Data Structure

Vine

2022 年 7 月 23 日

目录

1 绪论 **4**

2 线性表 **5**

3 栈和队列 **6**

4 串 **7**

5 数组和广义表 **8**

6 树和二叉树 **9**

7 图 **10**

7.1 定义 . . . 10

7.2 图的存储结构 . . . 10

7.2.1 数组表示法 . . . 11

7.2.2 邻接表 (Adjacency List) 表示法 . . . 12

7.2.3 十字链表 (Orthogonal List) . . . 12

7.2.4 邻接多重表 (Adjacency Multlist) . . . 13

8 动态存储管理 **14**

9 查找 **15**

9.1 静态查找表 . . . 15

9.1.1 顺序表的查找 . . . 15

9.1.2 有序表的查找 . . . 15

9.1.3 静态树表的查找 . . . 16

9.1.4 索引顺序表的查找 . . . 17

9.2 动态查找表 . . . 17

9.2.1 二叉排序树和平衡二叉树 . . . 17

9.2.2 B-树和 B+ 树 . . . 22

9.2.3 键树 . . . 23

9.3 哈希表 . . . 24

9.3.1 哈希表 . . . 24

9.3.2 哈希函數構造方法 . . . 24

9.3.3 衝突處理方法 . . . 24

9.3.4 哈希表的查找及其分析 . . . 25

10 内部排序 **27**

10.1 概述 . . . 27

10.2 插入排序 . . . 27

10.2.1 直接插入 . . . 27

10.2.2 其他插入 . . . 27

10.3 快速 . . . 28

10.3.1 起泡排序 . . . 28

10.3.2 快速排序 . . . 28

10.4 选择排序 29
10.4.1 简单选择排序 29
10.4.2 树形排序 29
10.4.3 堆排序 29
10.5 归并排序 29
10.6 基数排序 30
10.6.1 多关键字的排序 30
10.6.2 链式基数排序 30
10.7 各内部排序方法的比较讨论 31

11 外部排序 **32**

12 文件 **33**

1 绪论

2 线性表

3 栈和队列

4 串

5 数组和广义表

6 树和二叉树

7 图

7.1 定义

顶点 (Vertex)

弧 (Arc),$< v, w >$ $\text{v} \longrightarrow \text{w}$

有向图 (Digraph),$G_1 = (\{v_1, v_2, v_3\}, \{< v_1, v_2 >, < v_1, v_3 >, < v_2, v_3 >\})$

边 (Edge),(v, w) $\text{v} — \text{w}$

无向图 (Undigraph),$G_1 = (\{v_1, v_2, v_3\}, \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3)\})$

通路 $P(v, w)$

顶点数目 n

弧或边数目 e, 无向完全图 e=$\frac{1}{2}n(n-1)$, 有向完全图 e=$n(n-1)$,

稀疏图，稠密图

$G = (V, \{E\}), G^{'} = (V^{'}, \{E^{'}\}), if \quad V^{'} \subseteq V, W^{'} \subseteq W, G^{'}为G子图$

无向图 $(v, v^{'}) \in E, \quad v, v^{'}$ 互为邻接点。$(v, v^{'})$ 依附于顶点。$(v, v^{'})和v, v^{'}$ 相关联

无向图节点的度 (和节点关联的边的数目)

无向图路径，顶点序列 $(v = v_{i,0}, v_{i,1}, \ldots, v_{i,m} = v^{'}), (v_{i,j-1}, v_{i,j}) \in E, 1 \leqslant j \leqslant m$

路径，连通，连通图

连通分量，极大连通子图

连通图的生成树，极小连通子图，全节点，n-1 边.(n 点，n-1 边不一定是生成树)

非连通图 $n, e < n-1$

存在环 $n, e > n-1$

有向图 $< v, v^{'} > \in A, \quad v$ 邻接到 $v^{'}$ 。$< v, v^{'} >$ 和$v, v^{'}$ 相关联。

节点的入度 (以节点为头的弧的数目，InDegree),ID。节点的出度 (以节点为尾的弧的数目，OutDegree),OD。

有向图节点的度 $TD = ID + OD$

有向图路径，顶点序列 $(v = v_{i,0}, v_{i,1}, \ldots, v_{i,m} = v^{'}), < v_{i,j-1}, v_{i,j} > \in A, 1 \leqslant j \leqslant m$

强连通图

强连通分量

有向树，有向图恰好有一个节点入度为 0，其余节点入度为 1

有向图的生产森林，若干棵有向树，含有全部节点，只有足以构成若干不相交的有向树的弧

边或者弧 $e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} TD(v_i)$

路径的长度，路径上边或者弧的数目

回路或环，路径上首尾点相同

简单路径，路径上顶点不重复

简单回路或环，除首尾点，路径上顶点不重复

顶点在图中位置，人为的随意排列中的位置

7.2 图的存储结构

树的最大和最小度差别很大

7.2.1 数组表示法

```
//-----图的数组(邻接矩阵)存储表示------
#define INFINITY  INT_MAX
#define MAX_VERTEX_NUM 20
typedef enum{DG,DN,UDG,UDN} GraphKind;
typedef struct ArcCell{
    VRType adj;         //VRType 顶点关系类型, 对无权图用1或0表示是否相邻, 带权图则为权值
    InfoType *info;     //弧相关信息的指针
}ArcCell, AdjMatrix[MAX_VERTEX_NUM][MAX_VERTEX_NUM];

typedef struct{
    VertexType ves[MAX_VERTEX_NUM]; //顶点向量
    AdjMatrix arcs;                 //邻接矩阵
    int      vexnum,arcnum;         //图的当前顶点数和弧数
    GraphKind kind;                 //图的种类标志
}MGraph;
```

无向图，$TD(v_i)=\sum_{j=0}^{n-1}A[i][j],(n=MAX\_VERTEX\_NUM)$
有向图，$TD(v_i)=OD(v_i)+ID(v_i)=\sum_{j=0}^{n-1}A[i][j]+\sum_{i=0}^{n-1}A[i][j],,(n=MAX\_VERTEX\_NUM)$
网，$A[i][j]=\begin{cases} w_{i,j}, & \text{若} <v_i,v_j> or(v_i,v_j)\in VR \\ \infty, & \text{反之} \end{cases}$
构造无向网复杂度 $o(n^2+e\cdot n)$, 初始化耗费 $o(n^2)$

```
Status CreateGraph(MGraph &G){
    scanf(&G.kind);
    switch(G.kind){
        case DG: return CreateDG(G);
        case DN: return CreateDN(G);
        case UDG: return CreateUDG(G);
        case UDN: return CreateUDN(G);
        default :return ERROR;
    }
}//GreateGraph

Status CreateUDN(MGraph &G){
    //采用数组(邻接矩阵)表示法, 构造无向网G
    scanf(&G.vexnum,&G.arcnum,&IncInfo);        //IncInfo 为0则各弧不含其他信息
    for(i=0;i<G.vexnum;++i) scanf(&G.vexs[i]);  //构造顶点向量
    for(i=0;i<G.vexnum;++i)                     //初始化邻接矩阵
        for(j=0;j<G.vexnum;++j) G.arcs[j][j]={INFTY,NULL};      //{adj,info}
    for(k=0;k<G.arcnum;++k){                    //构造邻接矩阵
        scanf(&v1,&v2,&w);                      //输入一条边依附的顶点及权值
        i=LocateVex(G,v1); j=LocateVex(G,v2);   //确定v1和v2在G中位置,在数组
        G.arcs[i][j].adj=w;
        if(IncInfo) Input(* G.arcs[i][j].info)  //若弧含有相关信息, 则输入
        G.arcs[j][i]=G.arcs[i][j];              //置<v1,v2>的对称弧<v2,v1>
    }
    return OK;
}//CreateUDN
```

7.2.2 邻接表 (Adjacency List) 表示法

```
//------图的邻接表存储表示------
#define MAX_VERTEX_NUM 20
typedef struct ArcNode{
    int adjvex;                //该弧所指向的顶点的位置
    struct ArcNode *nextarc;   //指向下一条弧的指针
    InfoType *info;            //该弧相关信息的指针
}ArcNode;

typedef struct VNode{
    VertexType data;           //顶点信息
    ArcNode * firstarc;        //指向第一条依附该节点的指针
}VNode,AdjList[MAX_VERTEX_NUM];

typedef struct{
    AdjList vetices;
    int vexnum,arcnum;          //图的当前节点和弧数
    int kind;                   //图的种类标志
}ALGraph;
```

n 边 2e 节点 $e \ll \frac{n(n+1)}{2}$ 时比邻接表矩阵节省
出度，第 i 各链表节点数
入度，遍历链表
逆邻接表
建立邻接表时间复杂度 $o(n+e)$ 或者 $o(n \cdot e)$

