Теория вероятностей и математическая статистика—2

Семинар Борзых Д.А.

Винер Даниил @danya_vin

24 января 2025 г.

Теорема. ЦПТ (Леви). Пусть $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, таких что $0 < \mathbb{D}[X_N] < \infty$. Тогда, для любого промежутка $B \subseteq \mathbb{R}$ имеет место

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\mathbb{D}[S_n]}} \in B\right) = \int\limits_B \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x,$$

где $S_n = X_1 + \ldots + X_n$

Задача №1

$X_i \sim U[70; 80]$ — i-й шаг пешехода, $i = 1, \ldots, n$, где $n = 10000$

$S_n := X_1 + \ldots + X_n$ — расстояние, которое прошел пешеход за 10000 шагов. Тогда, требуется найти

$$\mathbb{P}(749000 \leqslant S_n \leqslant 751000)$$

$\mathbb{E}[X_i] = \frac{70+80}{2} = 75 \Longrightarrow \mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}[X_1] + \ldots + \mathbb{E}[X_n] = 75 \cdot n = 750000$

$\mathbb{D}[X_i] = \frac{(80-70)^2}{12} = \frac{25}{3} \Longrightarrow \mathbb{D}[S_n] = \mathbb{D}[X_1] + \ldots + \mathbb{D}[X_n] = \frac{25}{3} \cdot n = \frac{250000}{3}$, так как $X_1, \ldots, X_n$ — независимые

Тогда,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(749000 \leqslant S_n \leqslant 751000) &= \mathbb{P}\left(\frac{749000 - 751000}{\sqrt{\frac{250000}{3}}} \leqslant \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\mathbb{D}[S_n]}} \leqslant \frac{751000 - 749000}{\sqrt{\frac{250000}{3}}}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-2\sqrt{3} \leqslant \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\mathbb{D}[S_n]}} \leqslant 2\sqrt{3}\right) \\
&\approx \Phi(2\sqrt{3}) - \Phi(-2\sqrt{3}) \\
&\approx 0.9995
\end{aligned}$$

Задача №2

$X_i \sim Pois(\lambda = 289)$ — число посетителей магазина за i-й день, $i = 1, \ldots, n$, где $n = 100$

Пусть $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ — число посетителей за 100 дней. Требуется найти с помощью ЦПТ

$$\mathbb{P}(28550 \leqslant S_n \leqslant 29250)$$

- $\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{D}[X_i] = \lambda = 289 \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_n] &= \mathbb{E}[X_1] + \ldots + \mathbb{E}[X_n] = 289 \cdot 100 = 28900 \\
\mathbb{D}[S_n] &= \mathbb{D}[X_1] + \ldots + \mathbb{D}[X_n] = 28900
\end{aligned}$$

Тогда,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(28550 \leqslant S_n \leqslant 29250\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{28550-28900}{\sqrt{28900}} \leqslant \frac{S_n - \mathbb{E}\left[S_n\right]}{\sqrt{28900}} \leqslant \frac{29250-28900}{\sqrt{28900}}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-2.059 \leqslant \frac{S_n - 28900}{\sqrt{28900}} \leqslant 2.059\right) \\
&\approx \Phi(2.059) - \Phi(-2.059) \\
&\approx 0.96
\end{aligned}$$

Задача №3

В финал по стрельбе из лука вышло 2 лучника. Лучник зарабатывает 1 очко, если попадает в яблоко с 20 метров. Первый лучник попадает в цель с вероятностью 0.5, а второй — 0.4. Каждый стрелок делает по 50 выстрелов. Победитель — стрелок, набравший большее число очков.

