

# Теория вероятностей и математическая статистика—1

## Теоретический и задачный минимумы

### ФЭН НИУ ВШЭ

Винер Даниил [@danya\\_vin](#)

Версия от 29 ноября 2024 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Теоретический минимум</b>	<b>2</b>
1.1	Дайте определение функции распределения $F_X(x)$ случайной величины $X$ . Укажите необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция была функцией распределения некоторой случайной величины	2
1.2	Дайте определение функции плотности $f_X(x)$ случайной величины $X$ . Укажите необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция была функцией плотности некоторой случайной величины	2
1.3	Дайте определение математического ожидания для дискретных и абсолютно непрерывных случайных величин. Укажите, чему равно $\mathbb{E}[\alpha X + \beta Y]$ , где $X$ и $Y$ — случайные величины, а $\alpha$ и $\beta$ — произвольные константы	2
1.4	Дайте определение дисперсии случайной величины. Укажите, чему равно $\mathbb{D}[\alpha X + \beta]$ , где $X$ — случайная величина, а $\alpha$ и $\beta$ — произвольные константы	3
1.5	Укажите математическое ожидание, дисперсию, множество значений, принимаемых с ненулевой вероятностью, а также функцию плотности или функцию вероятности	3
1.6	Сформулируйте определение функции совместного распределения двух случайных величин, независимости случайных величин. Укажите, как связаны совместное распределение и частные распределения компонент случайного вектора	4
1.7	Сформулируйте определение совместной функции плотности двух случайных величин. Укажите необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция была совместной функцией плотности некоторой пары случайных величин. Сформулируйте определение независимости случайных величин	5
<b>2</b>	<b>Задачный минимум</b>	<b>6</b>
2.1	Пусть случайная величина $X$ имеет следующую функцию плотности...	6
2.2	Пусть случайная величина $X$ имеет следующую функцию плотности...	7
2.3	Пусть задана таблица совместного распределения случайных величин $X$ и $Y$	7
2.4	Пусть задана таблица совместного распределения случайных величин $X$ и $Y$	8

# 1 Теоретический минимум

## 1.1 Дайте определение функции распределения $F_X(x)$ случайной величины $X$ . Укажите необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция была функцией распределения некоторой случайной величины

**Определение.** Функцией распределения случайной величины  $X$  называется функция

$$F_X(x) := \mathbb{P}(\{X \leq x\}), x \in \mathbb{R}$$

**Теорема.** Функция  $G : \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$  является функцией распределения некоторой случайной величины  $\xi \iff$

- $G(x)$  является нестрого возрастающей, то есть  $\forall x_1, x_2, x_1 \leq x_2 \quad G(x_1) \leq G(x_2)$
- $G(x)$  является непрерывной справа в каждой точке  $x \in \mathbb{R}$ , то есть  $\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{y \rightarrow x+0} G(y) = G(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = 0$  и  $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 1$

## 1.2 Дайте определение функции плотности $f_X(x)$ случайной величины $X$ . Укажите необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция была функцией плотности некоторой случайной величины

**Определение.** Говорят, что случайная величина  $X$  является абсолютно непрерывной, если ее функция распределения  $F_X(x)$  представима в виде

$$F_X(x) := \int_{-\infty}^x f_X(t) dt, x \in \mathbb{R},$$

где  $f_X(t)$  — неотрицательная интегрируемая функция, которая называется *плотностью распределения* случайной величины  $X$

**Теорема.** Функция  $g : \mathbb{R} \rightarrow [0; +\infty)$  является плотностью распределения некоторой случайной величины  $\xi$  тогда и только тогда, когда  $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = 1$

## 1.3 Дайте определение математического ожидания для дискретных и абсолютно непрерывных случайных величин. Укажите, чему равно $\mathbb{E}[\alpha X + \beta Y]$ , где $X$ и $Y$ — случайные величины, а $\alpha$ и $\beta$ — произвольные константы

**Определение.** Пусть дискретная случайная величина  $X$  принимает значения  $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$  и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \cdot \mathbb{P}(\{X = a_k\})$$

сходится

Тогда, математическим ожиданием случайной величины  $X$  называется

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \mathbb{P}(\{X = a_k\})$$

**Определение.** Пусть случайная величина  $X$  является абсолютно непрерывной и интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) dx$$

