Теория вероятностей и математическая статистика—1
Теоретический и задачный минимумы
ФЭН НИУ ВШЭ

Винер Даниил @danya_vin

Версия от 25 ноября 2024 г.

Содержание

1 Теоретический минимум

1.1 Сформулируйте классическое определение вероятности

Имеет место, когда исходы равновероятны

Пусть Ω — пространство элементарных исходов, то есть все события, которыми может закончиться эксперимент
$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$

Определение. Случайное событие A — любое подмножетсво Ω, причем только для счетных и менее множеств

Определение.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Определение. $P(A) = \sum\limits_{\omega_i \in A} p(\omega_i)$

1.2 Выпишите формулу условной вероятности

$P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}\ \forall B : P(B) > 0$

1.3 Дайте определение независимости (попарной и в совокупности) для n случайных событий

Определение. События A и B называются **независимыми**, если:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Определение. События $A_1, \dots, A_n$ **попарно независимы**, если:

$$\forall i \neq j \in I,\ \text{где } I \text{ — множество индексов} : \mathbb{P}\left(\{A_i \cap A_j\}\right) = \mathbb{P}\left(\{A_i\}\right) \cdot \mathbb{P}\left(\{A_j\}\right)$$

Определение. События $A_1, \dots, A_n$ **независимы в совокупности**, если:

$$\forall i_1 < \dots < i_k < \dots < i_n\ \forall k = 1, \dots, n :$$
$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k})$$

Примечание. Для A_1, A_2, A_3:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$$
$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) \cdot P(A_3)$$
$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_3)$$
$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$$

1.4 Выпишите формулу полной вероятности, указав условия её применимости

Пусть $\{H_i\}$ — полная группа несовместных событий (разбиение Ω)

Должны быть выполнены такие свойства:

- $H_i \cap H_j = \varnothing\ \forall i \neq j$ — несовместность

- $\bigcup\limits_{i=1}^{n} H_i = \Omega$ — полнота

Теорема. Тогда, $P(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)$

Доказательство.

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A \cap H_i)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(A \cap H_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i) \cdot P(H_i)
\end{aligned}
$$

□

1.5 Выпишите формулу Байеса, указав условия её применимости

Пусть $H_1, H_2, \ldots$ — полная группа несовместных событий, для которой выполняются критерии полноты и несовместности (см. предыдущий пункт), и A — некоторое событие, вероятность которого положительна. При этом, $H_i \neq \varnothing$

Тогда условная вероятность того, что имело место событие H_k, если в результате эксперимента наблюдалось событие A, может быть вычислена по формуле

$$
\begin{aligned}
P(H_k|A) &= \frac{P(A|H_k) \cdot P(H_k)}{P(A)} \\
&= \frac{P(H_k \cap A)}{P(A)} \\
&= \frac{P(A|H_k) \cdot P(H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)}
\end{aligned}
$$

1.6 Дайте определение функции распределения $F_X(x)$ случайной величины X. Укажите необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция была функцией распределения некоторой случайной величины

Определение. Функцией рапсредделния случайной величины X называется функция

$$F_X(x) := \mathbb{P}\left(\{X \leqslant x\}\right), x \in \mathbb{R}$$

Теорема. Функция $G : \mathbb{R} \to [0;1]$ является функцией распределения некоторой случайной величины $\xi \iff$

- $G(x)$ является нестрого возрастающей, то есть $\forall x_1, x_2, x_1 \leqslant x_2\ G(x_1) \leqslant G(x_2)$
- $G(x)$ является непрерывной справа в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, то есть $\forall x \in \mathbb{R}\ \lim\limits_{y \to x+0} G(y) = G(x)$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} G(x) = 0$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = 1$

1.7 Дайте определение функции плотности $f_X(x)$ случайной величины X. Укажите необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция была функцией плотности некоторой случайной величины

Определение. Говорят, что случайная величина X является абсолютно непрерывной, если ее функция распределения $F_X(x)$ представима в виде

$$F_X(x) := \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t, x \in \mathbb{R},$$

где $f_X(t)$ — неотрицательная интегрируемая функция, которая называется *плотностью распределения* случайной величины X

Теорема. Функция $g : \mathbb{R} \to [0; +\infty)$ является плотностью распределения некоторой случайной величины ξ тогда и только тогда, когда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x = 1$

