

Математический анализ—2

Коллоквиум

Лектор: Зароднюк Алёна Владимировна
L^AT_EX by Винер Даниил @danya_vin

Версия от 27 ноября 2024 г.

Содержание

| | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Основные определения | 3 |
| 1.1 | Определение (замкнутого) бруса (координатного промежутка, параллелепипеда) | 3 |
| 1.2 | Определение меры (объема) бруса | 3 |
| 1.3 | Определение разбиения бруса | 3 |
| 1.4 | Определение диаметра множества в \mathbb{R}^n | 3 |
| 1.5 | Определение ограниченного множества в \mathbb{R}^n | 3 |
| 1.6 | Определение масштаба (диаметра) разбиения | 3 |
| 1.7 | Определения отмеченных точек и размеченного разбиения | 3 |
| 1.8 | Определение интегральной суммы Римана | 4 |
| 1.9 | Определение интегрируемой по Риману функции на замкнутом бруске в \mathbb{R}^n | 4 |
| 1.10 | Определение множества меры нуль по Лебегу | 4 |
| 1.11 | Определение внутренней точки множества | 4 |
| 1.12 | Определение внешней точки множества | 4 |
| 1.13 | Определение граничной точки множества | 4 |
| 1.14 | Определение изолированной точки множества | 4 |
| 1.15 | Определение предельной точки множества | 5 |
| 1.16 | Определение точки прикосновения множества | 5 |
| 1.17 | Определение открытого множества | 5 |
| 1.18 | Определение замкнутого множества | 5 |
| 1.19 | Определение компакта | 5 |
| 1.20 | [DELETE] Определение ограниченного множества | 5 |
| 1.21 | [DELETE] Определение расстояния между компактами | 5 |
| 1.22 | Определение колебания функции на множестве | 5 |
| 1.23 | Определение колебания функции в точке | 5 |
| 1.24 | Определение непрерывности функции в точке | 5 |
| 1.25 | Определение выполнения свойства почти всюду | 6 |
| 1.26 | Определение пересечения двух разбиений | 6 |
| 1.27 | Определение измельчения разбиения | 6 |
| 1.28 | Определение верхней и нижней суммы Дарбу | 6 |
| 1.29 | Определение верхнего и нижнего интеграла Дарбу | 6 |
| 1.30 | Определение допустимого множества | 6 |
| 1.31 | Определение интеграла Римана по допустимому множеству | 6 |
| 1.32 | Определение сходимости функциональной последовательности в точке | 7 |
| 1.33 | Определение множества сходимости функциональной последовательности | 7 |
| 1.34 | Определение предельной функции функциональной последовательности | 7 |
| 1.35 | Определение поточечной сходимости функциональной последовательности на множестве | 7 |
| 1.36 | Определение равномерной сходимости функциональной последовательности на множестве | 7 |
| 2 | Основные формулировки | 8 |
| 2.1 | Свойства меры бруса в \mathbb{R}^n | 8 |
| 2.2 | Необходимое условие интегрируемости функции по Риману | 8 |
| 2.3 | Свойства интеграла Римана | 8 |
| 2.4 | Свойства множества меры нуль по Лебегу | 8 |
| 2.5 | Критерий замкнутости множества в \mathbb{R}^n | 8 |
| 2.6 | Теорема о компактности замкнутого бруса в \mathbb{R}^n | 8 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 2.7 | Критерий компактности в \mathbb{R}^n | 9 |
| 2.8 | Теорема Вейерштрасса о непрерывной функции на компакте | 9 |
| 2.9 | Теорема о связи непрерывности функции в точке с колебанием | 9 |
| 2.10 | [DELETE] Теорема Кантора-Гейне о колебаниях функции на компакте | 9 |
| 2.11 | Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману | 9 |
| 2.12 | Свойства интегральных сумм Дарбу | 9 |
| 2.13 | Теорема об интегралах Дарбу как пределах интегральных сумм Дарбу | 9 |
| 2.14 | Критерий Дарбу интегрируемости функции на замкнутом брусе | 9 |
| 2.15 | Утверждение о независимости определения допустимого множества от выбора бруса | 9 |
| 2.16 | Теорема Фубини о переходе к повторному интегралу | 10 |
| 2.17 | Супремальный критерий равномерной сходимости функциональной последовательности | 10 |
| 2.18 | Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности | 10 |
| 2.19 | Теорема о почленном переходе к пределу для функциональной последовательности | 10 |
| 2.20 | Теорема о непрерывности предельной функции | 10 |
| 2.21 | Утверждение о неравномерной сходимости фун. послед. при наличии разрыва | 10 |
| 2.22 | Утверждение о неравномерной сходимости фун. послед. при наличии расходимости в точке | 11 |
| 2.23 | Теорема о почленном интегрировании функциональной последовательности | 11 |
| 2.24 | Теорема о почленном дифференцировании функциональной последовательности | 11 |
| 2.25 | Теорема о замене переменных в кратном интеграле | 11 |
| 3 | Вопросы на доказательство | 12 |
| 3.1 | [ТВА] Свойства меры бруса в \mathbb{R}^n | 12 |
| 3.2 | Необходимое условие интегрируемости | 12 |
| 3.3 | Свойства интеграла Римана: линейность, монотонность, оценка интеграла | 12 |
| 3.4 | Свойства множества меры нуль по Лебегу | 13 |
| 3.5 | Критерий замкнутости множества в \mathbb{R}^n | 14 |
| 3.6 | Теорема о компактности замкнутого бруса | 15 |
| 3.7 | Критерий компактности в \mathbb{R}^n | 15 |
| 3.8 | Теорема Вейерштрасса о непрерывной функции на компакте | 16 |
| 3.9 | Теорема о связи непрерывности функции в точке с колебанием | 16 |
| 3.10 | Свойства интегральных сумм Дарбу | 17 |
| 3.10.1 | Нижняя сумма Дарбу не больше верхней | 17 |
| 3.10.2 | Монотонность сумм относительно измельчений разбиения | 17 |
| 3.10.3 | Никакая нижняя сумма Дарбу не больше какой-либо верхней суммы на том же брусе | 17 |
| 3.11 | Теорема об интегралах Дарбу как пределах интегральных сумм Дарбу | 18 |
| 3.12 | Критерий Дарбу интегрируемости функции на замкнутом брусе | 18 |
| 3.13 | Утверждение о независимости определения допустимого множества от выбора бруса | 19 |
| 3.14 | Теорема Фубини о переходе к повторному интегралу | 19 |
| 3.15 | Супремальный критерий равномерной сходимости функциональной последовательности | 20 |
| 3.16 | Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности | 20 |
| 3.17 | Теорема о почленном переходе к пределу для функциональной последовательности | 21 |
| 3.18 | Теорема о непрерывности предельной функции | 22 |
| 3.19 | Утверждение о неравномерной сходимости фун. послед. наличии разрыва | 22 |
| 3.20 | Утверждение о неравномерной сходимости фун. послед. при наличии расходимости в точке | 23 |
| 3.21 | Теорема о почленном интегрировании функциональной последовательности | 23 |
| 3.22 | Теорема о почленном дифференцировании функциональной последовательности | 25 |
| 3.23 | [FOR KIARA] Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману | 26 |

