Что нужно знать для поиска ЖНБ?

$\varphi: E \to E$

λ – некот. СЗ φ; пусть $A = A(\varphi, e)$

$\psi = \varphi - \lambda \cdot i$; пусть $B = A - \lambda \cdot E = B(\psi, e)$

Из лекций известно:

① $V = \bigoplus\limits_i V^{\lambda_i}$ (V^{λ_i} – корневое подпр. для СЗ λ_i)

② $\mathrm{Ker}\, B \subset \mathrm{Ker}\, B^2 \subset \ldots \subset \overbrace{\mathrm{Ker}\, B^m}^{V^\lambda} = \mathrm{Ker}\, B^{m+1} = \ldots$

dim: $d_1 = g_\lambda < d_2 < \ldots < d_m = a_\lambda = d_{m+1}$

m – максимальный из размеров $J_{m_i}(\lambda)$, соотв. λ.

a_λ – алгебр. крат., показывает, сколько раз в ЖНФ встречается знач. λ на диагонали.

③ Каждой $J_{m_i}(\lambda)$ соотв. ЛНЗ сис. векторов, явл. цепочкой длины m_i:

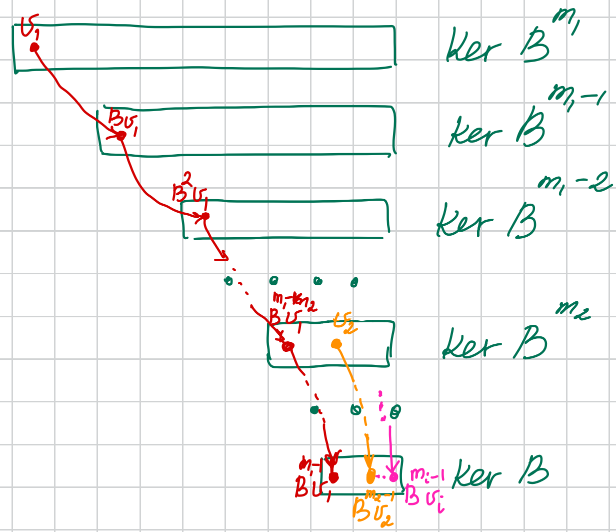
$v_i, Bv_i, B^2 v_i, \ldots, B^{m-1} v_i$ (– ЛНЗ!)

$v_i \in \mathrm{Ker}\, B^m$

$v_i \notin \mathrm{Ker}\, B^k$, $k < m$

④ Если у нас есть s цепочек, то они в совокупности дадут базис в V^λ, если

$B^{m_1-1} v_1, B^{m_2-1} v_2, \ldots, B^{m_s-1} v_s$ – ЛНЗ



Задача 1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Собственное значение $\lambda = 1$ кратности 3

Пусть

$$B = A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{rk } B = 2$$

$d_1 = \ker B = 1$ — количество жордановых клеток

Тогда, жорданова матрица должна иметь вид

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Нужно найти цепочку длины 3: (B^2v, Bv, v), где $\begin{cases} v \in \ker B^3 \\ v \notin \ker B^2 \\ v \notin \ker B \end{cases}$

Посчитаем

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{rk } B^2 = 1 \Longrightarrow d_2 = 2$$

$$B^3 = 0 \Longrightarrow \ker B^3 = \mathbb{R}^3$$

Найдем вектор v такой, что $\text{ht } v = 3$

Выберем $\mathbb{e} = (e_1, e_2, e_3)$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^3$

Применим B к базисным векторам

$$\begin{aligned} &e_1 = (1,0,0)^T \longrightarrow Be_1 = (1,1,0)^T \longrightarrow B^2e_1 = 0 \\ &e_2 - \text{не подойдет, так как ht } v = 2 \\ &e_3 = (0,0,1)^T \longrightarrow Be_3 = (2,0,0)^T \longrightarrow B^2e_3 = (2,2,0)^T \end{aligned}$$