7.2.3 十字链表 (Orthogonal List)

有向图的存储结构

```
//--------有向图的十字链表表示-------
#define MAX_VERTEX_NUM 20
typedef struct ArcBox{
    int tailvex,headvex;          //该弧的尾和头顶点的位置
    struct ArcBox *hlink,*tlink;  //分别为弧头相同和弧尾相同的弧和链域
    InfoType    *info;            //该弧相关信息的指针
}ArcBox;

typedef struct VexNode{
    VertexType data;
    ArcBox      *firstin,*firstout; //分别指向该顶点第一条入弧和出弧
}VexNode;

typedef struct{
    VexNode xlist[MAX_VERTEX_NUM];  //表头向量
    int vexnum,arcnum;              //有向图的当前顶点数和弧数
}OLGraph;

Status CreateDG(OLGraph &G){
    //采用十字链表存储表示， 构造有向图G
    scanf(&G.vexnum,&G.arcnum,&G.IncInfo);                  //IncInfo为0则各弧不含其他信息
    for(i=0;i<G.vexnum;++i){                                //构造表头向量
        scanf(&G.xlist[i].data);                            //输入顶点值
        G.xlist[i].firstin=NULL;G.xlist[i].firstout=NULL;   //初始化指针
    }
    for(i=0;i<G.arcnum;++k){                                //输入各弧并构造十字链表
        scanf(&v1,&v2);                                     //输入一条弧的始点和终点
        i=LocateVex(G,v1);j=LocateVex(G,v2);                //确定v1,v2位置
        p=(ArcBox *) malloc (sizeof(ArcBox));               //假定有足够空间
        *p={i,j,G.xlist[j].firstin,i,G.xlist[i].firstout,NULL }; //对弧节点赋值
        G.xlist[j].firstin=G.xlist[i].firstout=p;            //完成在入弧和出弧链头的插入
        if(IncInfo) Input(*p->info);                         //若弧含有相关信息， 则输入
    }
}//CreateDG
```

7.2.4 邻接多重表 (Adjacency Multlist)

无向图的存储结构

```
//----无向图的邻接多重表存储表示------
#define MAX_VERTEX_NUM 20;
typedef enum{unvisited,visited} VisitIf;
typedef struct EBox{
    VisitIf  mark;              //访问标记
    int      ivex,jvex;         //该边依附的两个顶点的位置
    struct EBox  *link,*jlink   //分别指向依附这两个顶点的下一条边
}VexBox;

typedef struct{
    VexBox  adjmulist[MAX_VERTEX_NUM];
    int  vexnum,edgenum;                //无向图的当前定点数
}
```

8 动态存储管理

9 查找

```
//可能关键字类型
typedef float KeyType;
typedef int KeyType;
typedef char *KeyType;
//可能数据元素类型
typedef struct{
    KeyType key;
    ...
}SElemType;
//数值比较
#define EQ(a,b) ((a)==(b))
#define LT(a,b) ((a)<(b))
#define LQ(a,b) ((a)<=(b))
//字符串比较
#define EQ(a,b) (strcmp(!(a),(b)) )
#define LT(a,b) (strcmp((a),(b))<0)
#define LQ(a,b) (strcmp((a),(b))<=0)
```

9.1 静态查找表

9.1.1 顺序表的查找

顺序查找

```
typedef struct{
    ElemType *elem;
    int length;
}SSTable;

int Search_Seq(SSTable ST,KeyType key){
    //在顺序表ST中查找关键字等于key的数据元素
    //若找到，函数值为该元素在表中位置，否则为0
    ST.elem[0].key=key;                        //哨兵
    for(i=ST.length;!EQ(ST.ele[i].key,key);--i){  //从后往前找
        return i                               //找不到时i=0
    }
}
```

平均查找长度

$$
\begin{aligned}
ASL &= \sum_{i=1}^{n} P_i C_i \xlongequal{C_i=n-i+1} nP_1 + (n-1)P_2 + \cdots + 2P_{n-1} + P_n \\
ASL_{SS} &= \sum_{i=1}^{n} P_i C_i \xlongequal[C_i=n-i+1]{\sum_{i=1}^{n} P_i=1, P_i=\frac{1}{n}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(n-i+1) = \frac{n+1}{2} \\
ASL_{SS}' &= \sum_{i=1}^{n} P_i C_i + Q_i D_i \xlongequal[C_i=n-i+1, D_i=n+1]{\sum_{i=1}^{n} P_i=Q_i=\frac{1}{2}} \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(n-i+1) + \frac{1}{2}(n+1) = \frac{3(n+1)}{4}
\end{aligned}
$$

9.1.2 有序表的查找

折半查找

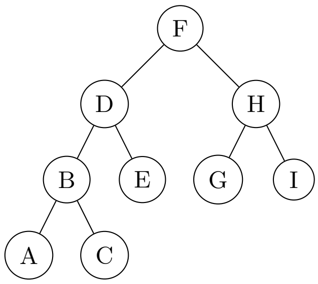
```
int Search_Bin(SSTable ST,KeyType key){
    //在有序表ST中折半查找关键字等于key的数据元素
    //若找到，函数值为该元素在表中位置，否则为0
    low=1;high=ST.length;            //置区间初值
    while(low<=high){
        mid=(low+high)/2;
        if(EQ(key,ST.elem[mid].key))return mid;          //找到待查元素
        else if (LT(key,ST.elem[mid].key))high=mid-1;   //继续前半区间查找
        else low=mid+1;                                 //继续后半区间查找
    }
    return 0;                                           //表中不存在待查元素
}
```

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{h} j * x^{j-1} &= \left(\sum_{j=1}^{h} x^j\right)' \\
&= \left(\frac{x-x^{h+1}}{1-x}\right)' \\
&= \frac{[1-(h+1)x^h](1-x)+x-x^{h+1}}{(1-x)^2} \\
\sum_{j=1}^{h} j * 2^{j-1} &\xlongequal{x=2} [1-(h+1)2^h](1-2)+2-2^{h+1} \\
&= (h+1)2^h - 1 + 2 - 2 \cdot 2^h \\
&= (h-1)2^h + 1 \\
2^h - 1 = n \Rightarrow h &= \log_2(n+1) \\
ASL_{bs} &= \sum_{i=1}^{n} P_i C_i \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{h} j * 2^{j-1}(\text{层高} * \text{节点数}) \\
&= \frac{1}{n}[(h-1)2^h + 1] \\
&= \frac{1}{n}[(\log_2(n+1)-1)2^{\log_2(n+1)} + 1] \\
&= \frac{1}{n}[(\log_2(n+1)-1)(n+1) + 1] \\
&= \frac{1}{n}[(\log_2(n+1))(n+1) - n - 1 + 1] \\
&= \frac{n+1}{n}\log_2(n+1) - 1 \\
&\approx \log_2(n+1) - 1, (n > 50)
\end{aligned}
$$

9.1.3 静态树表的查找

$$
\begin{aligned}
sw_i &= \sum_{j=l}^{i} w_j \\
\Delta P_i &= \left|\sum_{j=i+1}^{h} w_j - \sum_{j=l}^{i-1} w_j\right| \\
&= |(sw_h - sw_i) - (sw_{i-1} - sw_{l-1})| \\
&\xlongequal{sw_{l-1}=0, w_{l-1}=0} |sw_h + sw_{l-1} - sw_i - sw_{i-1}|
\end{aligned}
$$

