Теория вероятностей и математическая статистика—1
Консультация по максимуму—2

irreitman, @danya_vin

Версия от 14 декабря 2024 г.

Яна, спасибо за мак

Все задания взяты из максимума—2 ИП 2023-2024

№2

Величины X и Y независимы. Случайная величина Y равномерно распределена на отрезке $[0,1]$. Случайная величина X имеет плотность распределения

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & \text{если } x \in [0;1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

a) Найдите функцию плотности суммы $f_{X+Y}(z)$

b) Найдите $\mathbb{E}(X+Y)$

c) Найдите интерквартильный размах величины X

a) $f_{X+Y} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-U)f_Y(U)\mathrm{d}u$

Отметим, что $f_Y = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [0;1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

Чтобы мы могли взять интеграл нужно, чтобы $\begin{cases} (x-U) \in [0;1] \\ U \in [0;1] \end{cases} \implies \begin{cases} U \in [x-1;x] \\ U \in [0;1] \end{cases}$

Тогда, у нас есть два случая:

- $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x-1 < 0 \end{cases} \implies x \in [0;1)$

  Тогда, интеграл будет равен $\int\limits_0^x 2(x-U)\mathrm{d}u = 2x^2 - x^2 = x^2$

- $\begin{cases} x \geqslant 1 \\ x-1 \leqslant 1 \end{cases} \implies x \in [1;2]$

  Тогда, интеграл равен $\int\limits_{x-1}^{1} 2(x-U)\mathrm{d}u = 2x - x^2$

Таким образом, $f_{X+Y} = \begin{cases} x^2, & x \in [0;1) \\ 2x - x^2, & x \in [1;2] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

b) $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X] + \frac{1}{2}$

$$f_X = \begin{cases} 2x, & x \in [0;1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Тогда, $\mathbb{E}[X] = \int\limits_0^1 x f_X(x)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 2x^2 \mathrm{d}x = \dfrac{2}{3}$

Итого, $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \frac{1}{2} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$

c) Найти $IR = q_{0,75} - q_{0,25}$

$$f_X = \begin{cases} 2x, & x \in [0;1] \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \Longrightarrow F_X = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & x \in [0;1] \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Определение. Квантиль уровня a — корень уравнения $F_X(q_a) = a$

Тогда, $\begin{cases} q_{0,25} : x^2 = 0,25 \Longrightarrow x = 0,5 \\ q_{0,75} : x^2 = 0,75 \Longrightarrow x = 0,5\sqrt{3} \end{cases}$ и $IR = q_{0,75} - q_{0,25} = 0,5(\sqrt{3} - 1)$

№3

Сибирский крокодил Утундрий решил заняться риск-менеджментом. В этот раз он изучает теорию эффективных портфелей ценных бумаг. Величины R_1 и R_2 — это доходности двух рисковых ценных бумаг с $\mathbb{E}[R_1] = \mathbb{E}[R_2] = 0.15, \mathbb{D}[R_1] = 0.49, \mathbb{D}[R_2] = 1$ и $\operatorname{cov}(R_1, R_2) = -0.35$.
Крокодил Утундрий знает, что:

- Доходность портфеля вычисляется по формуле $R = w_1 R_1 + w_2 R_2$, где $w_1 \geqslant 0$ и $w_2 \geqslant 0$ — это доли первой и второй ценный бумаг в портфеле, соответственно, и $w_1 + w_2 = 1$
- Ожидаемая доходность портфеля равна $\mathbb{E}[R]$
- Квадратичный риск портфеля определяется как $\mathbb{D}[R]$

Утундрий составил два портфеля A и B. Доли ценных бумаг, с которыми ценные бумаги входят в портфель A, заданы вектором $w^A = (0.7, 0.3)$, а в портфель $B-$ вектором $w^B = (1, 0)$
Помогите Утундрию выполнить следующие задания:

a) Найдите ожидаемые доходности портфелей A и B

b) Какой из портфелей A или B предпочтительнее, если Утундрий является рискофобом, то есть не приемлет риск?

c) Найдите ковариацию доходностей портфелей A и B

d) Составьте портфель C, который имеет наименьший квадратичной риск среди всех портфелей с ожидаемой доходностью 0.15

a) $R_A = 0.7R_1 + 0.3R_2$, $R_B = R_1$, тогда $\mathbb{E}[R_B] = \mathbb{E}[R_1] = 0.15$ и

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[R_A] &= \mathbb{E}[0.7R_1 + 0.3R_2] \\
&= \mathbb{E}[0.7R_1] + \mathbb{E}[0.3R_2] \\
&= 0.7\mathbb{E}[R_1] + 0.3\mathbb{E}[R_2] \\
&= 0.15
\end{aligned}$$