1 Основные определения

1.1 Определение (замкнутого) бруса (координатного промежутка, параллелепипеда)

Определение. Замкнутый брус (координатный промежуток) в \mathbb{R}^n — множество, описываемое как

$$I = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i, i \in \{1, \dots, n\}\} \\ = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

Примечание. Просто брусом называется $I = \{a_1, b_1\} \times \dots \times \{a_n, b_n\}$, где $\{a_i, b_i\} \forall i$ может быть отрезком, интервалом и т.д.

1.2 Определение меры (объема) бруса

Определение. Мера бруса — его объём:

$$\mu(I) = |I| = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

1.3 Определение разбиения бруса

Определение. Пусть I — замкнутый, невырожденный брус и $\bigcup_{i=1}^k I_i = I$, где I_i попарно не имеют общих внутренних точек. Тогда набор $\mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^k$ называется разбиением бруса I

1.4 Определение диаметра множества в \mathbb{R}^n

Определение. Диаметр произвольного ограниченного множества $M \subset \mathbb{R}^n$ будем называть

$$d(M) = \sup_{x, y \in M} \|x - y\|, \text{ где} \\ \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

1.5 Определение ограниченного множества в \mathbb{R}^n

Определение. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *ограниченным*, если

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ и } \exists r > 0, \text{ такой что } M \subset B_r(x_0)$$

1.6 Определение масштаба (диаметра) разбиения

Определение. Масштаб разбиения $\mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^k$ — число $\lambda(\mathbb{T}) = \Delta_{\mathbb{T}} = \max_{1 \leq i \leq k} d(I_i)$

1.7 Определения отмеченных точек и размеченного разбиения

Определение. Пусть $\forall I_i$ выбрана точка $\xi_i \in I_i$. Тогда, набор $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^k$ будем называть **отмеченными точками**

Определение. Размеченное разбиение — пара (\mathbb{T}, ξ)

1.8 Определение интегральной суммы Римана

Пусть I — невырожденный, замкнутый брус, функция $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ определена на I

Определение. Интегральная сумма Римана функции f на (\mathbb{T}, ξ) — величина

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) := \sum_{i=1}^k f(\xi_i) \cdot |I_i|$$

1.9 Определение интегрируемой по Риману функции на замкнутом бресе в \mathbb{R}^n

Определение. Функция f интегрируема по Риману на замкнутом бресе I ($f : I \rightarrow \mathbb{R}$), если

$$\exists A \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta : \text{ верно } |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - A| < \varepsilon$$

Тогда A называется *кратным интегралом Римана* и

$$A = \int_I f(x) dx = \int_I \dots \int_I f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Обозначение: $f \in \mathcal{R}(I)$

