This is Start

Vine

2022 年 7 月 1 日

目录

12 无穷级数

12.1 常数项级数的概念和性质

12.1.1 数项级数的概念

数列 $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots + \mu_n, \dots$，表达式 $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_n + \dots$ 称为 (常数项) 无穷级数, 简称 **(常数项) 级数**, 记为 $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_n + \dots$, 第 n 项 μ_n 叫做级数的一般项

$S_n = \sum_{i=1}^{n} \mu_i = \mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots + \mu_n$ 级数部分和

新数列 $\{S_n\}$ $\quad S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$

无穷级数 $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i$，无穷级数的部分和数列 $\{S_n\}$， $\begin{matrix} \lim_{n\to\infty} S_n = s \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \text{收敛}, s = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_n + \dots \\ \lim_{n\to\infty} S_n = \infty(\text{不存在}) \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \text{发散} \end{matrix}$

$r_n = s - S_n = S_{n+1} + S_{n+2} + \dots$ 余项

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i$$

$\sum_{i=1}^{\infty} aq^i = a + aq + aq^2 + \dots + aq^i + \dots$ 等比级数, $\begin{matrix} S_n = a + aq + \dots + aq^{n-1} = \frac{a-aq^n}{1-q} \text{部分和数列} \\ |q| \geqslant 1, \text{发散}, |q| \leqslant 1, \text{收敛} \end{matrix}$

$$S_n = S_1 + (S_2 - S_1) + \dots + (S_n - S_{n-1}) + ... = S_1 + \sum_{i=2}^{\infty} = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i$$

12.1.2 收敛级数的基本性质

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 收敛于 s, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} k\mu_n$ 收敛于 s, 和为 ks, 数乘同敛散

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于 s 与 σ, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n \pm v_n)$ 也收敛, 和为 $s \pm \sigma$, 收敛和收敛

级数中去掉，加上，改变有限项，不会改变级数的收敛性

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 收敛于 s，任意项加括号组成的级数仍收敛，和为 s, 括号发散源发散

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 收敛于 s(必要条件), 一般项趋近 0，即 $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = 0$

调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散

12.1.3 柯西审敛原理

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, when \quad n > N, \forall p \in Z^+, |\mu_{n+1} + \mu_{n+2} + \dots + \mu_{n+p}| < \varepsilon$

12.2 常数项级数审敛法

12.2.1 正项级数及其审敛法

各项是正数或零的级数**正项级数**

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 收敛于 s $\Leftrightarrow$ 部分和数列 $\{S_n\}$ 有界

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n, \mu_n \leqslant v_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛， $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 收敛； $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散

正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$, 存在正整数 N, $\mu_n \leqslant kv_n\,(n>N,k>0),\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n$ 收敛；$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n$ 发散,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散

正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n,\begin{array}{ll} if & \lim_{n\to\infty}\frac{\mu_n}{v_n}=l,\{0\leqslant l<\infty\},\sum_{n=1}^{\infty}v_n\text{收敛, 则}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\text{收敛} \\ if & \lim_{n\to\infty}\frac{\mu_n}{v_n}=l,\{l>0,+\infty\},\sum_{n=1}^{\infty}v_n\text{发散, 则, }\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\text{发散}\end{array}$

正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n,\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mu_{n+1}}{\mu_n}=\rho,\begin{array}{ll} if & \rho>1\ (=\infty)\text{ 发散 (不可能收敛)} \\ if & \rho<1\text{收敛} \\ if & \rho=1\text{可能收敛}\end{array}$

$when\quad \rho<1,\forall\rho+\varepsilon=r<1,\exists m,when\quad n\geqslant m,\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}=\rho<\rho+\varepsilon=r<1,\mu_{n+1}<r\mu_n,\mu_{n+k}<r^k\mu_n$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}r^k\mu_n$ 收敛，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\mu_{n+k}$ 收敛

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_{n+k}+\sum\limits_{n=1}^{k}\mu_n$ 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n,\sum_{n=1}^{\infty}\mu_{n+k}$ 同敛散，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n$ 收敛