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
key		A	B	C	D	E	F	G	H	I
w_i	0	1	1	2	5	3	4	4	3	5
sw_i	0	1	2	4	9	12	16	20	23	28
$l=1, h=9, \Delta P_i$		27	25	22	15	7	0	8	15	23
$l_1=1, h_1=5, l_1=6, h_1=9, \Delta P_i$		11	9	6	1	19		8	1	7




```c
typedef BiTree SOSTree;            //次优查找树采用二叉链表存储结构
int SecondOptimal(BiTree &T,ElemType R[],float sw[],int low ,int high){
    //由有序表R[low...high]及其累计权值表sw(sw[0]==1)递归构造次优查找数T
    i=low;min=abs(sw[high]-sw[low]);dw=sw[high]+sw[low-1];
    for(j=low+1;j<=high;++j){                //选择最小ΔPi值
        if(abs(dw-sw[j]-sw[j-1])<min){
            i=j;min=abs(dw-sw[j]-sw[j-1]);
        }
    }
    T=(BiTree)malloc(sizeof(BiTNode));
    T->data=R[i];                                    //生成节点
    if(i==low) T->lchild=NULL;                       //左子树空
    else SecondOptimal(T->lchild,R,sw,low,i-1);      //构造左子树
    if(i==high) T->rchild=NULL;                      //右子树空
    else SecondOptimal(T->rchild,R,sw,i+1,high);     //构造右子树
}

Status CreateSOSTree(SOSTree &T,SSTable ST){
    //有序表ST构造一棵次优查找树T, ST的数据元素含有权域weight
    if(ST.length==0) T=NULL;
    else{
        FindSW(sw,ST);      //按照有序表ST中各元素的weight域求累计权值表sw
        SecondOptimal(T,ST.elem,sw,1,ST.length);
    }
    return OK;
}
```

$$
\begin{aligned}
&F_0=0,F_1=1 \\
&F_n &&= F_{n-1}+F_{n-2} \quad (n\geqslant 2)\\
&F_n-sF_{n-1} &&= (1-s)(F_{n-1}+\tfrac{1}{1-s}F_{n-2}) \quad (n\geqslant 2)\\
& &&\xlongequal{-s=\frac{1}{1-s}} (1-s)(F_{n-1}+sF_{n-2}) \quad (n\geqslant 2)\\
& &&= (1-s)^{n-1}(F_1+sF_0)\\
& &&= (1-s)^{n-1}\\
&F_n+k(1-s)^{n-1} &&= sF_{n-1}+(1+k)(1-s)^{n-1}\\
& &&= s[F_{n-1}+\tfrac{(1+k)}{s}(1-s)^{n-1}]\\
& &&= s[F_{n-1}+\tfrac{(1+k)(1-s)}{s}(1-s)^{n-2}]\\
& &&\xlongequal{k=\frac{(1+k)(1-s)}{s}} s[F_{n-1}+k(1-s)^{n-2}]\\
& &&= s^{n-1}[F_1+k(1-s)^0]\\
& &&= s^{n-1}(1+k)\\
&F_n &&= (1+k)s^{n-1}-k(1-s)^{n-1}\\
& &&= \tfrac{1\pm\sqrt5}{\pm2\sqrt5}(\tfrac{1\pm\sqrt5}{2})^{n-1}-\tfrac{1\mp\sqrt5}{\pm2\sqrt5}(\tfrac{1\mp\sqrt5}{2})^{n-1}\\
& &&= \tfrac{1}{\sqrt5}\left[\tfrac{1\pm\sqrt5}{\pm2}(\tfrac{1\pm\sqrt5}{2})^{n-1}-\tfrac{1\mp\sqrt5}{\pm2}(\tfrac{1\mp\sqrt5}{2})^{n-1}\right]\\
& &&= \tfrac{1}{\sqrt5}\left[\tfrac{1\pm\sqrt5}{\pm2}(\tfrac{1\pm\sqrt5}{2})^{n-1}\mp\tfrac{1\mp\sqrt5}{2}(\tfrac{1\mp\sqrt5}{2})^{n-1}\right]\\
& &&= \begin{cases}\tfrac{1}{\sqrt5}\left[\tfrac{1+\sqrt5}{+2}(\tfrac{1+\sqrt5}{2})^{n-1}-\tfrac{1-\sqrt5}{2}(\tfrac{1-\sqrt5}{2})^{n-1}\right]\\ \tfrac{1}{\sqrt5}\left[\tfrac{1-\sqrt5}{-2}(\tfrac{1-\sqrt5}{2})^{n-1}+\tfrac{1+\sqrt5}{2}(\tfrac{1+\sqrt5}{2})^{n-1}\right]\end{cases}\\
& &&= \tfrac{1}{\sqrt5}\left[(\tfrac{1+\sqrt5}{2})^{n}-(\tfrac{1-\sqrt5}{2})^{n}\right]\\
& &&\approx \tfrac{1}{\sqrt5}(\tfrac{1+\sqrt5}{2})^{n}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}-s=\frac{1}{1-s}\\ k=\frac{(1+k)(1-s)}{s}\end{cases}
\Rightarrow\begin{cases}-1-s+s^2=0\\ ks=1-ks+k-s\end{cases}
\Rightarrow\begin{cases}s=\frac{1\pm\sqrt5}{2}\\ (2s-1)k=1-s\end{cases}
\Rightarrow\begin{cases}s=\frac{1\pm\sqrt5}{2}\\ 1-s=\frac{1\mp\sqrt5}{2}\\ k=\frac{1-s}{(2s-1)}=\frac{1\mp\sqrt5}{\pm2\sqrt5}\\ 1+k=\frac{1\pm\sqrt5}{\pm2\sqrt5}\end{cases}
$$

9.1.4 索引顺序表的查找

$$
\begin{aligned}
ASL_{bs} &= L_b+L_w\\
&= \tfrac{1}{b}\textstyle\sum_{j=1}^{b} j+\tfrac{1}{s}\sum_{j=1}^{s} j\\
&= \tfrac{1+b}{2}+\tfrac{1+s}{2}\\
&= \tfrac12(\tfrac{n}{s}+s)+1\\
ASL_{bs}^{'} &\approxeq \log_2(\tfrac{n}{s}+1)-1+\tfrac{1+s}{2}\\
&\approxeq \log_2(\tfrac{n}{s}+1)+\tfrac{s}{2}-\tfrac12\\
&\approxeq \log_2(\tfrac{n}{s}+1)+\tfrac{s}{2}
\end{aligned}
$$

9.2 动态查找表

9.2.1 二叉排序树和平衡二叉树

二叉排序树及其查找过程

二叉排序树是空树或者具有性质
(1) 非空左子树上所有节点小于根节点
(2) 非空右子树上所有节点大于根节点
(3) 左右子树分别为二叉排序树

二叉排序树的插入和删除

```
Status SearchBST(BiTree T,KeyType key,BiTree f,BiTree &p){
    //二叉排序树T中查找key
    //成功p指向节点，返回TRUE，失败p指向访问节点，返回FALSE
    //f指向双亲节点，初始值为NULL
    if(!T){p=f;return FALSE;}  //查找失败
    else if EQ(key,T->data.key){p=T;return TRUE;} //查找成功
    else if LT(key,T->data.key) return SearchBST(T->lchild,key,T,p);
    else  return SearchBST(T->rchild,key,T,p);
}

Status InsertBST(BiTree &T,ElemType e){
    //二叉排序树T中不存在key，插入e返回TRUE
    //否则返回FALSE
    if(!SearchBST(T,e.key,null,p)){
        s=(BiTree)malloc(sizeof (BiTNode));
        s->data=e;s->lchild=s->rchild=NULL;
        if(!p)T=s;
        else if(LT(e.key,P->data.key))p->lchild=s;
        else p->rchild=s;
        return TRUE;
    }
    else return FALSE;
}
```

$$
\text{双亲节点 } *f \text{ 删除节点 } *p
\begin{cases}
p_L, p_R\text{均为空树, 改双 *f 亲指针} \\
p_L \; or \; p_R\text{为空树，子树为双亲 *f 子树} \\
p_L, p_R\text{均不为空树，} \begin{cases} (1)p_L\text{为双亲 *f 左子树}, p_r\text{为}p_L\text{最右} \\ (2)p_L\text{最右 *s 替代} *p \text{ 删除 } *s\text{重复操作} \end{cases}
\end{cases}
$$

```
Status DeleteBST(BiTree &T,KeyType key){
    //若二叉树T中存在key，删除该节点
    //并返回TRUE，否则返回FALSE
    if(!T) return FALSE;           //不存在key
    else{
        if(EQ(key,T->data.key)) return Delete(T);  //找到key
        else if(LT(k,T->data.key)) return DeleteBST(T->lchild,key);
        else return DeleteBST(T->rchild,key);
    }
}

Status Delete(BiTree &p){
    //从二叉树删除节点p，重接左子树或右子树
    if(!p->rchild){q=p;p=p->lchild;free(q);}
    else if(!p->lchild){q=p;p=p->rchild;free(q);}
    else{
        q=p;s=p->lchild;                    //左转
        while(s->rchild){q=s;s=s->rchild;}  //右转到尽头，
        p->data=s->data;                    //s指向p前驱，q指向s双亲
        if(q!=p)q->rchild=s->lchild;  //重接q右子树
        else q->lchild=s->lchild;     //重接q右子树(左单支)
        free(s);
    }
    return TRUE;
}
```

二叉排序树的查找分析

$(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n})^n \geqslant a_1a_2\ldots a_n$

$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n \approx 2.76$(自然常數)