1.10 Определение множества меры нуль по Лебегу

Определение. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ будем называть *множеством меры нуль по Лебегу*, если $\forall \varepsilon > 0$ существует не более чем счетный набор (замкнутых) брусков $\{I_i\}$ и выполняются:

1. $M \subset \bigcup_i I_i$
2. $\sum_i |I_i| < \varepsilon$

1.11 Определение внутренней точки множества

Определение. Пусть имеется $M \subset \mathbb{R}^n$. Точку $x_0 \in M$ будем называть *внутренней* точкой M , если

$$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subset M$$

1.12 Определение внешней точки множества

Определение. Точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ будем называть *внешней* точкой M , если

$$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subset (\mathbb{R}^n \setminus M)$$

1.13 Определение граничной точки множества

Определение. Точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ будем называть *граничной* точкой M , если

$$\forall \varepsilon > 0 : (B_\varepsilon(x_0) \cap M) \neq \emptyset \wedge B_\varepsilon(x_0) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \emptyset$$

1.14 Определение изолированной точки множества

Определение. Точку $x_0 \in M$ будем называть *изолированной* точкой M , если

$$\exists \varepsilon > 0 : \overset{\circ}{B}_\varepsilon(x_0) \cap M = \emptyset$$

1.15 Определение предельной точки множества

Определение. Точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ будем называть *предельной* точкой M , если

$$\forall \varepsilon > 0 : \overset{\circ}{B}_\varepsilon(x_0) \cap M \neq \emptyset$$

1.16 Определение точки прикосновения множества

Определение. Точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ будем называть *точкой прикосновения* M , если

$$\forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \cap M \neq \emptyset$$

1.17 Определение открытого множества

Определение. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *открытым*, если все его точки внутренние

1.18 Определение замкнутого множества

Определение. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *замкнутым*, если $\mathbb{R}^n \setminus M$ — открыто

1.19 Определение компакта

Определение. Множество $K \subset \mathbb{R}^n$ называется *компактом*, если из \forall его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие

1.20 [DELETE] Определение ограниченного множества

Определение. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *ограниченным*, если

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ и } \exists r > 0, \text{ такой что } M \subset B_r(x_0)$$

1.21 [DELETE] Определение расстояния между компактами

Определение. Расстоянием между двумя множествами X и Y , где $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ будем называть число $\rho(X, Y)$:

$$\rho(X, Y) = \inf_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} \|x - y\|$$

1.22 Определение колебания функции на множестве

Определение. Колебанием функции f на множестве $M \subset \mathbb{R}^n$ будем называть число $\omega(f, M)$:

$$\omega(f, M) = \sup_{x, y \in M} |f(x) - f(y)| = \sup_{x \in M} f(x) - \inf_{y \in M} f(y)$$

1.23 Определение колебания функции в точке

Определение. Колебанием функции f в точке $x_0 \in M \subset \mathbb{R}^n$ будем называть число

$$\omega(f, x_0) := \lim_{r \rightarrow 0+} \omega(f, B_r^M(x_0)), \text{ где } B_r^M = B_r(x_0) \cap M$$

1.24 Определение непрерывности функции в точке

Определение. Функция $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ *непрерывна в точке* x_0 , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in M \text{ такого что } |x - x_0| < \delta \text{ верно } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

1.25 Определение выполнения свойства почти всюду

Определение. Если какое-то свойство не выполняется лишь на множестве меры нуль, то говорят, что это свойство выполняется почти всюду

1.26 Определение пересечения двух разбиений

Определение. Пусть $\mathbb{T}_1 = \{I_k^1\}$ и $\mathbb{T}_2 = \{I_m^2\}$ — два разбиения бруса $I \subset \mathbb{R}^n$.

Пересечением разбиений $(\mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2)$ будем называть множество всех брусков $\{I_{ij}\} : \forall I_{ij}$ выполняется

- $\exists k : I_{ij} \in \{I_k^1\}$
- $\exists m : I_{ij} \in \{I_m^2\}$
- $\{I_{ij}\}$ — разбиение бруса I

1.27 Определение измельчения разбиения

Определение. Разбиение $\mathbb{T}_1 = \{I_k^1\}$ будем называть измельчением разбиения $\mathbb{T}_2 = \{I_m^2\}$, если $\forall k \exists m : I_k^1 \in I_m^2 \implies \mathbb{T} = \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$ является измельчением \mathbb{T}_1 и \mathbb{T}_2

1.28 Определение верхней и нижней суммы Дарбу

Определение. Пусть I — замкнутый брусок, $f : I \mapsto \mathbb{R}$, $\mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^K$ — разбиение бруса I , $m_i = \inf_{I_i}(f)$, и $M_i = \sup_{I_i}(f)$

Тогда числа $\underline{S}(f, \mathbb{T}) = \sum_{i=1}^K m_i |I_i|$ и $\overline{S}(f, \mathbb{T}) = \sum_{i=1}^K M_i |I_i|$ будем называть *нижней и верхней суммой Дарбу* соответственно