1.8 Дайте определение математического ожидания для дискретных и абсолютно непрерывных случайных величин. Укажите, чему равно $\mathbb{E}[\alpha X + \beta Y]$, где X и Y — случайные величины, а α и β — произвольные константы

Определение. Пусть дискретная случайная величина X принимает значения $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \cdot \mathbb{P}(\{X = a_k\})$$

сходится

Тогда, математическим ожиданием случайной величины X называется

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \mathbb{P}(\{X = a_k\})$$

Определение. Пусть случайная величина X является абсолютно непрерывной и интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x)\mathrm{d}x$$

сходится

Тогда, математическим ожиданием случайной величины X называется

$$\mathbb{E}[X] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x$$

Теорема. Пусть случайные величины X и Y имеют конечное математическое ожидание
Тогда, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ случайная величина $\alpha X + \beta Y$ тоже имеет конечное математичское ожидание и

$$\mathbb{E}[\alpha X + \beta Y] = \alpha\mathbb{E}[X] + \beta\mathbb{E}[Y]$$

1.9 Дайте определение дисперсии случайной величины. Укажите, чему равно $\mathbb{D}[\alpha X + \beta]$, где X — случайная величина, а α и β — произвольные константы

Определение. Пусть случайная величина X имеет конечное математическое ожидание, тогда дисперсией случайной величины X называется

$$\mathbb{D}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right]$$

Теорема. Пусть случайная величина X имеет конечное математическое ожидание, тогда $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{D}[\alpha X + \beta] = \alpha^2 \mathbb{D}[X]$$

1.10 Укажите математическое ожидание, дисперсию, множество значений, принимаемых с ненулевой вероятностью, а также функцию плотности или функцию вероятности

1. **Биномиальное.** Случайная величина X имеет биномиальное распределение с параметрами $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0; 1)$, пишут $X \sim Bi(n, p)$, если случайная величина X принимает значения $0, 1, 2, \ldots, n$ с вероятностями

- $\mathbb{P}(\{\xi = k\}) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, где $k = 0, 1, \ldots, n$
- $\mathbb{E}[\xi] = np$
- $\mathbb{D}[\xi] = np(1-p)$

2. **Пуассоновское.** Случайная величина X имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$, пишут $X \sim Pois(\lambda)$, если случайная величина X принимает значения с вероятностями

   - $\mathbb{P}(\{\xi = k\}) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, где $k \in \{0, 1, \ldots\}$
   - $\mathbb{E}[\xi] = \lambda$
   - $\mathbb{D}[\xi] = \lambda$

3. **Геометрическое.** Случайная величина X имеет геометрическое распределение с параметром $p \in (0; 1)$, пишут $X \sim Geom(p)$, если случайная величина X принимает значения $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ с вероятностями

   - $\mathbb{P}(\{\xi = k\}) = p(1-p)^{k-1}$
   - $\mathbb{E}[\xi] = \dfrac{1}{p}$
   - $\mathbb{D}[\xi] = \dfrac{1-p}{p^2}$

4. **Равномерное.** Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[a; b]$, где $a < b$, пишут $X \sim U[a; b]$, если случайная величина X имеет плотность

   - $f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{если } x \in [a; b] \\ 0, & \text{если } x \notin [a; b] \end{cases}$
   - $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } x \in [a; b] \\ 1, & \text{если } x > b \end{cases}$
   - $\mathbb{E}[\xi] = \dfrac{a+b}{2}$
   - $\mathbb{D}[\xi] = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

5. **Экспоненциальное (показательное).** Случайная величина X имеет экпоненциальное распределение с параметром $\lambda > 0$, пишут $X \sim Exp(\lambda)$, если случайная величина X имеет плотность

   - $f_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$
   - $F_\xi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geqslant 0 \\ 0, & \text{если } x < 0 \end{cases}$
   - $\mathbb{E}[\xi] = \dfrac{1}{\lambda}$
   - $\mathbb{D}[\xi] = \dfrac{1}{\lambda^2}$

1.11 Сформулируйте определение функции совместного распределения двух случайных величин, независимости случайных величин. Укажите, как связаны совместное распределение и частные распределения компонент случайного вектора

