

This is Start

Vine

2022 年 7 月 2 日

目录

1	函數與極限	8
1.1	映射與函數	8
1.1.1	映射	8
1.1.2	函數	8
1.2	數列的極限	9
1.2.1	定义	9
1.2.2	收敛数列的性质	9
1.3	函數的極限	9
1.3.1	定义	9
1.3.2	性质	9
1.4	無窮小與無窮大	9
1.4.1	无穷小	9
1.4.2	无穷大	10
1.5	極限運算法則	10
1.5.1	兩個無窮小的和	10
1.5.2	有界函數與無窮小的乘積	10
1.5.3	$\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$	10
1.5.4	數列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$	10
1.5.5	$\psi(x) \geq \Psi(x), \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(x) = A, \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(x) = B \Rightarrow A \geq B$	10
1.5.6	複合函數極限	10
1.6	极限存在准则 两个重要极限	10
1.7	無窮小的比較	11
1.8	函數的連續性與間斷點	11
1.8.1	函數的連續性	11
1.8.2	函數的間斷點	11
1.9	連續函數的運算與初等函數的連續性	11
1.9.1	連續函數的和, 差, 積, 商的連續性	11
1.9.2	反函數與複合函數的連續性	11
1.9.3	初等函數的連續性	12
1.10	閉區間上連續函數的性質	12
1.10.1	最值定理	12
1.10.2	零點定理與介值定理	12
1.10.3	一致连续性	12
2	導數與微分	13
2.1	導數概念	13
2.1.1	引例	13
2.1.2	導數的定義	13
2.1.3	導數的幾何意義	13
2.1.4	可導與連續性關係	13
2.2	函數求導法則	13
2.2.1	函數和差積商的求導法則	13
2.2.2	反函數求導法則	14
2.2.3	複合函數求導法則	14

2.2.4	基本求導法則與導數公式	14
2.3	高階導數	14
2.4	隱函數, 參數方程確定的函數的導數 相關變化率	14
2.5	函數的微分	14
3	微分中值定理與導數的應用	16
3.1	微分中值定理	16
3.2	諾必達法則	16
3.3	泰勒公式	16
3.4	函数单调性与曲线凹凸性	16
3.4.1	函数单调性的判定法	16
3.4.2	曲线的凹凸性与拐点	16
3.5	函数的极值与最大值最小值	17
3.6	函数图像的绘制	17
3.7	曲率	17
3.8	方程近似解	18
4	不定积分	19
4.1	不定积分的概念与性质	19
4.2	积分换元法	19
4.3	分部积分法	19
4.4	有理函数的积分	19
4.5	积分表的使用	19
5	定积分	20
5.1	定积分的概念与性质	20
5.1.1	定积分的概念与性质	20
5.1.2	定积分的定义	20
5.1.3	定积分的近似计算	20
5.1.4	定积分的性质	20
5.2	微积分基本公式	20
5.2.1	变速直线运动中位置函数与速度函数	20
5.2.2	积分上限的函数及其导数	21
5.2.3	牛顿-莱布尼兹	21
5.3	定积分的换元法和分部积分法	21
5.3.1	定积分的换元法	21
5.3.2	定积分的分布积分法	21
5.4	反常积分	21
5.4.1	无穷限的反常积分	21
5.4.2	无界函数的反常积分	21
5.5	反常积分的审敛法 Γ 函数	21
5.5.1	无穷限反常积分的审敛法	21
5.5.2	无界函数反常积分的审敛法	22
5.5.3	Γ	22

6	定积分的应用	23
6.1	定积分的元素法	23
6.2	定积分在几何学上的应用	23
6.2.1	平面图形	23
6.2.2	体积	23
6.2.3	平面曲线的弧长	23
6.3	定积分在物理学上的应用	23
6.3.1	变力沿直线做功	23
6.3.2	水压力	23
6.3.3	引力	23
7	微分方程	24
7.1	基本概念	24
7.2	可分离变量的微分方程	24
7.3	齐次方程	24
7.4	一阶线性微分方程	24
7.5	可降阶的高阶微分方程	24
7.6	高阶性微分方程	24
7.7	常系数齐次线性微分方程	25
7.8	常系数非齐次线性微分方程	25
7.9	欧拉方程	26
7.10	常系数线性微分方程组	26
8	向量代数与空间解析几何	1
8.1	向量及其线性运算	1
8.1.1	向量的概念	1
8.1.2	向量的运算	1
8.2	数量积 向量积 混合积	2
8.2.1	两向量的数量积	2
8.2.2	两向量的向量积	2
8.2.3	向量的混合积	2
8.3	平面及其方程	2
8.3.1	曲面方程与空间曲线方程的概念	2
8.3.2	平面的点法式方程	2
8.3.3	平面的一般方程	3
8.3.4	平面的夹角	3
8.4	空间直线及其方程	3
8.4.1	空间直线的一般方程	3
8.4.2	空间直线的对称式方程与参数方程	3
8.4.3	两直线夹角	3
8.4.4	直线与平面夹角	3
8.4.5	例	3
8.5	曲面及其方程	4
8.5.1	曲面研究的基本问题	4
8.5.2	旋转曲面	4
8.5.3	柱面	4
8.5.4	二次曲面九	4

8.6	空间曲线及其方程	4
8.6.1	空间曲线一般方程	4
8.6.2	空间曲线参数方程	4
8.6.3	空间曲线在坐标面投影	5
9	多元函数微分及其应用	6
9.1	多元函数的基本概念	6
9.1.1	平面點集 n 維空間	6
9.1.2	多元函数的概念	6
9.1.3	多元函数的极限	6
9.1.4	多元函数的连续性	7
9.2	偏導數	7
9.2.1	偏導數的定義及其計算法	7
9.2.2	高階偏導數	7
9.3	全微分	7
9.3.1	全微分定義	7
9.3.2	全微分在近似計算中的應用	8
9.4	多元復合函数的求導法則	8
9.5	隱函数求導公式	9
9.5.1	一個方程	9
9.5.2	方程組的情形	9
9.6	多元函数微分学的几何应用	9
9.6.1	一元向量值函数及其导数	9
9.6.2	空间曲线的切线与法平面	10
9.6.3	曲面的切平面与法线	11
9.7	方向导数与梯度	11
9.7.1	方向导数	11
9.7.2	梯度	11
9.8	多元函数的极值及其求法	12
9.8.1	多元函数的极值及最大值最小值	12
9.8.2	条件极值 拉格朗日数乘法	12
9.8.3	二元函数的泰勒公式	12
9.8.4	极值充分证明	13
9.8.5	最小二乘法	13
10	重积分	14
10.1	二重积分的概念与性质	14
10.1.1	二重积分的概念	14
10.1.2	二重积分的性质	14
10.2	二重积分的计算法	14
10.2.1	直角坐标计算二重积分	14
10.2.2	极坐标计算二重积分	14
10.2.3	二重积分换元法	15
10.3	三重积分	15
10.3.1	三重积分的概念	15
10.3.2	三重积分的计算	15
10.4	重积分的应用	15

10.5 含参变量的积分	16
11 曲线积分与曲面积分	17
11.1 对弧长的曲线积分	17
11.1.1 对弧长的曲线积分的概念与性质	17
11.1.2 对弧长的曲线积分的计算法	17
11.2 对坐标的曲线积分	17
11.2.1 对坐标的曲线积分的概念与性质	17
11.2.2 对坐标的曲线积分的计算法	18
11.2.3 两类曲线积分的关系	18
11.3 格林公式及其应用	18
11.3.1 格林公式	18
11.3.2 平面上曲线积分与路径无关的条件	19
11.3.3 二元函数的全微分求积	19
11.3.4 曲线积分的基本定理	19
11.4 对面积的曲面积分	19
11.4.1 对面积的曲面积分的概念与性质	19
11.4.2 对面积的曲面积分的计算法	20
11.5 对坐标的曲面积分	20
11.5.1 对坐标的曲面积分的概念与性质	20
11.5.2 对坐标的曲面积分的计算法	20
11.5.3 两类曲面积分之间的关系	20
11.6 高斯公式 通量与散度	20
11.6.1 高斯公式	20
11.6.2 沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件	21
11.6.3 通量与散度	21
11.7 斯托克斯公式 * 环流量与旋度	22
11.7.1 斯托克斯公式	22
11.7.2 空间曲线积分与路径无关的条件	22
11.7.3 环流量与旋度	22
12 无穷级数	24
12.1 常数项级数的概念和性质	24
12.1.1 数项级数的概念	24
12.1.2 收敛级数的基本性质	24
12.1.3 柯西审敛原理	24
12.2 常数项级数审敛法	24
12.2.1 正项级数及其审敛法	24
12.2.2 交错级数审敛法	25
12.2.3 绝对收敛与条件收敛	25
12.2.4 绝对收敛级数的性质	25
12.3 幂级数	26
12.3.1 函数项级数的概念	26
12.3.2 幂级数及其收敛性	26
12.3.3 幂级数的运算	26
12.4 函数展开成幂级数	27
12.5 函数的幂级数展开应用	27

12.5.1	近似计算	27
12.5.2	微分方程的幂级数解法	27
12.5.3	欧拉公式	27
12.6	函数项级数的一致收敛性及一致收敛函数的基本性质	28
12.6.1	函数项级数的一致收敛性	28
12.6.2	一致收敛级数的基本性质	28
12.7	傅里叶级数	28
12.7.1	三角级数 三角函数的正交性	28
12.7.2	函数展开成傅里叶级数	29
12.7.3	正弦级数和余弦级数	29
12.7.4	一般周期函数的傅里叶级数	29
12.7.5	傅里叶级数的复数形式	30

1 函數與極限

1.1 映射與函數

1.1.1 映射

概念

非空集合 X, Y 法則 $f: X \rightarrow Y$

$$D_f = X \quad R_f = f(X) \subset Y$$

$R_f = Y$ 滿射 $x_1 \neq x_2, f(x_1) \neq f(x_2)$ 單射

算子 非空集, 數集 (泛函) 非空集, 非空集 (變 \mathbb{F}) 實數集/子集, 實數集 (函數)

逆映射與復合映射

$$g: R_f \rightarrow X$$

對每個 $y \in R_f$ $g(y) = x$ g 稱 \mathbb{F} f 的逆映射, 記作 f^{-1}

$$g: X \rightarrow Y_1, \quad f: Y_2 \rightarrow Z \quad Y_1 \subset Y_2$$

$$f \circ g: X \rightarrow Z \quad f \circ g(x) = g[f(x)] \quad x \in X$$

1.1.2 函數

概念

數集 $D \in R$, $f: D \rightarrow R$ \mathbb{F} 定義在 D 上的函數, 簡記 $y = f(x), x \in D$

$$\text{自然定義域} \quad y = |x| \quad y = \operatorname{sgn}(x) \quad y = [x] \quad y = f(x) \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 < x \leq 1 \\ 1+x, & 1 < x \end{cases}$$

特性

有界性 $f(x) \leq K_1 \quad f(x) \geq K_2 \quad |f(x)| \leq M$

單調性 $x_1 < x_2, \quad f(x_1) < f(x_2)$

奇偶性 $f(-x) = f(x) \quad f(-x) = -f(x)$

\mathbb{F} 期性 $f(x+l) = f(x)$

$$\text{狄利克雷函數} \quad D(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \in Q^c \end{cases}$$

反函數與復合函數

函數 $f: D \rightarrow f(D)$ 是單射 逆映射 $f^{-1}: f(D) \rightarrow D$ f^{-1} 稱 \mathbb{F} f 的反函數

$$y = f(\mu), D_f \quad \mu = g(x), D_g, R_g, R_g \in D_f \quad y = f[g(x)], x \in D_f$$

函数的运算

$$f(x), g(x), D = D_f \cap D_g \Rightarrow \begin{cases} (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), & x \in D \\ (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), & x \in D \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, & x \in D \end{cases}$$

初等函数

$$\begin{cases} \text{幂函数} y = x^\mu & (\mu \in R) \\ \text{指数函数} y = a^x & (a > 0 \quad a \neq 1) \\ \text{对数函数} y = \log_a x & (a > 0 \quad a \neq 1, \quad \log_e x \rightarrow \ln x) \\ \text{三角函数} y = \sin(x) \\ \text{反函数} y = \arcsin(x) \end{cases}$$

基本初等函数 \rightarrow 初等函数

$$\begin{cases} \text{双曲正弦} \quad sh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \text{双曲余弦} \quad ch x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \text{双曲正切} \quad th x = \frac{sh x}{ch x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{奇函数} \\ \text{偶函数} \\ \text{奇函数} \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{反双曲正弦} \quad arsh x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ \text{反双曲余弦} \quad arch x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \\ \text{反双曲正切} \quad arth x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{奇函数} \\ \text{非奇非偶函数} \\ \text{奇函数} \end{matrix}$$

1.2 數列的極限

$$\forall \varepsilon > 0, \exists Z^+, |x_n - a| < \varepsilon \quad (n > Z^+)$$

1.2.1 定义

法则, 每个 $n \in N_+, x_n \rightarrow x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \rightarrow$ 数列 $\{x_n\}$

x_n 一般项 $\left(\frac{n}{n+1}, 2^n, \frac{1}{2^n}\right)$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \text{正整数 } N, n > N \text{ 时}, |x_n - a| < \varepsilon$$

1.2.2 收敛数列的性质

唯一性

有界性 $|x_n| \leq M$

保号性 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a > 0$ ($a < 0$), \exists 正整数 N , 当 $n > N$ 有 $x_n > 0$ ($x_n < 0$)

子数列收敛 $\{x_n\}, \{x_{n_k}\}$

1.3 函數的極限

1.3.1 定义

$x_n = f(n), n \in N^+, n \rightarrow \infty$ 数列极限

$x \rightarrow x_0, x \rightarrow \infty$ 函数极限

自变量趋于有限值

邻域开区间 $U(x_0, \delta), U^\circ(x_0, \delta)$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta, \text{当 } 0 < |x - x_0| < \delta, |f(x) - a| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta, \text{当 } x_0 - \delta < x < x_0, |f(x) - a| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta, \text{当 } x_0 < x < x_0 + \delta, |f(x) - a| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$$

自变量趋于无穷大

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta, \text{当 } |x| > \delta, |f(x) - a| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$$

1.3.2 性质

唯一性

局部有界

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Rightarrow \exists M > 0, \delta > 0, 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时}, |f(x)| \leq M$$

局部保号

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0, 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时}, f(x) > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \neq 0 \Rightarrow \exists \delta > 0, 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时}, |f(x)| > \frac{|a|}{2}$$

$$\exists \delta > 0, 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时 } f(x) > 0, \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Rightarrow a > 0$$

函数极限与数列极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \text{所有的 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \text{ 有 } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$$

1.4 無窮小與無窮大

1.4.1 无穷小

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \Rightarrow f(x) \text{ 为 } x \rightarrow x_0 \text{ 时的无穷小}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Rightarrow f(x) = A + \alpha$$

1.4.2 无穷大

$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| > \text{任意正数 } M \Rightarrow f(x) \text{ 为 } x \rightarrow x_0 \text{ 时的无穷大 记为 } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$

1.5 極限運算法則

1.5.1 兩個無窮小的和

有限個無窮小的和

1.5.2 有界函數與無窮小的乘積

常數與無窮小的乘積

有限個無窮小的乘積

1.5.3 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$

$$\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$$

$$\lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$$

$$\lim [cf(x)] = c \lim f(x)$$

$$\lim [f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$$

1.5.4 數列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = A \pm B$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = A \cdot B$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B}$$

1.5.5 $\psi(x) \geq \Psi(x), \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(x) = A, \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(x) = B \Rightarrow A \geq B$

1.5.6 複合函數極限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \mu_0, \lim_{\mu \rightarrow \mu_0} f(\mu) = A, \exists \delta_0 > 0, x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta_0), g(x) \neq \mu_0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = \lim_{\mu \rightarrow \mu_0} f(\mu) = A$$

1.6 極限存在准則 两个重要极限

I 數列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ 满足

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}^+, n > n_0 \text{ 时, } y_n \leq x_n \leq z_n \Rightarrow \{x_n\} \text{ 极限存在, 且 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$$

$$x \in \overset{\circ}{U}(x_0, r) \text{ 时, } g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a, \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a \Rightarrow \text{极限 } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ 存在, 且等于 } a$$

II 单调有界数集必有极限

$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \dots$ 单调递增数列

x_0 的某个左邻域内, $f(x)$ 单调有界, 则 $f(x_0^-)$ 必定存在

柯西极限存在准則 $\{x_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N^+, \text{ 当 } m > N, n > N \text{ 时, } |x_n - x_m| < \varepsilon$

1.7 無窮小的比較

$$\begin{aligned}
 \lim \frac{\beta}{\alpha} &= 0 & \beta \text{ 是 } \alpha \text{ 的高階無窮小, 記 } \mathbb{F}\beta &= o(\alpha) \\
 \lim \frac{\beta}{\alpha} &= \infty & \beta \text{ 是 } \alpha \text{ 的低階無窮小} \\
 \lim \frac{\beta}{\alpha} &= c \neq 0 & \beta \text{ 是 } \alpha \text{ 的同階無窮小} \\
 \lim \frac{\beta}{\alpha^k} &= c \neq 0 & \beta \text{ 是 } \alpha \text{ 的 } k \text{ 階無窮小} \\
 \lim \frac{\beta}{\alpha} &= 1 & \beta \text{ 是 } \alpha \text{ 的等價無窮小, 記 } \mathbb{F}\alpha &\sim \beta \\
 \alpha, \beta \text{ 是等價無窮小} &\Leftrightarrow \beta = \alpha + o(\alpha) \\
 \alpha \sim \tilde{\alpha}, \beta \sim \tilde{\beta}, \exists \lim \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}} &\Rightarrow \lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}}
 \end{aligned}$$