1.29 Определение верхнего и нижнего интеграла Дарбу

Определение. Верхним и нижним интегралом Дарбу будем называть числа

$$\overline{I} := \inf_{\mathbb{T}} \overline{S}(f, \mathbb{T}), \quad \underline{I} := \sup_{\mathbb{T}} \underline{S}(f, \mathbb{T})$$

1.30 Определение допустимого множества

Определение. Множество $D \subset \mathbb{R}^n$ называется *допустимым*, если

- D — ограничено
- ∂D — множество меры нуль по Лебегу

1.31 Определение интеграла Римана по допустимому множеству

Определение. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — допустимое, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда, интегралом Римана f по D называется число \mathcal{I} :

$$\mathcal{I} = \int_D f(\bar{x}) d\bar{x} = \int_{I \supset D} f \cdot \chi_D(\bar{x}) d\bar{x}, \text{ где } \chi_D = \begin{cases} 1, & \bar{x} \in D \\ 0, & \bar{x} \notin D \end{cases}$$

1.32 Определение сходимости функциональной последовательности в точке

Пусть $X \subset \mathbb{R}$ и $f_n : X \rightarrow \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$.

Определение. Последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится в точке* $x_0 \in X$, если сходится соответствующая числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$:

$$x_0 \in X, \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \hookrightarrow |f_n(x_0) - a_{x_0}| < \varepsilon \implies a_{x_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n x_0$$

1.33 Определение множества сходимости функциональной последовательности

Определение. Множество $D \subset X$ точек, в которых последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится называется *множеством сходимости*

1.34 Определение предельной функции функциональной последовательности

Определение. Пусть $D \subset X$ — множество сходимости $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\forall x \in D f_n(x) \rightarrow f(x)$. Тогда, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ будем называть *предельной функцией* $\{f_n(x)\}$

1.35 Определение поточечной сходимости функциональной последовательности на множестве

Определение. $D \subset \mathbb{R}, f, f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$. Будем говорить, что $\{f_n(x)\}$ *сходится поточечно* к $f(x)$ на D , если

$$\forall x \in D, \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Обозначение: $f_n(x) \xrightarrow{D} f(x)$

1.36 Определение равномерной сходимости функциональной последовательности на множестве

Определение. Пусть $D \subset \mathbb{R}; f_n, f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Будем говорить, что $\{f_n(x)\}$ *сходится равномерно* к $f(x)$ на D , Если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N, \forall x \in D \text{ такое, что } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Обозначение: $f_n \xrightarrow{D} f$

2 Основные формулировки

2.1 Свойства меры бруса в \mathbb{R}^n

1. **Однородность:** $\mu(I_{\lambda a, \lambda b}) = \lambda^n \cdot \mu(I_{a, b})$, где $\lambda \geq 0$

2. **Аддитивность:** Пусть I, I_1, \dots, I_k — брусы

Тогда, если $\forall i, j \ I_i, I_j$ не имеют общих внутренних точек, и $\bigcup_{i=1}^k I_i = I$, то

$$|I| = \sum_{i=1}^k |I_i|$$

3. **Монотонность:** Пусть I — брус, покрытый конечной системой брусов, то есть $I \subset \bigcup_{i=1}^k I_i$, тогда

$$|I| < \sum_{i=1}^k |I_i|$$

2.2 Необходимое условие интегрируемости функции по Риману

Теорема. Пусть I — замкнутый брус

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies f \text{ ограничена на } I$$

2.3 Свойства интеграла Римана

1. **Линейность.**

$$f, g \in \mathcal{R}(I) \implies (\alpha f + \beta g) \in \mathcal{R}(I) \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

И верно, что:

$$\int_I (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_I f dx + \beta \int_I g dx$$

2. **Монотонность**

$$f, g \in \mathcal{R}(I); \ f|_I \leq g|_I \implies \int_I f dx \leq \int_I g dx$$

3. **Оценка интеграла (сверху)**

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies \left| \int_I f dx \right| \leq \sup_I |f| |I|$$

2.4 Свойства множества меры нуль по Лебегу

1. В определении множества меры нуль можно использовать *открытые* брусы

2. M — множество меры нуль, $L \subset M \implies L$ — множество меры нуль

3. Не более чем счетное объединение множеств меры нуль является множеством меры нуль

2.5 Критерий замкнутости множества в \mathbb{R}^n

Теорема. M — замкнуто $\iff M$ содержит все свои предельные точки

2.6 Теорема о компактности замкнутого бруса в \mathbb{R}^n

Теорема. Пусть $I \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутый брус $\implies I$ — компакт

2.7 Критерий компактности в \mathbb{R}^n

Теорема. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$. K — компакт $\iff K$ замкнуто и ограничено

2.8 Теорема Вейерштрасса о непрерывной функции на компакте

Теорема. Пусть $K \in \mathbb{R}^n$ — компакт и функция $f : K \mapsto \mathbb{R}$ — непрерывная. Тогда f на K достигает наибольшего и наименьшего значений

