This is Start

Vine

2022 年 7 月 2 日

目录

12 无穷级数

12.1 常数项级数的概念和性质

12.1.1 数项级数的概念

数列 $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \cdots + \mu_n, \ldots$，表达式 $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \cdots + \mu_n + \ldots$ 称为 (常数项) 无穷级数, 简称 **(常数项) 级数**, 记为 $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \cdots + \mu_n + \ldots$, 第 n 项 μ_n 叫做级数的一般项

$S_n = \sum_{i=1}^{n} \mu_i = \mu_1, \mu_2, \mu_3, \cdots + \mu_n$ 级数部分和

新数列 $\{S_n\}$ $\quad S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$

无穷级数 $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i$，无穷级数的部分和数列 $\{S_n\}$，$\begin{array}{l} \lim_{n\to\infty} S_n = s \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \text{收敛}, s = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \cdots + \mu_n + \ldots \\ \lim_{n\to\infty} S_n = \infty(\text{不存在}) \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \text{发散} \end{array}$

$r_n = s - S_n = S_{n+1} + S_{n+2} + \ldots$ 余项

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} aq^i = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^i + \ldots \text{ 等比级数}, \begin{array}{l} S_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a-aq^n}{1-q} \text{部分和数列} \\ |q| \geqslant 1, \text{发散}, |q| \leqslant 1, \text{收敛} \end{array}$$

$$S_n = S_1 + (S_2 - S_1) + \cdots + (S_n - S_{n-1}) + ... = S_1 + \sum_{i=2}^{\infty} = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i$$

12.1.2 收敛级数的基本性质

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 收敛于 s, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} k\mu_n$ 收敛于 s, 和为 ks, 数乘同敛散

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于 s 与 σ, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n \pm v_n)$ 也收敛, 和为 $s \pm \sigma$, 收敛和收敛

级数中去掉，加上，改变有限项，不会改变级数的收敛性

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 收敛于 s，任意项加括号组成的级数仍收敛，和为 s, 括号发散源发散

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 收敛于 s(必要条件), 一般项趋近 0，即 $\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0$

调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散

12.1.3 柯西审敛原理

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N > 0, when \quad n > N, \forall p \in Z^+, |\mu_{n+1} + \mu_{n+2} + \cdots + \mu_{n+p}| < \varepsilon$

12.2 常数项级数审敛法

12.2.1 正项级数及其审敛法

各项是正数或零的级数**正项级数**

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 收敛于 s $\Leftrightarrow$ 部分和数列 $\{S_n\}$ 有界

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n, \mu_n \leqslant v_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 收敛；$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 发散,$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散

正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$, 存在正整数 N, $\quad \mu_n \leqslant kv_n\,(n>N,k>0),\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n$ 收敛； $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n$ 发散,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散

正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n,\begin{array}{ll} if & \lim_{n\to\infty}\frac{\mu_n}{v_n}=l,\{0\leqslant l<\infty\},\sum_{n=1}^{\infty}v_n\text{收敛, 则}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\text{收敛} \\ if & \lim_{n\to\infty}\frac{\mu_n}{v_n}=l,\{l>0,+\infty\},\sum_{n=1}^{\infty}v_n\text{发散, 则, }\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\text{发散}\end{array}$

正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n,\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mu_{n+1}}{\mu_n}=\rho,\begin{array}{ll} if & \rho>1\ (=\infty)\text{ 发散 (不可能收敛)} \\ if & \rho<1\text{收敛} \\ if & \rho=1\text{可能收敛}\end{array}$

$when \quad \rho<1,\forall\rho+\varepsilon=r<1,\exists m,when \quad n\geqslant m,\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}=\rho<\rho+\varepsilon=r<1,\mu_{n+1}<r\mu_n,\mu_{n+k}<r^k\mu_n$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}r^k\mu_n$ 收敛，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\mu_{n+k}$ 收敛

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_{n+k}+\sum\limits_{n=1}^{k}\mu_n$ 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n,\sum_{n=1}^{\infty}\mu_{n+k}$ 同敛散，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n$ 收敛

正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n,\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\mu_n}=\rho,\begin{array}{ll} if & \rho>1\ (=\infty)\text{ 发散 (不可能收敛)} \\ if & \rho<1\text{收敛} \\ if & \rho=1\text{可能收敛}\end{array}$

$when \quad \rho<1,\mu_n<r^n\,(r<1)$,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}r^n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n$ 收敛