Определение. Совместной функцией распределения случайных величин X и Y называется функция

$$F_{X,Y}(x, y) := \mathbb{P}(\{X \leqslant x\} \cap \{Y \leqslant y\}), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$$

Определение. Случайные величины X и Y независимы, если $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ события $\{X \in B_1\}$ и $\{Y \in B_2\}$ являются независимыми, то есть

$$\mathbb{P}\left(\{X \in B_1\} \cap \{Y \in B_2\}\right) = \mathbb{P}\left(\{X \in B_1\}\right) \cdot \mathbb{P}\left(\{Y \in B_2\}\right)$$

Теорема. Случайные величины X и Y независимы тогда и только тогда, когда

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y),\ \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$$

Теорема. (в дискретном случае). Пусть случайная величина X принимает значения $a_1, \ldots, a_m$, случайная величина Y принимает значения $b_1, \ldots, b_n$, тогда случайные величины X и Y независимы $\iff$ $\forall i \in \{1, \ldots, m\}, \forall j \in \{1, \ldots, n\}$ события $\{X = a_i\}$ и $\{Y = b_j\}$ независимы, то есть

$$\mathbb{P}\left(\{X = a_i\} \cap \{Y = b_j\}\right) = \mathbb{P}\left(\{X = a_i\}\right) \cdot \mathbb{P}\left(\{Y = b_j\}\right)$$

Теорема. (в абсолютно непрерывном). Пусть случайный вектор (X, Y) имеет абсолютно непрерывное распредедение. Тогда, случайные величины X и Y независимы $\iff$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y), \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$$

Теорема.

1. $F_\xi(x) \in [0;1]$. Здесь и далее $x = (x_1, \ldots, x_n)$
2. $\lim\limits_{x_1 \to -\infty} F_\xi(x_1, x_2) = 0$
   $\lim\limits_{x_1 \to +\infty} F_\xi(x_1, x_2) = F_{\xi_2}(x_2)$
   $\lim\limits_{\substack{x_1 \to +\infty, \\ x_2 \to +\infty}} F_\xi(x_1, x_2) = 1$
3. $F_\xi(x_1, x_2)$ не убывает по каждому из аргументов
4. $F_\xi(x_1, x_2)$ непрерывна справа по каждому из аргументов

1.12 Сформулируйте определение совместной функции плотности двух случайных величин. Укажите необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция была совместной функцией плотности некоторой пары случайных величин. Сформулируйте определение независимости случайных величин

Определение. Случайный вектор (X, Y) имеет абсолютно непрерывное распределение, если совместнаяфункция распределения $F_{X,Y}(x,y)$ представима в виде

$$F_{X,Y}(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t) \mathrm{d}s \mathrm{d}t,\ \forall x, y \in \mathbb{R},$$

где $f_{X,Y}(s,t)$ — неотрицательная интегрируемая функция, называемая плотностью распределения случайного вектора (X, Y)

Теорема. Функция $g : \mathbb{R}^2 \to [0; +\infty)$ является плотностью распределения случайного вектора $(X, Y) \iff$

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} g(x,y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = 1$$

Теорема.

1. $F_\xi(x) \in [0;1]$. Здесь и далее $x = (x_1, \ldots, x_n)$

2. $\lim\limits_{x_1 \to -\infty} F_\xi(x_1, x_2) = 0$

   $\lim\limits_{x_1 \to +\infty} F_\xi(x_1, x_2) = F_{\xi_2}(x_2)$

   $\lim\limits_{\substack{x_1 \to +\infty, \\ x_2 \to +\infty}} F_\xi(x_1, x_2) = 1$

3. $F_\xi(x_1, x_2)$ не убывает по каждому из аргументов
4. $F_\xi(x_1, x_2)$ непрерынва справа по каждому из аргументов

2 Задачный минимум

Заметьте, что обозначения $P(\ldots)$ и $\mathbb{P}(\{\ldots\})$ — это одно и то же, я просто еще не везде исправил

2.1 $P(A) = 0.3, P(B) = 0.4, P(A \cap B) = 0.1$

a) Найдите $P(A|B)$

$P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0.1}{0.4} = 0.25$

b) Найдите $P(A \cup B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.3 + 0.4 - 0.1 = 0.6$

c) Являются ли события A и B независимыми?