2.9 Теорема о связи непрерывности функции в точке с колебанием

Теорема. Пусть $x_0 \in M \subset \mathbb{R}^n$; $f : M \mapsto \mathbb{R}$. f — непрерывна в точке $x_0 \iff \omega(f, x_0) = 0$

2.10 [DELETE] Теорема Кантора-Гейне о колебаниях функции на компакте

не было у нас такого пон

2.11 Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману

Теорема. Если $I \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутый невырожденный брус, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, то $f \in R(I) \iff f$ ограничена и непрерывна почти всюду на I

2.12 Свойства интегральных сумм Дарбу

1.

$$\underline{S}(f, \mathbb{T}) = \inf_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \leq \sup_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \bar{S}(f, \mathbb{T})$$

2. Пусть $\tilde{\mathbb{T}}$ — измельчение разбиения \mathbb{T} , тогда

$$\underline{S}(f, \mathbb{T}) \leq \underline{S}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \bar{S}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \bar{S}(f, \mathbb{T})$$

3. $\forall \mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2 : \underline{S}(f, \mathbb{T}_1) \leq \bar{S}(f, \mathbb{T}_2)$

2.13 Теорема об интегралах Дарбу как пределах интегральных сумм Дарбу

Теорема. Пусть $I \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутый брус, а $f : I \mapsto \mathbb{R}$ — ограничена. Тогда:

$$\bar{\mathcal{I}} = \lim_{\Delta_{\mathbb{T}} \rightarrow 0} \bar{S}(f, \mathbb{T}) \quad \text{и} \quad \underline{\mathcal{I}} = \lim_{\Delta_{\mathbb{T}} \rightarrow 0} \underline{S}(f, \mathbb{T})$$

2.14 Критерий Дарбу интегрируемости функции на замкнутом брус

Теорема. $I \in \mathbb{R}^n$ — замкнутый брус, $f : I \mapsto \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{R}(I) \iff f$ — ограничена на I и $\underline{\mathcal{I}} = \bar{\mathcal{I}}$

2.15 Утверждение о независимости определения допустимого множества от выбора бруса

Пусть $I_1 \supset D, I_2 \supset D$, тогда

$$\int_{I_1} f \cdot \chi_D dx \text{ и } \int_{I_2} f \cdot \chi_D dx$$

либо существуют и равны, либо оба не существуют вообще

2.16 Теорема Фубини о переходе к повторному интегралу

Пусть имеются $I_x \subset \mathbb{R}^n, I_y \subset \mathbb{R}^n, I_x \times I_y \subset \mathbb{R}^{m+n}$ — замкнутые брусы, $f : I_x \times I_y \rightarrow \mathbb{R}, f \in \mathcal{R}(I_x \times I_y)$ и \forall фиксированной $x \in I_x : f(x, y) \in \mathcal{R}(I_y) \implies$

$$\int_{I_x \times I_y} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} = \int_{I_x} \left(\int_{I_y} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} \right) d\bar{x} = \int_{I_x} d\bar{x} \int_{I_y} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y}$$

2.17 Супремальный критерий равномерной сходимости функциональной последовательности

Теорема. $f_n \xrightarrow{D} f \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_D |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$

2.18 Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности

Теорема. $f_n(x) \xrightarrow{D} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m > N, \forall x \in D \hookrightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

Примечание. Отрицание Критерия Коши:

$$f_n(x) \not\xrightarrow{D} f(x) \iff \exists \varepsilon_0 > 0 \forall N : \exists n, m > N, \exists x_0 \in D |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon_0$$

2.19 Теорема о почленном переходе к пределу для функциональной последовательности

Теорема. Пусть $f_n, f : D \rightarrow \mathbb{R}, x_0$ — предельная точка $D, f_n \xrightarrow{D} f, \forall n \in \mathbb{N} \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = c_n$

Тогда,

$$\begin{aligned} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \\ \left(\text{или } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) \right) \end{aligned}$$

2.20 Теорема о непрерывности предельной функции

Теорема. Пусть имеется $\left. \begin{aligned} f_n, f : D \rightarrow \mathbb{R}, \\ f_n \xrightarrow{D} f, \\ \forall n \in \mathbb{N} f_n \in C(D) \end{aligned} \right\} \implies f \in C(D)$

2.21 Утверждение о неравномерной сходимости фун. послед. при наличии разрыва

Теорема. Пусть имеется $\left. \begin{aligned} f_n \in C([a; b]), \\ f \in C((a; b)) + \text{разрыв в т. } a, \\ f_n \xrightarrow{[a; b]} f \end{aligned} \right\} \implies f_n \not\xrightarrow{(a; b)} f$

То есть будет поточечная сходимость, но не будет равномерной:

$$f_n \xrightarrow{(a; b)} f, \text{ но не } f_n \xrightarrow{(a; b)} f$$

2.22 Утверждение о неравномерной сходимости фун. послед. при наличии расходимости в точке

$$\left. \begin{array}{l} f_n \in C([a; b)) \\ f_n \xrightarrow{(a; b)} f \\ \nexists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) \end{array} \right\} \Rightarrow f_n \not\xrightarrow{(a; b)} f$$