$s_n = (1+\frac{1}{n})^n = (\frac{1+n}{n})^n \cdot 1 \leqslant \left(\frac{\frac{n+1}{n}+\cdots+\frac{n+1}{n}+1}{n+1}\right)^{n+1} = (\frac{n+2}{n+1})^{n+1} = s_{n+1}$, 單增 $\quad n \geqslant 1$

$t_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$, 單減 $\quad n \geqslant 1$

$\frac{1}{t_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \cdot 1 \leqslant \left(\frac{\frac{n}{n+1}+\cdots+\frac{n}{n+1}+1}{n+2}\right)^{n+2} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} = \frac{1}{t_{n+1}}, t_n \geqslant t_{n+1}$

$2 = s_1 < s_n < t_n < t_1 = 4$

$(1+\frac{1}{n})^n < s_{max} = e < t_{min} < (1+\frac{1}{n})^{n+1}, n\ln(\frac{n+1}{n}) < 1 < (n+1)\ln(\frac{n+1}{n})$

$\frac{1}{n+1} < \ln(\frac{n+1}{n}) < \frac{1}{n}$

$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$
$> \ln(\frac{2}{1}) + \ln(\frac{3}{2}) + \ln(\frac{4}{3}) + \cdots + \ln(\frac{n+1}{n}) - \ln n$
$> \ln(n+1) - \ln n > 0,$ 正项
$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln(\frac{n+1}{n}) < 0, \gamma_{n+1} < \gamma_n$ 单减
$0 < \gamma_n < 1$
$k = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$
$\int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} = k + \frac{1}{n}$
$\int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln n > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = k - 1$
$\int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln n < \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + \cdots + \frac{1}{2}(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}) = k - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} < (k - \ln n) = \gamma_n < 1$
$k - \ln n = \gamma \approx 0.577$(欧拉常数)
$\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} = k - 1 = \ln n + \gamma - 1 < \ln n$

$P(n,i) = \frac{1}{n}[1 + i \cdot (P(i) + 1) + (n - i - 1) \cdot (P(n - i - 1) + 1)]$
$P(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} P(n,i)$
$= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}[1 + i \cdot (P(i) + 1) + (n - i - 1) \cdot (P(n - i - 1) + 1)]$
$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} [i \cdot P(i) + i + 1 + (n - i - 1) \cdot P(n - i - 1) + n - i - 1]$
$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} [i \cdot P(i) + (n - i - 1) \cdot P(n - i - 1) + n]$
$= 1 + \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} [i \cdot P(i) + (n - i - 1) \cdot P(n - i - 1)]$
$= 1 + \frac{1}{n^2}[0 \cdot P(0) + (n-1) \cdot P(n-1) + 1 \cdot P(1) + (n-2) \cdot P(n-2) + \cdots + (n-1) \cdot P(n-1) + 0 \cdot P(0)]$
$= 1 + \frac{2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i \cdot P(i)$
$k_n = \sum_{i=0}^{n-1} i \cdot P(i), k_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-2} i \cdot P(i)$
$k_n = k_{n-1} + (n-1)P(n-1)$
$P(n) = 1 + \frac{2}{n^2} k_n$
$P(n-1) = 1 + \frac{2}{(n-1)^2} k_{n-1}$
$\frac{n^2}{2}(P(n) - 1) = \frac{(n-1)^2}{2}(P(n-1) - 1) + (n-1)P(n-1)$
$P(n) = \frac{n^2-1}{n^2} P(n-1) + \frac{2n-1}{n^2}, P(1) = 1, P(0) = 0$
$\frac{n}{n+1} P(n) = \frac{n-1}{n} P(n-1) + \frac{2n-1}{n(n+1)}$
$s_n = \frac{n}{n+1} P(n), \delta_n = \frac{2n-1}{n(n+1)}$
$s_n = s_{n-1} + \delta_n$
$s_{n-1} = s_{n-1} + \delta_{n-1}$
$\ldots$
$s_2 = s_1 + \delta_2$
$s_1 = s_0 + \delta_1$
$s_n = \sum_{j=1}^{n} \delta_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{2j-1}{j(j+1)} = \sum_{j=1}^{n} (2j-1)(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1})$
$= \sum_{j=1}^{n} \frac{2j-1}{j} - \frac{2j-1}{j+1}$
$= \sum_{j=1}^{n} \frac{2j-1}{j} - \frac{2j+2-3}{j+1}$
$= \sum_{j=1}^{n} \frac{-1}{j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{3}{j+1}$
$= \sum_{j=1}^{n} \frac{-1}{j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1+2}{j+1}$
$= \sum_{j=1}^{n} (\frac{-1}{j} + \frac{1}{j+1}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{2}{j+1}$
$= -\frac{n}{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \frac{2}{j+1}$
$P(n) = \frac{n+1}{n} s_n = -1 + 2\frac{n+1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j+1} = -1 + 2\frac{n+1}{n}(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1})$
$= 2\frac{n+1}{n}(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}) + \frac{2}{n} - 1$
$= 2\frac{n+1}{n}(k-1) + \frac{2}{n} - 1 = 2\frac{n+1}{n}(\ln n + \gamma - 1) + \frac{2}{n} - 1 \leqslant 2\frac{n+1}{n} \ln n$

平衡二叉树是空树或者具有性质
(1)左右子树都是平衡二叉树
(2)左右子树高度差绝对值小于 1

平衡因子左子树高度减右子树高度

失衡调整
(1)单向右旋
(2)单向左旋
(3)双向旋转 (先左后右)
(4)双向旋转 (先右后左)

插入 e 算法描述
(1)空树,e 为根节点
(2)e 等于根节点，不插入
(3)e 小于根节点，左子树无 e, 插入左子树
  根节点平衡因子 =-1, 改为 0，树深度 +0
  根节点平衡因子 =0, 改为 1，树深度 +1
  根节点平衡因子 =1
    左子树根节点平衡因子 =1，单向右旋
    左子树根节点平衡因子 =-1，先左后右
(4)e 大于根节点，右子树无 e, 插入右子树
  根节点平衡因子 =1, 改为 0，树深度 +0
  根节点平衡因子 =0, 改为 1，树深度 +1
  根节点平衡因子 =-1
    右子树根节点平衡因子 =-1，单向左旋
    右子树根节点平衡因子 =1，先右后左

```
#define LH +1;
#define EH 0;
#define RH -1;

typedef struct BSTNode{
int bf;                              //节点平衡因子
struct BSTNode * lchild ,*rchild;    //左右孩子指针
}BSTNode,*BSTree;

void R_Rotate(BSTree &p){
    //对以*p为根的二叉排序树作右旋处理，处理后p指向新的根节点，即左子树根节点
    lc=p->lchild;               //lc指向*p的左子树的根节点
    p->lchild=lc->rchild;       //lc的右子树挂接为*p的左子树
    lc->rchild=p;p=lc;          //p指向新的根节点
}

void L_Rotate(BSTree &p){
    //对以*p为根的二叉排序树作左旋处理，处理后p指向新的根节点，即右子树根节点
    rc=p->rchild;               //rc指向*p的右子树的根节点
    p->rchild=rc->lchild;       //rc的左子树挂接为*p的右子树
    rc->lchild=p;p=rc;          //p指向新的根节点
}

void LeftBalance(BSTree &T){
    //对平衡二叉树T作左平衡处理，结束时T指向新的根点
    lc=T->lchild;
    switch(lc->bf){
        case LH:
            T->bf=lc-bf=EH; R_Rotate(T);break;
        case RH:
            rd=lc->rchild;
            switch(rd->bf){
                case LH:T->bf=RH;lc->bf=Eh;break;
                case EH:T->bf=lc->bf=EH;break;
                case RH:T->bf=EH;lc->bf=LH;break;
            }
            rd->bf=EH;
            L_Rotate(T->rchild);
            R_Rotate(T);
    }
}
```

```
Status InsertAVL(BSTree &T,ElemType e,Boolean &taller){
    //平衡二叉树T不存在e，插入返回1，否则返回0
    //若插入失衡，则平衡处理，taller反映长高与否

    if(!T){
        T=(BSTree) malloc(sizeof(BSTNode));T->data=e;
        T->lchild=T->rchild=NULL;T->bf=EH;taller=TRUE;
    }
    else{
        if(EQ(e.key,T->data.key)){taller=FALSE;return 0;}
        if(LT(e.key,T->data.key)){
            if(!InsertAVL(T->lchild,e,taller)) return 0;
            if(taller) switch(T->bf){
                case LH:
                    LeftBalance(T);taller=FALSE;break;
                case EH:
                    T->bf=LH;taller=TRUE;break;
                case RH:
                    T->bf=EH;taller=FALSE;break;
            }
        }
        else{
            if(!InsertAVL(T->rchild,e,taller)) return 0;
            if(taller) switch(T->bf){
                case LH:
                    T->bf=EH;taller=FALSE;break;
                case EH:
                    T->bf=RH;taller=TRUE;break;
                case RH:
                    RightBalance(T);taller=FALSE;break;
            }
        }
    }
    return 1;
}
```