сходится

Тогда, математическим ожиданием случайной величины  $X$  называется

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

**Теорема.** Пусть случайные величины  $X$  и  $Y$  имеют конечное математическое ожидание. Тогда,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  случайная величина  $\alpha X + \beta Y$  тоже имеет конечное математическое ожидание и

$$\mathbb{E}[\alpha X + \beta Y] = \alpha \mathbb{E}[X] + \beta \mathbb{E}[Y]$$

**1.4 Дайте определение дисперсии случайной величины. Укажите, чему равно  $\mathbb{D}[\alpha X + \beta]$ , где  $X$  — случайная величина, а  $\alpha$  и  $\beta$  — произвольные константы**

**Определение.** Пусть случайная величина  $X$  имеет конечное математическое ожидание, тогда дисперсией случайной величины  $X$  называется

$$\mathbb{D}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$$

**Теорема.** Пусть случайная величина  $X$  имеет конечное математическое ожидание, тогда  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{D}[\alpha X + \beta] = \alpha^2 \mathbb{D}[X]$$

**1.5 Укажите математическое ожидание, дисперсию, множество значений, принимаемых с ненулевой вероятностью, а также функцию плотности или функцию вероятности**

1. **Биномиальное.** Случайная величина  $X$  имеет биномиальное распределение с параметрами  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p \in (0; 1)$ , пишут  $X \sim Bi(n, p)$ , если случайная величина  $X$  принимает значения  $0, 1, 2, \dots, n$  с вероятностями

- $\mathbb{P}(\{\xi = k\}) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ , где  $k = 0, 1, \dots, n$
- $\mathbb{E}[\xi] = np$
- $\mathbb{D}[\xi] = np(1-p)$

2. **Пуассоновское.** Случайная величина  $X$  имеет распределение Пуассона с параметром  $\lambda > 0$ , пишут  $X \sim Pois(\lambda)$ , если случайная величина  $X$  принимает значения с вероятностями

- $\mathbb{P}(\{\xi = k\}) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ , где  $k \in \{0, 1, \dots\}$
- $\mathbb{E}[\xi] = \lambda$
- $\mathbb{D}[\xi] = \lambda$

3. **Геометрическое.** Случайная величина  $X$  имеет геометрическое распределение с параметром  $p \in (0; 1)$ , пишут  $X \sim Geom(p)$ , если случайная величина  $X$  принимает значения  $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$  с вероятностями

- $\mathbb{P}(\{\xi = k\}) = p(1-p)^{k-1}$
- $\mathbb{E}[\xi] = \frac{1}{p}$
- $\mathbb{D}[\xi] = \frac{1-p}{p^2}$

4. **Равномерное.** Случайная величина  $X$  имеет равномерное распределение на отрезке  $[a; b]$ , где  $a < b$ , пишут  $X \sim U[a; b]$ , если случайная величина  $X$  имеет плотность

- $f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{если } x \in [a; b] \\ 0, & \text{если } x \notin [a; b] \end{cases}$

- $F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } x \in [a; b] \\ 1, & \text{если } x > b \end{cases}$
- $\mathbb{E}[\xi] = \frac{a+b}{2}$
- $\mathbb{D}[\xi] = \frac{(b-a)^2}{12}$

5. **Экспоненциальное (показательное).** Случайная величина  $X$  имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\lambda > 0$ , пишут  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ , если случайная величина  $X$  имеет плотность

- $f_{\xi}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$
- $F_{\xi}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geq 0 \\ 0, & \text{если } x < 0 \end{cases}$
- $\mathbb{E}[\xi] = \frac{1}{\lambda}$
- $\mathbb{D}[\xi] = \frac{1}{\lambda^2}$

**1.6 Сформулируйте определение функции совместного распределения двух случайных величин, независимости случайных величин. Укажите, как связаны совместное распределение и частные распределения компонент случайного вектора**

**Определение.** Совместной функцией распределения случайных величин  $X$  и  $Y$  называется функция

$$F_{X,Y}(x, y) := \mathbb{P}(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$$

**Определение.** Случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы, если  $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  события  $\{X \in B_1\}$  и  $\{Y \in B_2\}$  являются независимыми, то есть

$$\mathbb{P}(\{X \in B_1\} \cap \{Y \in B_2\}) = \mathbb{P}(\{X \in B_1\}) \cdot \mathbb{P}(\{Y \in B_2\})$$