2.23 Теорема о почленном интегрировании функциональной последовательности

$$\left. \begin{array}{l} f_n, f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R} \\ f_n \xrightarrow{[a; b]} f \\ f_n \in \mathcal{R}([a; b]) \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \Rightarrow f \in \mathcal{R}([a; b]) \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

2.24 Теорема о почленном дифференцировании функциональной последовательности

$$\left. \begin{array}{l} f_n, f, g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R} \\ f_n \in D([a; b]) \\ \exists c \in [a; b] : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(c) \\ \exists g(x) : f'_n \xrightarrow{[a; b]} g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \exists f : f_n \xrightarrow{[a; b]} f \\ \oplus f'(x) = g(x) \end{array}$$

2.25 Теорема о замене переменных в кратном интеграле

Теорема. Пусть имеются $M_1, M_2 \in \mathbb{R}^n$ — открытые множества. $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ — биективно, φ, φ^{-1} — непрерывно дифференцируемые отображения

$D : \overline{D} \subset M_1$ — допустимое множество

$f : \varphi(D) \rightarrow \mathbb{R}$

$f \in \mathcal{R}(\varphi(D)) \iff f(\varphi(t)) \cdot |\det J_\varphi(t)| \in \mathcal{R}(D)$ и

$$\int_{\varphi(D)} f(x) dx = \int_D f(\varphi(t)) \cdot |\det J_\varphi(t)| dt, \text{ где } J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_n} \end{pmatrix}$$

Примечание. $(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{\varphi} (t_1, \dots, t_n)$, где $x_i = \varphi_i(t_1, \dots, t_n)$

3 Вопросы на доказательство

3.1 [ТВА] Свойства меры бруса в \mathbb{R}^n

1. **Однородность:** $\mu(I_{\lambda a, \lambda b}) = \lambda^n \cdot \mu(I_{a, b})$, где $\lambda \geq 0$

2. **Аддитивность:** Пусть I, I_1, \dots, I_k — брусы

Тогда, если $\forall i, j \ I_i, I_j$ не имеют общих внутренних точек, и $\bigcup_{i=1}^k I_i = I$, то

$$|I| = \sum_{i=1}^k |I_i|$$

3. **Монотонность:** Пусть I — брус, покрытый конечной системой брусов, то есть $I \subset \bigcup_{i=1}^k I_i$, тогда

$$|I| < \sum_{i=1}^k |I_i|$$

3.2 Необходимое условие интегрируемости

Теорема. Пусть I — замкнутый брус.

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies f \text{ ограничена на } I$$

Доказательство. От противного.

1. Пусть $f \in \mathcal{R}(I)$, тогда

$$\exists \underbrace{A_f}_{\text{конечное}} \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall (\mathbb{T}, \Xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta : |\sigma_f - A_f| < \varepsilon$$

Значит, для $\varepsilon = 1$ это тоже верно, поэтому:

$$A_f - 1 < \sigma_f < A_f + 1 \implies \sigma_f \text{ — ограничена}$$

2. Пусть f — неограничена на I , но $f \in \mathcal{R}(I) \implies \forall \mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^K \exists i_0 : f$ неограничена на I_{i_0} .

Тогда можно представить так:

$$\sigma_f = \sum_{i \neq i_0} f(\xi_i) |I_i| + f(\xi_{i_0}) |I_{i_0}|$$

Тогда, σ_f может принимать любые сколь угодно большие (малые) значения, в зависимости от I_{i_0}
 \implies **противоречие**

Из пунктов 1 и 2 следует, что

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies f \text{ ограничена на } I$$

□

3.3 Свойства интеграла Римана: линейность, монотонность, оценка интеграла

1. **Линейность.**

$$f, g \in \mathcal{R}(I) \implies (\alpha f + \beta g) \in \mathcal{R}(I) \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

И верно, что:

$$\int_I (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_I f dx + \beta \int_I g dx$$

Доказательство.

(a)

$$f \in \mathcal{R}(I) : \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 \forall (\mathbb{T}, \Xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta_1 \\ |\sigma(f, \mathbb{T}, \Xi) - \int_I f dx| =: |\sigma_f - A_f| < \varepsilon$$

(b) По определению:

$$g \in \mathcal{R}(I) : \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 \forall (\mathbb{T}, \Xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta_2 \\ |\sigma(g, \mathbb{T}, \Xi) - \int_I g dx| =: |\sigma_g - A_g| < \varepsilon$$

(c) Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда (a) и (b) верно для $\delta \implies$

$$|\sigma_{\alpha f + \beta g} - A_{\alpha f + \beta g}| = |\alpha \sigma_f + \beta \sigma_g - \alpha A_f - \beta A_g| \leq |\alpha| \cdot |\sigma_f - A_f| + |\beta| \cdot |\sigma_g - A_g| < (|\alpha| + |\beta|) \varepsilon$$

□

2. Монотонность

$$f, g \in \mathcal{R}(I); f|_I \leq g|_I \implies \int_I f dx \leq \int_I g dx$$

Доказательство.

