\pi_1(S^1, 1)$. Höfum þekjuvörpun $p : \mathbb{R} \to S^1, t \mapsto \exp(2\pi i \cdot t)$. Ljóst að $p^{-1}(1) = \mathbb{Z}$. Fyrir $[\alpha]$ úr $\pi_1(S^1, 1)$ veljum við lyftingu $\tilde{\alpha}$ á α með $\tilde{\alpha}(0) = 0$.

Vitum að $\tilde{\alpha}(1)$ er óháð valinu á α úr $[\alpha]$ svo að við fáum vörpun $\varphi : \pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z}, [\alpha] \mapsto \tilde{\alpha}(1)$. Sýnum að φ sé einsmótun:

φ er grúpumótun: Ef α og β eru lykkjur í S^1 sem byrja i 1 og $\tilde{\alpha}$ og $\tilde{\beta}$ eru lyftingar á α og β með $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0) = 0$, þá er $\tilde{\beta}_1 : I \to \mathbb{R}, t \mapsto \tilde{\alpha}(1) + \tilde{\beta}(t)$ lyfting á β sem uppfyllir $\tilde{\beta}_1(0) = \tilde{\alpha}(1)$. Þar með er $\tilde{\alpha} * \tilde{\beta}_1$ vel skilgreindur vegur og ljóst er að $\tilde{\alpha} * \tilde{\beta}_1$ er lyfting á $\alpha * \beta$ með $(\tilde{\alpha} * \tilde{\beta}_1)(0) = \tilde{\alpha}(0) = 0$. Fáum því

$$\varphi([\alpha] * [\beta]) = (\tilde{\alpha} * \tilde{\beta}_1)(1) = \tilde{\beta}_1(1) = \tilde{\alpha}(1) + \tilde{\beta}(1) = \varphi([\alpha]) + \varphi([\beta]).$$

φ er eintæk: Ef α er lykkja með endapunkt 1 í S^1, $\tilde{\alpha}$ lyfting á α með $\tilde{\alpha}(0) = 0$ og $\varphi([\alpha]) = 0$, þ.e. $\tilde{\alpha}(1) = 0$, þá er $\tilde{\alpha}$ lykkja í $\mathbb{R}$ með endapunkt 0. Þar með er til samtogun $H : 0 \simeq_p \tilde{\alpha}$ (0 er hér fastalykkja) sem gefur af sér vegsamtogun $p \circ H : 1 \simeq_p \alpha$ (1 er hér fastalykkja) og því er $[\alpha]$ hlutleysan í $\pi_1(S^1, 1)$.

φ er átæk: Viljum sýna að fyrir sérhvert $n \in \mathbb{Z}$ sé til $[\alpha]$ úr $\pi_1(S^1, 1)$ þ.a. $\varphi([\alpha]) = n$. Nú er $\tilde{\alpha} : I \to \mathbb{R}, t \mapsto nt$ vegur frá 0 til n í $\mathbb{R}$ og $p \circ \tilde{\alpha}$ er lykkja í S^1 með endapunkt 1. Þar með er $\varphi([p \circ \tilde{\alpha}]) = n$. □

Fylgisetning 5.5.3. *S^1 er ekki inndragi af B^2.*

Sönnun. Ef svo væri, þá fengist eintæk grúpumótun $\pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(B^2, 1)$, sem er í mótsögn við að $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ en $\pi_1(B^2, 1) = 0$. □

Fylgisetning 5.5.4. $\pi_1(S^1 \times S^1, (1, 1)) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Sönnun. Augljóst. □

Fylgisetning 5.5.5. $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1) \cong \mathbb{Z}$.

Sönnun. S^1 er inndragi með samtogun af $\mathbb{C}^*$ og því $\pi_1(S^1, 1) \cong \pi_1(\mathbb{C}^*, 1)$. □

Fylgisetning 5.5.6 (Brouwer)**.** *Sérhver samfelld vörpun $B^2 \to B^2$ hefur kyrrapunkt.*

Sönnun. Leiðir beint af fylgisetningu 5.5.3 og dæmi 33 af vikublaði 13. □

Athugasemd (Ritháttur og talsmáti). Y grannrúm. Fastalykkja sem hefur y úr Y sem *grunnpunkt* táknast hér eftir með 1_y. Lykkja α í Y með grunnpunkt 1_y er sögð *núllsamtoga* ef $[\alpha] = [1_y]$.

Athugasemd (Táknmál). Fyrir veg α er $\hat{\alpha}$ tilsvarandi einsmótun, $\overline{\alpha}$ vegurinn í hina áttina og $\tilde{\alpha}$ er lyfting.

Setning 5.5.4. *Látum $p : E \to B$ vera þekjurúm og $b \in B$.*

(i) Ef $e \in p^{-1}(b)$, þá er $p_* : \pi_1(E, e) \to \pi_1(B, b)$ eintæk.

(ii) Ef E er vegsamanhangandi, þá mynda hlutgrúpurnar $p_*(\pi_1(E, e))$ fyrir e úr $p^{-1}(b)$ samokunarflokk af hlutgrúpum í $\pi_1(B, b)$.