Итого, $\mathbb{E}[R_A] = \mathbb{E}[R_B] = 0.15$

b) Рассчитаем дисперсии каждого портфеля:

- $\mathbb{D}[R_B] = \mathbb{D}[R_1] = 0.49$
- $$\begin{aligned}
\mathbb{D}[R_A] &= \mathbb{D}[0.7R_1 + 0.3R_2] \\
&= \mathbb{D}[0.7R_1] + \mathbb{D}[0.3R_2] + 2cov(0.7R_1, 0.3R_2) \\
&= 0.49\mathbb{D}[R_1] + 0.09\mathbb{D}[R_2] + 2cov(0.7R_1, 0.3R_2) \\
&= 0.49\mathbb{D}[R_1] + 0.09\mathbb{D}[R_2] + 2 \cdot 0.7 \cdot 0.3cov(R_1, R_2) \\
&= 0.1831
\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}
cov(0.7R_1 + 0.3R_2, R_1) &= cov(0.7R_1, R_1) + cov(0.3R_2, R_1) \\
&= 0.7\mathbb{D}[R_1] + 0.3 \cdot cov(R_2, R_1) \\
&= 0.238
\end{aligned}$$

d) Пусть α — доля R_1 и $(1-\alpha)$ — доля R_2 в портфеле C. Рассчитаем дисперсию нового портфеля

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}[\alpha R_1 + (1-\alpha)R_2] &= \alpha^2\mathbb{D}[R_1] + (1-\alpha)^2\mathbb{D}[R_2] + 2\alpha(1-\alpha)cov(R_1, R_2) \\
&= \alpha^2 \cdot 0.49 + (1-\alpha)^2 \cdot 1 + 2(\alpha(1-\alpha) \cdot (-0.35)) \qquad = \alpha^2(0.49 + 1 + 0.7) + \alpha(-2 - 0.7) + C
\end{aligned}$$

Чтобы добиться наименьшего квадратичного риска нужно минимизировать эту функцию от α, возьмем производную:

$$2 \cdot 2.19\alpha - 2.7 = 0 \Longrightarrow \alpha = \frac{2.7}{2 \cdot 2.19}$$

№4

Величины X и Y, описывающие расходы семейной пары, равномерно распределены в треугольнике с вершинами $(0,0),(0,1)$ и $(1,0)$

a) Найдите $\mathbb{P}\left(X^2+Y^2>0.25\right)$

b) Найдите частные фукнции плотности и математические ожидания величин X и Y

c) Проверьте независимость величин X и Y

d) Вычислите ковариацию величин X и Y

a) $\mathbb{P}\left(\{X^2+Y^2>0.25\}\right)=\mathbb{P}\left(\{\sqrt{X^2+Y^2}>0.5\}\right)=1-\mathbb{P}\left(\{\sqrt{X^2+Y^2}\leqslant 0.5\}\right)1-\frac{\frac{\pi}{16}}{\frac{1}{2}}=1-\frac{\pi}{8}$

b) $\mathbb{P}\left(\{X\leqslant x\}\right)=\frac{\frac{(1-x)+1}{2}\cdot x}{\frac{1}{2}}=x(2-x), x\in[0;1]$

Аналогично, для случайной величины Y

Тогда, продифференцировав функцию распределения получим

$$f_X=\begin{cases}2-2x, & x\in[0;1]\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}, \quad f_Y=\begin{cases}2-2y, & y\in[0;1]\\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$

$$\mathbb{E}\left[X\right]=\int\limits_0^1 xf_X(x)\mathrm{d}x$$

$$\mathbb{E}\left[Y\right]=\int\limits_0^1 yf_Y(y)\mathrm{d}y$$

c) $f_{X,Y}\stackrel{?}{=}f_X(x)\cdot f_Y(y)$

$$F_{X,Y}=\mathbb{P}\left(\{X\leqslant x, Y\leqslant y\}\right)=\begin{cases}2xy, & \begin{matrix}x+y\leqslant 1\\ x\in[0;1]\\ y\in[0;1]\end{matrix}\\ \frac{S}{\frac{1}{2}}, & \begin{matrix}x+y>1\\ x\in[0;1],\\ y\in[0;1]\end{matrix}\ \text{где } S \text{ — площадь части, попавшей в треугольник}\end{cases}$$

№5

Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 4 & b \\ a & 9 \end{pmatrix}$$

a) Каким условиям должны удовлетворять константы a и b, чтобы матрица A была ковариационной матрицей некоторого случайного вектора?