正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n,\begin{array}{ll} if & \lim_{n\to\infty}n^p\mu_n=\frac{\mu_n}{\frac{1}{n^p}}=l,\{0\leqslant l<\infty,p>1\},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\text{收敛, 则级数}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\text{收敛} \\ if & \lim_{n\to\infty}n\mu_n=\frac{\mu_n}{\frac{1}{n}}=l,\{l>0,\infty\},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\text{发散, 则级数}\sum_{n=1}^{\infty}\text{ 发散}\mu_n\end{array}$

12.2.2 交错级数审敛法

各项正负交错，可以写成 $\begin{array}{l}\mu_1-\mu_2+\mu_3-\mu_4+\dots, \\ -\mu_1+\mu_2-\mu_3+\mu_4-\dots,\end{array}$ 其中 $\mu_n>0$

交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n$ 满足条件: $\begin{array}{ll}(1) & \mu_n\geqslant\mu_{n+1}\,(n=1,2,3,\dots) \\ (2) & \lim_{n\to\infty}\mu_n=0\end{array}$,那么级数收敛,其和 $s\leqslant\mu_1$, 余项绝对值 $|r_n|\leqslant\mu_{n+1}$

12.2.3 绝对收敛与条件收敛

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n,\begin{array}{l}\text{正项级数}\sum_{n=1}^{\infty}|\mu_n|\text{ 收敛, 则级数}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\text{绝对收敛} \\ \text{正项级数}\sum_{n=1}^{\infty}|\mu_n|\text{ 发散,, 级数}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\text{收敛, 则级数}\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\text{条件收敛}\end{array}$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n$绝对收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n$必定收敛 $\quad v_n=\frac{1}{2}(\mu_n+|\mu_n|)$

12.2.4 绝对收敛级数的性质

绝对收敛级数经改变项位置后构成的级数也收敛，且与原级数有相同的和 $S_n{}^*\leqslant S_m\leqslant s,\mu_n=2v_n-|\mu_n|$

级数 $\sum\mu_n,\sum v_n$ 绝对收敛，和分别为 s,σ, 所有项的可能乘积 μ_iv_i

$$\begin{array}{cccc}\mu_1v_1 & \mu_1v_2 & \mu_1v_3 & \cdots \\ \mu_2v_1 & \mu_2v_2 & \mu_2v_3 & \cdots \\ \mu_3v_1 & \mu_3v_2 & \mu_3v_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{array} \qquad \begin{array}{cccc}\mu_1v_1 & \mu_1v_2 & \mu_1v_3 & \cdots \\ \mu_2v_1 & \mu_2v_2 & \mu_2v_3 & \cdots \\ \mu_3v_1 & \mu_3v_2 & \mu_3v_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{array}$$

柯西乘积 (级数) $\mu_1v_1+(\mu_1v_2+\mu_2v_1)+\cdots+(\mu_1v_n+\mu_2v_{n-1}+\cdots+\mu_nv_1)+\dots$ 绝对收敛，和为 $s\sigma$

$\mu_1v_1+(\mu_1v_2+\mu_2v_2+\mu_2v_1)+(\mu_1v_3+\mu_2v_3+\mu_3v_3+\mu_3v_2+\mu_3v_1)+\cdots=(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n)\cdot(v_1+v_2+\cdots+v_n)$

12.3 幂级数

12.3.1 函数项级数的概念

区间 I 上函数列 $\mu_1(x), \mu_2(x), \mu_3(x), \ldots, \mu_n(x), \ldots,$

表达式 $\mu_1(x)+\mu_2(x)+\mu_3(x)+\cdots+\mu_n(x)+\ldots$, 区间 I 上的 (函数项) 无穷级数，(函数项) 级数

对于每个确定值 $x_0 \in I, \mu_1(x_0)+\mu_2(x_0)+\mu_3(x_0)+\cdots+\mu_n(x_0)+\ldots$ 常数项级数，收敛点 x_0

$S(x)=\mu_1(x)+\mu_2(x)+\mu_3(x)+\cdots+\mu_n(x)+\ldots$, 和函数

部分和 $S_n(x), \lim_{n\to\infty} S_n(x)=S(x)$, 余项 $r_n(x)=S(x)-S_n(x), \lim_{n\to\infty} r_n(x)=0$