Sönnun. (i) Ef $[\gamma] \in \pi_1(E, e)$ og $p_*([\gamma]) = [p \circ \gamma] = [1_b]$, þá er til $H : p \circ \gamma \simeq_p 1_b$. Látum $\tilde{H} : I \times I \to E$ vera lyftingu á H, þ.e. $\tilde{H}(0, 0) = e$. Þá er $\tilde{H} : \gamma \simeq_p 1_e$ og því $[\gamma] = [1_e] \in \pi_1(E, e)$.

(ii) Látum $e_1, e_2 \in p^{-1}(b)$ og ω vera veg frá e_1 til e_2 í E. Þá fæst einsmótun

$$\hat{\omega}([\alpha]) = [\omega * \alpha * \overline{\omega}].$$

Nú er $p \circ \omega$ lykkja í (B, b) svo að

$$p_*([\omega * \alpha * \overline{\omega}]) = p_*([\omega]) * p_*([\alpha]) * p_*([\omega])^{-1}$$

og þar með

$$p_*([\omega]) * p_*(\pi_1(E, e_2)) * p_*([\omega])^{-1} = p_*(\pi_1(E, e_1)).$$

Nú þarf bara að taka eftir að sérhvert $[\alpha]$ úr $\pi_1(B, b)$ er af gerðinni $p_*([\tilde{\alpha}])$, þar sem $\tilde{\alpha}$ er lyfting á α. Þar með er sýnt að grúpurunan $(p_*(\pi_1(E, e)))_{e \in p^{-1}(b)}$ er mynda heilan samokunarflokk í $\pi_1(B, b)$. □

Athugasemd. Ef $p : E \to B$ er þekjurúm, þá verkar $\pi_1(B, b)$ á $p^{-1}(b)$ með eftirfarandi hætti: Fyrir e úr $p^{-1}(b)$ og $[\alpha]$ úr $\pi_1(B, b)$ látum við $\tilde{\alpha}_e$ vera lyftinguna á α sem uppfyllir $\tilde{\alpha}_e(0) = e$. Setjum

$$e[\alpha] := \tilde{\alpha}_e.$$

Fáum greinilega að $e[1_b] = e$ og

$$e([\alpha] * [\beta]) = e[\alpha * \beta] = (e[\alpha])[\beta].$$

Öll $[\alpha]$ úr $\pi_1(B, b)$ sem halda ákveðnu e úr $p^{-1}(b)$ föstu, þ.e.a.s $e[\alpha] = e$ mnda hlutgrúpu í $\pi_1(B, b)$ sem við köllum *stöðugleikagrúpu* e. Auðséð er að hún er engin önnur en $p_*(\pi_1(E, e))$. Ef E er vegsamanhangandi, þá er verkunin $\pi_1(B, b)$ á $p^{-1}(b)$ *gegnvirk*, þ.e. $e \cdot \pi_1(B, b) = p^{-1}(b)$. M.ö.o. þá hefur verkunin aðeins eina *braut*.

Fylgisetning 5.5.7. *$p : E \to B$ þekjuvörpun, E vegsamanhangandi, $e \in E$ og $b = p(e)$. Þá er $\#p^{-1}(b) = [\pi_1(B, b) : p_*(\pi_1(E, e))]$.*

Sönnun. Ljóst. □

Fylgisetning 5.5.8. *$p : E \to B$ þekjuvörpun, B og E vegamanhangandi, $e \in E$ og $b = p(e)$. Eftirfarandi skilyrði eru jafngild:*

(i) p er grannmótun.

(ii) $p_* : \pi_1(E, E) \to \pi_1(B, b)$ er einsmótun.

(iii) p_* er átæk.

Sönnun. *(i)⇒(ii)⇒(iii):* Ljóst.
(iii)⇒(i): Skv. fylgisetningu 5.5.7 er $\#p^{-1}(b) = 1$. Þar sem B er vegsamanhangandi þá er $\#p^{-1}(x) = 1$ fyrir öll $x \in B$. En það hefur í för með sér að p er gagntæk, samfelld og opin, þ.e. grannmótun. □

Fylgisetning 5.5.9. *Ef $p : E \to B$ er þekjuvörpun, E vegsamanhangandi og B einfaldlega samanhangandi, þá er p grannmótun.*

Sönnun. Augljóst út frá fylgisetningu 5.5.8. □

Fylgisetning 5.5.10. *Ef B er einfaldlega samanhangandi og vegsamanhangandi þá er sérhvert þekjurúm yfir B lausblaða.*

Sönnun. Ef $p : E \to B$ er þekjuvörpun, þá gildir um sérhvern (veg)samhengisþátt C í E að $p|_C : C \to B$ er þekjuvörpun (sjá dæmi sett fyrir á vbl. 14). En þá er $p|_C : C \to B$ grannmótun skv. fylgisetningu 5.5.9. □

Atriðisorðaskrá