平衡二叉树查找的分析

比较次数不超过树的深度

N_h 深度为 h 的平衡二叉树的最少节点数

$N_{n+1}+1 = N_n+1+N_{n-1}+1, N_0=0, N_1=1, N_2=2$

$b_{n+1} = b_n + b_{n-1}, b_0 = 1, b_1 = 2, b_2 = 3$

$b_{n+1} - sb_n = (1-s)(b_n - sb_{n-1}) = (1-s)^n(b_1 - sb_0) = (2-s)(1-s)^n$

$(s-1)s = 1, s_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, s_2 = \frac{1 2\sqrt{5}}{2}$

$b_{n+1} - s_1 b_n = (2-s_1)(1-s_1)^n$

$b_{n+1} - s_2 b_n = (2-s_2)(1-s_2)^n$

$-(s_2-s_1)b_n = (2-s_2)(1-s_2)^n - (2-s_1)(1-s_1)^n$

$s_2 - s_1 = -\sqrt{5}, 2-s_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, 2-s_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1-s_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, 1-s_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$b_n = \frac{(2-s_2)}{-(s_2-s_1)}(1-s_2)^n - \frac{(2-s_1)}{-(s_2-s_1)}(1-s_1)^n$

$b_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2})(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (1+\frac{1-\sqrt{5}}{2})(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n\right] = F_n + F_{n+1}$

$N_n = b_n - 1 = F_n + F_{n+1} - 1 = F_{n+2} - 1$

$F_h \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^h = c(\varphi)^h$

$N_h = c(\varphi)^{h+2} - 1$

$\log(\frac{N_h+1}{c}) = (h+2)\log\varphi$

$\frac{\log(\frac{N_h+1}{c})}{\log\varphi} - 2 = \log_{\varphi}(\frac{N_h+1}{c}) - 2 = h$

先排序，再构造次优查找树，生成树是二叉排序树

9.2.2 B-树和 B+ 树

B-树及其查找

B-树是平衡的多路查找树，

m 阶 **B-树**是空树或具有性质

(1)每个节点至多有 m 棵子树
(2)若根节点不是叶子节点，则至少有两棵子树
(3)除根结点之外的所有非终端节点，至少包含$\lceil \frac{m}{2} \rceil$棵子树
(4)所有的非终端节点，包含信息
 $(n, A_0, k_1, A_1, K_2, \ldots, K_n, A_n), K_i$为关键字$, A_i$指向根节点的指针
 A_{i-1}指向子树的所有节点小于K_i, A_{i+1}指向子树的所有节点大于K_i
 关键字个数$n, \lceil \frac{m}{2} \rceil - 1 \leqslant n \leqslant m-1$
(5)所有的叶子节点都出现在同一层次上，且不带信息

```
#define m 3                       //B-树的阶
typedef struct BTNode{
    int keynum;                   //关键字个数，即节点大小
    struct BTNode * parent;       //双亲结点
    KeyType key[m+1];             //关键字向量，0号单元未用
    struct BTNode * ptr[m+1];     //子树指针向量
    Record *recptr[m+1];          //记录指针向量，0号单元未用
}BTNode,*BTree;

typedef struct{
    BTNode *pt;           //指向找到的节点
    int i;                //在节点中的关键字号
    int tag;              //1成功，0失败
}Result;                  //B-树查找结果类型


Result SearchBTree(BTree T,KeyType K){
    //在m阶B-树T上查找K，返回(pt,i,tag)
    //成功返回位置，失败插入返回插入位置
    p=T;q=NULL;found=FALSE;i=0;     //初始化，p指向待查节点，q指向p的双亲节点
    while(p && !found){
        i=Search(p,k);              //在p->key [1...keynum]中查找
        if(i>0 && p->key[i]==k) found =TRUE;    //查到关键字
        else{q=p;p=p->ptr[i];}
    }
    if(found) return (p,i,1);
    else return (q,i,0);
}
```

B-树查找分析

磁盘节点，内存顺序

$1, 2, 2\lceil \frac{m}{2} \rceil, 2\lceil \frac{m}{2} \rceil^2, \ldots, 2\lceil \frac{m}{2} \rceil^{n-2}, \ldots$

N 关键字 B-树，深度 l+1(叶子算深度)，N+1 叶子节点

$N+1 \geqslant 2\lceil \frac{m}{2} \rceil^{l+1-2}$

$\log_{\lceil \frac{m}{2} \rceil}(N+1) \geqslant \log_{\lceil \frac{m}{2} \rceil} 2 + l - 1$

$\log_{\lceil \frac{m}{2} \rceil}(\frac{N+1}{2}) + 1 \geqslant l$

B-树插入和删除

最底层非终端节点添加，添加后关键字个数不超过 m-1 完成，超过分裂

节点分裂 $*p$ 节点含 m-1 关键字，插入后节点信息 $(m, A_0, K_1, A_1, K_2, A_2, \ldots, K_m, A_m)$

$*p_1, (\lceil \frac{m}{2} \rceil - 1, A_0, K_1, A_1, K_2, A_2, \ldots, K_{\lceil \frac{m}{2} \rceil - 1}, A_{\lceil \frac{m}{2} \rceil - 1})$

$*p_2, (m - \lceil \frac{m}{2} \rceil, A_{\lceil \frac{m}{2} \rceil}, K_{\lceil \frac{m}{2} \rceil + 1}, A_{\lceil \frac{m}{2} \rceil + 1}, K_{\lceil \frac{m}{2} \rceil + 2}, A_{\lceil \frac{m}{2} \rceil + 2}, \ldots, K_m, A_m)$

$key, (K_{\lceil \frac{m}{2} \rceil}, *p_2)$ 合并到双亲

```
Status InsertBtree(BTree &T ,KeyType T,BTree q ,int i){
    //m阶B-树，*q的key[i],key[i+1]之间插入关键字k
    //插入后节点过大则分裂
    x=k;ap=NULL;finished=FALSE;
    while(q && !finished){
        Insert(q,i,x,ap);        //将x,ap分别插入q->key[i+1],q->ptr[i+1],
        if(q->keynum<m) finished=TRUE;       //插入完成
        else{                                //分裂节点*q
            s=m/2+1;splite(q,s,ap);x=q->key[s];
            //移动相应元素q->key[s+1..m], q->ptr[s..m]q->recptr[s+1..m]到新节点*ap
            q=q->parent;
            if(q) i=Search(q,x);
        }
    }
    if(!finished)              //T是空树或者节点已分裂为节点*p，*ap
        NewRoot(T,q,x,ap);     //生成含信息(T,x,ap)的新的根节点*T,原T和ap为子树指针
    return OK;
}
```

最底层非终端节点删除，删除后关键字个数不小于 $\lceil \frac{m}{2} \rceil$ 完成，小于合并

非终端节点 K_i 用指针 A_i 子树最小关键字 Y 替代 K_i 再删除 Y

非终端删除情况 (关键字个数)
(1)所在节点大于等于$\lceil \frac{m}{2} \rceil$
(2)所在节点等于$\lceil \frac{m}{2} \rceil - 1$, 存在兄弟节点大于$\lceil \frac{m}{2} \rceil - 1$ 双亲借兄弟，靠近给自己
(3)所在节点等于$\lceil \frac{m}{2} \rceil - 1$, 兄弟节点都等于$\lceil \frac{m}{2} \rceil - 1$ 毁灭自己，留给兄弟

9.2.3 键树

键树又称数字查找树，度大于 2 的树。元素是组成关键字的符号。关键字是数值，单词。

键树是有序树，结束符 $ 小于任何字符

键树存储结构

(1) 孩子兄弟链表，分支节点 $(symbol, first, next)$，叶子节点 $infoptr$ 域，双链树

```
#define MAXKEYLEN 16          //关键字最大长度
typedef struct{
    char ch[MAXKEYLEN];       //关键字
    int num;                  //关键字长度
}KeysType;                    //关键字类型

typedef enum{LEAF,BRANCH} NodeKind;      //节点种类：{叶子，分支}
typedef struct DLTNode{
    char symbol;
    struct DLTNode *next;              //指向兄弟节点的指针
    NodeKind kind;
    union{
        Record *infoptr;              // 叶子节点的记录指针
        struct DLTNode *first         // 分支节点的孩子链指针
    }
}DLTNode,*DLTree;                      //双链树的类型

Record * SearchDLTree(DLTree T,KeysType K){
    //在非空双链树T中查找K，存在返回记录指针，失败返回空指针
    p=-T->first;i=0;
    while(p&& i<k.num){
        while(p&& p->symbol !=K.ch[i]) p=p->next;       //查找第i
        if(p&& i<K.num-1) p=p->first;                   //准备查找下一位
        ++i;
    }
    if(!p) return NULL;                                 //查找成功
    else return p->infoptr;                             //查找失败
}
```