12.3.2 幂级数及其收敛性

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \text{ 幂级数}$$

$$\text{幂级数} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \begin{array}{l} x=x_0, \text{幂级数收敛}, if \quad |x|<|x_0|, \text{幂级数绝对收敛} \\ x=x_0, \text{幂级数发散}, if \quad |x|>|x_0|, \text{幂级数发散} \end{array}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0 \Rightarrow |a_n x_0^n| \leqslant M \Rightarrow |a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

$$\text{幂级数} \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{不是一点收敛，也不是整个数轴收敛}, \exists R>0, \begin{array}{l} |x|<R, \text{幂级数绝对收敛} \\ |x|>R, \text{幂级数发散} \\ |x|=\pm R, \text{幂级数可能收敛} \end{array}$$

$$\text{幂级数} \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho, \text{收敛半径} R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & \rho \neq 0 \\ +\infty, & \rho = 0 \\ 0, & \rho = +\infty \end{cases}$$

$$\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x| = \rho|x| < 1$$

12.3.3 幂级数的运算

$$\text{幂级数} \begin{array}{l} a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \\ b_0+a_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots \end{array}$$

加减 $(a_0\pm b_0)+(a_1\pm b_1)x+(a_2\pm b_2)x^2+\cdots+(a_n\pm b_n)x^n+\cdots$ 区间取小

乘 $(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots)\cdot(b_0+a_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots)$

$a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\cdots+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)x^n+\cdots$ 区间取小

幂级数的柯西乘积

除 $\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots}{b_0+a_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots} = c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+\cdots$ 区间取小

$$\begin{array}{l} a_0=c_0b_0 \\ a_1=c_0b_1+c_1b_0 \\ a_2=c_0b_2+c_1b_1+c_2b_0 \\ \cdots \end{array} \quad \text{解得 } c_0, c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$$

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S_n(x)$ 在收敛域 I 上连续

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S_n(x)$ 在收敛域 I 上可积，所得收敛同半径

$$\int_0^x S(t)\,dt = \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right] dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \,(x\in I)$$

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S_n(x)$ 在收敛域 I 上可导，所得收敛同半径

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \,(x\in I)$$

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S_n(x)$ 在收敛域 I 上具有任意阶导数

12.4 函数展开成幂级数

$f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{\left(n\right)}\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)^n,x\in U\left(x_0\right)$ 泰勒级数（极限），泰勒展开式

函数 $f\left(x\right)$ 在 $U\left(x_0\right)$ 内具有各阶导数，$f\left(x\right)$ 能展开成泰勒级数 $\Leftrightarrow$ 余项满足 $\sum_{n=0}^{\infty}R_n\left(x\right)=0$

$f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{\left(n\right)}\left(0\right)\left(x-0\right)^n,x\in U\left(0\right)$ 麦克劳林级数（极限），麦克劳林展开式

$\sin^{\left(n\right)}x=\sin\left(x+n\pi\right)$

$$\begin{cases} e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n,\left(-\infty<x<\infty\right) \\ \sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{\left(2n+1\right)!}x^{2n+1},\left(-\infty<x<\infty\right) \\ \frac{1}{x+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n x^n,\left(-1<x<1\right) \end{cases}$$

已知展开，运算得未知

$\left(1+x\right)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots,\left(-1<x<1\right)$ 二项展开式

$\left(1+x\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\cdot-\frac{1}{2}}{2!}x^2+\cdots+\frac{\frac{1}{2}\cdot-\frac{1}{2}\cdots\frac{3-2n}{2}}{n!}x^n+\cdots=\frac{\prod(3-2n)}{(2n)!!}x^n,\left(-1<x<1\right)$ 二项展开式

$\left(1+x\right)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{-\frac{1}{2}\cdot-\frac{3}{2}}{2!}x^2+\cdots+\frac{-\frac{1}{2}\cdot-\frac{1}{2}\cdots\frac{1-2n}{2}}{n!}x^n+\cdots=\frac{\prod(1-2n)}{(2n)!!}x^n,\left(-1<x<1\right)$ 二项展开式

证明：

$$\begin{aligned}
&F\left(x\right)=\left(1+x\right)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots \\
&F^{'}\left(x\right)=m\left[1+\frac{m-1}{1}x+\cdots+\frac{(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}\ldots\right] \\
&xF^{'}\left(x\right)=m\left[x+\frac{m-1}{1}x^2+\cdots+\frac{(m-1)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}x^n\ldots\right] \\
&\left(1+x\right)F^{'}\left(x\right)=m\left[1+mx+\frac{*(m-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{*}{(n-2)!}x^{n-1}+\frac{*1(m-n)}{(n)!}x^n+\frac{*1}{(n-1)!}x^n+\ldots\right] \\
&\left(1+x\right)F^{'}\left(x\right)=m\left[1+mx+\frac{m*}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{m*1}{n!}x^n+\ldots\right]=mF\left(x\right) \\
&\varphi\left(x\right)=\frac{F(x)}{(1+x)^m},\varphi\left(0\right)=F\left(0\right)=1 \\
&\varphi^{'}\left(x\right)=\frac{F^{'}(x)(1+x)^m-m(1+x)^{m-1}F(x)}{(1+x)^{2m}}=\frac{(1+x)^{m-1}\left[(1+x)F^{'}(x)-mF(x)\right]}{(1+x)^{2m}}=0 \\
&\varphi\left(x\right)=1,F\left(x\right)=\left(1+x\right)^m
\end{aligned}$$