**Теорема.** Случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы тогда и только тогда, когда

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y), \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$$

**Теорема.**

1.  $F_{\xi}(x) \in [0; 1]$ . Здесь и далее  $x = (x_1, \dots, x_n)$
2.  $\lim_{x_1 \rightarrow -\infty} F_{\xi}(x_1, x_2) = 0$   
 $\lim_{x_1 \rightarrow +\infty} F_{\xi}(x_1, x_2) = F_{\xi_2}(x_2)$   
 $\lim_{\substack{x_1 \rightarrow +\infty, \\ x_2 \rightarrow +\infty}} F_{\xi}(x_1, x_2) = 1$
3.  $F_{\xi}(x_1, x_2)$  не убывает по каждому из аргументов
4.  $F_{\xi}(x_1, x_2)$  непрерывна справа по каждому из аргументов

**1.7 Сформулируйте определение совместной функции плотности двух случайных величин. Укажите необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция была совместной функцией плотности некоторой пары случайных величин. Сформулируйте определение независимости случайных величин**

**Определение.** Случайный вектор  $(X, Y)$  имеет абсолютно непрерывное распределение, если совместная функция распределения  $F_{X,Y}(x, y)$  представима в виде

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(s, t) ds dt, \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

где  $f_{X,Y}(s, t)$  — неотрицательная интегрируемая функция, называемая плотностью распределения случайного вектора  $(X, Y)$

**Теорема.** Функция  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0; +\infty)$  является плотностью распределения случайного вектора  $(X, Y) \iff$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} g(x, y) dx dy = 1$$

**Теорема.** (в дискретном случае). Пусть случайная величина  $X$  принимает значения  $a_1, \dots, a_m$ , случайная величина  $Y$  принимает значения  $b_1, \dots, b_n$ , тогда случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы  $\iff \forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall j \in \{1, \dots, n\}$  события  $\{X = a_i\}$  и  $\{Y = b_j\}$  независимы, то есть

$$\mathbb{P}(\{X = a_i\} \cap \{Y = b_j\}) = \mathbb{P}(\{X = a_i\}) \cdot \mathbb{P}(\{Y = b_j\})$$

**Теорема.** (в абсолютно непрерывном). Пусть случайный вектор  $(X, Y)$  имеет абсолютно непрерывное распределение. Тогда, случайные величины  $X$  и  $Y$  независимы  $\iff$

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$$

## 2 Задачный минимум

Заметьте, что обозначения  $P(\dots)$  и  $\mathbb{P}(\{\dots\})$  — это одно и то же, я просто еще не везде исправил

### 2.1 Пусть случайная величина $X$ имеет следующую функцию плотности...

Дана функция плотности  $f_X(x) = \begin{cases} cx, & x \in [0; 1] \\ 0, & x \notin [0; 1] \end{cases}$

Найдите

- $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt$ . Тогда, при  $x \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt = \int_0^1 ctdt \\ &= c \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_{t=0}^{t=1} \\ &= \frac{c}{2} \end{aligned}$$

$$\implies c = 2$$

- **Теорема.** Пусть  $\xi$  — абсолютно непрерывная случайная величина, тогда

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \mathbb{P}(\{\xi \in B\}) = \int_B f_\xi(t)dt$$

Тогда, в нашем случае

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\left\{X \leq \frac{1}{2}\right\}\right) &= \mathbb{P}\left(\left\{X \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right]\right\}\right) \\ &= \int_B f_X(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f_X(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} 2tdt \\ &= t^2 \Big|_{t=0}^{t=\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

- $\mathbb{P}\left(\left\{X \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]\right\}\right) = \int_B f_X(t)dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 2tdt = t^2 \Big|_{t=\frac{1}{2}}^{t=1} = \frac{3}{4}$

- $\mathbb{P}\left(\left\{X \in [2; 3]\right\}\right) = \int_{[2;3]} f_X(t)dt = 0$

- $f_X(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0; 1] \\ 0, & x \notin [0; 1] \end{cases}$

Теперь рассмотрим три участка:

$$x < 0 : F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = 0$$

$$0 \leq x \leq 1 : F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x 2t dt = t^2 \Big|_{t=0}^{t=x} = x^2$$

$$x > 1 : F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^1 f_X(t) dt + \int_1^x 0 dt = 1$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & x \in [0; 1] \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