正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n,\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\mu_n}=\rho,\begin{array}{ll} if & \rho>1\ (=\infty)\text{ 发散 (不可能收敛)} \\ if & \rho<1\text{收敛} \\ if & \rho=1\text{可能收敛}\end{array}$

$when\quad \rho<1,\mu_n<r^n\,(r<1)$,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}r^n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n$ 收敛

正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n,\begin{array}{ll} if & \lim_{n\to\infty}n^p\mu_n=\frac{\mu_n}{\frac{1}{n^p}}=l,\{0\leqslant l<\infty,p>1\},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\text{收敛, 则级数}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\text{收敛} \\ if & \lim_{n\to\infty}n\mu_n=\frac{\mu_n}{\frac{1}{n}}=l,\{l>0,\infty\},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\text{发散, 则级数}\sum_{n=1}^{\infty}\text{发散}\mu_n\end{array}$

12.2.2 交错级数审敛法

各项正负交错，可以写成 $\begin{array}{l}\mu_1-\mu_2+\mu_3-\mu_4+\dots, \\ -\mu_1+\mu_2-\mu_3+\mu_4-\dots,\end{array}$ 其中 $\mu_n>0$

交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n$ 满足条件：$\begin{array}{ll}(1) & \mu_n\geqslant\mu_{n+1}\,(n=1,2,3,\dots) \\ (2) & \lim_{n\to\infty}\mu_n=0\end{array}$,那么级数收敛,其和 $s\leqslant\mu_1$, 余项绝对值 $|r_n|\leqslant\mu_{n+1}$

12.2.3 绝对收敛与条件收敛

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n,\begin{array}{l}\text{正项级数}\sum_{n=1}^{\infty}|\mu_n|\text{ 收敛, 则级数}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\text{绝对收敛} \\ \text{正项级数}\sum_{n=1}^{\infty}|\mu_n|\text{ 发散,, 级数}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\text{收敛, 则级数}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\text{条件收敛}\end{array}$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n$绝对收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n$必定收敛 $\quad v_n=\frac{1}{2}(\mu_n+|\mu_n|)$

12.2.4 绝对收敛级数的性质

绝对收敛级数经改变项位置后构成的级数也收敛，且与原级数有相同的和 $S_n{}^*\leqslant S_m\leqslant s,\mu_n=2v_n-|\mu_n|$

级数 $\sum\mu_n,\sum v_n$ 绝对收敛，和分别为 s,σ, 所有项的可能乘积 $\mu_i v_i$

$$\begin{array}{cccc}\mu_1v_1 & \mu_1v_2 & \mu_1v_3 & \cdots \\ \mu_2v_1 & \mu_2v_2 & \mu_2v_3 & \cdots \\ \mu_3v_1 & \mu_3v_2 & \mu_3v_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{cccc}\mu_1v_1 & \mu_1v_2 & \mu_1v_3 & \cdots \\ \mu_2v_1 & \mu_2v_2 & \mu_2v_3 & \cdots \\ \mu_3v_1 & \mu_3v_2 & \mu_3v_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{array}$$

柯西乘积 (级数) $\mu_1v_1+(\mu_1v_2+\mu_2v_1)+\cdots+(\mu_1v_n+\mu_2v_{n-1}+\cdots+\mu_nv_1)+\dots$ 绝对收敛，和为 $s\sigma$

$\mu_1v_1+(\mu_1v_2+\mu_2v_2+\mu_2v_1)+(\mu_1v_3+\mu_2v_3+\mu_3v_3+\mu_3v_2+\mu_3v_1)+\cdots=(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n)\cdot(v_1+v_2+\cdots+v_n)$

12.3 幂级数

12.3.1 函数项级数的概念

区间 I 上函数列 $\mu_1(x), \mu_2(x), \mu_3(x), \ldots, \mu_n(x), \ldots,$

表达式 $\mu_1(x) + \mu_2(x) + \mu_3(x) + \cdots + \mu_n(x) + \ldots,$ 区间 I 上的 (函数项) 无穷级数，(函数项) 级数