а)

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{выстрел первого лучника успешный} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, Y_i = \begin{cases} 1, & \text{выстрел второго лучника успешный} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Нужно найти

$$\mathbb{P}\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{50} X_i}_{S_{50}} \geqslant 30\right)$$

$\mathbb{E}\left[S_{50}\right] = 50 \cdot \frac{1}{2} = 25,\ \mathbb{D}\left[S_{50}\right] = 50 \cdot \frac{1}{4} = 12.5$. Тогда,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{50} X_i}_{S_{50}} \geqslant 30\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{S_n - 25}{\sqrt{\frac{25}{2}}} \leqslant \frac{30-25}{\sqrt{\frac{25}{2}}}\right) \\
&\approx 1 - \Phi(1.41) \\
&\approx 0.08
\end{aligned}$$

б)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{50} X_i \geqslant \sum_{i=1}^{50} Y_i\right) &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{50} X_i - \sum_{i=1}^{50} Y_i \geqslant 0\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{50} \underbrace{(X_i - Y_i)}_{Z_i} \geqslant 0\right) \\
&\mathbb{E}\left[Z_i\right] = \mathbb{E}\left[X_i\right] - \mathbb{E}\left[Y_i\right] = 0.5 - 0.4 = 0.1 \\
&\mathbb{D}\left[Z_i\right] = \mathbb{D}\left[X_i - Y_i\right] = \mathbb{D}\left[X_i\right] + \mathbb{D}\left[Y_i\right] - 2cov(X_i, Y_i) = \frac{1}{4} + 0.4 \cdot 0.6 = 0.49 \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{\sum Z_i - 50 \cdot 0.1}{\sqrt{50 \cdot 0.49}} > \frac{0 - 50 \cdot 0.1}{\sqrt{50 \cdot 0.49}}\right) \\
&\approx 1 - \Phi(-1.01) \\
&= \Phi(1.01) \\
&= 0.84
\end{aligned}$$

Задача №4

$X_i \sim U[-2;2]$. Требуется найти $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\underbrace{|X_1 + \ldots + X_n|}_{S_n} > \sqrt{3n}\right)$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|X_1 + \ldots + X_n| > \sqrt{3n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 - \mathbb{P}\left(S_n \in [-\sqrt{3n}; \sqrt{3n}]\right)$$

$$\mathbb{D}[S_n] = \frac{(2+2)^2}{12} = \frac{4}{3}n$$

$$\mathbb{E}[S_n] = 0 \cdot n = 0$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 - \mathbb{P}\left(\frac{-\sqrt{3n} - 0}{\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{3}}} \leqslant \frac{S_n - 0}{\sqrt{\mathbb{D}[S_n]}} \leqslant \frac{3}{2}\right)$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(-1.5 \leqslant \xi_n \leqslant 1.5\right)$$

$$= 1 - (2\Phi(1.5) - 1)$$

$$= 0.1336$$

Задача №5

$X_n \sim Pois(n),\ Y_n \sim Pois(n)$ — независимые. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_n - Y_n \leqslant \sqrt{2n}\right)$

Заметим, что $\exists \xi_i$ — случайные величины, такие что $X_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$, а также $\exists \zeta_i$, такие что $Y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \zeta_i$

Пусть $\tau_i = \xi_i - \zeta_i \Longrightarrow X_i - Y_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \tau_i = S_n \Longrightarrow \mathbb{E}[S_n] = 0,\ \mathbb{D}[S_n] = 2n$

$S_n \leqslant \sqrt{2n} \Longleftrightarrow \frac{S_n}{\sqrt{2n}} \leqslant 1 \Longrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{2n}} \leqslant 1\right) = \Phi(1) \approx ...$$

Задача №9

$\xi_1, \eta_1, \ldots, \xi_n \eta_n$ — независимые, $\xi_i \sim Pois(2), \eta_i \sim Pois(3), i \in \mathbb{N}$. Найдите

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\xi_1 + \ldots + \xi_n + n > \eta_1 + \ldots + \eta_n + \sqrt{5n}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\overbrace{\underbrace{\xi_1 - \eta_1}_{\tau_1} + \ldots + \underbrace{\xi_n - \eta_n}_{\tau_n}}^{S_n} > \sqrt{5n} - n\right)$$

$$\mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}[\tau_1] + \ldots + \mathbb{E}[\tau_n] = -n$$

$$\mathbb{D}[S_n] = 5n$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{5n}} \leqslant 1\right)$$

$$= 1 - \Phi(1)$$