1.8 函數的連續性與間斷點

1.8.1 函數的連續性

$$\begin{aligned}
 \Delta\mu &= \mu_2 - \mu_1, x \in U(x_0), \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \\
 f(x), x \in U(x_0), \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0, \text{ 稱 } f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 連續} \\
 f(x), x \in U(x_0), \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= f(x_0), \text{ 稱 } f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 連續} \\
 \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 當 } |x - x_0| < \delta \text{ 時, 有 } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon &, \text{ 稱 } f(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 連續} \\
 f(x_0^-) = f(x_0), \text{ 左連續} & \quad f(x_0^+) = f(x_0), \text{ 右連續} \\
 \text{區間上每一點都連續的函數, 函數在該區間上連續, 包含端點時右端點左連續, 左端點右連續} \\
 \left\{ \begin{array}{l} \text{有理整函數(多項式),} \\ \text{有理分式函數, } F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \\ \mathbb{F}\text{函數, } \sqrt{x} \\ \text{三角函數, } \sin x \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

1.8.2 函數的間斷點

$$f(x), x \in \mathring{U}(x_0) \left\{ \begin{array}{l} (1) x = x_0 \text{ 處 } \mathbb{F} \text{ 定義} \\ (2) x = x_0 \text{ 處有定義, 但 } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ 不存在} \\ (3) x = x_0 \text{ 處有定義, 且 } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ 存在, 但 } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0) \end{array} \right.$$

左右極限存在, 第一類間斷點(可去, 跳躍)
 不是第一類間斷點, 第二類間斷點(無窮, 震蕩)

1.9 連續函數的運算與初等函數的連續性

1.9.1 連續函數的和, 差, 積, 商的連續性

$$\text{函數 } f(x), g(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 連續} \Rightarrow f \pm g, f \cdot g, \frac{f}{g} \text{ 在點 } x_0 \text{ 連續}$$

1.9.2 反函數與復合函數的連續性

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \text{ 在 } D_f \text{ 單增, } f^-(x) \text{ 在 } R_f \text{ 單增} \\ y = f(\mu), \mu = g(x) \\ y = f[g(x)], \mathring{U}(x_0) \in D_{f \circ g} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \mu_0, f(\mu) \text{ 在點 } \mu = \mu_0 \text{ 處連續} \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = \lim_{\mu \rightarrow \mu_0} f(\mu) = f(\mu_0)$$

$$\left. \begin{array}{l} y = f(\mu), \mu = g(x) \\ y = f[g(x)], \mathring{U}(x_0) \in D_{f \circ g} \\ \mu = g(x) \text{ 在點 } x = x_0 \text{ 處連續, 且 } g(x_0) = \mu_0 \\ f(\mu) \text{ 在點 } \mu = \mu_0 \text{ 處連續} \end{array} \right\} \Rightarrow f[g(x)] \text{ 在點 } x = x_0 \text{ 處連續}$$

1.9.3 初等函數的連續性

基本初等函數定義域 \mathbb{R} 連續

初等函數定義區間 (定義域 \mathbb{R} 的區間) 連續

1.10 閉區間上連續函數的性質

1.10.1 最值定理

$f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 連續, $\exists M > 0, \forall x \in [a, b], |f(x)| \leq M$

1.10.2 零點定理與介值定理

$f(x_0) = 0, x_0$ 稱 \mathbb{R} 函數 $f(x)$ 的零點

$f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 連續, $f(a) \cdot f(b) > 0, \exists$ 至少一點 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$

$f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 連續, $f(a) = A, f(b) = B, \forall C \in (A, B), \exists$ 至少一個 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = C$

$f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 連續, $R_f = [m, M], m = f(x)_{\min}, M = f(x)_{\max}$

1.10.3 一致連續性

$x \in R_f, \forall \varepsilon, \exists \delta$, 使得 $\forall x_1, x_2 \in R_f$, 当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

如果函数在 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 连续, 那么他在该区间一定连续

2 導數與微分

2.1 導數概念

2.1.1 引例

直 \square 運動的速度

$$s = f(t)$$

$$\frac{s-s_0}{t-t_0} = \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \text{ 平均速度}$$

$$v = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \text{ 瞬時速度}$$

切 \square 問題

$$\tan \varphi = \frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ 割 \square 斜率}$$

$$k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ 切 \square 斜率}$$

2.1.2 導數的定義

函數在一點處的導數與導函數

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= y' \big|_{x=x_0}$$

$$= \frac{dy}{dx} \big|_{x=x_0}$$

$$= \frac{df(x)}{dx} \big|_{x=x_0}$$

$\Delta x \rightarrow 0$ 時, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \infty \Rightarrow$ 不可導

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}, f'(x), \frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx} \text{ 導函數}$$

$$f'(x_0) = f'(x) \big|_{x=x_0}$$

求導舉例

2.1.3 導數的幾何意義

$$f'(x_0) = \infty, x = x_0$$

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \text{ 切 \square }$$

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \text{ 法 \square }$$

2.1.4 可導與連續性關 \square

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha \Rightarrow \Delta y = f'(x) \Delta x + \alpha \Delta x \Rightarrow \text{可導必連續}$$

2.2 函數求導法則

2.2.1 函數和差積商的求導法則

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$u'(x), v'(x) \Rightarrow (uv)' = u'v + uv', (cu)' = cu', (uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

2.2.2 反函數求導法則

$$x = f(y), f'(y) \neq 0 \rightarrow y = f^{-1}(x) \text{ 可導, } [f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)}, \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

2.2.3 複合函數求導法則

$$u = g(x) \text{ } x \text{ 點可導, } y = f(u) \text{ } u \text{ 點可導} \rightarrow y = f[g(x)] \text{ } x \text{ 點可導, } \frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot g'(x), \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

2.2.4 基本求導法則與導數公式

基本初等函數函數求導公式

和差商積求導法則

反函數求導法則

複合函數求導法則

2.3 高階導數

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right), \frac{d^2 y}{dx^2}, y''(x) \\ & y''', y^{(4)}, \dots, y^{(n)} \rightarrow \frac{d^3 y}{dx^3}, \frac{d^4 y}{dx^4}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n} \\ & (u+v)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} \end{aligned}$$

2.4 隱函數, 參數方程確定的函數的導數 相關變化率

隱函數導數

$$y = \sin x \text{ 顯函數}$$

$$x + y^3 - 1 = 0 \text{ 隱函數, } y = \sqrt[3]{1-x} \text{ 隱函數顯化}$$

參數方程確定的函數的導數

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

相關變化率

$$\frac{dy}{dt}, \frac{dx}{dt} \text{ 存在關} \mathbb{F}$$

2.5 函數的微分

微分的定義

$$\Delta A = 2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2$$

$$x \in U(x_0), \Delta y = A \Delta x + o(\Delta x) \rightarrow y \text{ 在 } x_0 \text{ 點可微, } A \Delta x \text{ 是 } y \text{ 在 } x_0 \text{ 點相應于 } \Delta x \text{ 的微分記 } \mathbb{F} dy$$

y 在任意點 x 的微分, 函數的微分, 記作 dy

Δx 自變量的微分, 記作 dx

微分的幾何意義

初等函數的微分公式, 與微分運算法則

1. 基本初等

2. 和差商積

3. 複合函數

微分在近似計算中的應用**函數的近似運算**

$$\Delta y \approx dy = f'(x_0) \Delta x$$

誤差估計

A 精確值, a 測量值, $|A - a|$ 絕對誤差, $\frac{|A-a|}{|a|}$ 相對誤差, $|A - a| \leq \delta_A$ 絕對誤差極限, $\frac{\delta_A}{|a|}$ 相對誤差極限

3 微分中值定理與導數的應用

3.1 微分中值定理

費馬引理 $x \in U(x_0), f'(x_0), \forall x \in U(x_0), f(x) \leq f(x_0) \text{ or } f(x) \geq f(x_0) \rightarrow f'(x_0) = 0$ 駐點, 穩定點, 臨界點

爾定理 $[a, b]$ 連續, (a, b) 可導, $f(a) = f(b) \rightarrow \exists$ 至少一個 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$

拉格朗日中值定理 $[a, b]$ 連續, (a, b) 可導 $\rightarrow \exists$ 至少一個 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$

證明構造輔助函數 $\varphi(x)$

微分中值定理

$x \in I$ 連, 導, $f'(x) = 0 \rightarrow x \in I, f(x) \equiv C$ (常數)

柯西中值定理 $[a, b]$ 連續, (a, b) 可導, $\forall x \in (a, b), F'(x) \neq 0 \rightarrow \exists$ 至少一點 $\xi \in (a, b)$ 使得 $\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$

證明構造輔助函數 $\varphi(x)$

3.2 諾必達法則

$$\left. \begin{array}{l} \text{when } x \rightarrow a, f(x) \text{ and } F(x) \rightarrow 0 \\ \text{when } x \in U(a), \exists f'(x) \text{ and } F'(x), F'(x) \neq 0 \\ \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}, \text{ or } \text{quip } \infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{when } x \rightarrow \infty, f(x) \text{ and } F(x) \rightarrow 0 \\ \text{when } |x| > N, \exists f'(x) \text{ and } F'(x), F'(x) \neq 0 \\ \exists \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}, \text{ or } \text{quip } \infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{F'(x)}$$

3.3 泰勒公式

$$\begin{array}{ll} \text{if } x = x_0 \exists f^{(n)}(x_0) & f(x) = P_n(x) + R_n(x) \\ \text{then } \exists U(x_0) \forall x \in U(x_0) \text{ 使得} & = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x) \\ & \text{其中 } R_n(x) = o((x - x_0)^n) \text{ (佩亚诺余项, } x_0 = x \text{ 麦克劳林)} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{if } x = x_0 \exists f^{(n+1)}(x_0) & f(x) = P_n(x) + R_n(x) \\ \text{then } \exists U(x_0) \forall x \in U(x_0) \text{ 使得} & = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x) \\ & \text{其中 } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \xi \in (x_0, x) \text{ (拉格朗日余项, } x_0 = x \text{ 麦克劳林)} \end{array}$$

3.4 函数单调性与曲线凹凸性

3.4.1 函数单调性的判定法

$[a, b]$ 连续, (a, b) 可導 if $x \in (a, b), f'(x) \geq 0$, 有限点取等号 then $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 单增

if $x \in (a, b), f'(x) \leq 0$, 有限点取等号 then $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 单减

驻点与无定义点

3.4.2 曲线的凹凸性与拐点

$$\begin{array}{ll} f(x) \text{ 在 } x \in I \text{ 上连续, } & \text{if } \forall x_1, x_2 \in I, \text{ 恒有 } f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \text{ then } f(x) \text{ 在 } I \text{ 内图像凹} \\ & \text{if } \forall x_1, x_2 \in I, \text{ 恒有 } f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \text{ then } f(x) \text{ 在 } I \text{ 内图像凸} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} f(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 连续, 在 } (a, b) \text{ 一阶导, 二阶导} & \text{if } x \in (a, b) \quad f''(x) > 0, \text{ then } f(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 内图像凹} \\ & \text{if } x \in (a, b) \quad f''(x) < 0, \text{ then } f(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 内图像凸} \end{array}$$

$f''(x) = 0$ 点 and $f''(x)$ 不存在点, 点两侧异号为拐点

3.5 函数的极值与最大值最小值

函数的极值及其求法

$f(x)$ $x \in \mathring{U}(x_0)$, if $\forall x \in \mathring{U}(x_0) \quad f(x) < f(x_0)$, then $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值

$f(x)$ $x \in \mathring{U}(x_0)$, if $\forall x \in \mathring{U}(x_0) \quad f(x) > f(x_0)$, then $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极小值

if $f(x)$ 在 x_0 处可导, 取得极值, then $f'(x) = 0$

$f(x)$ 在 x_0 处连续 if $x \in (x_0 - \delta, x_0), f'(x) > 0 \quad x \in (x_0, x_0 + \delta), f'(x) < 0$, then $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值
 在 $\mathring{U}(x_0, \delta)$ 内可导 if $x \in (x_0 - \delta, x_0), f'(x) < 0 \quad x \in (x_0, x_0 + \delta), f'(x) > 0$, then $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值
 if $x \in \mathring{U}(x_0, \delta), f'(x)$ 的符号保持不变, then $f(x)$ 在 x_0 处没有极值

$f'(x) = 0$ 点 and $f'(x)$ 不存在点, 点两侧异号为极值点

$f(x)$ 在 x_0 处具有二阶导数, $f'(x_0) = 0, f''(x_0) \neq 0$ if $f''(x) < 0$, then $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值
 if $f''(x) > 0$, then $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值

最大值最小值问题

驻点值 $a_{0,1,2,\dots,n}$, 不可导点值 $b_{0,1,2,\dots,n}$, 端点值 $f(a), f(b) \rightarrow \begin{aligned} MAX &= \max \{a, b, f(a), f(b)\} \\ MIN &= \min \{a, b, f(a), f(b)\} \end{aligned}$

3.6 函数图像的绘制

$f'(x) = 0, f''(x) = 0$ 点, 水平, 铅锤

3.7 曲率

弧微分

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{\left(\frac{MM'}{|MM'|}\right) \cdot \left[1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right]}$$

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow x} \frac{\Delta s}{\Delta x} \\ &= \sqrt{1 + y'^2} \end{aligned}$$

曲率及计算公式

$$\bar{K} = \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right|$$

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right|$$

$$= \frac{\left| \frac{d\alpha}{dx} \right|}{\frac{ds}{dx}} = \frac{|y''|}{1 + y'^2} / \sqrt{1 + y'^2} = \begin{aligned} &\text{直线} && 0 \\ &\text{圆} && \frac{1}{a} \\ &\text{参数方程} && \frac{|g''f' - g'f''|}{(g'^2 + f'^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

曲率圆与曲率半径

$$\rho = \frac{1}{K}$$

曲率中心的计算公式 渐屈线与渐伸线

$$\text{曲率中心 } D(\alpha, \beta) \begin{cases} \alpha = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} \\ \beta = y + \frac{1+y'^2}{y''} \end{cases}$$

3.8 方程近似解

二分法

$[a, b]$ 连续, $f(a) \cdot f(b) < 0$, \exists 一个实根 $\xi \in (a, b)$, $\xi_n = \frac{a+b}{2}$

切线法

$f(a) \cdot f(b) < 0$, $x \in [a, b]$ $f'(x) f''(x)$ 保持定号 $\rightarrow \exists$ 实根 $\xi \in [a, b]$

$x_0 = a$ or b , $f(x_0) \cdot f''(x) > 0$, x_n 为过 x_{n-1} 的切线与 x 轴交点, $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

割线法

初始值 x_0, x_1 , $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n)$

4 不定积分

4.1 不定积分的概念与性质

原函数与不定积分的概念

if $\forall x \in I, F'(x) = f(x), dF(x) = f(x)dx$, then $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 原函数

if $x \in I, f(x)$ 连续, then \exists 可导函数 $F(x), \forall x \in I, F'(x) = f(x)$ 连续函数一定有原函数

$$\int f(x) dx = F(x) + C \text{ 不定积分 } \begin{cases} \int & \text{积分符号} \\ f(x) & \text{被积函数} \\ f(x) dx & \text{被积表达式} \\ x & \text{积分变量} \end{cases}$$

基本积分表

...

不定积分的性质

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$$

4.2 积分换元法

第一类换元法

if $F'(\mu) = f(\mu), \mu = \varphi(x)$ 可导, then $\int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = [\int f(\mu) d\mu]_{u=\varphi(x)}$

第二类换元法

if $x = \varphi(t)$ 单调可导, $\varphi(t) \neq 0, f[\varphi(t)] \varphi'(t)$ 具有原函数, then $\int f(x) dx = [\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt]_{t=\varphi^{-1}(x)}$

4.3 分部积分法

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx \rightarrow \int u dv = uv - \int uv du$$

4.4 有理函数的积分

有理函数的积分

两多项式的商 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 称为有理函数, 有理分式

$P(x)$ 次数小于 $Q(x)$ 真分式, 否则假分式

假分式 = 多项式 + 真分式

可化为有理函数的积分举例

$$\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \left(\frac{x}{2} \right)}$$

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{1 + \tan^2 \left(\frac{x}{2} \right)}$$

4.5 积分表的使用

...