Определение. События A и B называются независимыми, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Определение. События A и B называются несовместными, если $A \cap B = \varnothing$

Давайте просто проверим, выполняется ли равенство $\mathbb{P}(\{A \cap B\}) = \mathbb{P}(\{A\}) \cdot \mathbb{P}(\{B\})$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{A \cap B\}) &= \mathbb{P}(\{A\}) \cdot \mathbb{P}(\{B\}) \\ 0.1 &= 0.3 \cdot 0.4 \\ 0.1 &\neq 0.12 \end{aligned}$$

Это неверно, поэтому события A и B зависимы

2.2 Карлсон выложил кубиками слово КОМБИНАТОРИКА...

Способ №1 (С помощью формулы умножения вероятностей)

$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$

Пусть имеются такие события:

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{\text{первая буква — К}\} \\ A_2 &:= \{\text{вторая буква — О}\} \\ A_3 &:= \{\text{третья буква — Р}\} \\ A_4 &:= \{\text{четвертая буква — Т}\} \end{aligned}$$

Тогда, искомая вероятность:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) &= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= \frac{2}{13} \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{10} \\ &= \frac{1}{4290} \end{aligned}$$

Способ №2 (комбинаторный)

$P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|},\ \Omega = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) : a_1 \in L, a_2 \in L, a_3 \in L, a_4 \in L, a_i \neq a_j \text{ при } i \neq j\}$

$|\Omega| = \dfrac{13!}{9!} = 17160$

$A = \{(K_1, O_1, P_1, T_1), (K_2, O_1, P_1, T_1), (K_1, O_2, P_1, T_1), (K_2, O_2, P_1, T_1)\} \longrightarrow 4$ исхода

Индекс у букв означают какой по счету встретилась буква в слове «КОМБИНАТОРИКА»

Тогда, искомая вероятность$= \dfrac{|A|}{|\Omega|} = \dfrac{4}{17160} = \dfrac{1}{4290}$

2.3 В первой урне 7 белых и 3 черных шара, во второй — 8 белых и 4 черных шара, в третьей — 2 белых и 13 черных шаров

$D_i :=$ {выбираем i-ю урну}, где $i = 1, 2, 3$ — разбиение Ω

Заметим, что урну мы выбираем равновероятно, то есть $P(D_1) = P(D_2) = P(D_3) = \dfrac{1}{3}$

a) Вычислите вероятность того, что шар, взятый наугад из выбранной урны, окажется белым
Формуа полной вероятности

$$P(A) = P(A|D_1) \cdot P(D_1) + \ldots + P(A|D_n) \cdot P(D_n)$$

В нашем случае, формула будет иметь вид

$$P(A) = P(A|D_1) \cdot P(D_1) + P(A|D_2) \cdot P(D_2) + P(A|D_3) \cdot P(D_3)$$

$A :=$ {шар оказался белым}
Заметим, что $P(A|D_1) = \frac{7}{10}, P(A|D_2) = \frac{2}{3}, P(A|D_3) = \frac{2}{15}$, тогда

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|D_1) \cdot P(D_1) + P(A|D_2) \cdot P(D_2) + P(A|D_3) \cdot P(D_3) \\ &= \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) $P(D_1|A) = \dfrac{P(A|D_1) \cdot P(D_1)}{P(A|D_1)P(D_1) + P(A|D_2)P(D_2) + P(A|D_3)P(D_3)} = \dfrac{7}{15}$

2.4 В операционном отделе банка работает 80% опытных сотрудников и 20% неопытных

Обозначим сотрудников так:

$D_1 :=$ {**опытный** сотрудник}
$D_2 :=$ {**неопытный** сотрудник}

Пусть $A :=$ {совершена ошибка}

Тогда, условия задачи можно записать так:

$$\mathbb{P}(\{A|D_1\}) = 0.01$$
$$\mathbb{P}(\{A|D_2\}) = 0.1$$

a) $\mathbb{P}(\{A\}) = \mathbb{P}(\{A|D_1\}) \cdot \mathbb{P}(\{D_1\}) + \mathbb{P}(\{A|D_2\}) \cdot \mathbb{P}(\{D_2\}) = 0.01 \cdot 0.8 + 0.1 \cdot 0.2 = 0.028$

b) $\mathbb{P}(\{D_2|A\}) = \dfrac{\mathbb{P}(\{A|D_2\}) \cdot \mathbb{P}(\{D_2\})}{\mathbb{P}(\{A\})} = 0.714$