键树节点最大度 d，深度 h，双链树平均查找长度 $\frac{h}{2}(1 + d)$

插入删除节点，等于在树中某个节点插入删除子树

(2) 多重链表，单支树压缩为叶子节点，

```
typedef struct TrieNode{
    NodeKind kind;
    union{
        struct{KeysType k;Record * infoptr;} lf;   //叶子节点
        struct{TrieNode *ptr[27]; int num;} bh;    //分支节点
    }
}TrieNode,*TrieTree;

Record * SearchTrie(TrieTree T,KeysType k){
    //在键树T中查找关键字等于K的记录
    for(p=T,i=0;                                   //对k的每个字符逐个查找
        p&& p->kind==BRANCH && i<K.num;            //*p为分支节点
        p=p->bh.ptr[ord(K.ch[i])],++i);             //ord 求字符在字母表中序号,$为0
    if(p=&& p->kind==LEAF&& p->lf.k==k) return p->lf.infoptr;  //查找成功
    else return NULL;
}
```

多重链表键树分割，无查找分析

9.3 哈希表

9.3.1 哈希表

關鍵字k, 象$f(k)$, 對應關係f, **哈希函數**

(1)哈希函數是映像

(2)不同關鍵字同象**衝突**

(3)關鍵字象做位置，以哈希函數，衝突處理辦法映射關鍵字到連續地址**哈希表**

(4)映射過程**散列** 存儲位置**哈希地址或散列地址**

9.3.2 哈希函數構造方法

關鍵字映射到地址等概率**均勻哈希函數**

(1)直接定地址$H(key) = a \cdot key + b$

(2)數字分析

(3)平方取中

(4)折疊法,(移位折疊，間界折疊)

(5)除留餘數$H(key) = keyMODp$(質數，不小於 20 質因數的合數),$p \leqslant m$(表長)

(6)隨機數$H(key) = random(key)$

9.3.3 衝突處理方法

地址序列

(1)開放定址法$H_i = (H(key) + d_i)\, MOD\, m \quad i = 1, 2, \ldots, k(k \leqslant m)$

d_i取法　(1)$d_i = 1, 2, 3, \cdots, m-1$，線性探測再散列

(2)$d_i = 1^2, -1^2, 2^2, -2^2, 3^2, \cdots, \pm k^2$，二次探測再散列

(3)$d_i =$ 偽隨機數列，隨機探測再散列

處理同義詞衝突產生非同義詞衝突，**二次聚集**

線性能填滿；平方形如$m = 4j + 3$的素數能填滿；隨機數列

(2)再哈希法$H_i = RH_i(key) \quad i = 1, 2, \ldots, k$

(3)鏈地址法$ChainChainHash[i]$

(4)公共溢出區$HashTable[0..m-1], OverTable[0..v]$

9.3.4 哈希表的查找及其分析

有記錄，且記錄等於關鍵字則查找成功

```
\\---開放地址哈希表的存儲結構
int Hashsize[]={997,...};        //哈希容量遞增表， 一個合適的素數序列
typedef struct{
    ElemType * elem;             //數據元素存儲基址， 動態分配數組
    int count;                   //當前數據元素個數
    int sizeindex;               //Hashsize[sizeindex]為當前容量
}HashTable;

#define SUCCESS 1
#define UNSUCCESS 0
#define DUPLICATE -1

Status SearchHash(HashTable H,KeyType k,int &p,int &c){
    //在開放地址哈希表中查找關鍵碼為k的元素
    //成功p指向节点， 返回SUCCESS。 失敗p指向插入位置， 返回UNSUCCESS
    //c用作衝突計數， 初始值0， 供建表插入時參考
    p=Hash(k);
    while(H.elem[p].key !=NULLKEY &&          //有記錄
        !EQ(k,H.elem[p].key))                  //關鍵字不等
        colision(p,++c);                       //求得下一探查地址
    if(EQ(k,H.elem[p].key)) return SUCCESS; //成功， p返回位置
    else return UNSUCCESS;                     //失敗， p返回插入位置
}

Status InsertHash(HashTable &H,ElemType e){
    //查找不成功插入e到H， 返回OK
    //衝突次數過大則重建哈希表
    c=0;
    if(SearchHash(H,e.key,c)) return DUPLICATE;      //表中有e
    else if(c<Hashsize[H.sizeindex]/2){               //衝突次數未達到上限
        H.elem[p]=e;++H.count;return OK;              //插入e
    }
    else{
        RecreateHashTable(H);return UNSUCCESS;        //重建哈希表
    }
}
```

哈希表裝填因子 $\alpha = \frac{\text{表中填入記錄數}}{\text{哈希表長度}}$

成功時平均查找長度 $S_{nl} \approx \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1-\alpha}\right)$ 線性探測再散列

$S_{nr} \approx -\frac{1}{\alpha}\ln(1-\alpha)$ 偽隨機探測，二次探測，再哈希

$S_{nc} \approx 1 + \frac{\alpha}{2}$ 鏈地址法

失敗時平均查找長度 $U_{nl} \approx \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{(1-\alpha)^2}\right)$ 線性探測再散列

$U_{nr} \approx \frac{1}{1-\alpha}$ 偽隨機探測，二次探測，再哈希

$U_{nc} \approx \alpha + e^{-\alpha}$ 鏈地址法

随机探测公式推导

哈希表長度 m, 已裝入 n 个记录，哈希函数均匀，处理冲突后产生地址随机

p_i, 再填入一个记录 i 次地址均发生冲突

p_i, 再填入一个记录 i-1 次地址均发生冲突，第 i 次成功

$p_1 = \frac{n}{m}$ $\quad$ $q_1 = (1 - \frac{n}{m})$

$p_2 = \frac{n}{m} \cdot \frac{n-1}{m-1}$ $\quad$ $q_2 = \frac{n}{m} \cdot (1 - \frac{n-1}{m-1})$

$\vdots$ $\quad$ $\vdots$

$p_n = \frac{n}{m} \cdot \frac{n-1}{m-1} \cdots \frac{n-(n-1)}{m-(n-1)}$ $\quad$ $q_n = \frac{n}{m} \cdot \frac{n-1}{m-1} \cdots (1 - \frac{n-(n-1)}{m-(n-1)})$

$p_{n+1} = \frac{n}{m} \cdot \frac{n-1}{m-1} \cdots \frac{n-(n-1)}{m-(n-1)} \cdot \frac{n-n}{m-n} = 0$ $\quad$ $q_{n+1} = p_{n+1} = \frac{n}{m} \cdot \frac{n-1}{m-1} \cdots \frac{n-(n-1)}{m-(n-1)} \cdot (1 - \frac{n-n}{m-n})$

$q_i = p_{i-1} - p_i, p_0 = 1$

$$
\begin{aligned}
\text{查找失败时}U_n &= \textstyle\sum_{i=1}^{n+1} q_iC_i = \sum_{i=1}^{n+1}(p_{i-1}-p_i)i \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n+1} p_{i-1}i - \sum_{i=1}^{n+1} p_i i & &= \textstyle\sum_{i=0}^{n} p_i(i+1) - \sum_{i=1}^{n+1} p_i i \\
&= \textstyle\sum_{i=0}^{n} p_i i - \sum_{i=1}^{n+1} p_i i + \sum_{i=0}^{n} p_i & &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} p_i i - \sum_{i=1}^{n+1} p_i i + \sum_{i=1}^{n} p_i + 1 \\
&= -p_{n+1}(n+1) + \textstyle\sum_{i=1}^{n} p_i + 1 & &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} p_i + 1
\end{aligned}
$$

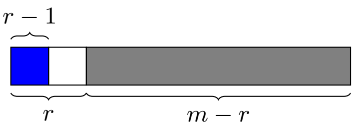
$C_m^n = \binom{m}{n}$

$\binom{m}{n} = \frac{m}{n}\binom{m-1}{n-1} \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{\binom{m}{n}}{\binom{m-1}{n-1}} \Rightarrow \frac{n}{m} = \frac{\binom{m-1}{n-1}}{\binom{m}{n}}$