5 定积分

5.1 定积分的概念与性质

5.1.1 定积分的概念与性质

曲边梯形的面积

$$\begin{aligned} A &\approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad (\lambda = \max \{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}) \end{aligned}$$

变速直线运动的路程

$$\begin{aligned} A &\approx \sum_{i=1}^n v(\tau_i) \Delta t_i \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n v(\tau_i) \Delta t_i \quad (\lambda = \max \{\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n\}, \Delta t_n = t_n - t_{n-1}) \end{aligned}$$

5.1.2 定积分的定义

$$\int_a^b f(x) dx = I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \quad \left\{ \begin{array}{l} f[x] \text{ 被积函数} \\ f[x] dx \text{ 被积表达式} \\ x \text{ 积分变量} \\ a \text{ 积分下限} \\ b \text{ 积分上限} \\ [a, b] \text{ 积分区间} \end{array} \right.$$

和式 (积分和) $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 极限存在时, 极限 I 只与 $f[x], [a, b]$ 有关

积分和存在, 函数 $f(x)$ 可积

$[a, b]$ 连, $[a, b]$ 可积

$[a, b]$ 有界, 有限个间断点, $[a, b]$ 可积

5.1.3 定积分的近似计算

5.1.4 定积分的性质

$$\begin{aligned} b &= a, \int_a^b f(x) dx = 0; \quad a > b, \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \\ a, b \text{ 常数}, \int_a^b [af(x) + bg(x)] dx &= a \int_a^b f(x) dx + b \int_a^b g(x) dx \\ a < c < b, \int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad \text{积分区间可加} \quad \int_a^b 1 dx = \int_a^b dx = b - a \\ \text{if } x \in [a, b], f(x) \geq 0, \text{ then } \int_a^b f(x) dx &\geq 0 \\ \text{if } x \in [a, b], f(x) \leq g(x), \text{ then } \int_a^b f(x) dx &\leq \int_a^b g(x) dx \\ \left| \int_a^b f(x) dx \right| &\leq \int_a^b |f(x)| dx \\ m < f(x) < M, m(b-a) < \int_a^b f(x) dx &< M(b-a) \\ \text{if } f(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 连续, then } \exists \text{ 至少一个点 } \xi \in [a, b], \int_a^b f(x) dx &= f(\xi)(b-a) \end{aligned}$$

5.2 微积分基本公式

5.2.1 变速直线运动中位置函数与速度函数

$$F'(x) = f(x), \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

5.2.2 积分上限的函数及其导数

if $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, then $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ 在 $[a, b]$ 上可导, $\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \cdot \int_a^x f(t) dt = f(x)$
 if $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, then $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的原函数

5.2.3 牛顿-莱布尼兹

if $x \in [a, b]$, $F'(x) = f(x)$, $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ 微积分基本公式

5.3 定积分的换元法和分部积分法

5.3.1 定积分的换元法

$\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$,
 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, if $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有连续导数, then $\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$
 $R_\varphi = [a, b]$

$$\int_a^b f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \int_\alpha^\beta f(t) dt$$

5.3.2 定积分的分布积分法

$$\int_a^b uv' dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'v dx \quad \int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$$

5.4 反常积分

5.4.1 无穷限的反常积分

$$\text{无穷限的反常积分} \begin{cases} \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) - F(a) = I_1 \\ \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx = F(b) - \lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = I_2 \\ F'(x) = f(x) \end{cases}$$

5.4.2 无界函数的反常积分

if $f(x)$ 在 a 的任一邻域无界
 $x \in U(a, \delta), \forall \delta > 0, M > 0, f(x) > M$, then a 称为 $f(x)$ 瑕点, $f(x)$ 积分称为瑕积分

$$\text{无界函数的反常积分} \begin{cases} \int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} F(t) - F(a) & x \in [a, b) \\ \int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx = F(b) - \lim_{t \rightarrow a^+} F(t) & x \in (a, b] \\ F'(x) = f(x) \end{cases}$$

5.5 反常积分的审敛法 Γ 函数

5.5.1 无穷限反常积分的审敛法

$f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, $f(x) \geq 0$, if $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ 在 $[a, +\infty)$ 上有上界, then $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛

$f(x), g(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, $0 \leq f(x) \leq g(x)$
 if $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 收敛, then $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛
 if $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散, then $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 发散

$f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ ($a > 0$) 连续, $f(x) \geq 0$ *if* $\exists M > 0, p > 1, f(x) \leq \frac{M}{x^p} (a \leq x < +\infty)$, then $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛
if $\exists N > 0, p \leq 1, f(x) \geq \frac{N}{x^p} (a \leq x < +\infty)$, then $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散

$f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 连续, $f(x) \geq 0$ *if* $\exists p > 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^p f(x) = c < +\infty$, then $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛
if $\exists p \leq 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^p f(x) = d > 0$ (or $+\infty$), then $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散

$f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 连续, *if* $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 收敛, then $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 绝对收敛

5.5.2 无界函数反常积分的审敛法

$f(x)$ 在 $(a, b]$ 连续, $f(x) \geq 0, x = a$ 为函数瑕点 *if* $\exists M > 0, p < 1, f(x) \leq \frac{M}{(x-a)^p} (a \leq x < +\infty)$, then $\int_a^b f(x) dx$ 收敛
if $\exists N > 0, p \geq 1, f(x) \geq \frac{N}{(x-a)^p} (a \leq x < +\infty)$, then $\int_a^b f(x) dx$ 发散

$f(x)$ 在 $(a, b]$ 连续, $f(x) \geq 0, x = a$ 为函数瑕点 *if* $\exists 0 < p < 1, \lim_{x \rightarrow a^+} (x-a)^p f(x) = c < +\infty$, then $\int_a^b f(x) dx$ 收敛
if $\exists p \geq 1, \lim_{x \rightarrow a^+} (x-a)^p f(x) = d > 0$ (or $+\infty$), then $\int_a^b f(x) dx$ 发散

5.5.3 Γ

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$$

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \text{ (分部积分法)}$$

$$\Gamma(1) = 1, \Gamma(n+1) = n!$$

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \Gamma(s) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\Gamma(1+s)}{s} = +\infty$$

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s} \text{ (} 0 < s < 1, \text{余元公式)}, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx \stackrel{x=u^2}{=} \int_0^\infty e^{-u^2} (u^2)^{-\frac{1}{2}} d(u^2) = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} du$$

6 定积分的应用

6.1 定积分的元素法

$$\begin{aligned} A &\approx \sum f(x) dx \\ &= \lim \sum f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

6.2 定积分在几何学上的应用

6.2.1 平面图形

直角坐标

矩形面积 $A = xy$

$$A = \int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(y) dy$$

极坐标

扇形面积 $A = \frac{1}{2} R^2 \theta$

$$A = \int_a^b \frac{1}{2} [\rho(\theta)]^2 d\theta$$

6.2.2 体积

旋转体体积

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$$

平行截面积已知的立体体积

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_c^d A(y) dy$$

6.2.3 平面曲线的弧长

if $\exists \sum_{i=1}^n |M_{i-1}^i|$ 极限存在, then 极限称为 \widehat{AB} 的弧长

光滑曲线弧是可求长的

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \\ &= \sqrt{(\varphi'(t) dt)^2 + (\psi'(t) dt)^2} = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt \\ &= \sqrt{[(\rho' \cos \theta - \rho \sin \theta) dt]^2 + [(\rho' \sin \theta + \rho \cos \theta) dt]^2} = \sqrt{(\rho')^2 + (\rho)^2} dt \end{aligned}$$

6.3 定积分在物理学上的应用

6.3.1 变力沿直线做功

$$\begin{aligned} W &= F \cdot s \\ &= \frac{kq^2}{r^2} dr \end{aligned}$$

6.3.2 水压力

$$\begin{aligned} p = \rho gh, P &= p \cdot A \\ &= \rho g x \cdot 2\sqrt{R^2 - x^2} dx \end{aligned}$$

6.3.3 引力

$$\begin{aligned} F &= G \frac{m_1 m_2}{r^2} \\ &= G \frac{m_1 \mu dy}{a^2 + y^2} \end{aligned}$$

7 微分方程

7.1 基本概念

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2x \\ x = 1, y = 2 \end{cases} \Rightarrow y = 2x + 1$$

函數，函數導數，自變量關係的方程**微分方程**

最高階導數的階數**微分方程的階**

$F(x, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ **一般形式**

函數**微分方程的解**

函數含常數，常數個數同階數**微分方程的通解**

確定常數的通解**微分方程的通解**

7.2 可分離變量的微分方程

$$\frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow dy = 2x dx \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = 2x dx \Rightarrow$$

$$g(y) dy = f(x) dx \Rightarrow y = \varphi(x)$$

$$G(y) = F(x) + C \Rightarrow y = \Phi(x)$$

7.3 齊次方程

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}$$

7.4 一階 \mathbb{R} 性微分方程

$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ 關於函數，函數導數是一次方程一階 \mathbb{R} 性微分方程

$Q(x) = 0$ 時**齊次方程**

$y = Ce^{-\int P(x)dx}$ **齊次通解**，設 $C = \mu(x)$

$$\mu(x) = \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C_2$$

$y = \left(\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C_2\right) e^{-\int P(x) dx}$ **非齊次通解**

$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$ **伯努利方程**

$\frac{dy}{dx} y^{-n} + P(x) y y^{-n} = Q(x)$ $z = y^{1-n}, z' = (1-n) y^{-n} \frac{dy}{dx} = \frac{z'}{1-n} + P(x)z = Q(x)$ 一階 \mathbb{R} 性微分方程

7.5 可降階的高階微分方程

$$y^{(n)} = f(x) \Rightarrow y^{(n-1)} = \int f(x) dx$$

$$y'' = f(x, y') \quad \underbrace{y' = p, y'' = p'}_{p' = f(x, p)}$$

$$y'' = f(y, y') \quad \underbrace{y' = p, y'' = p \frac{dp}{dy}}_{p \frac{dp}{dy} = f(y, p)} \quad \underbrace{p = y' = \varphi(y, c_1)}_{p = y' = \varphi(y, c_1)}$$

7.6 高階性微分方程

二階微分方程

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x) y = f(x)$$

解的結構

$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 是解

$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 无关特解是通解

$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)$ 无关特解是通解

$y = Y(x) + y^*(x)$ 齐次通, 非齐特, 非齐通

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \frac{dy}{dx} + Q(x) y = f_1(x) + f_2(x)$$

$y = y_1^*(x) + y_2^*(x)$ 特解, 特解, 特解

常数变易法

$$Y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

$$Y(x) = v_1(x) y_1(x) + v_2(x) y_2(x)$$

$$\begin{cases} y_1 v_1' + y_2 v_2' = 0 \\ y_1' v_1 + y_2' v_2 = f \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & 0 \\ y_1' & y_2' & f \end{vmatrix} \xrightarrow{W = y_1 y_2' - y_1' y_2} \begin{cases} v_1' = -\frac{y_2 f}{W} \\ v_2' = \frac{y_1 f}{W} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = -\int \frac{y_2 f}{W} dx + c_1 \\ v_2 = \int \frac{y_1 f}{W} dx + c_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 y_1 = \left(-\int \frac{y_2 f}{W} dx + c_1\right) y_1 \\ v_2 y_2 = \left(\int \frac{y_1 f}{W} dx + c_2\right) y_2 \end{cases} \Rightarrow Y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 - y_1 \int \frac{y_2 f}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 f}{W} dx$$

7.7 常系数齐次线性微分方程

$$y'' + P(x) y' + Q(x) y = 0 \Rightarrow y'' + p y' + q y = 0$$

$$y = e^{rx}$$

$$(e^{rx})' = r e^{rx}$$

$$(r^2 + pr + q) e^{rx} = 0$$

$$\begin{cases} p^2 - 4q > 0, r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \\ p^2 - 4q = 0, r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}, y_2 = e^{r_1 x} \mu(x), \mu'' = 0 \\ p^2 - 4q < 0, r_{1,2} = \alpha \pm \beta i, e^{(i\theta)} = \cos(\theta) + i \sin(\theta), \overline{y_1} = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \overline{y_1} = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} p^2 - 4q > 0, y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \\ p^2 - 4q = 0, y = C_1 y_1 + C_2 \mu y_1 = (C_1 x + C_2) e^{r_1 x} \\ p^2 - 4q < 0, y = C_1 \overline{y_1} + C_2 \overline{y_2} = e^{\alpha x} (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)) \end{cases}$$

n 阶常系数齐次微分方程

$$y^n + p_1 y^{n-1} + p_2 y^{n-2} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$$

$$\begin{cases} D, \frac{d}{dx} \\ Dy, \frac{dy}{dx} \\ D^n y, \frac{d^n y}{dx^n} \end{cases}$$

$$(D^n + p_1 D^{n-1} + \cdots + p_{n-1} D + p_n) y = 0 \Rightarrow L(D) y = 0, \text{微分算子 } D \text{ 的 } n \text{ 次多项式}$$

$$D e^{rx} = r e^{rx}, \dots, D^n e^{rx} = r^n e^{rx} \Rightarrow (r^n + p_1 r^{n-1} + \cdots + p_{n-1} r + p_n) e^{rx} = L(r) e^{rx} = 0 \Rightarrow L(r) = 0$$

$$\begin{cases} \text{单实根} & C e^{rx} \\ k \text{ 重实根} & (C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}) e^{rx} \\ \text{单复根} & e^{\alpha x} (C_1 \cos(\beta x) + D_1 \sin(\beta x)) \\ k \text{ 重复根} & e^{\alpha x} ((C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}) \cos(\beta x) + (D_1 + D_2 x + \cdots + D_k x^{k-1}) \sin(\beta x)) \end{cases}$$

7.8 常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + p y' + q y = f(x)$$

$$p_m(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m$$

$$\begin{cases} e^{\theta i} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \\ e^{-\theta i} = \cos(\theta) - i \sin(\theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{2}(e^{\theta i} + e^{-\theta i}) \\ \sin(\theta) = \frac{1}{2i}(e^{\theta i} - e^{-\theta i}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos(\omega x) P = \frac{P}{2}(e^{\omega x i} + e^{-\omega x i}) \\ \sin(\omega x) Q = \frac{Q}{2i}(e^{\omega x i} - e^{-\omega x i}) \end{cases}$$

函数 (多项式) 共轭, 倒数共轭; 两对共轭, 乘积共轭; $e^{\alpha+\theta i}$ 与 $e^{\alpha-\theta i}$ 共轭

$f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$	$y^* = R_l(x) e^{\lambda x}$ $R''x + (2\lambda + p)R'x + (\lambda^2 + p\lambda + q)R(x) = p_m(x)$ $y^* = x^k P_m(x) e^{\lambda x}$
$f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos(\omega x) + Q_n(x) \sin(\omega x)]$	$f(x) = e^{\lambda x} \left[\left(\frac{P}{2} + \frac{Q}{2i} \right) e^{\omega x i} + \left(\frac{P}{2} - \frac{Q}{2i} \right) e^{-\omega x i} \right]$ $f(x) = \left(\frac{P}{2} + \frac{Q}{2i} \right) e^{\lambda x + \omega x i} + \left(\frac{P}{2} - \frac{Q}{2i} \right) e^{\lambda x - \omega x i}$ $f(x) = \left(\frac{P}{2} + \frac{Q}{2i} \right) e^{(\lambda + \omega i)x} + \left(\frac{P}{2} - \frac{Q}{2i} \right) e^{(\lambda - \omega i)x}$ $f(x) = P_1 e^{(\lambda + \omega i)x} + Q_2 e^{(\lambda - \omega i)x} \quad (P_1, Q_2 \text{共轭})$ $y_1^* = x^k R_m e^{(\lambda + \omega i)x} \quad (m = \max\{P_l, Q_n\})$ $y_2^* = x^k \overline{R_m} e^{(\lambda - \omega i)x}$ $y^* = y_1^* + y_2^* = x^k e^{\lambda x} (R_m e^{\omega x i} + \overline{R_m} e^{-\omega x i})$ $y^* = x^k e^{\lambda x} [R_m (\cos(\omega x) + i \sin(\omega x)) + \overline{R_m} (\cos(\omega x) - i \sin(\omega x))]$ $y^* = x^k e^{\lambda x} \left(R_m^{(1)} \cos(\omega x) + R_m^{(2)} \sin(\omega x) \right)$

7.9 欧拉方程

$$x^n y^{(n)} + p^1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p^{n-1} x y' + p^n y = f(x)$$

$$x = e^t, t = \ln x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \quad D \text{表示} \frac{d}{dt} \quad \begin{cases} xy' = Dy \\ x^2 y'' = (D^2 - D)y \\ x^3 y''' = (D^3 - 3D^2 + 2D)y \\ \cdots \\ x^k y^{(k)} = (D^n + c_1 D^{n-1} + \cdots + C_{n-1} D)y \end{cases}$$

7.10 常系数线性微分方程组

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - x = e^t, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + y = 0, \end{cases}$$

$$\text{记} \frac{d}{dt} \text{为} D \Rightarrow \begin{cases} (D^2 - 1)x + Dy = e^t \\ Dx + (D^2 + 1)y = 0 \end{cases}$$

8 向量代数与空间解析几何

8.1 向量及其线性运算

8.1.1 向量的概念

大小, 方向, 向量, \overrightarrow{AB}

与起点无关, 自由向量

向量的大小, 向量的模, $|\overrightarrow{AB}|$, 单位向量, 零向量

$\overrightarrow{OA} = a, \overrightarrow{OB} = b, \angle AOB < \pi$ 向量夹角, $(\widehat{a, b}) = 0 \text{ or } \pi, a \text{ 与 } b \text{ 平行, 同起点共线}$
 $= \frac{\pi}{2}, a \text{ 与 } b \text{ 垂直}$

8.1.2 向量的运算

向量的加减法

$c = a + b$ 三角形法则

$a + b = b + a$ 交换

$(a + b) + c = a + (b + c)$ 分配

$a - b = a + (-b)$ 负向量

$|a \pm b| < |a| + |b|$

向量与数的乘法

$|\lambda a| = |\lambda| |a|$

$\lambda(\mu a) = \mu(\lambda a) = (\lambda\mu)a$

$|\lambda(\mu a)| = |\mu(\lambda a)| = |(\lambda\mu)a| = |\lambda\mu| |a|$

$(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a, \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$