12.5 函数的幂级数展开应用

12.5.1 近似计算

12.5.2 微分方程的幂级数解法

$\frac{dy}{dx}=f\left(x,y\right),y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$

$y^{''}+P\left(x\right)y^{'}+Q\left(x\right)y=0,P,Q$定义域内可展开为幂级数，方程解形如$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$

12.5.3 欧拉公式

$u_1+u_2+\cdots+u_n+\ldots$ (1) 實部組成的級數收斂于 u

$v_1+v_2+\cdots+v_n+\ldots$ (2) □部組成的級數收斂于 v

$\left(u_1+v_1 i\right)+\left(u_2+v_2 i\right)+\cdots+\left(u_n+v_n i\right)+\ldots$ (3) 復數項級數收斂於 $u+vi$

$\sqrt{u_1^2+v_1^2}+\sqrt{u_2^2+v_2^2}+\cdots+\sqrt{u_n^2+v_n^2}+\cdots$ (4) (3) 各項的模組成的級數收斂,$\left(3\right),\left(2\right),\left(1\right)$ □對收斂

$e^z=1+z+\frac{1}{2!}z^2+\cdots+\frac{1}{n!}z^n+\ldots,z=x+yi$ 復變量指數函數

$$\begin{aligned}
&e^{yi}=1+\left(yi\right)+\frac{1}{2!}\left(yi\right)^2+\cdots+\frac{1}{n!}\left(yi\right)^n+\ldots \\
&=\left(1+\frac{1}{2!}\left(yi\right)^2+\cdots+\frac{1}{(2n)!}\left(yi\right)^{2n}\right)+\left(\left(yi\right)+\frac{1}{3!}\left(yi\right)^3+\cdots+\frac{1}{(2n-1)!}\left(yi\right)^{2n-1}\right)+\ldots \\
&=\left(1-\frac{1}{2!}y^2+\cdots+\left(-1\right)^n\frac{1}{(2n)!}y^{2n}\right)+i\left(y+\frac{1}{3!}\left(yi\right)^2+\cdots+\frac{1}{(2n-1)!}y^{2n-1}i^{2n-2}\right)+\ldots \\
&=\left(1-\frac{1}{2!}y^2+\cdots+\left(-1\right)^n\frac{1}{(2n)!}y^{2n}\right)+i\left(y+\frac{1}{3!}\left(yi\right)^2+\cdots+\left(-1\right)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}y^{2n-1}\right)+\ldots \\
&=\left(1-\frac{1}{2!}y^2+\cdots+\left(-1\right)^n\frac{1}{(2n)!}y^{2n}\right)+i\left(y+\frac{1}{3!}\left(yi\right)^2+\cdots+\left(-1\right)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}y^{2n-1}+\left(-1\right)^n\frac{1}{(2n+1)!}y^{2n+1}\right)+\ldots \\
&=\cos y+i\sin y \quad \text{欧拉公式}
\end{aligned}$$

$z=x+yi=\rho\cos\theta+i\rho\sin\theta=\rho\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)=\rho e^{\theta i}$

$e^{x+yi}=e^x\left(\cos y+i\sin y\right)$

$\begin{cases} \cos y = \frac{e^{yi}+e^{-yi}}{2} \\ \sin y = \frac{e^{yi}-e^{-yi}}{2i} \end{cases}$ 欧拉公式

12.6 函数项级数的一致收敛性及一致收敛函数的基本性质

12.6.1 函数项级数的一致收敛性

$x + (-x + x^2) + (-x^2 + x^3) + \cdots + (-x^{n-1} + x^n) + \ldots \quad s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \begin{cases} 0, 0 \leqslant x < 1 \\ 1, x = 1 \end{cases}$

函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 收敛于 $s(x) \Leftrightarrow \forall x_0 \in I$, 数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛于 $s(x_0)$

$\forall \varepsilon, x_0 \in I, \exists N(\varepsilon, x_0), when \quad n > N, |r_n(x_0)| = \left|\sum_{i=n+1}^{\infty} u_i(x_0)\right| < \varepsilon$ 函数项级数收敛

$\forall \varepsilon, x_0 \in I, \exists N(\varepsilon), when \quad n > N, |r_n(x_0)| = \left|\sum_{i=n+1}^{\infty} u_i(x_0)\right| < \varepsilon$ 函数项级数一致收敛