Тогда, (B^2e_3, Be_3, e_3) — жорданов базис $\mathbb{f} = (f_1, f_2, f_3)$

Матрица перехода имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Тогда, жорданову матрицу можно представить в таком виде

$$\begin{aligned} J &= C^{-1}AC \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

Задача 2

Запишем

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Собственное значение $\lambda = 2$ кратности 5

Пусть

$$B = A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rk}\ B = 3 \Longrightarrow d_1 = 2$ — количество жордановых клеток

Вычислим

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = 0$$

$\mathrm{rk}\ B^2 = 1 \Longrightarrow d_2 = 4 \Longrightarrow d_2 - d_1 = 2$ — количество клеток размера $\geqslant 2$

Нужно найти вектор $v \in \ker B^3 = \mathbb{R}^5 : \mathrm{ht}\ v = 3$ (размер макс. ЖК для $\lambda = 2$)

Возьмем стандартный базис $\mathbb{e} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$

Вектор e_1 не рассматриваем, так как он занулится (первый столбец в матрице B^2 — нулевой)

Тогда

$$e_2 = \underbrace{(0,1,0,0,0)^T}_{f_5} \longrightarrow Be_2 = \underbrace{(2,1,-1,0,0)^T}_{f_4} \longrightarrow B^2 e_2 = \underbrace{(1,0,0,0,0)^T}_{f_3}$$

Теперь, нужно найти $w \in \ker B^2 : \mathrm{ht}\ w = 2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{вектор } w = f_2} x_5$$

$Bw = (-3, -2, 3, 1, 0)^T = f_1$

Тогда, $\mathbb{f} = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ — жорданов базис,[1] соответствующий жордановой форме

Матрица перехода

$$C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[1] проверка ЛНЗ остается на вашей совести

Таким образом, жорданова матрица имеет вид

$$
\begin{aligned}
J &= C^{-1}AC \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} C \\
&= \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix}} & \\ & \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Задача 3

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 2-\lambda & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3(\lambda-3)$$

Собственные значения

$$\lambda_1 = 2 - \text{кратности } 3$$
$$\lambda_2 = 3 - \text{кратности } 1$$

$\boxed{\text{Для } \lambda_1 = 2}$

$$B = A - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

rk $B = 2 \Longrightarrow d_1 = 2$ - количество ЖК для $\lambda = 2$

Матрица должна иметь вид

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Вычислим

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & -8 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

rk $B^2 = 1 \Longrightarrow d_2 = 3,\ k_1 = d_2 - d_1 = 1$ — количество ЖК размером $\geqslant 2$

Очевидно, что rk $B^3 =$ rk $B^2 = 1$

Найдем $v \in \ker B^2$: ht $v = 2$. Ищем $v \in \ker B^2,\ v \notin \ker B$

$$\text{Решим } B^2 v = 0: \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4$$

$$e_1 = \underbrace{(1,0,0,0)^T}_{f_2} \longrightarrow Be_1 = \underbrace{(0,0,3,0)^T}_{f_1} \longrightarrow \text{ht } e_1 = 2 \text{ соотв. } J_2(2) \in M_2(\mathbb{R})$$

Найдем $w \in \ker B$ ЛНЗ с Be_1 (и e_1)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{ЛЗ с } Be_1} x_3 + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4$$

Найдем $w \in \ker B$: ht $w = 1$ — это $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(Be_1, e_1, w) = (f_1, f_2, w)$ — базис $V^{\lambda=2}$

Пусть $f_3 = w,\ f_4 = u$, тогда (f_1, f_2, w, u); u — собственный вектор для $\lambda = 3$

$$D = (A - 3E) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & -11 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u} x_4$

$V^{\lambda=2}$ и $V^{\lambda=3}$ — ЛНЗ

Напомним, что $J = C^{-1}AC$

$\mathbb{e} \xrightarrow{C} \mathbb{f}$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Если все сделано верно, то

$$CJ = AC$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Значит, все ОК

Ответ. В базисе $\overbrace{(f_1, f_2, f_3, f_4)}^{(Be_1, e_1, w, u)}$ оператор φ имеет вид $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$