$a \neq 0, a // b \Leftrightarrow \exists \text{ 唯一实数 } \lambda, b = \lambda a$

空间直角坐标系

$[O; i, j, k]$ 右手规则, 卦限

$\overrightarrow{OM} = r = xi + yj + zk$ 坐标式分解, 分向量, $r = (x, y, z), M(x, y, z)$ 坐标, r 为 M 关于 O 向径

利用坐标向量的线性运算

$$a = (a_x, a_y, a_z), b = (b_x, b_y, b_z) \begin{cases} a + b = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z) \\ a - b = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z) \\ \lambda a = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z) \end{cases}$$

向量的模, 方向角, 投影

向量的模与两点间的距离

$r = (x, y, z), |r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$A = (x_1, y_1, z_1), B = (x_2, y_2, z_2), |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

方向角与方向余弦

r 与三条坐标轴的夹角 α, β, γ 称为 r 的方向角

$(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \frac{1}{|r|} (x, y, z), \cos *$ 方向余弦

向量在轴上的投影

$$\begin{cases} (a)_u = |a| \cos \varphi \\ (a + b)_u = (a)_u + (b)_u = |a| \cos \varphi + |b| \cos \varphi \\ (\lambda a)_u = \lambda (a)_u \end{cases}$$

8.2 数量积 向量积 混合积

8.2.1 两向量的数量积

$$\begin{aligned}
 a \cdot b &= |a| |b| \cos \theta \text{数量积} \\
 \begin{cases} a \cdot a = |a|^2 \\ a, b \neq 0, a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a \perp b \\ a \cdot b = b \cdot a \text{交}\mathbb{F} \\ (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \text{分配} \\ (\lambda a) \cdot b = \lambda (a \cdot b) \text{结合} \end{cases} \\
 a &= (a_x, a_y, a_z) \Rightarrow a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \\
 b &= (b_x, b_y, b_z) \Rightarrow \cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a| |b|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}
 \end{aligned}$$

8.2.2 两向量的向量积

$$\begin{aligned}
 |c| &= |a| |b| \sin \theta \\
 c &= a \times b \text{向量积} \\
 \begin{cases} a \times a = 0 \\ a, b \neq 0, a \times b = 0 \Leftrightarrow a // b \\ a \times b = -b \times a \\ (a+b) \times c = a \times c + b \times c \\ (\lambda a) \times b = a \times (\lambda b) = \lambda (a \times b) \end{cases} \\
 a \times b &= (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x) \\
 a &= (a_x, a_y, a_z) \Rightarrow \\
 b &= (b_x, b_y, b_z) \Rightarrow \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

8.2.3 向量的混合积

$$\begin{aligned}
 (a \times b) \cdot c &= [abc], \text{向量的混合积} \\
 |[abc]| &= |a| |b| \sin(\widehat{a, b}) |c| \cos(\widehat{a \times b, c}), a, b, c \text{ 右手系模大于0} \\
 [abc] &= (a \times b) \cdot c \\
 a &= (a_x, a_y, a_z) \Rightarrow \\
 b &= (b_x, b_y, b_z) \Rightarrow \\
 c &= (c_x, c_y, c_z) \Rightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

8.3 平面及其方程

8.3.1 曲面方程与空间曲线方程的概念

$$\begin{aligned}
 F(x, y, z) = 0, \text{曲面 } S \text{ 上点满足方程, 不在曲面 } S \text{ 上点不满足方程} \Rightarrow \text{曲面 } S \text{ 的方程} \\
 \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{曲线 } C \text{ 的方程}
 \end{aligned}$$

8.3.2 平面的点法式方程

$$\begin{aligned}
 \text{向量垂直平面, 平面的法线向量} \\
 n = (A, B, C) \quad \text{法向量} \\
 \overrightarrow{M_0 M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \quad \text{平面上点} \Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \text{平面的点法式方程}
 \end{aligned}$$

8.3.3 平面的一般方程

$Ax + By + Cz + D = 0$ 平面的一般方程

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ 平面的截距式方程

8.3.4 平面的夹角

平面法向量的夹角, 平面的夹角 ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)

$$\Pi_1, n_1 = (A_1, B_1, C_1), \Pi_2, n_2 = (A_2, B_2, C_2), \cos \theta = |\widehat{(n_1, n_2)}| = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \text{平面夹角}$$

$$\begin{aligned} d &= \left| \frac{\overrightarrow{P_1 P_0}}{|n|} \right| |\cos \theta| \\ &= \frac{|\overrightarrow{P_1 P_0} \times n|}{|n|} \\ &= \frac{|A(x_0 - x) + B(y_0 - y) + C(z_0 - z)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{aligned}$$

8.4 空间直线及其方程

8.4.1 空间直线的一般方程

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

8.4.2 空间直线的对称式方程与参数方程

向量平行直线, 直线的方向向量

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_o M} &= (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \\ S &= (m, n, p) \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t, \text{对称式, 点向式方程} \\ \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \text{参数方程} \end{cases}$$

8.4.3 两直线夹角

$$L_1, s_1 = (A_1, B_1, C_1), L_2, s_2 = (A_2, B_2, C_2), \cos \theta = |\widehat{(s_1, s_2)}| = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \text{直线夹角}$$

8.4.4 直线与平面夹角

直线和投影直线的夹角, 直线与平面夹角

$$\begin{aligned} \varphi &= \left| \frac{\pi}{2} - (\vec{s}, \vec{n}) \right| \\ s &= (m, n, p) \\ n &= (A, B, C) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \\ \frac{A}{m} &= \frac{B}{n} = \frac{C}{p} \text{垂直} \end{aligned}$$

8.4.5 例

$$\left. \begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 &= 0 & I \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 &= 0 & II \end{aligned} \right\} L \Rightarrow A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 + \lambda (A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0 \text{过 } L \text{ 平面束, 不含 } II$$

8.5 曲面及其方程

8.5.1 曲面研究的基本问题

轨迹到方程, 方程到形状

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \text{ 球面}$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \text{ 球面}$$

$$Ax^2 + Ay^2 + Az^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0 \text{ 一般球面}$$

8.5.2 旋转曲面

平面上曲线绕直线旋转一周, 母线, 轴, 旋转曲面

$$f(y, z) = 0 \Rightarrow f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0 \text{ 圆台}$$

相交直线 L 绕 R 旋转一周, 交点顶点, 夹角 $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ 半顶角

$$z^2 = a^2(x^2 + y^2) \text{ 圆锥}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \text{ 双曲线} &\Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{(x^2+y^2)^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \text{ 单叶双曲面} \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{(z^2+y^2)^2}{b^2} = 1 \text{ 双叶双曲面} \end{aligned} \right\} \text{ 两种二次} \end{aligned} \right\}$$

8.5.3 柱面

$x^2 + y^2 = R^2$ 圆柱面, 准线 (定曲线), 母线

$$y^2 = ax \text{ 抛物柱面}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ 椭圆柱面}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ 双曲柱面}$$

三种二次

8.5.4 二次曲面九

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2 \text{ 椭圆锥面}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z \text{ 椭圆抛物面}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z \text{ 双曲抛物面}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ 椭球面}$$

8.6 空间曲线及其方程

8.6.1 空间曲线一般方程

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

8.6.2 空间曲线参数方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = a \sin \theta \\ z = b\theta \end{cases} \text{ 螺旋线, } 2\pi b \text{ 螺距}$$

空间曲线参数方程

$$\Gamma \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{[\varphi(t)]^2 + [\psi(t)]^2} \cos \theta \\ y = \sqrt{[\varphi(t)]^2 + [\psi(t)]^2} \sin \theta \\ z = \omega(t) \end{cases} \text{ 曲面}$$

$$\Gamma \begin{cases} x = a \sin \varphi \\ y = 0 \\ z = a \cos \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{[a \sin \varphi]^2 + [0]^2} \cos \theta = a \sin \varphi \cos \theta \\ y = \sqrt{[a \sin \varphi]^2 + [0]^2} \sin \theta = a \sin \varphi \sin \theta \\ z = a \cos \varphi, \end{cases} \quad \text{球面}$$

8.6.3 空间曲线在坐标面投影

$$\begin{aligned} &H(x, y) = 0 \quad \text{投影柱面} \\ &\begin{cases} H(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{投影曲线} \end{aligned}$$

9 多元函数微分及其应用

9.1 多元函数的基本概念

9.1.1 平面點集 n 維空間

平面點集

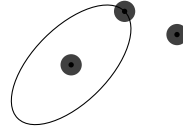
R^2 坐標平面

$C = \{(x, y) | x^2 + y^2 < r^2\}$ 平面點集

$U(P_0, \delta) = \{P | PP_0 < \delta\}$ 鄰域

$\dot{U}(P_0, \delta) = \{P | 0 < PP_0 < \delta\}$ 去心鄰域

$\exists U(P), U(P) \subset E, P \in E$ 內點
 $\exists U(P), U(P) \cap E = \emptyset, P \notin E$ 外點
 $P \in R^2, P = P_1 \cap P_2$
 $E \subset R^2 \left. \begin{array}{l} \exists U(P_1), U(P_1) \subset E \\ \exists U(P_2), U(P_2) \cap E = \emptyset \end{array} \right\}, P \in E$ 邊界點



E 邊界點的全體, ∂E 邊界點, ∂E

$\forall \delta > 0, \dot{U}(P, \delta) \cap E \neq \emptyset$ 總有 E 中的點, $P \in E$ 聚點 (內點和邊界)

開集, 內點; 閉集, $\partial E \subset E$; 連通集, 任意點連線仍在集合;

區域, 連通開集; 閉區域, 區域和邊界;

有界集, $\forall E \subset R^2, \text{if } \exists r > 0, E \subset U(O, r), \text{then } E$ 有界集; 無界集, 不是有界集

n 維空間

$R^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in R, i = 1, 2, \dots, n\}$ 集合

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$
 $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n$
 $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in R^n$
 $\lambda \in R$

$\left. \begin{array}{l} x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \end{array} \right\} R^n \text{ 中 } \text{四性運算}$

$\Rightarrow \rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$
 $\|x\| = \rho(x, 0) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$
 $\|x - a\| \rightarrow 0$, 變元趨于固定元, 記作 $x \rightarrow a$
 某正數 $\delta > 0$, 點集 $U(a, \delta) = \{x | x \in R^n, \rho(x, a) < \delta\}$, a 的 δ 鄰域

定義四性預算的集合, n 維空間

9.1.2 多元函數的概念

D 定義域

$D \subset R^2$, 映射 $f: D \rightarrow R$, 稱四二元函數, x, y 自變量

記四 $z = f(x, y), (x, y) \in D$ z 因變量

函數值 $f(x, y)$ 全體, $f(D) = \{z | z = f(x, y), (x, y) \in D\}$ 值域

$D \subset R^n$, 映射 $f: D \rightarrow R$, 稱四 n 元函數 ($n \geq 2$ 多元函數),

記四 $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\mathbf{x}), \mathbf{x}(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$

多元函數 $\mu = f(\mathbf{x})$, 有意義的變元 \mathbf{x} 的點集, 自然定義域

空間點集 $\{(x, y, z) | z = f(x, y), (x, y) \in D\}$, 二元函數 $z = f(x, y)$ 的圖形

9.1.3 多元函數的極限

$f(x, y)$ 定義域 D , $P_0(x_0, y_0)$ 是 D 聚點
 if $\exists A, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,
 when 點 $P(x, y) \in D \cap \dot{U}(P_0, \delta)$,
 $|f(P) - A| = |f(x, y) - A| < \varepsilon$ then A 稱四函數 $f(x, y)$ 在 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 極限,
 記四 $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A$

任意方向趨近

9.1.4 多元函數的連續性

$f(P) = f(x, y)$ 定義域 $D, P_0(x_0, y_0) \in D$ 聚點, $P_0 \in D$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$,
 then $f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 連續
 $f(x, y)$ 定義域 D, D 內每一點都是聚點, $f(x, y)$ 在 D 內每一點連續, $f(x, y)$ 在 D 內連續
 $f(x, y)$ 定義域 $D, P_0(x_0, y_0) \in D$ 聚點, if $f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 不連續, then $P_0(x_0, y_0) \in D$ 間斷點
 常數, 不同自變量的一元基本初等函數, 有限次四則運算和複合運算, **多元初等函數**
 一切多元初等函數在**定義區域** (定義域 D 的區域或閉區域) 連續 $\rightarrow \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$

有界閉區域 D , 多元連續函數, D 上有界, 取得最大值, 最小值 **(最值)**

性質 有界閉區域 D , 多元連續函數, 能取得介於最大值和最小值間的任何值 **(介值)**

有界閉區域 D , 多元連續函數, D 上一致連續 **(一致連續)**

9.2 偏導數

9.2.1 偏導數的定義及其計算法

$f(x, y), P_0(x_0, y_0), (x, y) \in U(P_0, \delta)$, $\text{if } \exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = A$,
 when $y = y_0, x = x_0 + \Delta x$, then $A \in \mathbb{R}$ $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 對 x 的偏導數,
 函數增量 $f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ 記 $\left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x=x_0, y=y_0}, f_x(x_0, y_0)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x=x_0, y=y_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \\ \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right]_{x=x_0, y=y_0} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \end{array} \right.$$

$f_x(x, y), f_y(x, y)$ 偏導函數, 偏導數

偏導數記號 ∇ 整體, 不能看成微分的商

(一元可導連) 各偏導存在, 不一定連續

9.2.2 高階偏導數

若偏導數的偏導仍存在, 則稱為 $f(x, y)$ 的二階偏導數

$$z = f(x, y) \text{ 的偏導數 } \frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x, y), \frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x, y), \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x, y) \text{ (混合偏導數)} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y) \text{ (混合偏導數)} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y) \end{array} \right.$$

if $f(x, y)$ 的二階偏導數, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 在 D 連續, then $(x, y) \in D, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

$$\left. \begin{array}{l} z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \\ u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \end{array} \right\} \text{拉普拉斯方程}$$

9.3 全微分

9.3.1 全微分定義

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \approx f_x(x, y) \Delta x \\ f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \approx f_y(x, y) \Delta y \end{array} \right. \quad \text{偏增量, 偏微分}$$

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \quad \text{全增量}$$

$if \quad \Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$
 $then \quad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, A, B \text{ 不依赖 } \Delta x, \Delta y$
 $z = f(x, y), \text{ 在 } (x, y) \text{ 的某邻域有定义,}$
 $f(x, y) \text{ 在 } (x, y) \text{ 可微分,}$
 $A\Delta x + B\Delta y, \text{ 称为函数 } f(x, y) \text{ 全微分,}$
 $记作 } dz = A\Delta x + B\Delta y$

多元函数在区域 D 内个点处都可微分, 函数在 D 内可微分

多元函数在点 P 可微分, 函数在该点连续

$if \quad f(x, y) \text{ 在点 } (x, y) \text{ 可微分,}$
 $then \quad \text{函数 } f(x, y) \text{ 在点 } (x, y) \text{ 偏导数 } \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \text{ 必存在}$
 $\text{函数 } f(x, y) \text{ 在点 } (x, y) \text{ 全微分 } dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$

$z = f(x, y) \text{ 的偏导数 } \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \text{ 在点 } (x, y) \text{ 连续, 函数在该点可微分}$

微分 \mathbb{F} 加原 \mathbb{F} , $u = (x, y, z), du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$

9.3.2 全微分在近似计算中的应用

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}, \Delta g \leq 4\pi^2 \left(\frac{1}{T^2} \delta_l + \frac{2l}{T^3} \delta_T \right)$$

9.4 多元复合函数的求导法则

$if \quad u = \varphi(t), v = \psi(t), \text{ 在 } t \text{ 可导,}$
 $z = f(u, v) \text{ 在 } (u, v) \text{ 具有连续偏导}$
 $, then \quad \text{复合函数 } z = f(\varphi(t), \psi(t)) \text{ 在 } t \text{ 点可导, 且 } \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt} \text{ 全导数}$

$if \quad u = \varphi(t), v = \psi(t), w = \omega(t), \text{ 在 } t \text{ 可导, } z = f(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)),$
 $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{dw}{dt}$

$u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y),$
 $if \quad \text{在 } (x, y) \text{ 具有对 } x, y \text{ 的偏导数,}$
 $z = f(u, v) \text{ 在 } (u, v) \text{ 具有连续偏导}$
 $, then \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$
 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$

$u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y), w = \omega(x, y),$
 $if \quad \text{在 } (x, y) \text{ 点两偏导都存在}$
 $z = f(\varphi(x, y), \psi(x, y), \omega(x, y)),$
 $, then \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}$
 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y}$

$u = \varphi(x, y) \text{ 在 } (x, y) \text{ 点两偏导都存在,}$
 $if \quad v = \psi(y) \text{ 在 } y \text{ 点可导,}$
 $z = f(u, v) \text{ 在 } (u, v) \text{ 具有连续偏导}$
 $, then \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$
 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$

$if \quad z = f(u, x, y) = f[\varphi(x, y), x, y] \text{ 有 } x, y \text{ 的偏导数, then}$
 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}$
 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}$

$$\begin{aligned}
 f'_1 &= f'_u(u, v) \\
 f'_2 &= f'_v(u, v) \\
 f(u, v), \quad f'_{11} &= f''_{uu}(u, v) \\
 f'_{12} &= f''_{uv}(u, v) \\
 f'_{21} &= f''_{vu}(u, v) \\
 f'_{22} &= f''_{vv}(u, v)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 dz &= \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \\
 z = f(u, v) = f(\varphi(x, y), \psi(x, y)), &= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \\
 &= \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy
 \end{aligned}$$