函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 满足 $\begin{array}{l} |u_n(x)| \leqslant a_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \\ \text{正项级数} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{收敛} \end{array}$ 函数项级数在区间 I 一致收敛

12.6.2 一致收敛级数的基本性质

在区间 I，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 一致收敛于 $s(x)$, 各项 $u_n(x)$ 连续，$s(x)$ 在区间 I 连续

在区间 I，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 一致收敛于 $s(x)$, 各项 $u_n(x)$ 连续，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 可逐项积分

$\int_{x_0}^{x} s(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} u_1(x)\,dx + \int_{x_0}^{x} u_2(x)\,dx + \cdots + \int_{x_0}^{x} u_n(x)\,dx + \ldots (x_0 < x \in I)$ 右端级数在区间 I 一致收敛

在区间 I，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 收敛于 $s(x)$, 各项 $u_n(x)$ 具有连续导数 $u_n^{'}(x)$, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^{'}(x)$ 一致收敛，则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 一致收敛，且可逐项求导

$s'(x) = u_1^{'}(x) + u_2^{'}(x) + \cdots + u_n^{'}(x) + \ldots$

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 R>0, 在闭区间 $I \in (-R, R)$，幂级数一致收敛

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 R>0, 在闭区间 $I \in (-R, R)$ 其和函数可导，级数可逐项求导

$s^{'}(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^{'} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ 右端级数与原级数同收敛半径

12.7 傅里叶级数

三角函数组成的函数项级数 (三角级数)

12.7.1 三角级数　三角函数的正交性

$y = A\sin(\omega t + \varphi) \quad \begin{array}{l} A\text{振幅} \\ \omega\text{角频率} \\ \varphi\text{初相} \end{array}$

$$\begin{aligned} f(t) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot [\sin(n\omega t)\cos(\varphi_n) + \cos(n\omega t)\sin(\varphi_n)] \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cdot \cos(\varphi_n)\sin(n\omega t) + A_n \cdot \sin(\varphi_n)\cos(n\omega t)] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin(n\omega t) + b_n \cos(n\omega t)) \\ &\xlongequal{\omega = \frac{\pi}{l}} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \sin\left(n\tfrac{\pi}{l}t\right) + b_n \cos\left(n\tfrac{\pi}{l}t\right)\right], (T = 2l) \\ &\xlongequal{\omega t = x} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx)], (T = 2\pi) \end{aligned}$$

谐波分析
A_0直流分量
$A_1\sin(\omega t + \varphi_1)$一次谐波 (基波)

三角函数系 $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ 任意两函数乘积在区间 $[-\pi, \pi]$ 上积分为零

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx dx = 0 \quad (k, n = 1, 2, 3, \cdots)$

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx = 0 \quad (k, n = 1, 2, 3, \cdots, k \neq n)$

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx dx = 0 \quad (k, n = 1, 2, 3, \cdots, k \neq n)$

$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = \frac{\pi}{2}, \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)^2 dx = \pi, \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)^2 dx = \pi$

12.7.2 函数展开成傅里叶级数

$$
\begin{aligned}
&f(x) = \frac{a_0}{2} + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right]\\
&\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \quad = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx + \int_{-\pi}^{\pi}\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right]dx\\
&\qquad\qquad\quad = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\,dx\right]\\
&\qquad\qquad\quad = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx\\
&\qquad\qquad\quad = \pi a_0\\
&f(x)\sin(kx) = \frac{a_0}{2}\sin(kx) + \sin(kx)\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right]\\
&\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx \quad = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\sin(kx)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right]dx\\
&\qquad\qquad\quad = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\sin(kx)\,dx + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cos(nx)\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\sin(nx)\,dx\right]\\
&\qquad\qquad\quad = b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\sin(kx)\,dx\\
&\qquad\qquad\quad = \pi b_k\\
&f(x)\cos(kx) = \frac{a_0}{2}\cos(kx) + \cos(kx)\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right]\\
&\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx \quad = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos(kx)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right]dx\\
&\qquad\qquad\quad = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos(kx)\,dx + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(nx)\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\sin(nx)\,dx\right]\\
&\qquad\qquad\quad = a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(kx)\,dx\\
&\qquad\qquad\quad = \pi a_k
\end{aligned}
$$

$$
\text{傅里叶系数}\quad
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx\\
a_k &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx\\
b_k &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx
\end{aligned}
$$

$f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，满足
(1) 一个周期内连续，或只有有限个第一类间断点
(2) 一个周期内至多只有有限个极值点