Если мы посчитаем по формуле Байеса $\mathbb{P}(\{D_1|A\})$, то получим, что $(D_2|A)$ и $(D_1|A)$ образуют полную группу вероятностей, то есть

$$P(D_2|A) + P(D_1|A) = 1 \Longrightarrow P(D_1|A) = 0.286$$

2.5 Пусть случайная величина X имеет таблицу распределения

x	-1	0	1
$\mathbb{P}(\{X = x\})$	0.25	c	0.25

а) $\Omega = \{X = -1\} + \{X = 0\} + \{X = 1\}$ и $1 = \mathbb{P}(\{\{X = -1\}\}) + \mathbb{P}(\{\{X = 0\}\}) + \mathbb{P}(\{\{X = 1\}\}) \Longrightarrow c = 0.5$

б) $\mathbb{P}\{X \geqslant 0\} = \mathbb{P}(\{X = 0\} \sqcup \{X = 1\}) = \mathbb{P}(\{X = 0\}) + \mathbb{P}(\{X = 1\}) = 0.75$

в) $\mathbb{P}(\{X < -3\}) = 0$, т.к. Ω — дискретное пространство, или же $\{X < -3\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) < -3\}$

г) $\mathbb{P}(\{X \in [-0.5; 0.5]\}) = \mathbb{P}(\{X = 0\}) = 0.5$, т.к. Ω — дискретное пространство

2.6 Пусть случайная величина X имеет таблицу распределения

а) Аналогично предыдущей задаче — $c = 0.5$

б) $\mathbb{E}[X] = -1 \cdot 0.25 + 0 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.25 = 0$

в) $\mathbb{E}[X^2] = (-1)^2 \cdot 0.25 + (0)^2 \cdot 0.5 + (1)^2 \cdot 0.25 = 0.5$
$\mathbb{E}[\sin(X)] = \sin(-1) \cdot 0.25 + \sin(0) \cdot 0.5 + \sin(1) \cdot 0.25$

г) $\mathbb{D}[X] \equiv \mathbb{D}[X] := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X]$

д) $\mathbb{E}[|X|] = |-1| \cdot 0.25 + |0| \cdot 0.25 + |1| \cdot 0.25 = 0.5$

x	-1	0	1
$\mathbb{P}(\{\xi = x\})$	0.25	c	0.25

2.7 Пусть случайная величина X имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 4$ и $p = 0.75$

$X \sim \mathrm{Bi}(n = 4, p = \frac{3}{4})$. Напомним, что $\mathbb{P}(\{X = k\}) = C_4^k (\frac{3}{4})^k (\frac{1}{4})^{4-k}$

а) $\mathbb{P}(\{X = 0\}) = C_4^0 \left(\frac{3}{4}\right)^0 \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \left(\frac{1}{4}\right)^4$

б) $\mathbb{P}(\{X > 0\}) = 1 - \mathbb{P}(\{X = 0\}) = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^4$

в) $\mathbb{P}(\{X < 0\}) = 0$, так как количество успехов в биномиальном распределении $\geqslant 0$

г) $\mathbb{E}[X] = n \cdot p = 4 \cdot \frac{3}{4} = 3$

д) $\mathbb{D}[X] = np(1 - p) = \frac{3}{4}$

е) Нужно посчитать наиболее вероятную величину. Всего есть 5 значений — 5 возможных успешных исходов

$\mathbb{P}(\{X = 0\}) = \left(\frac{1}{4}\right)^4$

$\mathbb{P}(\{X = 1\}) = C_4^1 \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3$

$\mathbb{P}(\{X = 2\}) = C_4^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2$

$\mathbb{P}(\{X = 3\}) = C_4^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1$

$\mathbb{P}(\{X = 4\}) = C_4^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0$

2.8 Пусть случайная величина X имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = 100$

Имеется случайная величина $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda = 100)$

а) $\mathbb{P}(\{\{X = 0\}\}) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} = e^{-100}$