$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1} \Rightarrow \binom{m}{n} - \binom{m-1}{n} = \binom{m-1}{n-1} \Rightarrow \binom{m+1}{n+1} - \binom{m}{n+1} = \binom{m}{n}$

$$
\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{i=1}^{n} p_i + 1 = * \\
&= 1 + \tfrac{n}{m} + \tfrac{n}{m}\cdot\tfrac{n-1}{m-1} + \cdots + \tfrac{n}{m}\cdots\tfrac{n-(n-1)}{m-(n-1)} \\
&= 1 + \frac{\binom{m-1}{n-1}}{\binom{m}{n}} + \frac{\binom{m-1}{n-1}}{\binom{m}{n}}\cdot\frac{\binom{m-2}{n-2}}{\binom{m-1}{n-1}} + \cdots + \frac{\binom{m-1}{n-1}}{\binom{m}{n}}\cdot\frac{\binom{m-2}{n-2}}{\binom{m-1}{n-1}}\cdots\cdot\frac{\binom{m-(n-1)-1}{n-(n-1)-1}}{\binom{m-(n-1)}{n-(n-1)}} \\
&= 1 + \frac{1}{\binom{m}{n}}\left[\binom{m-1}{n-1} + \binom{m-2}{n-2} + \cdots + \binom{m-n}{n-n}\right] \\
&= 1 + \frac{1}{\binom{m}{n}}\left[\binom{m-1}{m-n} + \binom{m-2}{m-n} + \cdots + \binom{m-n+1}{m-n} + \binom{m-n}{m-n}\right] \\
&= 1 + \frac{1}{\binom{m}{n}}\left[\binom{m}{m-n+1} \underbrace{-\binom{m-1}{m-n+1} + \binom{m-1}{m-n+1} - \binom{m-2}{m-n+1} + \cdots + \binom{m-n+2}{m-n+1}} - \binom{m-n+1}{m-n+1} + \binom{m-n}{m-n}\right] \\
&= 1 + \frac{1}{\binom{m}{n}}\cdot\binom{m}{m-n+1} = 1 + \frac{n!(m-n)!}{m!}\cdot\frac{m!}{(m-n+1)!(n-1)!} \\
&= 1 + \frac{n}{m-n+1} = \frac{m+1}{m-n+1} = \frac{1}{1-\frac{n}{m+1}} \\
&\approx \frac{1}{1-\alpha}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{查找成功时}S_n &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} p_iC_i = \sum_{i=0}^{n-1} p_iU_i \\
&\overset{p_i=\frac{1}{n}}{=\!=\!=} \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=0}^{n-1} U_i = \tfrac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1-\frac{i}{m}} \\
&\approx \tfrac{1}{n}\int_0^n \frac{1}{1-\frac{i}{m}}di = \tfrac{m}{n}\int_0^n \frac{1}{1-\frac{i}{m}}d(\tfrac{i}{m}) = \tfrac{m}{n}\int_0^{\frac{n}{m}} \tfrac{1}{1-x}d(x) = \tfrac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} \tfrac{1}{1-x}dx = -\tfrac{1}{\alpha}\ln(1-x)|_0^{\alpha} \\
&\approx -\tfrac{1}{\alpha}\ln(1-\alpha)
\end{aligned}
$$



$P_r = \frac{\binom{m-r}{n-r+1}}{\binom{m}{n}}, \sum_{r=1}^{n+1} P_r = \sum_{r=1}^{n+1} \frac{\binom{m-r}{n-r+1}}{\binom{m}{n}} = 1$

$$
\begin{aligned}
U_n &= \textstyle\sum_{r=1}^{n+1} rP_r \\
&= m+1-(m+1)\textstyle\sum_{r=1}^{n+1} P_r + \sum_{r=1}^{n+1} rP_r \\
&= m+1-\textstyle\sum_{r=1}^{n+1}(m+1-r)P_r \\
&= m+1-\textstyle\sum_{r=1}^{n+1}(m+1-r)\frac{\binom{m-r}{n-r+1}}{\binom{m}{n}} \\
&= m+1-\frac{1}{\binom{m}{n}}\textstyle\sum_{r=1}^{n+1}(m+1-r)\binom{m-r}{m-n-1} \\
&= m+1-\frac{1}{\binom{m}{n}}\textstyle\sum_{r=1}^{n+1}(m-n)\binom{m-r+1}{m-n} \\
&= m+1-\frac{(m-n)}{\binom{m}{n}}\left[\binom{m}{m-n} + \cdots + \binom{m-n+1}{m-n} + \binom{m-n}{m-n}\right] \\
&= m+1-\frac{(m-n)}{\binom{m}{n}}\left[\binom{m+1}{m-n+1} \underbrace{-\binom{m}{m-n+1} + \binom{m}{m-n+1} - \binom{m-1}{m-n+1} + \cdots + \binom{m-n+2}{m-n+1}} - \binom{m-n+1}{m-n+1} + \binom{m-n}{m-n}\right] \\
&= m+1-\frac{(m-n)}{\binom{m}{n}}\binom{m+1}{m-n+1} = m+1-(m-n)\frac{m+1}{m+1-n} = (m+1)(1-\frac{m-n}{m-n+1}) \\
&= \frac{m+1}{m-n+1} = \frac{1}{1-\frac{n}{m+1}} \approx \frac{1}{1-\alpha} \\
S_n &= \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{k=0}^{n-1} U_k \\
&= \tfrac{1}{n}\left[\tfrac{m+1}{m+1} + \tfrac{m+1}{m} + \cdots + \tfrac{m+1}{m-n+2}\right] \\
&= \tfrac{m+1}{n}(H_{m+1} - H_{m-n+1}) \\
&= \tfrac{m+1}{n}(\ln\tfrac{m+1}{m+1-n}) \\
&\approx -\tfrac{1}{\alpha}\ln(1-\alpha)
\end{aligned}
$$

非链地址处理冲突的哈希表中删除记录，填入特殊符号

10 内部排序

10.1 概述

```
#define MAXSIZE 20
typedef int KeyType;
typedef struct{
    KeyType key;
    InfoType ontherinfo;
}RedType;
typedef struct{
    RedType r[MAXSIZE+1];
    int length;
}Sqlist;
```

10.2 插入排序

10.2.1 直接插入

```
void InsertSort(Sqlist &L){
    //对顺序表做直接插入排序
    for(i=2;i<=L.length;i++){
        if(LT(L.r[i].key,L.r[i-1].key)){ //"<",需将L.r[i]插入有序子表
            L.r[0]=L.r[i];                //复制为哨兵
            L.r[i]=L.r[i-1];
            for(j=i-2;LT(L.r[0].key,L.r[j].key);--j)
                L.r[j+1]=L.r[j];          //记录后移
            L.r[j+1]=L.r[0];              //插入正确位置
            printf("vine");
        }
    }
}//InsertSort
```

10.2.2 其他插入

折半插入

```
void BInsertSort(Sqlist &L){
    //对顺序表做折半插入排序
    for(i=2;i<=L.length;i++){
        L.r[0]=L.r[i];                  //将L.r[i]暂存到L.r[0]
        low=1,high=i-1;
        while(low<=high){               //在L.r[low...high]中折半查找有序插入位置
            m=(low+high)/2;             //折半
            if(LT(L.r[0].key,L.r[m].key)) high=m-1; //插入点在高
            else low =m+1;                          //插入点在低
        }
        for(j=i-1;j>=high+1;--j) L.r[j+1]=L.r[j];   //记录后移
        L.r[high+1]=L.r[0];                         //插入
    }
}//BInsertSort
```

二路插入

表插入

希尔排序

```
void ShellInsort(Sqlist &L, int dk){
    //对顺序表做希尔插入排序
    //1.位置增量dk
    //2.L.r[0]是暂存不是哨兵, j<=0时插入位置已找到
    for(i=dk+1;i<=L.length;i++){
        if(LT(L.r[i].key,L.r[i-dk].key)){ //"<",需将L.r[i]插入有序子表
            L.r[0]=L.r[i];                  //暂存L.r[0]
            for(j=i-dk;j>0 && LT(L.r[0].key,L.r[j].key);j-=dk)
                L.r[j+dk]=L.r[j];           //记录后移,查找插入位置
            L.r[j+dk]=L.r[0];               //插入正确位置
        }
    }
}//ShellInsort

void ShellSort(Sqlist &L, int dk[],int t){
    //按增量序列 dk[0...t-1]对顺序表做希尔插入排序
    for(k=0;k<t;k++){
        ShellInsort(L,dk[k]);       //一趟增量为dk[k]的插入排序
    }
}//ShellSort
```