对于每个确定值 $x_0 \in I, \mu_1(x_0) + \mu_2(x_0) + \mu_3(x_0) + \cdots + \mu_n(x_0) + \ldots$ 常数项级数，收敛点 x_0

$S(x) = \mu_1(x) + \mu_2(x) + \mu_3(x) + \cdots + \mu_n(x) + \ldots,$ 和函数

部分和 $S_n(x), \lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$, 余项 $r_n(x) = S(x) - S_n(x), \lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$

12.3.2 幂级数及其收敛性

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \text{ 幂级数}$$

$$\text{幂级数} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \begin{matrix} x = x_0, \text{幂级数收敛}, if & |x| < |x_0|, \text{幂级数绝对收敛} \\ x = x_0, \text{幂级数发散}, if & |x| > |x_0|, \text{幂级数发散} \end{matrix}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0 \Rightarrow |a_n x_0^n| \leqslant M \Rightarrow |a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

$$\text{幂级数} \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{不是一点收敛，也不是整个数轴收敛}, \exists R > 0, \begin{matrix} |x| < R, \text{幂级数绝对收敛} \\ |x| > R, \text{幂级数发散} \\ |x| = \pm R, \text{幂级数可能收敛} \end{matrix}$$

$$\text{幂级数} \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho, \text{收敛半径} R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & \rho \neq 0 \\ +\infty, & \rho = 0 \\ 0, & \rho = +\infty \end{cases}$$

$$\frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |x| = \rho |x| \stackrel{?}{<} 1$$

12.3.3 幂级数的运算

$$\text{幂级数} \begin{matrix} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \\ b_0 + a_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots \end{matrix}$$

加减 $(a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1) x + (a_2 \pm b_2) x^2 + \cdots + (a_n \pm b_n) x^n + \cdots$ 区间取小

乘 $(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots) \cdot (b_0 + a_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots)$

$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) x^n + \cdots$ 区间取小

幂级数的柯西乘积

除 $\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots}{b_0 + a_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$ 区间取小

$$\begin{matrix} a_0 = c_0 b_0 \\ a_1 = c_0 b_1 + c_1 b_0 \\ a_2 = c_0 b_2 + c_1 b_1 + c_2 b_0 \\ \cdots \end{matrix} \quad \text{解得 } c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$$

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S_n(x)$ 在收敛域 I 上连续

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S_n(x)$ 在收敛域 I 上可积，所得收敛同半径

$$\int_0^x S(t)\,dt = \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} (x \in I)$$

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S_n(x)$ 在收敛域 I 上可导，所得收敛同半径

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} (x \in I)$$

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S_n(x)$ 在收敛域 I 上具有任意阶导数

12.4 函数展开成幂级数

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n, x\in U(x_0)$ 泰勒级数（极限），泰勒展开式

函数 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内具有各阶导数，$f(x)$ 能展开成泰勒级数 $\Leftrightarrow$ 余项满足 $\sum_{n=0}^{\infty}R_n(x)=0$

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)(x-0)^n, x\in U(0)$ 麦克劳林级数（极限），麦克劳林展开式

$\sin^{(n)}x=\sin(x+n\pi)$

$$\begin{cases} e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n,(-\infty<x<\infty) \\ \sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},(-\infty<x<\infty) \\ \frac{1}{x+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,(-1<x<1) \end{cases}$$

已知展开，运算得未知

$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots,(-1<x<1)$ 二项展开式

$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\cdot-\frac{1}{2}}{2!}x^2+\cdots+\frac{\frac{1}{2}\cdot-\frac{1}{2}\cdots\frac{3-2n}{2}}{n!}x^n+\cdots=\frac{\prod(3-2n)}{(2n)!!}x^n,(-1<x<1)$ 二项展开式