## 2.2 Пусть случайная величина $X$ имеет следующую функцию плотности...

$$\text{Дана функция плотности } f_X(x) = \begin{cases} cx, & x \in [0; 1] \\ 0, & x \notin [0; 1] \end{cases}$$

Найдите

- $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$ . Тогда, при  $x \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) dt = \int_0^1 ct dt \\ &= c \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_{t=0}^{t=1} \\ &= \frac{c}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c = 2$$

- $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 x 2x dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$

- $\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 x^2 2x dx = \frac{1}{2}$

- $\mathbb{D}[X] = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$

- $\mathbb{E}[\sqrt{X}] = \int_0^1 \sqrt{x} 2x dx = \frac{4}{5}$

## 2.3 Пусть задана таблица совместного распределения случайных величин $X$ и $Y$

	$Y = -1$	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = -1$	0.2	0.1	0.2
$X = 1$	0.1	0.3	0.1

Найдите

- $\mathbb{P}(\{X = -1\}) = 0.2 + 0.1 + 0.2 = 0.5$
- $\mathbb{P}(\{Y = -1\}) = 0.2 + 0.1 = 0.3$
- $\mathbb{P}(\{X = -1\} \cap \{Y = -1\}) = 0.2$
- Проверим, выполняется ли

$$\mathbb{P}(\{X = -1\} \cap \{Y = -1\}) = \mathbb{P}(\{X = -1\}) \cdot \mathbb{P}(\{Y = -1\})$$

$$0.2 \neq 0.3 \cdot 0.5$$

$\Rightarrow$  величины  $X$  и  $Y$  не независимы

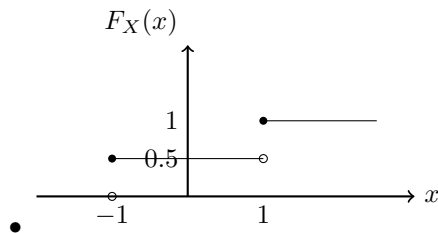
- $F_{X,Y}(-1; 0) = \mathbb{P}(\{X \leq -1\} \cap \{Y \leq 0\}) = \mathbb{P}(\{X = -1\} \cap \{Y = -1\}) + \mathbb{P}(\{X = -1\} \cap \{Y = 0\}) = 0.2 + 0.1 = 0.3$

- | $X$ | $\mathbb{P}$ |
|-----|--------------|
| -1  | 0.5          |
| 1   | 0.5          |

**Примечание.** Для случайной величины  $Y$  таблица распределения выглядит так:

$Y$	$\mathbb{P}$
-1	0.3
0	0.4
1	0.3

- $F_X(x) = \mathbb{P}(\{X \leq x\}) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 0.5, & x \in [-1; 1) \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$



## 2.4 Пусть задана таблица совместного распределения случайных величин $X$ и $Y$

	$Y = -1$	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = -1$	0.2	0.1	0.2
$X = 1$	0.2	0.1	0.2

Найдите

- $\mathbb{P}(\{X = 1\}) = 0.2 + 0.1 + 0.2 = 0.5$
- $\mathbb{P}(\{Y = 1\}) = 0.2 + 0.2 = 0.4$
- $\mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\}) = 0.2$
- Проверим, выполняется ли

$$\mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\}) = \mathbb{P}(\{X = 1\}) \cdot \mathbb{P}(\{Y = 1\})$$

$$0.2 = 0.5 \cdot 0.4$$

$\Rightarrow$  величины  $X$  и  $Y$  независимы

- $F_X(1; 0) = \mathbb{P}(\{X \leq 1\} \cap \{Y \leq 0\})$   
 $= \mathbb{P}(\{X = -1\} \cap \{Y = -1\}) + \mathbb{P}(\{X = -1\} \cap \{Y = 0\})$   
 $+ \mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{Y = -1\}) + \mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{Y = 0\})$   
 $= 0.2 + 0.1 + 0.2 + 0.1$   
 $= 0.6$



- | $Y$ | $\mathbb{P}$ |
|-----|--------------|
| -1  | 0.4          |
| 0   | 0.2          |
| 1   | 0.4          |

- $$F_Y(y) = \mathbb{P}(\{Y \leq y\}) = \begin{cases} 0, & y < -1 \\ 0.4, & y \in [-1; 0) \\ 0.6, & y \in [0; 1) \\ 1, & y \geq 1 \end{cases}$$