10.3 快速

10.3.1 起泡排序

```
void BubbleSort(int a[],int n){
    for(i=n-1,change=TRUE;i>=1 && change;--i){
        change=FALSE;
        for(j=0;j<i,j++){
            if(a[j]>a[i]){SWAP(a[j],a[i]);change=TRUE;}
        }
    }
}
```

10.3.2 快速排序

```
void Partition(Sqlist &L,int low,int high){
    //交换顺序表L中子序列L.r[low...high]的记录, 枢轴记录到位, 返回位置此时
    //在枢轴前(后)记录不大于(不小于)它
    L.r[0]=L.r[low];            //第一个记录做枢轴
    pivotkey=L.r[low].key;      //枢轴记录关键字
    while(low<high){            //从表的两端交替向中间扫描
        while(low<high && L.r[high].key>=pivotkey) --high;
        L.r[low]=L.r[high];     //小的左移
        while(low<high && L.r[low]<=pivotkey) ++low;
        L.r[high]=L.r[low];     //大的右移
    }
    L.r[low]=L.r[0];            //枢轴到位
    return low;                 //返回枢轴位置
}

void QSort(Sqlist &L,int low,int high){
    //对顺序表L中子序列L.r[low...high]作快速排序
    if(low<high){                           //长度大于1
        pivotkey=Partition(L,low,high);     //将L.r[low...high]一分为二
        QSort(L,low,pivotkey-1);            //低子表递归
        QSort(L,pivotkey+1,high);           //高子表递归
    }
}

void QuickSort(Sqlist &L){
    //对顺序表L作快速排序
    QSort(L,1,L.length)
}
```

10.4 选择排序

10.4.1 简单选择排序

```
void SelectSort(Sqlist &L ){
    for(i=1;i<L.length;i++){        //选择第i小的记录，并交换到位
        j=SelectMinKey(L,i);        //在L.r[i...L.length]中选择key最小的记录
        if(i!=j) SWAP(L.r[i],L.r[j]) //与第i个记录交换
    }
}
```

10.4.2 树形排序

10.4.3 堆排序

```
void HeapAdjust(HeapType &H,int s ,int m ){
    //已知H.r[s...m]中记录除H.r[s]外均满足堆的定义
    //调整H.r[s]使得H.r[s...m]称为大顶堆
    rc=H.r[s];
    for(j=2*s;j<=m;j*=2){    //沿key较大的孩子节点向下筛选
        if(j<m && LT(H.r[j].key,H.r[j+1].key)) ++j; //j为key较大的记录的下标
        if(!LT(rc.key,H.r[j].key)) break;           //rc插入s
        H.r[s]=H.r[j];s=j;                           //插入
    }
    H.r[s]=rc;
}

void HeapSort(HeapType &H ){
    for(i=H.length/2;;i>0;--i)            //把H.r[1...H.length]建成大顶堆
        HeapAdjust(H,i,H.length);
    for(i=H.length;i>1;--i){               //堆顶记录和未经排序子序列H.r[1...i]中最后一个记录交换
        SWAP(H.r[1],H.r[i]);               //将[1...i-1]建成大顶堆
        HeapAdjust(H,1,i-1);
    }
}
```

10.5 归并排序

```
void Merge(RcdType SR[],RcdType & TR[],int i,int m,int n ){
    //将有序的SR[i...m],SR[m+1,n]归并为有序的TR[i...n]
    for(j=m+1,k=i;i<=m && j<=n;++k){  //将SR中记录从小到大并入TR
        if(LQ(SR[i].key,SR[j].key))  TR[k]=SR[i++];
        else TR[k]=SR[j++];
    }
    if(i<=m) TR[K...n]=SR[i...m];       //将剩余的SR[i...m]复制到TR[K...n]
    if(j<n)  TR[k...n]=SR[j...n];       //将剩余的SR[j...n]复制到TR[K...n]
}

void Msort(RcdType SR[],RcdType & TR1[],int s,int t){
    //将SR[s...t]归并为TR1[s...t]
    if(s==t) TR1[s]=SR[s];
    else{
        m=(s+t)/2;            //将SR[s...t]平分为SR[s...m], SR[m+1...t]
        Msort(SR,TR2,s,m);    //递归SR[s...m] 为有序 TR2[s...m]
        Msort(SR,TR2,m+1,t);  //递归SR[m+1...t]为有序 TR2[m+1...t]
        Merge[TR2,TR1,s,m.t]; //将TR2[s...m],TR2[m+1...t] 归并到 TR1[s...t]
    }
}

void MergeSort(Sqlist &L){
    Msort(L.r,L.r,1,L.length);
}
```

10.6 基数排序

10.6.1 多关键字的排序

10.6.2 链式基数排序

```
#define MAX_NUM_OF_KEY 8
#define RADIX 10
#define MAX_SPACE 10000
typedef struct{
    KeysType Keys[MAX_NUM_OF_KEY];
    InfoType otheritems;
    int next;
}SLCell;

typedef struct{
    SLCell r[MAX_SPACE];
    int keynum;
    int recnum;
}SLList;

typedef int ArrType[RADIX];


void Distribute(SLCell &r,int i,ArrType &f,ArrType &e){
    //静态链表L的r域中记录已按keys[0]...keys[i-1]有序
    //本算法按第i个关键字keys[i]建立RADIX个子表，使得同一子表中记录的keys[i]相同
    //f[0...RADIX-1],e[0...RADIX-1]分别指向各子表中第一个和最后一个记录
    for(j=0;j<Radix;++j) f[j]=0 //各子表初始化为空
    for(p=r[0].next;p;p=r[p].next){
        j=ord(r.[p].keys[i]);   //ord将记录中第i个关键字映射到[0...RADIX-1]
        if(!f[j]) f[j]=p;
        else r[e[j]].next=p;
        e[j]=p;                 //将p指向的结点插入第j个子表中
    }
}//Distribute

void Collect(SLCell &r,int i,ArrType f,ArrType e){
    //本算法按keys[i]从小至大地将f[0...RADIX-1]所指个子表依次链接成一个链表
    //e[0...RADIX-1]为各子表的尾指针
    for(j=0;!f[j];j=succ(j));    //找到第一个非空子表，succ为求后继函数
    r[0].next=f[j];t=e[j];       //r[0].next指向第一个非空子表中第一个节点
    while(j<RADIX){
        for(j=succ(j);j<RADIX-1 && !f[j];j=succ(j));  //找到下一个非空子表
        if(f[j] {r[t].next=f[j];t=e[j];})             //链接两个非空子表
    }
    r[t].next=0;                                      //t指向最后一个非空子表中的最后一个节点
}//Collect

void RadixSort(SLList &L){
    //L是采用静态链表表示的顺序表
    //对L作基数排序，使得L成为按关键字自小到大的有序静态链表，L.r[0]为头节点
    for(i=0;i<L.recnum;++i) L.r[i].next=i+1;
    L.r[L.recnum].next=0;           //将改造为静态链表
    for(i=0;i<L.keynum;++i){        //按最低位优先依次对各关键字进行分配和收集
        Distribute(L.r,i,f,e);      //第i趟分配
        Collect(L.r,i,f,e);         //第i趟收集
    }
}//RadixSort
```

10.7 各内部排序方法的比较讨论

排序方法	平均时间	最坏情况	辅助存储
简单排序	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(1)$
快速排序	$O(nlogn)$	$O(n^2)$	$O(logn)$
堆排序	$O(nlogn)$	$O(nlogn)$	$O(1)$
归并排序	$O(nlogn)$	$O(nlogn)$	$O(n)$
基数排序	$O(d(n+rd))$	$O(d(n+rd))$	$O(rd)$

简单排序包括除希尔排序之外所有插入排序，起泡排序，简单选择排序，直接插入排序

地址向量重排算法

```
void Rearrange(Sqlist &L,int adr[] ){
    //adr给出顺序表的有序次序， 即L.r[adr[i]]是第i小记录
    //本算法按adr重排L.r使其有序
    for(i=1;i<L.length;++i){
        if(adr[i]!=i){
            j=i;L.r[0]=L.r[i];            //暂存记录
            while(adr[j]!=i){             //调整L.r[adr[j]]的记录到位直到adr[j]=i为止
                k=adr[j];L.r[j]=L.r[k];
                adr[j]=j;j=k;
            }
            L.r[j]=L.r[0];adr[j]=j;       //记录按序到位
        }
    }
}
```

11　外部排序

12 文件