$(1+x)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{-\frac{1}{2}\cdot-\frac{3}{2}}{2!}x^2+\cdots+\frac{-\frac{1}{2}\cdot-\frac{1}{2}\cdots\frac{1-2n}{2}}{n!}x^n+\cdots=\frac{\prod(1-2n)}{(2n)!!}x^n,(-1<x<1)$ 二项展开式

证明：

$$\begin{aligned}
&F(x)=(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots \\
&F'(x)=m\left[1+\frac{m-1}{1}x+\cdots+\frac{(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}\ldots\right] \\
&xF'(x)=m\left[x+\frac{m-1}{1}x^2+\cdots+\frac{(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}x^n\ldots\right] \\
&(1+x)F'(x)=m\left[1+mx+\frac{*(m-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{*}{(n-2)!}x^{n-1}+\frac{*1(m-n)}{(n)!}x^n+\frac{*1}{(n-1)!}x^n+\ldots\right] \\
&(1+x)F'(x)=m\left[1+mx+\frac{m*}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{m*1}{n!}x^n+\ldots\right]=mF(x) \\
&\varphi(x)=\frac{F(x)}{(1+x)^m},\varphi(0)=F(0)=1 \\
&\varphi'(x)=\frac{F'(x)(1+x)^m-m(1+x)^{m-1}F(x)}{(1+x)^{2m}}=\frac{(1+x)^{m-1}\left[(1+x)F'(x)-mF(x)\right]}{(1+x)^{2m}}=0 \\
&\varphi(x)=1,F(x)=(1+x)^m
\end{aligned}$$

12.5 函数的幂级数展开应用

12.5.1 近似计算

12.5.2 微分方程的幂级数解法

$\frac{dy}{dx}=f(x,y), y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$

$y''+P(x)y'+Q(x)y=0,P,Q$定义域内可展开为幂级数，方程解形如$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$

12.6 欧拉公式

$u_1+u_2+\cdots+u_n+\ldots$ (1) 實部組成的級數收斂于 u

$v_1+v_2+\cdots+v_n+\ldots$ (2) $\boxed{\text{F}}$部組成的級數收斂于 v

$(u_1+v_1i)+(u_2+v_2i)+\cdots+(u_n+v_ni)+\ldots$ (3) 復數項級數收斂於 $u+vi$

$\sqrt{u_1^2+v_1^2}+\sqrt{u_2^2+v_2^2}+\cdots+\sqrt{u_n^2+v_n^2}+\cdots$ (4) (3) 各項的模組成的級數收斂,(3),(2),(1) $\boxed{\text{F}}$對收斂

$e^z=1+z+\frac{1}{2!}z^2+\cdots+\frac{1}{n!}z^n+\ldots,z=x+yi$ 復變量指數函數

$$\begin{aligned}
&e^{yi}=1+(yi)+\frac{1}{2!}(yi)^2+\cdots+\frac{1}{n!}(yi)^n+\ldots \\
&=\left(1+\frac{1}{2!}(yi)^2+\cdots+\frac{1}{(2n)!}(yi)^{2n}\right)+\left((yi)+\frac{1}{3!}(yi)^3+\cdots+\frac{1}{(2n-1)!}(yi)^{2n-1}\right)+\ldots \\
&=\left(1-\frac{1}{2!}y^2+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}y^{2n}\right)+i\left(y+\frac{1}{3!}(yi)^2+\cdots+\frac{1}{(2n-1)!}y^{2n-1}i^{2n-2}\right)+\ldots \\
&=\left(1-\frac{1}{2!}y^2+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}y^{2n}\right)+i\left(y+\frac{1}{3!}(yi)^2+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}y^{2n-1}\right)+\ldots \\
&=\left(1-\frac{1}{2!}y^2+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}y^{2n}\right)+i\left(y+\frac{1}{3!}(yi)^2+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}y^{2n-1}+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}y^{2n+1}\right)+\ldots \\
&=\cos y+i\sin y \quad \text{欧拉公式}
\end{aligned}$$

$z=x+yi=\rho\cos\theta+i\rho\sin\theta=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)=\rho e^{\theta i}$