9.5 隱函數求導公式

9.5.1 一個方程

$P_0(x_0, y_0), (x, y) \in U(P_0, \delta)$ 時 $F(x, y) = 0$, 在 $(x, y) \in U(P_0, \delta)$ 時,
 if $F(x, y)$ 具有連續偏導, $F(x_0, y_0) = 0, F_y(x_0, y_0) \neq 0$, then 能確定唯一連續, 連續導數的函數 $y = f(x)$,
 $y_0 = f(x_0), \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$

$P_0(x_0, y_0, z_0), (x, y, z) \in U(P_0, \delta)$ 時 $F(x, y, z) = 0$, 在 $(x, y, z) \in U(P_0, \delta)$ 時,
 if $F(x, y, z)$ 具有連續偏導, $F(x_0, y_0, z_0) = 0, F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, then 能確定唯一連續, 連續導數的函數 $z = f(x, y)$,
 $z_0 = f(x_0, y_0), \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$

9.5.2 方程組的情形

$P_0(x_0, y_0, u_0, v_0), (x, y, u, v) \in U(P_0, \delta)$ 時
 $F(x, y, u, v), G(x, y, u, v)$ 具有連續偏導,
 if $F(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0, G(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$, then $u = f(x, y), v = f(x, y)$
 $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \left(\begin{array}{l} \text{雅可比式} \\ \text{偏導数组成的函数行列式} \end{array} \right)$
 $F(x, y, u, v) = 0, G(x, y, u, v) = 0$,
 在 $(x, y, u, v) \in U(P_0, \delta)$ 時,
 能確定唯一組連續, 連續偏導數的函數,
 $u = f(x, y), v = f(x, y)$
 $u_0 = f(x_0, y_0), v_0 = f(x_0, y_0)$
 $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)}$
 $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)}$
 $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)}$
 $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)}$

$$\begin{cases} F_x + F_u \frac{\partial u}{\partial x} + F_v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ G_x + G_u \frac{\partial u}{\partial x} + G_v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} -F_x & F_v \\ -G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} F_u & -F_x \\ G_u & -G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)} \end{array} \quad \text{证明或推导}$$

$$\begin{aligned} dudv, x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), \\ dx = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv \\ dy = \frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} & |(dx, dy)|_{du=0} \times |(dx, dy)|_{dv=0}| \\ & = \left| \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} du, \frac{\partial \psi}{\partial u} du \right) \times \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} dv, \frac{\partial \psi}{\partial v} dv \right) \right| \\ & = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right| dudv \\ & = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} dudv \\ & = \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} dudv \end{aligned} \quad \text{二重积分换元和雅可比}$$

9.6 多元函数微分学的几何应用

9.6.1 一元向量值函数及其导数

$$\Gamma \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \quad t \in [\alpha, \beta] \\ z = \omega(t) \end{cases}$$

記 $r = xi + yj + zk, f(t) = \varphi(t)i + \psi(t)j + \omega(t)k$,
 $r = f(t), t \in [\alpha, \beta]$

数集 $D \subset R$, 映射 $f: D \rightarrow R^n$ 一元向量值函数, 记 $\mathbb{F}r = f(t), t \in D$

$t \in U(t_0)$, 向量值函数 $f(t)$, if $\exists r_0, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta$, when $0 < |t - t_0| < \delta, |f(t) - r_0| < \varepsilon$, then $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = r_0$

$t \in u(t_0)$, 向量值函数 $f(t)$, if $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0)$, $f(t)$ 在 t_0 连续

$t \in D$, 向量值函数 $f(t)$, if $D_1 \subset D$, D_1 内每点连续, D_1 上连续

极限向量为 $r = f(t)$

$t \in U(t_0)$, 向量值函数 $f(t)$, if $\exists \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$, then

在 t_0 导数或导向量,

记为 $f'(t_0)$, $\frac{dr}{dt}|_{t=t_0}$

$$f'(t_0) = f'_1(t_0)i + f'_2(t_0)j + f'_3(t_0)k$$

$$\frac{d}{dt}C = 0$$

$$\frac{d}{dt}[cu(t)] = cu'(t)$$

$$\frac{d}{dt}[u(t) \pm v(t)] = u'(t) \pm v'(t)$$

$$\text{向量值函数 } u(t), v(t), \text{ 数量值函数 } \varphi(t) \Rightarrow \frac{d}{dt}[\varphi(t)v(t)] = \varphi'(t)v(t) + \varphi(t)v'(t)$$

$$\frac{d}{dt}[u(t) \cdot v(t)] = u'(t) \cdot v(t) + u(t) \cdot v'(t)$$

$$\frac{d}{dt}[u(t) \times v(t)] = u'(t) \times v(t) + u(t) \times v'(t)$$

$$\frac{d}{dt}u[\varphi(t)] = \varphi'(t)u'[\varphi(t)]$$

$$f'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\Delta r}{\Delta t} \text{ 与曲线相切}$$

9.6.2 空间曲线的切线与法平面

$$\Gamma \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \omega(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta] \Rightarrow \frac{x-x_0}{\varphi'(t)} = \frac{y-y_0}{\psi'(t)} = \frac{z-z_0}{\omega'(t)}$$

$$\varphi'(t)(x-x_0) + \psi'(t)(y-y_0) + \omega'(t)(z-z_0) = 0$$

$$\Gamma \begin{cases} y = \psi(x), \\ z = \omega(x), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x, \\ y = \psi(x), \\ z = \omega(x), \end{cases} \Rightarrow \frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{\psi'(x)} = \frac{z-z_0}{\omega'(x)}$$

$$(x-x_0) + \psi'(x)(y-y_0) + \omega'(x)(z-z_0) = 0$$

$$\Gamma \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \psi(x), \\ z = \omega(x), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(x, \psi(x), \omega(x)) = 0 \\ G(x, \psi(x), \omega(x)) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dx} = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial G}{\partial z} \frac{dz}{dx} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \psi'(x) = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)} = -\frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}}$$

$$\frac{dz}{dx} = \omega'(x) = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, x)} = -\frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, x)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}} = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}}$$

9.6.3 曲面的切平面与法线

$$\sum F(x, y, z) = 0$$

$$\text{任意曲线} \Gamma \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \quad (\alpha < t < \beta), \\ z = \omega(t), \end{cases}$$

$$t = t_0 \text{ 对应 } M(x_0, y_0, z_0)$$

曲线 Γ 在曲面 \sum 上, 过 M 点

$$F[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)] = 0,$$

$$F_x|_M \varphi'(t_0) + F_y|_M \psi'(t_0) + F_z|_M \omega'(t_0)$$

$$= (F_x|_M, F_y|_M, F_z|_M) \cdot (\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0))$$

$$= n \cdot s = 0,$$

任一过 M 曲线切线垂直过 M 向量 n , 切线共面, 称为曲面切平面

$$\Rightarrow \begin{aligned} &F_x|_M(x - x_0) + F_y|_M(y - y_0) + F_z|_M(z - z_0) = 0 \\ &\frac{(x-x_0)}{F_x|_M} = \frac{(y-y_0)}{F_y|_M} = \frac{(z-z_0)}{F_z|_M} \end{aligned}$$

$$F_x|_M = f_x(x_0, y_0), F_y|_M = f_y(x_0, y_0), F_z|_M = -1$$

$$\text{记 } K = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}, \cos \gamma > 0,$$

$$z = f(x, y) \Rightarrow F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0 \Rightarrow \text{方向余弦 } (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \left(\frac{-f_x}{K}, \frac{-f_y}{K}, \frac{1}{K} \right)$$

$$\begin{aligned} &f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0 \\ &\frac{(x-x_0)}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{(y-y_0)}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{(z-z_0)}{-1} \end{aligned}$$

9.7 方向导数与梯度

9.7.1 方向导数

$$\text{单位向量 } e_l = (\cos \alpha, \cos \beta),$$

$$\text{过 } (x_0, y_0) \text{ 射线 } l \begin{cases} x = x_0 + t \cos \alpha \\ y = y_0 + t \cos \beta \end{cases} (t \geq 0), \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial l}|_{(x_0, y_0)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

方向导数

$$z = f(x, y)$$

$$f(x, y) \text{ 在 } P_0(x_0, y_0) \text{ 可微分, 该点任意方向, 方向导数存在, } \frac{\partial f}{\partial l}|_{(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f_y(x_0, y_0) \cos \beta$$

$$f(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial l}|_{(x_0, y_0, z_0)} = f_x(x_0, y_0, z_0) \cos \alpha + f_y(x_0, y_0, z_0) \cos \beta + f_z(x_0, y_0, z_0) \cos \gamma$$

9.7.2 梯度

$$f(x, y), D \text{ 内连续偏导数, } \forall P_0 \in D, \mathbf{grad} f(x_0, y_0) = \Delta f(x_0, y_0) = f_x|_{P_0} i + f_y|_{P_0} j, \text{ 梯度, } \Delta = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j \text{ 向量微分算子}$$

$$\begin{aligned} f(x, y) \text{ 在 } (x_0, y_0) \text{ 可微分, } &\frac{\partial f}{\partial l}|_{(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f_y(x_0, y_0) \cos \beta \\ &= \mathbf{grad} f(x_0, y_0) \cdot e_l \\ \text{单位向量 } e_l = (\cos \alpha, \cos \beta), &= |\mathbf{grad} f(x_0, y_0)| \cos \theta, \theta = \left(\mathbf{grad} f(x_0, y_0), e_l \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{曲面 } \sum z = f(x, y), \text{ 等值线 } L f(x, y) = 0, P_0(x_0, y_0), &\text{ 单位法向量 } n = \frac{1}{k} (f_x|_{P_0}, f_y|_{P_0}) \\ \text{记 } k = \sqrt{f_x^2(x_0, y_0) + f_y^2(x_0, y_0)}, &= \frac{\Delta f(x_0, y_0)}{|\Delta f(x_0, y_0)|} \\ &\Delta f(x_0, y_0) = |\Delta f(x_0, y_0)| n = \frac{\partial f}{\partial n} n \\ &\text{梯度} = \text{梯度的模} \quad \text{梯度的方向} \end{aligned}$$

$$\mathbf{grad} f = \Delta f = f_x|_{P_0} i + f_y|_{P_0} j + f_z|_{P_0} k,$$

$$f(x, y, z), G \text{ 内连续偏导数, } P_0(x_0, y_0, z_0), \text{ 等值面 } f(x, y, z) = c$$

等值面法线方向 n

空间区域 $G \quad \forall M \in G \rightarrow$ 数量 $f(M)$, G 内数量场

空间区域 $G \quad \forall M \in G \rightarrow$ 向量 $f(M)$, G 内向量场

if $F(M)$ 是 $f(M)$ 的梯度 then $f(M)$ 势函数, $F(M)$ 势场

$\frac{m}{r}$ 引力势, $\mathbf{grad} \frac{m}{r}$ 引力场

9.8 多元函数的极值及其求法

9.8.1 多元函数的极值及最大值最小值

if $\exists U(P_0) \subset D, \forall (x, y) \neq P_0, f(x, y) < f(x_0, y_0)$, then 极大值 $f(x_0, y_0)$

$D, z = f(x, y), P_0(x_0, y_0) \in D$, if $\exists U(P_0) \subset D, \forall (x, y) \neq P_0, f(x, y) > f(x_0, y_0)$, then 极小值 $f(x_0, y_0)$

极大值, 极小值统称极值

if $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 具有偏导数, 且在 (x_0, y_0) 点具有极值, then $f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$

if $f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$, then 驻点 (x_0, y_0)

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

if $z = f(x, y, z)$ 在 (x_0, y_0, z_0) 具有偏导数, 且在 (x_0, y_0, z_0) 点具有极值, then $f_y(x_0, y_0, z_0) = 0,$

$$f_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

$z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的某邻域内连续,

$AC - B^2 > 0$, 有极值, $A < 0$ 极大值, $A > 0$ 极小值

且有一阶及二阶偏导数, 又 $f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$ if

$AC - B^2 < 0$, 无极值

令 $f_{xx}(x_0, y_0) = A, f_{xy}(x_0, y_0) = B, f_{yy}(x_0, y_0) = C$

$AC - B^2 = 0$, 可能有极值

驻点, 偏导不存在点

9.8.2 条件极值 拉格朗日数乘法

无条件极值, 条件极值; 条件极值到无条件极值

(x_0, y_0) 的某邻域内 $z = f(x, y), \varphi(x, y)$,

有连续一阶导数 $\varphi(x, y) = 0$ (条件) $\rightarrow y = \varphi(x)$, \Rightarrow

$z = f(x, \varphi(x))$ (函数)

$$\left. \frac{dz}{dx} \right|_{x=x_0} = 0$$

$$f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0) \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = 0$$

$$f_x(x_0, y_0) - f_y(x_0, y_0) \frac{\varphi_x(x_0, y_0)}{\varphi_y(x_0, y_0)} = 0$$

$$\text{记 } \frac{f_y(x_0, y_0)}{\varphi_y(x_0, y_0)} = -\lambda$$

$$f_y(x_0, y_0) - f_y(x_0, y_0) \frac{\lambda}{\lambda} = 0$$

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) + \lambda \varphi_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) + \lambda \varphi_y(x_0, y_0) = 0 \\ \varphi(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) \Rightarrow \begin{cases} L_x(x_0, y_0) = 0 \\ L_y(x_0, y_0) = 0 \\ \varphi(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

拉格朗日函数 L , 拉格朗日乘子 λ
函数 $f(x, y)$, 条件 $\varphi(x, y) = 0$

$$L(x, y, z, t) = f(x, y, z, t) + \lambda \varphi(x, y, z, t) + \mu \psi(x, y, z, t) \Rightarrow \begin{cases} L_x(x_0, y_0, z_0, t_0) = 0 \\ L_y(x_0, y_0, z_0, t_0) = 0 \\ L_z(x_0, y_0, z_0, t_0) = 0 \\ L_t(x_0, y_0, z_0, t_0) = 0 \\ \varphi(x_0, y_0, z_0, t_0) = 0 \\ \psi(x_0, y_0, z_0, t_0) = 0 \end{cases}$$

拉格朗日函数 L ,
拉格朗日乘子 λ, μ
函数 $f(x, y, z, t)$,
条件 $\varphi(x, y, z, t) = 0$,
 $\psi(x, y, z, t) = 0$

9.8.3 二元函数的泰勒公式

$z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 某邻域内连续,

有 $n+1$ 阶连续偏导数,

$(x_0 + h, y_0 + k) \in U(P_0, \delta)$

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0, y_0) \\ &\Rightarrow \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x_0, y_0) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x_0, y_0) \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \quad (0 < \theta < 1) \end{aligned}$$

$$\Phi(t) = f(x_0 + h, y_0 + k) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$$\Phi^{(n)}(t) = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x_0 + ht, y_0 + kt)$$

$$\text{证明: } \Phi(t) = \Phi(0) + \Phi'(0)t + \frac{1}{2}\Phi''(0)t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\Phi^{(n)}(0)t^n + \frac{1}{(n+1)!}\Phi^{(n+1)}(\theta t) \quad (0 < \theta < 1) \quad (0)$$

$$\Phi(1) = \Phi(0) + \Phi'(0) + \frac{1}{2}\Phi''(0) + \cdots + \frac{1}{n!}\Phi^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!}\Phi^{(n+1)}(\theta) \quad (0 < \theta < 1) \quad ()$$

$$n=0 \text{ 时 } f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = hf_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + kf_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$$

$$f(x, y), (x, y) \in D, f_x(x, y) \equiv 0, f_y(x, y) \equiv 0, f(x, y) = c$$

9.8.4 极值充分证明

$$\Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

$$= \left[h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right] f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \left[h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$$

$$f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$$

$$= \frac{1}{2} \left[h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$$

$$= \frac{1}{2} (h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy})$$

$$= \frac{1}{2f_{xx}} (h^2 f_{xx}^2 + 2hk f_{xy} f_{xx} + k^2 f_{xy}^2 - k^2 f_{xy}^2 + k^2 f_{yy} f_{xx})$$

$$= \frac{1}{2f_{xx}} \left[(hf_{xx} + kf_{xy})^2 + k^2 (f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2) \right]$$

$$A = f_{xx}, C = f_{yy}, B = f_{xy}$$

$$AC - B^2 > 0 \quad \begin{cases} A > 0, f(x, y) > f(x_0, y_0), \text{极小值} \\ A < 0, f(x, y) < f(x_0, y_0), \text{极大值} \end{cases}$$

$$\text{有} \quad \begin{cases} A = C = 0, k = h, \Delta f = f_{x,y} \\ A = C = 0, k = -h, \Delta f = -f_{x,y} \end{cases}$$

$$AC - B^2 < 0 \quad \begin{cases} A \neq C = 0, k = 0, \Delta f = \frac{1}{2}h^2 f_{xx} \\ A \neq C = 0, h = -f_{xy}s, k = f_{xx}s, \end{cases}$$

$$\text{无} \quad \begin{cases} A \neq C = 0, h = -f_{xy}s, k = f_{xx}s, \end{cases}$$

$$AC - B^2 = 0 \quad \begin{cases} f(x, y) = x^2 + y^4 \\ \text{有可能} \quad g(x, y) = x^2 + y^3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{1}{2} \{ f_{xy}^2 f_{xx} - 2f_{xy}^2 f_{xx} + f_{xx}^2 f_{yy} \} \\ &= \frac{1}{2} f_{xx} \{ f_{xy}^2 - 2f_{xy}^2 + f_{xx} f_{yy} \} \\ &= \frac{1}{2} f_{xx} \{ -f_{xy}^2 \} \end{aligned}$$