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies \exists A_f \in \mathbb{R} : |\sigma_f - A_f| < \varepsilon (\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall (\mathbb{T}, \Xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta)$$

Аналогично для $g \in \mathcal{R}(I)$, тогда:

$$A_f - \varepsilon < \sigma_f \leq \sigma_g < A_g + \varepsilon \implies A_f < A_g + 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \implies A_f \leq A_g$$

□

3. Оценка интеграла (сверху)

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies \left| \int_I f dx \right| \leq \sup_I |f| |I|$$

Доказательство. По необходимому условию для интегрируемости функции (см. ниже)

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies f \text{ Ограничена на } I \\ \implies -\sup_I |f| \leq f \leq \sup_I |f|$$

Тогда,

$$-\int_I \sup |f| dx \leq \int_I f dx \leq \int_I \sup |f| dx \\ -\sup_I |f| |I| \leq \int_I f dx \leq \sup_I |f| |I|$$

□

3.4 Свойства множества меры нуль по Лебегу

1. В определении множества меры 0 можно использовать *открытые* брусы

Доказательство. Пусть $\{I_i\}$ — открытые брусы $M \subset \bigcup_i I_i$, то есть $M \subset \mathbb{R}^n$ — множество меры 0 по Лебегу

Пусть $\{\bar{I}_i\}$ — замкнутые брусы I_i .

$$M \subset \bigcup_i I_i \subset \bigcup_i \bar{I}_i, |I_i| = |\bar{I}_i|$$

Если

$$\forall \varepsilon \exists \{I_i\} : M \subset \bigcup_i I_i : \sum_i |I_i| < \varepsilon$$

то

$$\forall \varepsilon \exists \{\bar{I}_i\} : M \subset \bigcup_i \bar{I}_i : \sum_i |\bar{I}_i| < \varepsilon$$

Докажем в обратную сторону. Пусть $\{I_i\}$ — набор замкнутых брусков

$$I_i = [a_1^i, b_1^i] \times \dots \times [a_n^i, b_n^i], \quad V_i = \sum_i |I_i| < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Пусть

$$D_i = \left(\frac{a_1^i + b_1^i}{2} - (b_1^i - a_1^i); \frac{a_1^i + b_1^i}{2} + (b_1^i - a_1^i) \right) \times \dots \times \left(\frac{a_n^i + b_n^i}{2} - (b_n^i - a_n^i); \frac{a_n^i + b_n^i}{2} + (b_n^i - a_n^i) \right)$$

$$\Rightarrow V_2 = \sum_i |D_i| = 2^n V_1 < \varepsilon \quad \square$$

2. M — множество меры нуль, $L \subset M \Rightarrow L$ — множество меры нуль

Доказательство. $L \subset M$ и $\forall \varepsilon > 0 \exists$ не более чем счетное $\{I_i\}$:

$$L \subset M \subset \bigcup_i I_i \text{ и } \sum |I_i| < \varepsilon$$

по транзитивности это верно и для L \square

3. Не более чем счетное объединение множеств меры нуль — множество меры нуль

Доказательство. Пусть $\{M_k\}_{k=1}^\infty$ — счетное,¹ так как $\forall i$ M_k — множество меры нуль, то $\forall i, \forall \varepsilon_i \exists$ не более чем счетное $\{I_i^k\}$:

$$M_k \subset \bigcup_i I_i^k \text{ и } \sum |I_i^k| < \varepsilon_k = \frac{\varepsilon}{2^k} \forall \varepsilon_k > 0$$

Рассмотрим $M = \bigcup_{k=1}^\infty M_k$, тогда $M \subset \bigcup_{i,k} I_i^k$ и

$$\sum_{i,k} \underbrace{|I_i^k|}_{>0} < \sum_{k=1}^\infty \varepsilon_k = \sum_{k=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = \varepsilon$$

\square

- **Пример.** Пусть $\{M_i\}_{i=1}^N$ — конечный набор

$$\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_N = \frac{N}{N+1} \varepsilon < \varepsilon$$

$$\varepsilon_i = \frac{\varepsilon}{N+1}$$

3.5 Критерий замкнутости множества в \mathbb{R}^n

Теорема. M — замкнуто $\iff M$ содержит все свои предельные точки

Доказательство. Докажем необходимость и достаточность

1. (Необходимость) Докажем \Rightarrow от противного

- Пусть x_0 — предельная для M и $x_0 \notin M$. Тогда, $\forall \varepsilon > 0 \quad \overset{\circ}{B}_\varepsilon(x_0) \cap M \neq \emptyset$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$
- По условию M — замкнуто, то есть $\mathbb{R}^n \setminus M$ — открыто \Rightarrow все его точки внутренние и $\exists r > 0$:

$$B_r(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus M \Rightarrow \overset{\circ}{B}_r(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus M \text{ и } \overset{\circ}{B}_r(x_0) \cap M = \emptyset$$