б) $\mathbb{P}(\{\{X > 0\}\}) = 1 - \mathbb{P}(\{\{x = 0\}\}) = 1 - e^{-100}$

в) $\mathbb{P}(\{\{X < 0\}\}) = \mathbb{P}(\{\varnothing\}) = 0$

г) По определению, $\mathbb{E}[X] = \lambda$. Докажем

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}(\{\{x = k\}\}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} \right) \lambda e^{-\lambda} \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

д) Для того, чтобы посчитать дисперсию X сначала посчитаем мат.ожидание X^2, а для этого посчитаем $\mathbb{E}[X(X-1)]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X(X-1)] &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \mathbb{P}(\{\{x = k\}\}) \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} e^{-\lambda} \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

Тогда, $\lambda^2 = \mathbb{E}[X(X-1)] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X] \Longrightarrow \mathbb{E}\left[X^2\right] = \lambda + \lambda^2$

Теперь можем выразить дисперсию через известное равенство:

$$\mathbb{D}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - (\mathbb{E}[X])^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda$$

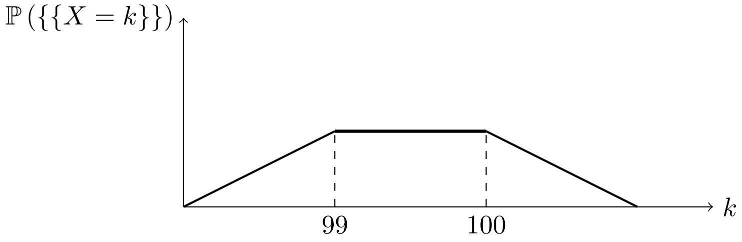
е) Предположим, что $X = k$ и есть наиболее вероятное значение, принимаемое X. При этом, $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Так как k — дискретная, то дифференцированием мы воспользоваться не можем, тогда посчитаем $\dfrac{\mathbb{P}(\{\{X = k+1\}\})}{\mathbb{P}(\{\{X = k\}\})}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{P}(\{\{X = k+1\}\})}{\mathbb{P}(\{\{X = k\}\})} &= \frac{\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\lambda}}{\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}} \\
&= \frac{\lambda}{k+1} \\
&= \frac{100}{k+1}
\end{aligned}$$

Теперь проанализируем при каких k это отношение будет больше, меньше или равно 1:

- $\dfrac{100}{k+1} > 1 \Longrightarrow k < 99$
- $\dfrac{100}{k+1} < 1 \Longrightarrow k > 99$
- $\dfrac{100}{k+1} = 1 \Longrightarrow k = 99$

Значит, 99 и 100 — наиболее вероятные значения, принимаемые случайной величиной X



2.9 В лифт 10-этажного дома на первом этаже вошли 5 человек

а) Пусть $\xi_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й } \textit{пассажир} \text{ вышел на шестом этаже} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$. При этом $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Тогда, $\xi = \xi_1 + \ldots + \xi_5$ — число *пассажиров*, которые вышли на шестом этаже

Заметим, что $\xi_1, \ldots, \xi_5$ — независимые, а также $\xi_i \sim \mathrm{Be}\left(p = \frac{1}{9}\right)$. Тогда, $\xi \sim \mathrm{Bi}\left(n = 5, p = \frac{1}{9}\right)$

$\mathbb{P}(\{\{\xi > 0\}\}) = 1 - \mathbb{P}(\{\{\xi = 0\}\}) = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^5$

б) $\mathbb{P}(\{\{\xi = 0\}\}) = C_n^k p^k q^{n-k} = C_5^0 \left(\frac{1}{9}\right)^0 \left(\frac{8}{9}\right)^5 = \left(\frac{8}{9}\right)^5$

в) Пусть $\eta_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й } \textit{пассажир} \text{ вышел на 6 этаже или выше} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$. При этом $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Тогда, $\eta = \eta_1 + \ldots + \eta_5$ — число *пассажиров*, которые вышли на шестом этаже и выше

Заметим, что $\eta_1, \ldots, \eta_5$ — независимые, а также $\eta_i \sim \mathrm{Be}\left(p = \frac{5}{9}\right)$. Тогда, $\eta \sim \mathrm{Bi}\left(n = 5, p_1 = \frac{5}{9}\right)$

$\mathbb{P}(\{\{\eta = 5\}\}) = C_5^5 \cdot p_1^5 \cdot q^0 = \left(\frac{5}{9}\right)^5$