9.8.5 最小二乘法

y_i 数据 $\Rightarrow f(t) = at + b$ 线性经验公式

$$M = \sum [y_i - f(t_i)]^2 = \sum [y_i - (at_i + b)]^2 \text{ 偏差平方和,}$$

M 最小为条件选择常数 a, b 的方法, 最小二乘法

\sqrt{M} 均方误差

$$\text{非线性到线性 } M_{\min}(a, b) \Rightarrow \begin{cases} M_a(a, b) = 0 \\ M_b(a, b) = 0 \\ \frac{\partial M}{\partial a} = -2 \sum [y_i - (at_i + b)] = 0 \\ \frac{\partial M}{\partial b} = -2 \sum [y_i - (at_i + b)] = 0 \\ \sum t_i y_i - a \sum t_i^2 - b \sum y_i = 0 \\ \sum y_i - a \sum t_i y_i - bn = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\left| \begin{array}{cc} \sum t_i y_i & \sum y_i \\ \sum y_i & n \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} \sum t_i^2 & \sum y_i \\ \sum t_i y_i & n \end{array} \right|} \\ b = \frac{\left| \begin{array}{cc} \sum t_i^2 & \sum t_i y_i \\ \sum t_i y_i & \sum y_i \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cc} \sum t_i^2 & \sum y_i \\ \sum t_i y_i & n \end{array} \right|} \end{cases}$$

10 重积分

10.1 二重积分的概念与性质

10.1.1 二重积分的概念

曲顶柱体的体积

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

平面薄片的质量

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

闭区域 D 有界函数

$$\Rightarrow \iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i \text{ 二重积分}$$

$$\text{分割 } D, \Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n \Rightarrow \iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

$$\Delta\sigma_i = \Delta x_j \cdot y_k, d\sigma \rightarrow dxdy, \iint_D f(x, y) dxdy$$

10.1.2 二重积分的性质

$$\begin{aligned} \iint_D [\alpha f + \beta g] d\sigma &= \alpha \iint_D f d\sigma + \beta \iint_D g d\sigma \\ \iint_D f d\sigma &= \iint_{D_1} f d\sigma + \iint_{D_2} f d\sigma \\ g(x, y), g &\Rightarrow \iint_D 1 \cdot d\sigma = \iint_D d\sigma = \sigma \\ f(x, y), f &\Rightarrow \iint_D f d\sigma \leq \iint_D g d\sigma, f \leq g \\ m\sigma &\leq \iint_D f d\sigma \leq M\sigma, m \leq f \leq M \\ \iint_D f d\sigma &= f(\xi, \eta) \sigma \quad (\xi, \eta) \in D \end{aligned}$$

10.2 二重积分的计算法

10.2.1 直角坐标计算二重积分

$$\begin{aligned} x\text{型} &\begin{cases} D: \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b \\ A(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \\ V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy = \iint_D f(x, y) d\sigma \end{cases} \\ y\text{型} &\begin{cases} D: \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), a \leq y \leq b \\ A(y) = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \\ V = \int_a^b A(y) dy = \int_a^b \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx = \iint_D f(x, y) d\sigma \end{cases} \end{aligned}$$

非 x 非 y 型, 分割积分面

10.2.2 极坐标计算二重积分

$$\begin{aligned} S_{\text{扇}} &= \frac{r^2 \theta}{2} \\ \Delta\sigma &= \frac{1}{2} [(r + \Delta r)^2 - r^2] \Delta\theta = \frac{1}{2} [\Delta r^2 + 2r\Delta r] \Delta\theta = \frac{1}{2} [\Delta r + 2r] \Delta r \Delta\theta = \bar{r} \Delta r \Delta\theta \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum f(\bar{r} \cos \bar{\theta}, \bar{r} \sin \bar{\theta}) \bar{r} \Delta r \Delta\theta \\ \iint_D f(x, y) d\sigma &= \iint_D f(x, y) dxdy = \iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \\ \iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta &= \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr \right] d\theta \\ \sigma &= \iint_D r dr d\theta = \frac{1}{2} \int_a^b [\varphi_2(\theta)^2 - \varphi_1(\theta)^2] d\theta = \frac{1}{2} \int_a^b \varphi_2(\theta)^2 d\theta \end{aligned}$$

10.2.3 二重积分换元法

$f(x, y)$, D 内连续,

变换 $T: x = x(u, v), y = y(u, v)$

uOv 面 $D' \rightarrow xOy$ 面 D , 一对一 $\Rightarrow \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv$

$x(u, v), y(u, v)$ 在 D' 一阶连续偏导,

D' 上雅可比式, $J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos c$$

$$\begin{cases} M_1: x_1 = x(u, v), y_1 = y(u, v) \\ M_2: x_2 = x(u+h, v) = x_1 + x_u(u, v)h + o(h) \\ y_2 = y(u+h, v) = y_1 + y_u(u, v)h + o(h) \\ M_4: x_3 = x(u, v+h) = x_1 + x_v(u, v)h + o(h) \\ y_3 = y(u, v+h) = y_1 + y_v(u, v)h + o(h) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} s_{\text{三角形}} &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_u(u, v)h & y_u(u, v)h \\ x_v(u, v)h & y_v(u, v)h \end{vmatrix} = \frac{1}{2} h^2 \begin{vmatrix} x_u(u, v) & y_u(u, v) \\ x_v(u, v) & y_v(u, v) \end{vmatrix} = \frac{1}{2} h^2 \begin{vmatrix} x_u(u, v) & x_v(u, v) \\ y_u(u, v) & y_v(u, v) \end{vmatrix} = \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \end{aligned}$$

10.3 三重积分

10.3.1 三重积分的概念

$f(x, y, z)$, 有界闭区域 Ω , $\Rightarrow \iiint_D f(x, y, z) dv = \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$
分割成 $\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_n$,

10.3.2 三重积分的计算

利用直角坐标系计算

$$\begin{aligned} F(x_0, y_0) &= \int_{z_1(x_0, y_0)}^{z_2(x_0, y_0)} f(x_0, y_0, z) dz \\ \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv &= \iint_{D_{xy}} F(x, y) d\sigma = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] d\sigma = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \\ &= \int_{c_1}^{c_2} dz \iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \end{aligned}$$

利用柱坐标系计算

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz$$

$$dv = r dr d\theta dz$$

利用球面坐标计算

$$\begin{cases} x = OP \cos \theta = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = OP \sin \theta = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$

φ, Z 轴; θ, X 轴
 $dv = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$

10.4 重积分的应用

曲面的面积

曲面 $S: z = f(x, y)$

$$|(f_x, f_y, -1) \cdot (0, 0, 1)| = 1 = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} \cdot 1 \cdot \cos \theta, \quad A = \iint_D \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} d\sigma$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}$$

$$\frac{d\sigma}{dA} = \cos \theta, \quad \sum \frac{\sigma_k}{A_k} = \cos \theta, \quad dA = \frac{1}{\cos \theta} d\sigma$$

* 利用曲面的参数方程求曲面的面积

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in D \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv \\ E &= x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \\ F &= x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \\ G &= x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \end{aligned}$$

x, y, z 在 D 内连续一阶

$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}$ 不全为零

质心

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{M_y}{M} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, & dM_y &= x \mu(x, y) d\sigma, M_y = \iint_D x \mu(x, y) d\sigma \\ \bar{y} &= \frac{M_x}{M} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}, & dM_x &= y \mu(x, y) d\sigma, M_x = \iint_D y \mu(x, y) d\sigma \\ M_y, M_x &\text{净距, } M \text{ 质点系总质量} & dM &= \mu(x, y) d\sigma, M = \iint_D \mu(x, y) d\sigma \\ & & \bar{x} &= \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_D x \mu(x, y) d\sigma}{\iint_D \mu(x, y) d\sigma} = \frac{\mu(x, y)=c}{A=\iint_D d\sigma} \frac{1}{A} \iint_D x \mu(x, y) d\sigma \\ & & \bar{y} &= \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_D y \mu(x, y) d\sigma}{\iint_D \mu(x, y) d\sigma} = \frac{\mu(x, y)=c}{A=\iint_D d\sigma} \frac{1}{A} \iint_D y \mu(x, y) d\sigma \end{aligned}$$

$$M = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dv, \quad \begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} x \rho(x, y, z) dv, \\ \bar{y} = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} y \rho(x, y, z) dv, \\ \bar{z} = \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} z \rho(x, y, z) dv, \end{cases}$$

转动惯量

$$\begin{aligned} I_x &= \sum y_i^2 m_i, & dI_x &= y^2 \mu(x, y) d\sigma \\ I_y &= \sum x_i^2 m_i, & dI_y &= x^2 \mu(x, y) d\sigma \\ & \Rightarrow & I_x &= \iint_D y^2 \mu(x, y) d\sigma \\ & & I_y &= \iint_D x^2 \mu(x, y) d\sigma \end{aligned}$$

$$I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dv$$

$$I_y = \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dv$$

$$I_z = \iiint_{\Omega} (y^2 + x^2) \rho(x, y, z) dv$$

引力

$$F = G \frac{mM}{r^2}$$

$$(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \left(\frac{x-x_0}{r}, \frac{y-y_0}{r}, \frac{z-z_0}{r} \right)$$

$$F = (|F| \cos \alpha, |F| \cos \beta, |F| \cos \gamma) \stackrel{|dF|=G \frac{1 \cdot \rho(x, y, z) dv}{r^2}}{=} \left(\iint_{\Omega} \frac{G \rho(x, y, z)(x-x_0)}{r^2 \cdot r} dv, \dots \right)$$

10.5 含参变量的积分

$$f(x, y), R = [a, b] \times [c, d] = \{[x, y] | x \in [a, b], y \in [c, d]\}$$

$$\varphi(x) = \int_c^d f(x, y) dy \quad (a \leq x \leq b) \text{ 含参数变量积分}$$

$f(x, y)$ 在 R 连续, $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 连续

$$f(x, y) \text{ 在 } R \text{ 连续, } \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

$$f(x, y), f_x(x, y) \text{ 在 } R \text{ 连续, } \varphi(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 可微, } \varphi'(x) = \frac{d}{dx} \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d f_x(x, y) dy$$

$$\Phi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \quad (a \leq x \leq b) \text{ 含参数变量积分}$$

$f(x, y)$ 在 R 连续, $\alpha(x), \beta(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, $c \leq \alpha(x), \beta(x) \leq d, \Phi(x)$ 在 $[a, b]$ 连续,

$f(x, y), f_x(x, y)$ 在 R 连续, $\alpha(x), \beta(x)$ 在 $[a, b]$ 可微, $c \leq \alpha(x), \beta(x) \leq d, \Phi(x)$ 在 $[a, b]$ 可微,

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_x(x, y) dy + f[x, \beta(x)] \beta'(x) - f[x, \alpha(x)] \alpha'(x)$$

11 曲线积分与曲面积分

11.1 对弧长的曲线积分

11.1.1 对弧长的曲线积分的概念与性质

曲柄构件的质量

$$m \approx \sum \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum \mu(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

$f(x, y)$ 在直线 L 上有界,

$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i,$$

L 插入点 M_1, M_2, \dots, M_{n-1} 分割弧 Δs_i ,

函数对弧长积分, 第一类曲线积分

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i$$

封闭曲线 L , $\int_L f(x, y) ds = \oint_L f(x, y) ds$

分段光滑 $\int_{L_1+L_2} f(x, y) ds = \int_{L_1} f(x, y) ds + \int_{L_2} f(x, y) ds$

常数 α, β , $\int_L [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)] ds = \alpha \int_L f(x, y) ds + \beta \int_L g(x, y) ds$

曲线 L 上 $f(x, y) \leq g(x, y)$, $\int_L f(x, y) ds \leq \int_L g(x, y) ds$

$$\begin{aligned} -|c| \leq a \leq |c|, \quad \Rightarrow \quad -\int |c| ds \leq \int a ds \leq \int |c| ds \quad \xrightarrow{a=c=f(x,y)} \quad \left| \int f(x, y) ds \right| \leq \int |f(x, y)| ds \\ |a| \leq |c| \quad \Rightarrow \quad \left| \int a ds \right| \leq \int |c| ds \end{aligned}$$

11.1.2 对弧长的曲线积分的计算法

$f(x, y)$ 在曲线 L 连续

$$L: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta] \quad \Rightarrow \quad \int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum f(\varphi(t_i), \psi(t_i)) \sqrt{\varphi'^2(t_i) + \psi'^2(t_i)} \Delta t_i$$

$\varphi(t), \psi(t)$, 在 $[\alpha, \beta]$ 连续一阶导

$$\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) \neq 0$$

$$y = \psi(x) \rightarrow \begin{cases} x = \varphi(x) = x \\ y = \psi(x) \end{cases} \rightarrow \sqrt{\varphi'^2(x) + \psi'^2(x)} = \sqrt{1 + \psi'^2(x)}$$

$$x = \varphi(y) \rightarrow \begin{cases} x = \varphi(y) \\ y = \psi(y) = y \end{cases} \rightarrow \sqrt{\varphi'^2(y) + \psi'^2(y)} = \sqrt{1 + \varphi'^2(y)}$$

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta] \rightarrow \int_{\Gamma} f(x, y, z) ds = \int_{\Gamma} f(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \omega'^2(t)} dt$$

11.2 对坐标的曲线积分

11.2.1 对坐标的曲线积分的概念与性质

变力沿曲线所作的功

$$W = \sum \Delta W \approx \sum [P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i]$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum [P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i]$$

$$\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y, z), Q(x, y, z))$$

$$\mathbf{A}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

$$d\mathbf{r}_2 = (dx, dy)$$

$$d\mathbf{r}_3 = (dx, dy, dz)$$

$$\int_L \alpha \mathbf{F}_1 + \beta \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2 = \alpha \int_L \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}_2 + \beta \int_L \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}_2$$

$$\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_2 = \int_{L_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_2 + \int_{L_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}_2$$

$$\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{L^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$\int_L P(x, y) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i$$

$$\int_L P(x, y) dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i$$

→ 第二类曲线积分

$$W = \int_L \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{r}_2$$

$$W_3 = \int_{\Gamma} \mathbf{A}(x, y, z) \cdot d\mathbf{r}_3$$

11.2.2 对坐标的曲线积分的计算法

$P(x, y), Q(x, y)$ 在 L 连续

$$L: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \rightarrow \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_\alpha^\beta [P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t)] dt$$

$\varphi(t), \psi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 连续一阶导

$$\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) \neq 0$$

$$x = \varphi(y) \rightarrow L: \begin{cases} x = \varphi(y) \\ y = y \end{cases} \rightarrow \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_\alpha^\beta [P(\varphi(y), y) \varphi'(y) + Q(\varphi(y), y)] dy$$

$$y = \psi(x) \rightarrow L: \begin{cases} x = x \\ y = \psi(x) \end{cases} \rightarrow \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_\alpha^\beta [P(x, \psi(x)) + Q(x, \psi(x)) \psi'(x)] dx$$

$$\Gamma: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases} \rightarrow \int_\Gamma (P, Q, R) \cdot (dx, dy, dz) = \int_\Gamma P\varphi' + Q\psi' + R\omega' dt$$

11.2.3 两类曲线积分的关系

$$\begin{aligned} L: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} & \quad \int_L [P \cos \alpha + Q \cos \beta] ds = \int_L \left[P \frac{\varphi'}{k} + Q \frac{\psi'}{k} \right] k dt \\ & \quad = \int_L [P\varphi' + Q\psi'] dt \\ & \quad \int_L (P, Q) \cdot (\cos \alpha, \cos \beta) ds = \int (P, Q) \cdot (dx, dy) = \int (P, Q) dr \\ \text{记 } k &= \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} \rightarrow \int_L \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \int_L \mathbf{F}_n ds = \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ \text{切向量 } \mathbf{n} &= (\cos \alpha, \cos \beta) = \left(\frac{\varphi'}{k}, \frac{\psi'}{k} \right) \quad \int_L (P, Q, R) \cdot (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) ds = \int (P, Q, R) \cdot (dx, dy, dz) = \int (P, Q, R) dr \\ & \quad \int_\Gamma \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} ds = \int_\Gamma \mathbf{A}_n ds = \int_\Gamma \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \\ & \quad dr = n ds \text{ 有向曲线元} \end{aligned}$$

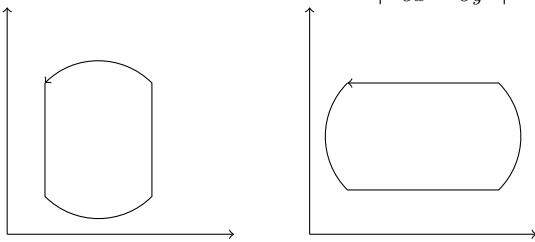
11.3 格林公式及其应用

11.3.1 格林公式

D 内任意封闭曲线所围部分都属于 D , **单连通**, 非单连通**复连通**

边界曲线正向, 左边是 D

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = - \iint_D \begin{vmatrix} P & Q \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{vmatrix} = \oint_L P dx + Q dy$$



$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right] dx = \int_a^b P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x)) dx$$