b) Известно, что A — ковариационная матрица вектора (X, Y) и $ab = 36$. Каким соотношением связаны компоненты случайного вектора?

a) Должна удовлетворять двум условиям:

- $a = b$
- Все главные миноры неотрицательные

$\det A = 4 \cdot 9 - ab \geqslant 0 \Longrightarrow 36 \geqslant ab$

b) $ab = 36$ и так как $a = b$, то либо $a = b = 6$ либо $a = b = -6$

№6

Юрий Долгорукий проводит уличный опрос и спрашивает москвичей: «Знаете ли Вы год основания Москвы?» С помощью неравенства Чебышёва определите, сколько нужно опросить человек, чтобы с вероятностью не менее 0.9 доля знающих ответ среди опрошенных отличалась бы от истинной вероятности не более, чем на 0.05?

Выпишем неравенство Чебышёва:

$$\mathbb{P}\left(\{|X - \mathbb{E}\left[X\right]| \geqslant \varepsilon\}\right) \leqslant \frac{\mathbb{D}\left[X\right]}{\varepsilon^2}$$

Тогда, в нашем случае $\varepsilon = 0.05$

Теперь проведем такую цепочку преобразований

$$-\mathbb{P}\left(\{|X - \mathbb{E}\left[X\right]| \geqslant \varepsilon\}\right) \geqslant -\frac{\mathbb{D}\left[X\right]}{\varepsilon^2}$$
$$1 - \mathbb{P}\left(\{|X - \mathbb{E}\left[X\right]| \geqslant \varepsilon\}\right) \geqslant 1 - \frac{\mathbb{D}\left[X\right]}{\varepsilon^2}$$
$$\mathbb{P}\left(\{|X - \mathbb{E}\left[X\right]| \leqslant \varepsilon\}\right) \geqslant 1 - \frac{\mathbb{D}\left[X\right]}{\varepsilon^2}$$

Введем случайные величины $Z_1, \ldots, Z_n \sim Bi(1, p)$, где Z_i — ответ i-го москвича на вопрос, тогда

$$X = \frac{Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n}{n} \Longrightarrow \mathbb{E}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[Z_i\right] = p$$

По свойствам биномиального распределения: $\mathbb{D}\left[X\right] = \dfrac{\mathbb{D}\left[Z_i\right]}{n} = \dfrac{p(1-p)}{n}$

$$1 - \frac{p(1-p)}{n} \geqslant 0.9$$
$$\frac{p(1-p)}{n} \leqslant \varepsilon^2$$
$$\frac{p - p^2}{n} \leqslant \frac{\frac{1}{4}}{n} \leqslant 0.1\varepsilon^2$$
$$n \geqslant \frac{1}{0.4\varepsilon^2} = \frac{1}{0.4 \cdot 0.05^2} = 1000$$

Получается, что надо опросить хотя бы 1000 человек

№7

Второй начальный момент неотрицательной случайной величины ξ равен 3
Оцените сверху вероятность $\mathbb{P}(\xi \geqslant 3)$

Из условия получаем, что $\xi > 0, \mathbb{E}\left[\xi^2\right] = 3$, а $\varepsilon = 3$
$\mathbb{P}\left(\{\xi \geqslant \varepsilon\}\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}[\xi]}{\varepsilon} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\mathbb{D}\left[\xi\right] = \mathbb{E}\left[\xi^2\right] - \left(\mathbb{E}\left[\xi\right]\right)^2 \geqslant 0$
$\mathbb{E}\left[\xi^2\right] \geqslant \left(\mathbb{E}\left[\xi\right]\right)^2$
$3 \geqslant \left(\mathbb{E}\left[\xi\right]\right)^2 \sqrt{3} \geqslant \mathbb{E}\left[\xi\right]$

№8

Величина ξ имеет плотность распределения

$$f(x) = \frac{\exp(-x)}{(1+\exp(-x))^2}$$

Для величины ξ вычислите математическое ожидание, медиану, моду и начальный момент порядка 2023

Имеем $f_\xi(x) = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$. Напомним, что

$$\mathbb{E}\left[\xi\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x) \mathrm{d}x$$

Основная идея задачи в том, что функция плотности четная, проверим

$$\begin{aligned} f_\xi(-x) &= \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \\ &= \frac{e^x}{1+2e^x+e^{2x}e^{-2x}} \frac{e^{-x}}{e^{-2x}+2e^{-x}+1} \\ &= \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = f_\xi(x) \end{aligned}$$

Получаем, что $f_\xi(x)$ — четная