2.10 При работе некоторого устройства время от времени возникают сбои

$\xi_i \sim \mathrm{Pois}(\lambda = 3)$ — число сбоев за i-е сутки

а)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{\{\xi_i > 0\}\}) &= 1 - \mathbb{P}(\{\{\xi_i = 0\}\}) \\ &= 1 - \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} \\ &= 1 - e^{-3} \end{aligned}$$

б) Требуется вычислить вероятность того, что за двое суток не произойдет ни одного сбоя. То есть нужно найти вероятность двух событий: $\{\xi_1 = 0\}$ и $\{\xi_2 = 0\}$. Заметим, что эти события независимы. Формально:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{\{\xi_1 = 0\} \cap \{\xi_2 = 0\}\}) &= \mathbb{P}(\{\{\xi_1 = 0\}\}) \cdot \mathbb{P}(\{\{\xi_2 = 0\}\}) \\ &= e^{-3} \cdot e^{-3} \end{aligned}$$

2.11 Пусть случайная величина X имеет следующую функцию плотности...

Дана функция плотности $f_X(x) = \begin{cases} cx, & x \in [0; 1] \\ 0, & x \notin [0; 1] \end{cases}$

Найдите

- $F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t$. Тогда, при $x \to +\infty$

$$\begin{aligned} 1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\mathrm{d}t &= \int\limits_{0}^{1} ct\mathrm{d}t \\ &= c \cdot \left.\frac{t^2}{2}\right|_{t=0}^{t=1} \\ &= \frac{c}{2} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow c = 2$

- **Теорема.** Пусть ξ — абсолютно непрерывная случайная величина, тогда

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\ \mathbb{P}\left(\{\xi \in B\}\right) = \int\limits_{B} f_\xi(t)\mathrm{d}t$$

Тогда, в нашем случае

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\{X \leqslant \frac{1}{2}\}\right) &= \mathbb{P}\left(\{X \in (-\infty; \frac{1}{2}]\}\right) \\ &= \int\limits_{B} f_X(t)\mathrm{d}t \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f_X(t)\mathrm{d}t \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\frac{1}{2}} 2t\mathrm{d}t \\ &= t^2\Big|_{t=0}^{t=\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

- $\mathbb{P}\left(\{X \in [\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]\}\right) = \int\limits_{B} f_X(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} 2t\mathrm{d}t = t^2\Big|_{t=\frac{1}{2}}^{t=1} = \frac{3}{4}$

- $\mathbb{P}\left(\{X \in [2; 3]\}\right) = \int\limits_{[2;3]} f_X(t)\mathrm{d}t = 0$

- $f_X(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0; 1] \\ 0, & x \notin [0; 1] \end{cases}$

Теперь рассмотрим три участка:

$$x < 0 : F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t = 0$$

$$0 \leqslant x \leqslant 1 : F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}t + \int\limits_{0}^{x} 2t\mathrm{d}t = t^2\Big|_{t=0}^{t=x} = x^2$$

$$x > 1 : F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}t + \int\limits_{0}^{1} f_X(t)\mathrm{d}t + \int\limits_{1}^{x} 0\mathrm{d}t = 1$$

$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & x \in [0; 1] \\ 0, & x > 1 \end{cases}$

2.12 Пусть случайная величина X имеет следующую функцию плотности...

Дана функция плотности $f_X(x) = \begin{cases} cx, & x \in [0;1] \\ 0, & x \notin [0;1] \end{cases}$

Найдите

- $F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t$. Тогда, при $x \to +\infty$

$$\begin{aligned} 1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\mathrm{d}t &= \int\limits_{0}^{1} ct\mathrm{d}t \\ &= c \cdot \frac{t^2}{2}\bigg|_{t=0}^{t=1} \\ &= \frac{c}{2} \end{aligned}$$

$\implies c = 2$

- $\mathbb{E}\left[X\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} x2x\mathrm{d}x = 2\int\limits_{0}^{1} x^2\mathrm{d}x = 2 \cdot \frac{x^3}{3}\bigg|_{0}^{1} = \frac{2}{3}$
- $\mathbb{E}\left[X^2\right] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} x^2 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$
- $\mathbb{D}\left[X\right] = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$
- $\mathbb{E}\left[\sqrt{X}\right] = \int\limits_{0}^{1} \sqrt{x}2x\mathrm{d}x = \frac{4}{5}$