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right] dy = \int_c^d Q(\psi_2(y), y) - Q(\psi_1(y), y) dy$$

$$\begin{aligned}
\oint P dx &= \int_{L_1} P dx + \int_{L_2} P dx + \int_{L_3} P dx + \int_{L_4} P dx \\
&= \int_{L_1} P(x, \varphi_2(x)) dx + \int_{L_2} P(x, \varphi_1(x)) dx \\
&= \int_b^a P(x, \varphi_2(x)) dx + \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx \\
&= \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) - P(x, \varphi_2(x)) dx \\
&= - \left(\int_a^b P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x)) dx \right)
\end{aligned}$$

$$L_1: y = \varphi_2(x), x \in [b, a]$$

$$L_2: y = \varphi_1(x), x \in [a, b]$$

$$L_3: x = a, y \in [d, c]$$

$$L_4: x = b, y \in [a, b]$$

$$\begin{aligned}
\oint Q dy &= \int_{L_1} Q dy + \int_{L_2} Q dy + \int_{L_3} Q dy + \int_{L_4} Q dy \\
&= \int_{L_3} Q(\psi_1, y) dy + \int_{L_4} Q(\psi_2, y) dy \\
&= \int_d^c Q(\psi_1, y) dy + \int_c^d Q(\psi_2, y) dy \\
&= \int_c^d Q(\psi_2, y) - Q(\psi_1, y) dy
\end{aligned}$$

$$L_1: y = d, x \in [b, a]$$

$$L_2: y = c, x \in [a, b]$$

$$L_3: x = \psi_1(y)$$

$$L_4: x = \psi_2(y)$$

非标准分割

11.3.2 平面上曲线积分与路径无关的条件

区域 G 内任意点 A, B , 任意 A 到 B 曲线,

if $\int_{L_1} P dx + Q dy = \int_{L_2} P dx + Q dy$, then 曲线积分 $\int_L P dx + Q dy$ 在 G 内与路径无关, $\oint_{L_1-L_2} P dx + Q dy = 0$

if 单连通区域 G, P, Q 在 G 内连续一阶偏导数, then 曲线积分 $\int_L P dx + Q dy$ 在 G 内与路径无关 $\Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$
奇点

11.3.3 二元函数的全微分求积

单连通区域 $G, P(x, y), Q(x, y)$ 在 G 内具有一阶连续偏,

$F dx + Q dy$ 在 G 内为某一函数 $\mu(x, y)$ 的全微分 $\Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

曲线积分 $\int_L P dx + Q dy$ 在 G 内与路径无关 $\Leftrightarrow \exists \mu(x, y), du = P dx + Q dy$

全微分方程

微分方程 $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ 左端是某函数 $\mu(x, y)$ 全微分, 全微分方程

11.3.4 曲线积分的基本定理

曲线积分 $\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ 在区域 G 内与积分路径无关, 向量场 \mathbf{F} 为保守场

$F(x, y) = (P(x, y) + Q(x, y))$ 是区域 G 内向量场, $P(x, y), Q(x, y)$ 在 G 内连续, 且存在数量函数使得 $F = \nabla f$, 则曲线积分 $\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ 在 G 内与路径无关, 且 $\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(B) - f(A)$ 曲线积分基本公式

11.4 对面积的曲面积分

11.4.1 对面积的曲面积分的概念与性质

光滑曲面 Σ , 函数 $f(x, y, z)$ 在 Σ 有界, 任意分割 n 小块 ΔS_i , 无关面分法, 点取法, 极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i = \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$ 第一类曲面积分

11.4.2 对面积的曲面积分的算法

$$\begin{aligned} \text{曲面 } \Sigma: z = z(x, y), n = (-z_x, -z_y, 1) &= \left(\frac{-z_x}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}}, \frac{-z_y}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}} \right) \\ |n \cdot (1, 0, 0)| &= \frac{z_x}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}} = \cos \alpha \quad \Delta S_i \cos \alpha = (\Delta \sigma_i)_{yz} \quad \Delta S_i = \frac{1}{\cos \alpha} (\Delta \sigma_i)_{yz} \\ |n \cdot (0, 1, 0)| &= \frac{z_y}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}} = \cos \beta \quad \Delta S_i \cos \beta = (\Delta \sigma_i)_{xz} \quad \Delta S_i = \frac{1}{\cos \beta} (\Delta \sigma_i)_{xz} \\ |n \cdot (0, 0, 1)| &= \frac{1}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}} = \cos \gamma \quad \Delta S_i \cos \gamma = (\Delta \sigma_i)_{xy} \quad \Delta S_i = \frac{1}{\cos \gamma} (\Delta \sigma_i)_{xy} \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \frac{1}{\cos \gamma} (\Delta \sigma_i)_{xy} \\ \int_{\Sigma} f(x, y, z) dS &= \iint_{D_{xy}} f[x, y, z(x, y)] \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} dx dy \end{aligned}$$

11.5 对坐标的曲面积分

11.5.1 对坐标的曲面积分的概念与性质

$$\Delta S \text{ 单位法向量 } n, n \cdot (0, 0, 1) = \cos \gamma \Rightarrow \Delta S \text{ 在 } xOy \text{ 面投影 } (\Delta S)_{xy} = \begin{cases} (\Delta \sigma)_{xy}, & \cos \gamma > 0 \\ -(\Delta \sigma)_{xy}, & \cos \gamma < 0 \\ 0, & \cos \gamma = 0 \end{cases}$$

流向曲面一侧的流量

$$Av \cdot n$$

$$\begin{aligned} \Delta S_i \text{ 在 } xOy \text{ 面投影为 } (\Delta S_i)_{xy} \\ \text{光滑有向曲面 } \Sigma, \text{ 函数 } R(x, y, z) \text{ 在 } \Sigma \text{ 有界, 任意分割 } \Sigma \text{ 为 } \Delta S_i, \Delta S_i \text{ 在 } xOz \text{ 面投影为 } (\Delta S_i)_{xz} \\ \Delta S_i \text{ 在 } yOz \text{ 面投影为 } (\Delta S_i)_{yz} \\ \text{第二类曲面积分, 函数在有向面上对坐标轴 } x, y, z \text{ 的积分} &\begin{cases} \iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{xy} \\ \iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dx dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{xz} \\ \iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{yz} \end{cases} \\ \iint_{\Sigma} (P, Q, R) \cdot (dy dz, dx dz, dx dy) &= \iint_{\Sigma_1} (P, Q, R) \cdot (dy dz, dx dz, dx dy) + \iint_{\Sigma_2} (P, Q, R) \cdot (dy dz, dx dz, dx dy) \\ \iint_{\Sigma} (P, Q, R) \cdot (dy dz, dx dz, dx dy) &= - \iint_{\Sigma^-} (P, Q, R) \cdot (dy dz, dx dz, dx dy) \\ \iint_{\Sigma^-} P dy dz &= - \iint_{\Sigma} P dy dz \\ \iint_{\Sigma^-} P dx dz &= - \iint_{\Sigma} P dx dz \\ \iint_{\Sigma^-} P dx dy &= - \iint_{\Sigma} P dx dy \end{aligned}$$

11.5.2 对坐标的曲面积分的算法

$$\Sigma: z = z(x, y), (\Delta S_i)_{xy} = \pm (\Delta \sigma)_{xy}, \iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy$$

11.5.3 两类曲面积分之间的关系

$$\begin{aligned} \Sigma: z = z(x, y), \Sigma \text{ 法向量 } \mathbf{n} &= \left(\frac{-z_x}{|\mathbf{n}|}, \frac{-z_y}{|\mathbf{n}|}, \frac{1}{|\mathbf{n}|} \right) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \\ \iint_{\Sigma} (P, Q, R) \cdot (dy dz, dx dz, dx dy) &= \iint_{\Sigma} (P, Q, R) \cdot (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) dS \\ \iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{\Sigma} \mathbf{A}_n dS \\ d\mathbf{S} &= \mathbf{n} dS \text{ 有向曲面元} \end{aligned}$$

11.6 高斯公式 通量与散度

11.6.1 高斯公式

空间闭区域 Ω 由分片光滑闭曲面 (有向, 曲面外侧) Σ 组成, $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ 在 Ω 上有一阶连续偏导数, Σ 方向余弦 $n = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 则

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \oint_{\Sigma} (P, Q, R) \cdot (dydz, dx dz, dx dy) = \oint_{\Sigma} (P, Q, R) \cdot (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) dS$$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dv &= \iint_{D_{xy}} \left\{ \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right\} dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} \{ R(x, y, z_2) - R(x, y, z_1) \} dx dy \\ \oint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy &= \iint_{\Sigma_1} R dx dy + \iint_{\Sigma_2} R dx dy + \iint_{\Sigma_3} R dx dy \\ &= \iint_{\Sigma_1} R(x, y, z) dx dy + \iint_{\Sigma_2} R(x, y, z) dx dy + 0 \\ &= - \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_1) dx dy + \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_2) dx dy \end{aligned} \quad \begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dv &= \oint_{\Sigma} P dy dz \\ \iint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} dv &= \oint_{\Sigma} Q dx dz \\ \iint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dv &= \oint_{\Sigma} R dx dy \end{aligned} \Rightarrow$$

不规则体积分割

函数 $u(x, y, z), v(x, y, z)$ 在闭区域 Ω 上具有一二阶连续偏导数,

则 $\iint_{\Omega} u \Delta v dx dy dz = \oint_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} dS - \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) dx dy dz$ 格林第一公式, Σ 为闭区域 Ω 边界曲面, $\frac{\partial v}{\partial n}$ 为函数 $v(x, y, z)$ 沿 Σ 外法线方向的方向导数, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 称为拉普拉斯算子

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma} u \frac{\partial v}{\partial n} dS &= \oint_{\Sigma} u \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial v}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial v}{\partial z} \cos \gamma \right) dS \\ &= \oint_{\Sigma} \left[\left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cos \alpha + \left(u \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cos \beta + \left(u \frac{\partial v}{\partial z} \right) \cos \gamma \right] dS \\ &= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(u \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega} \left[u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + u \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right] dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega} \left[u \Delta v + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right] dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega} u \Delta v dx dy dz + \iiint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} dx dy dz \end{aligned}$$

11.6.2 沿任意闭曲面的曲面积分为零的条件

空间区域 G , G 内任意闭曲面所围区域完全属于 G , 空间二维单连通

空间区域 G , G 内任意闭曲线总可以张成 (做曲面) 完全属于 G , 空间一维单连通

二维单连通区域 G , 若 P, Q, R , 在 G 内具有一阶连续偏导数, 则曲面积分 $\iint_{\Sigma} P dy dz + Q dx dz + R dx dy$ 在 G 内与选取曲面选取无关, 只与边界曲线有关 $\Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$

11.6.3 通量与散度

向量场 $\mathbf{A}(x, y, z) = (P, Q, R)$

有向曲面 Σ , 法向量 \mathbf{n}

通量 $\iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv &= \oint_{\Sigma} v_n dS \\ \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv &= \frac{1}{V} \oint_{\Sigma} v_n dS \\ \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) |_{(\xi, \eta, \zeta)} &= \frac{1}{V} \oint_{\Sigma} v_n dS \quad (\xi, \eta, \zeta) \in \Omega \\ \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} &= \lim_{\Omega \rightarrow M} \frac{1}{V} \oint_{\Sigma} v_n dS = \operatorname{div} v(M) = \Delta \cdot \mathbf{A} \end{aligned}$$

速度场 v 在点 M 的通量密度, 源头强度散度

$\operatorname{div} \mathbf{V}$ 处处为零, 无源场

散度体积分, 通量面积分

11.7 斯托克斯公式 * 环流量与旋度

11.7.1 斯托克斯公式

分段光滑空间有向闭曲线 Γ , Γ 张成分片光滑有向曲面 Σ , 符合右手定则若 P, Q, R 在曲面 Σ 上具有一阶连续偏导数, 则 $\iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz$

曲面 $\Sigma: z = z(x, y)$, 法向量 $n = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \left(-\frac{z_x}{|n|}, -\frac{z_y}{|n|}, \frac{1}{|n|} \right)$

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dy dx &= \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma \right) dS \\ &\stackrel{\cos \beta = -f_y \cos \gamma}{=} - \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial P}{\partial z} f_y + \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma dS \\ &= - \iint_{D_{xy}} \left(\frac{\partial P}{\partial z} f_y + \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= - \iint_{D_{xy}} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \\ &= \oint_L P dx \end{aligned}$$

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dz dy = \oint_{\Gamma} Q dy$$

$$\iint_{\Sigma} \frac{\partial R}{\partial y} dy dz - \frac{\partial R}{\partial x} dx dz = \oint_{\Gamma} R dz$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dx dz & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz \\ &= \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} dS = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy \end{aligned}$$

11.7.2 空间曲线积分与路径无关的条件

一维单连通区域 G , 若函数 P, Q, R 在 G 内具有一阶连续偏导数,

$$\text{则曲线积分 } \int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz \text{ 在 } G \text{ 内与路径无关} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \\ \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \end{cases}$$

一维单连通区域 G , 若函数 P, Q, R 在 G 内具有一阶连续偏导数,

$$\begin{aligned} \text{则存在 } u(x, y, z), du = P dx + Q dy + R dz &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \\ \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \end{cases} \\ u(x, y, z) &= \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P dx + Q dy + R dz \\ &= \int_{x_0}^x P dx + \int_{y_0}^y Q dy + \int_{z_0}^z R dz \end{aligned}$$

11.7.3 环流量与旋度

向量场 $\mathbf{A} = (P, Q, R)$, 分段光滑有向闭曲线 Γ , 单位切向量 τ , 则 $\oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \tau ds$ 称为 A 沿 τ 环流量

$$\text{rot } \mathbf{A} = \Delta \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \quad \text{旋度}$$

旋度处处为零, 无旋场

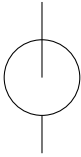
无旋, 无源, 调和场

Σ 单位法向量 $n = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$

$$\text{rot } \mathbf{A} \cdot n = \Delta \times \mathbf{A} \cdot n = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$\iint_{\Sigma} \text{rot } \mathbf{A} \cdot n dS = \oint_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \tau ds$$

旋度通量，环流量



$$r = \vec{OM}, \omega = (0, 0, w), v = \omega \times r, v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & w \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-wy, wx, 0), \mathbf{rot} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -wy & wx & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 2w) = 2\omega$$

12 无穷级数

12.1 常数项级数的概念和性质

12.1.1 数项级数的概念

数列 $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots + \mu_n, \dots$, 表达式 $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_n + \dots$ 称为 (常数项) 无穷级数, 简称 (常数项) 级数, 记为 $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_n + \dots$, 第 n 项 μ_n 叫做级数的一般项

$$S_n = \sum_{i=1}^n \mu_i = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_n \text{ 级数部分和}$$

新数列 $\{S_n\}$ $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$

无穷级数 $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i$, 无穷级数的部分和数列 $\{S_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = s \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i$ 收敛, $s = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \dots + \mu_n + \dots$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ (不存在) $\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i$ 发散

$$r_n = s - S_n = S_{n+1} + S_{n+2} + \dots \text{ 余项}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mu_i$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} aq^i = a + aq + aq^2 + \dots + aq^i + \dots \text{ 等比级数, } S_n = a + aq + \dots + aq^{n-1} = \frac{a-aq^n}{1-q} \text{ 部分和数列}$$

$$|q| \geq 1, \text{ 发散, } |q| \leq 1, \text{ 收敛}$$

$$S_n = S_1 + (S_2 - S_1) + \dots + (S_n - S_{n-1}) + \dots = S_1 + \sum_{i=2}^{\infty} (S_i - S_{i-1}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i$$

12.1.2 收敛级数的基本性质

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 收敛于 s , 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} k\mu_n$ 收敛于 s , 和为 ks , 数乘同敛散

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于 s 与 σ , 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n \pm v_n)$ 也收敛, 和为 $s \pm \sigma$, 收敛和收敛

级数中去掉, 加上, 改变有限项, 不会改变级数的收敛性

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 收敛于 s , 任意项加括号组成的级数仍收敛, 和为 s , 括号发散源发散

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 收敛于 s (必要条件), 一般项趋近 0, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 0$

调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散

12.1.3 柯西审敛原理

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{ when } n > N, \forall p \in \mathbb{Z}^+, |\mu_{n+1} + \mu_{n+2} + \dots + \mu_{n+p}| < \varepsilon$

12.2 常数项级数审敛法

12.2.1 正项级数及其审敛法

各项是正数或零的级数 **正项级数**

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 收敛于 $s \Leftrightarrow$ 部分和数列 $\{S_n\}$ 有界

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n, \mu_n \leq v_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 收敛; $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$, 存在正整数 N , $\mu_n \leq kv_n (n > N, k > 0)$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 收敛; $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$, $\text{if } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n}{v_n} = l, \{0 \leq l < \infty\}, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 收敛
 $\text{if } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n}{v_n} = l, \{l > 0, +\infty\}, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 发散
 $\text{if } \rho > 1 (= \infty)$ 发散 (不可能收敛)

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = \rho$, $\text{if } \rho < 1$ 收敛
 $\text{if } \rho = 1$ 可能收敛

when $\rho < 1, \forall \rho + \varepsilon = r < 1, \exists m$, when $n \geq m, \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = \rho < \rho + \varepsilon = r < 1, \mu_{n+1} < r\mu_n, \mu_{n+k} < r^k \mu_n$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} r^k \mu_n$ 收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_{n+k}$ 收敛

$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{n+k} + \sum_{n=1}^k \mu_n$ 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n, \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{n+k}$ 同敛散, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 收敛

$\text{if } \rho > 1 (= \infty)$ 发散 (不可能收敛)
 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\mu_n} = \rho$, $\text{if } \rho < 1$ 收敛
 $\text{if } \rho = 1$ 可能收敛

when $\rho < 1, \mu_n < r^n (r < 1)$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 收敛

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$, $\text{if } \lim_{n \rightarrow \infty} n^p \mu_n = \frac{\mu_n}{\frac{1}{n^p}} = l, \{0 \leq l < \infty, p > 1\}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 收敛
 $\text{if } \lim_{n \rightarrow \infty} n \mu_n = \frac{\mu_n}{\frac{1}{n}} = l, \{l > 0, \infty\}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 发散

12.2.2 交错级数审敛法

各项正负交错, 可以写成 $\mu_1 - \mu_2 + \mu_3 - \mu_4 + \dots$, 其中 $\mu_n > 0$
 $-\mu_1 + \mu_2 - \mu_3 + \mu_4 - \dots$,

交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 满足条件: (1) $\mu_n \geq \mu_{n+1} (n = 1, 2, 3, \dots)$, 那么级数收敛, 其和 $s \leq \mu_1$, 余项绝对值 $|r_n| \leq \mu_{n+1}$
 (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 0$

12.2.3 绝对收敛与条件收敛

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$, 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 绝对收敛
 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|$ 发散, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 条件收敛
 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 绝对收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ 必定收敛 $v_n = \frac{1}{2} (\mu_n + |\mu_n|)$

12.2.4 绝对收敛级数的性质

绝对收敛级数经改变项位置后构成的级数也收敛, 且与原级数有相同的和 $S_n^* \leq S_m \leq s, \mu_n = 2v_n - |\mu_n|$
 级数 $\sum \mu_n, \sum v_n$ 绝对收敛, 和分别为 s, σ , 所有项的可能乘积 $\mu_i v_i$

$$\begin{array}{ccccccc} \mu_1 v_1 & \mu_1 v_2 & \mu_1 v_3 & \dots & \mu_1 v_1 & \mu_1 v_2 & \mu_1 v_3 & \dots \\ \mu_2 v_1 & \mu_2 v_2 & \mu_2 v_3 & \dots & \mu_2 v_1 & \mu_2 v_2 & \mu_2 v_3 & \dots \\ \mu_3 v_1 & \mu_3 v_2 & \mu_3 v_3 & \dots & \mu_3 v_1 & \mu_3 v_2 & \mu_3 v_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

柯西乘积 (级数) $\mu_1 v_1 + (\mu_1 v_2 + \mu_2 v_1) + \dots + (\mu_1 v_n + \mu_2 v_{n-1} + \dots + \mu_n v_1) + \dots$ 绝对收敛, 和为 $s\sigma$

$\mu_1 v_1 + (\mu_1 v_2 + \mu_2 v_2 + \mu_2 v_1) + (\mu_1 v_3 + \mu_2 v_3 + \mu_3 v_3 + \mu_3 v_2 + \mu_3 v_1) + \dots = (\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n) \cdot (v_1 + v_2 + \dots + v_n)$

12.3 幂级数

12.3.1 函数项级数的概念

区间 I 上函数列 $\mu_1(x), \mu_2(x), \mu_3(x), \dots, \mu_n(x), \dots$,
 表达式 $\mu_1(x) + \mu_2(x) + \mu_3(x) + \dots + \mu_n(x) + \dots$, 区间 I 上的 (函数项) 无穷级数, (函数项) 级数
 对于每个确定值 $x_0 \in I, \mu_1(x_0) + \mu_2(x_0) + \mu_3(x_0) + \dots + \mu_n(x_0) + \dots$ 常数项级数, 收敛点 x_0
 $S(x) = \mu_1(x) + \mu_2(x) + \mu_3(x) + \dots + \mu_n(x) + \dots$, 和函数
 部分和 $S_n(x), \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$, 余项 $r_n(x) = S(x) - S_n(x), \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$

12.3.2 幂级数及其收敛性

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$ 幂级数

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $x = x_0$, 幂级数收敛, if $|x| < |x_0|$, 幂级数绝对收敛
 $x = x_0$, 幂级数发散, if $|x| > |x_0|$, 幂级数发散

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0 \Rightarrow |a_n x_0^n| \leq M \Rightarrow |a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$$

$|x| < R$, 幂级数绝对收敛

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 不是一点收敛, 也不是整个数轴收敛, $\exists R > 0, |x| > R$, 幂级数发散

$|x| = \pm R$, 幂级数可能收敛

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$, 收敛半径 $R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & \rho \neq 0 \\ +\infty, & \rho = 0 \\ 0, & \rho = +\infty \end{cases}$

$$\frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} |x| = \rho |x| \not\geq 1$$

12.3.3 幂级数的运算

幂级数 $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$
 $b_0 + a_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + \dots$

加减 $(a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1) x + (a_2 \pm b_2) x^2 + \dots + (a_n \pm b_n) x^n + \dots$ 区间取小

乘 $(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots) \cdot (b_0 + a_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + \dots)$

$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \dots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0) x^n + \dots$ 区间取小

幂级数的柯西乘积

除 $\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots}{b_0 + a_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + \dots} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots$ 区间取小

$$a_0 = c_0 b_0$$

$$a_1 = c_0 b_1 + c_1 b_0$$

$$a_2 = c_0 b_2 + c_1 b_1 + c_2 b_0$$

\dots

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S_n(x)$ 在收敛域 I 上连续

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S_n(x)$ 在收敛域 I 上可积, 所得收敛同半径

$$\int_0^x S(t) dt = \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} (x \in I)$$

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S_n(x)$ 在收敛域 I 上可导, 所得收敛同半径

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} (x \in I)$$

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S_n(x)$ 在收敛域 I 上具有任意阶导数

12.4 函数展开成幂级数

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) (x - x_0)^n, x \in U(x_0)$ 泰勒级数 (极限), 泰勒展开式

函数 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内具有各阶导数, $f(x)$ 能展开成泰勒级数 \Leftrightarrow 余项满足 $\sum_{n=0}^{\infty} R_n(x) = 0$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) (x - 0)^n, x \in U(0)$ 麦克劳林级数 (极限), 麦克劳林展开式

$$\sin^{(n)} x = \sin(x + n\pi)$$

$$\begin{cases} e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, (-\infty < x < \infty) \\ \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, (-\infty < x < \infty) \\ \frac{1}{x+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, (-1 < x < 1) \end{cases}$$

已知展开, 运算得未知

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + \dots, (-1 < x < 1) \text{ 二项展开式}$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2}}{2!} x^2 + \dots + \frac{\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} \dots \frac{3-2n}{2}}{n!} x^n + \dots = \frac{\prod(3-2n)}{(2n)!!} x^n, (-1 < x < 1) \text{ 二项展开式}$$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{-\frac{1}{2} \cdot -\frac{3}{2}}{2!} x^2 + \dots + \frac{-\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} \dots \frac{1-2n}{2}}{n!} x^n + \dots = \frac{\prod(1-2n)}{(2n)!!} x^n, (-1 < x < 1) \text{ 二项展开式}$$

$$F(x) = (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

$$F'(x) = m \left[1 + \frac{m-1}{1} x + \dots + \frac{(m-1)\dots(m-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1} \dots \right]$$

$$xF'(x) = m \left[x + \frac{m-1}{1} x^2 + \dots + \frac{(m-1)\dots(m-n+1)}{(n-1)!} x^n \dots \right]$$

证明: $(1+x)F'(x) = m \left[1 + mx + \frac{* (m-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{*}{(n-2)!} x^{n-1} + \frac{*1(m-n)}{(n)!} x^n + \frac{*1}{(n-1)!} x^n + \dots \right]$

$$(1+x)F'(x) = m \left[1 + mx + \frac{m*}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{m*1}{n!} x^n + \dots \right] = mF(x)$$

$$\varphi(x) = \frac{F(x)}{(1+x)^m}, \varphi(0) = F(0) = 1$$

$$\varphi'(x) = \frac{F'(x)(1+x)^m - m(1+x)^{m-1}F(x)}{(1+x)^{2m}} = \frac{(1+x)^{m-1}[(1+x)F'(x) - mF(x)]}{(1+x)^{2m}} = 0$$

$$\varphi(x) = 1, F(x) = (1+x)^m$$

12.5 函数的幂级数展开应用

12.5.1 近似计算

12.5.2 微分方程的幂级数解法

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, P, Q \text{ 定义域内可展开为幂级数, 方程解形如 } y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

12.5.3 欧拉公式

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1) \text{ 實部組成的級數收斂于 } u$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \quad (2) \text{ 虚部組成的級數收斂于 } v$$

$$(u_1 + v_1 i) + (u_2 + v_2 i) + \dots + (u_n + v_n i) + \dots \quad (3) \text{ 復數項級數收斂於 } u + vi$$

$$\sqrt{u_1^2 + v_1^2} + \sqrt{u_2^2 + v_2^2} + \dots + \sqrt{u_n^2 + v_n^2} + \dots \quad (4) \quad (3) \text{ 各項的模組成的級數收斂, (3), (2), (1) 互對收斂}$$

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \dots + \frac{1}{n!} z^n + \dots, z = x + yi \text{ 復變量指數函數}$$

$$e^{yi} = 1 + (yi) + \frac{1}{2!} (yi)^2 + \dots + \frac{1}{n!} (yi)^n + \dots$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2!} (yi)^2 + \dots + \frac{1}{(2n)!} (yi)^{2n} \right) + \left((yi) + \frac{1}{3!} (yi)^3 + \dots + \frac{1}{(2n-1)!} (yi)^{2n-1} \right) + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2!} y^2 + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!} y^{2n} \right) + i \left(y + \frac{1}{3!} (yi)^2 + \dots + \frac{1}{(2n-1)!} y^{2n-1} i^{2n-2} \right) + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2!} y^2 + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!} y^{2n} \right) + i \left(y + \frac{1}{3!} (yi)^2 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!} y^{2n-1} \right) + \dots$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2!} y^2 + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!} y^{2n} \right) + i \left(y + \frac{1}{3!} (yi)^2 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!} y^{2n-1} + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} y^{2n+1} \right) + \dots$$

$$= \cos y + i \sin y \quad \text{欧拉公式}$$

$$z = x + yi = \rho \cos \theta + i \rho \sin \theta = \rho (\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}$$

$$e^{x+yi} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

$$\begin{cases} \cos y = \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2} \\ \sin y = \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i} \end{cases} \quad \text{欧拉公式}$$

12.6 函数项级数的一致收敛性及一致收敛函数的基本性质

12.6.1 函数项级数的一致收敛性

$$x + (-x + x^2) + (-x^2 + x^3) + \cdots + (-x^{n-1} + x^n) + \cdots \quad s(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \begin{cases} 0, 0 \leq x < 1 \\ 1, x = 1 \end{cases}$$

函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 收敛于 $s(x) \Leftrightarrow \forall x_0 \in I$, 数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛于 $s(x_0)$

$\forall \varepsilon, x_0 \in I, \exists N(\varepsilon, x_0)$, when $n > N$, $|r_n(x_0)| = |\sum_{i=n+1}^{\infty} u_i(x_0)| < \varepsilon$ 函数项级数收敛

$\forall \varepsilon, x_0 \in I, \exists N(\varepsilon)$, when $n > N$, $|r_n(x_0)| = |\sum_{i=n+1}^{\infty} u_i(x_0)| < \varepsilon$ 函数项级数一致收敛

函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 满足 $|u_n(x)| \leq a_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$ 函数项级数在区间 I 一致收敛
正项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛

12.6.2 一致收敛级数的基本性质

在区间 I , 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 一致收敛于 $s(x)$, 各项 $u_n(x)$ 连续, $s(x)$ 在区间 I 连续

在区间 I , 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 一致收敛于 $s(x)$, 各项 $u_n(x)$ 连续, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 可逐项积分

$\int_{x_0}^x s(x) dx = \int_{x_0}^x u_1(x) dx + \int_{x_0}^x u_2(x) dx + \cdots + \int_{x_0}^x u_n(x) dx + \cdots \quad (x_0 < x \in I)$ 右端级数在区间 I 一致收敛

在区间 I , 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 收敛于 $s(x)$, 各项 $u_n(x)$ 具有连续导数 $u'_n(x)$, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u'_n(x)$ 一致收敛, 则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 一致收敛, 且可逐项求导

$$s'(x) = u'_1(x) + u'_2(x) + \cdots + u'_n(x) + \cdots$$

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R > 0$, 在闭区间 $I \in (-R, R)$, 幂级数一致收敛

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R > 0$, 在闭区间 $I \in (-R, R)$ 其和函数可导, 级数可逐项求导

$$s'(x) = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} \quad \text{右端级数与原级数同收敛半径}$$

12.7 傅里叶级数

三角函数组成的函数项级数 (三角级数)

12.7.1 三角级数 三角函数的正交性

A 振幅

$$y = A \sin(\omega t + \varphi) \quad \omega \text{ 角频率}$$

φ 初相

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot [\sin(n\omega t) \cos(\varphi_n) + \cos(n\omega t) \sin(\varphi_n)]$$

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cdot \cos(\varphi_n) \sin(n\omega t) + A_n \cdot \sin(\varphi_n) \cos(n\omega t)]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin(n\omega t) + b_n \cos(n\omega t))$$

$$\stackrel{\omega = \frac{\pi}{T}}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \sin(n \frac{\pi}{T} t) + b_n \cos(n \frac{\pi}{T} t)], (T = 2l)$$

$$\stackrel{\omega t = x}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx)], (T = 2\pi)$$

三角函数系 $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$ 任意两函数乘积在区间 $[-\pi, \pi]$ 上积分为零

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx dx = 0 \quad (k, n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx = 0 \quad (k, n = 1, 2, 3, \dots, k \neq n)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx dx = 0 \quad (k, n = 1, 2, 3, \dots, k \neq n)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = \frac{\pi}{2}, \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)^2 dx = \pi, \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)^2 dx = \pi$$

谐波分析

A_0 直流分量

$A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ 一次谐波 (基波)

12.7.2 函数展开成傅里叶级数

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \\
 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] dx \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx \right] \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx \\
 &= \pi a_0 \\
 f(x) \sin(kx) &= \frac{a_0}{2} \sin(kx) + \sin(kx) \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \\
 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \sin(kx) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] dx \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \sin(kx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \cos(nx) dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sin(nx) dx \right] \\
 &= b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \sin(kx) dx \\
 &= \pi b_k \\
 f(x) \cos(kx) &= \frac{a_0}{2} \cos(kx) + \cos(kx) \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] \\
 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos(kx) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] dx \\
 &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos(kx) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(nx) dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \sin(nx) dx \right] \\
 &= a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(kx) dx \\
 &= \pi a_k \\
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\
 \text{傅里叶系数 } a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \\
 b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx
 \end{aligned}$$

$f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数,

$f(x)$ 的傅里叶级数收敛,

满足 (1) 一个周期内连续, 或只有有限个第一类间断点

且 (1) x 是连续点, 级数收敛于 $f(x)$

(2) 一个周期内至多只有有限个极值点

(2) x 是间断点, 级数收敛于 $\frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)]$

$$C = \{x | f(x) = \frac{1}{2}[f(x^-) + f(x^+)]\}, f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)], x \in C$$

推广函数定义域的过程, 周期延拓

12.7.3 正弦级数和余弦级数

$$\begin{aligned}
 f(x), \text{ 是奇函数 } \quad a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = 0 & f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx), \text{ 正弦级数} \\
 b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \\
 f(x), \text{ 是偶函数 } \quad a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx & f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx), \text{ 余弦级数} \\
 b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = 0
 \end{aligned}$$

以推广函数为奇函数, 扩展定义域的过程, 奇延拓 $f(x) \neq 0$, 则规定 $f(x) = 0$

以推广函数为偶函数, 扩展定义域的过程, 偶延拓

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$x = 0 \Rightarrow 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \Rightarrow \frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

$$\delta = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

$$\delta = \delta_1 + \delta_2$$

$$\delta_1 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

$$\delta_2 = \frac{1}{4} \delta = \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{32}$$

$$\delta_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} + \cdots$$

$$\frac{3}{4} \delta = \delta_1, \delta = \frac{4}{3} \delta_1, \delta = \frac{4}{3} \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\delta_3 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} + \cdots$$

$$\delta_3 = \delta_1 - \delta_2 = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi^2}{12}$$

12.7.4 一般周期函数的傅里叶级数

周期为 $2l$ 的周期函数 $f(x)$ 满足收敛条件, 傅里叶级数展开式为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right]$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx$$

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

$$\begin{aligned} f(x) \text{ 是奇函数 } \quad & \begin{cases} a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = 0 \\ b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \end{cases} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \\ & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) \text{ 是偶函数 } \quad & \begin{cases} a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \\ b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = 0 \end{cases} \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} \end{aligned}$$

$$\text{证明 } z = \frac{\pi x}{l}$$

12.7.5 傅里叶级数的复数形式

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos \alpha + b_n \sin \alpha] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} + b_n \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n + b_n i}{2} e^{i\alpha} + \frac{a_n - b_n i}{2} e^{-i\alpha} \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n - b_n i}{2} e^{-i \frac{n\pi x}{l}} + \frac{a_n + b_n i}{2} e^{i \frac{n\pi x}{l}} \right] \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n e^{-i \frac{n\pi x}{l}} + c_{-n} e^{i \frac{n\pi x}{l}}] \\ &= c_k \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i \frac{k\pi x}{l}} \quad (k = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx$$

$$c_n = \frac{a_n - b_n i}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx - \frac{1}{li} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \right]$$

$$= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \left[\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) - \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right] dx$$

$$= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-\frac{n\pi x}{l}} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + b_n i}{2} = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{\frac{n\pi x}{l}} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$c_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-\frac{k\pi x}{l}} dx \quad (k = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots)$$