2.13 Пусть задана таблица совместного распределения случайных величин X и Y

	$Y = -1$	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = -1$	0.2	0.1	0.2
$X = 1$	0.1	0.3	0.1

Найдите

- $\mathbb{P}\left(\{X = -1\}\right) = 0.2 + 0.1 + 0.2 = 0.5$
- $\mathbb{P}\left(\{Y = -1\}\right) = 0.2 + 0.1 = 0.3$
- $\mathbb{P}\left(\{X = -1\} \cap \{Y = -1\}\right) = 0.2$
- Проверим, выполняется ли

$$\begin{gathered} \mathbb{P}\left(\{X = -1\} \cap \{Y = -1\}\right) = \mathbb{P}\left(\{X = -1\}\right) \cdot \mathbb{P}\left(\{Y = -1\}\right) \\ 0.2 \neq 0.3 \cdot 0.5 \end{gathered}$$

$\implies$ величины X и Y *не* независимы

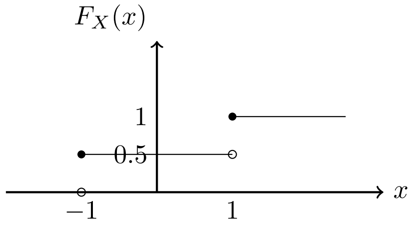
- $F_{X,Y}(-1;0) = \mathbb{P}\left(\{X \leqslant -1\} \cap \{Y \leqslant 0\}\right) = \mathbb{P}\left(\{X = -1\} \cap \{Y = -1\}\right) + \mathbb{P}\left(\{X = -1\} \cap \{Y = 0\}\right) = 0.2 + 0.1 = 0.3$

X	$\mathbb{P}$
-1	0.5
1	0.5

  Примечание. Для случайной величины Y таблица распределения выглядит так:

Y	$\mathbb{P}$
-1	0.3
0	0.4
1	0.3

- $F_X(x) = \mathbb{P}(\{X \leqslant x\}) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 0.5, & x \in [-1; 1) \\ 1, & x \geqslant 1 \end{cases}$

- 

2.14 Пусть задана таблица совместного распределения случайных величин X и Y

	$Y = -1$	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = -1$	0.2	0.1	0.2
$X = 1$	0.2	0.1	0.2

Найдите

- $\mathbb{P}(\{X = 1\}) = 0.2 + 0.1 + 0.2 = 0.5$
- $\mathbb{P}(\{Y = 1\}) = 0.2 + 0.2 = 0.4$
- $\mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\}) = 0.2$
- Проверим, выполняется ли

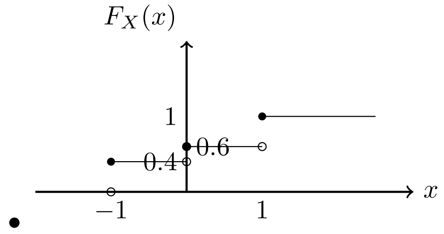
  $$\mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\}) = \mathbb{P}(\{X = 1\}) \cdot \mathbb{P}(\{Y = 1\})$$
  $$0.2 = 0.5 \cdot 0.4$$

  $\Longrightarrow$ величины X и Y независимы

- $$\begin{aligned} F_X(1; 0) &= \mathbb{P}(\{X \leqslant 1\} \cap \{Y \leqslant 0\}) \\ &= \mathbb{P}(\{X = -1\} \cap \{Y = -1\}) + \mathbb{P}(\{X = -1\} \cap \{Y = 0\}) \\ &+ \mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{Y = -1\}) + \mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{Y = 0\}) \\ &= 0.2 + 0.1 + 0.2 + 0.1 \\ &= 0.6 \end{aligned}$$

Y	$\mathbb{P}$
-1	0.4
0	0.2
1	0.4

- $F_Y(y) = \mathbb{P}(\{Y \leqslant y\}) = \begin{cases} 0, & y < -1 \\ 0.4, & y \in [-1; 0) \\ 0.6, & y \in [0; 1) \\ 1, & y \geqslant 1 \end{cases}$


$F_X(x)$
1
0.6
0.4
x
-1
1