Пришли к противоречию $\Rightarrow M$ содержит все свои предельные точки \square

2. (Достаточность) Докажем \Leftarrow

Пусть y_0 — не является предельной для M , то есть $y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M \Rightarrow \exists r > 0$:

$$\begin{cases} \overset{\circ}{B}_r(y_0) \cap M = \emptyset \\ y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M \end{cases} \Rightarrow B_r(y_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus M$$

$\Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus M$ — открытое и состоит из всех точек, не являющихся предельными $\Rightarrow M$ — замкнуто по определению \square

¹Для конечного доказательство тривиально

3.6 Теорема о компактности замкнутого бруса

Теорема. Пусть $I \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутый брус $\implies I$ — компакт

Доказательство. Пойдем от противного

Пусть $I = [a_1; b_1] \times \dots \times [a_n; b_n]$

1. Положим, что I — не компакт. Значит, существует его покрытие $\{A_\alpha\}$ — открытые множества, такие что $I \subset \{A_\alpha\}$, не допускающее выделения конечного подпокрытия
2. Поделим каждую сторону пополам. Тогда, $\exists I_1$, такой что не допускает конечного подпокрытия. Иначе, I — компакт
3. Аналогично, повторим процесс и получим систему вложенных брусков:

$$I \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$$

То есть на каждой стороне возникает последовательность вложенных отрезков, которые стягиваются в точку $a = (a_1, \dots, a_n)$

При этом, $a \in I_i \forall i$ или $a \in \bigcap_{i=1}^{\infty} I_i$

$$4. a \in I \implies a \in \bigcup A_\alpha \implies \exists \alpha_0 : a \in \underbrace{A_{\alpha_0}}_{\text{открытое}} \implies \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(a) \subset A_{\alpha_0}$$

5. Мы знаем, что $d(I_i) \mapsto 0$ при $i \mapsto \infty$. Тогда,

$$\exists N : \forall i > N \ I_i \subset B_\varepsilon(a) \subset A_{\alpha_0}$$

Получается, что $\forall i > N \ I_i$ покрывается одним лишь A_{α_0} из системы $\{A_\alpha\}$

Получаем противоречие тому, что любое I_i не допускает конечного подпокрытия, а у нас получилось, что $I_i \in A_{\alpha_0} \forall i > N$

Примечание. Любое ограниченное множество можно вписать в замкнутый брус. Потому что можно вокруг него описать шарик, который точно можно вписать в брус

3.7 Критерий компактности в \mathbb{R}^n

Теорема. $K \subset \mathbb{R}^n$. K — компакт $\iff K$ замкнуто и ограничено

Доказательство. Докажем необходимость (\implies)

- *Ограниченность.* K — компакт, значит можно выбрать покрытие $\{B_m(0)\}_{m=1}^{\infty}$ — открытые шары

Тогда, $\exists m_0 : K \subset \bigcup_{m=1}^{m_0} B_m(0) \implies K \subset B_{m_0}(0) \implies$ по определению K — ограничено

- *Замкнутость.* Пойдем от противного. K — компакт, тогда возьмем $\{B_{\frac{\delta(x)}{2}}(0)\}_{x \in K}$ — покрытие открытыми шарами, где $\delta(x) = \rho(x, x_0)$. x_0 — предельная точка, которая $\notin K$ (или же $\in \mathbb{R}^n \setminus K$)

Так как K — компакт, $\exists x_1, \dots, x_s : K \subset \bigcup_{i=1}^s B_{\frac{\delta(x_i)}{2}}(x_i)$

Пусть $\delta = \min_{1 \leq i \leq s} \delta(x_i)$, тогда

$$\begin{aligned} B_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \cap \bigcup_{i=1}^s B_{\frac{\delta(x_i)}{2}}(x_i) = \emptyset &\implies B_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus K \\ &\implies \overset{\circ}{B}_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \cap K = \emptyset \end{aligned}$$

Значит, x_0 не является предельной точкой K , что противоречит нашему предположению

Доказательство. Докажем достаточность

K — замкнуто и ограничено $\implies r > 0 : B_r(0) \supset K \implies \exists I$ — замкнутый брус, такой что

$$K \subset I \text{ и } I = [-r; r]^n \supset K$$

Пусть A_α — произвольное покрытие открытыми множествами для K . Тогда, $I \subset \{A_\alpha\} \cup \underbrace{\{\mathbb{R}^n \setminus K\}}_{\text{открыто}}$. Так как I — компакт, то \exists конечное подпокрытие

$$\{A_{\alpha_i}\}_{i=1}^m \cup \{\mathbb{R}^n \setminus K\} \supset I \supset K \text{ — покрытие для } I$$

Значит, $K \subset \{A_{\alpha_i}\}_{i=1}^m$ — конечное и $\{A_\alpha\}$ — произвольное, тогда K — компакт по определению \square

3.8 Теорема Вейерштрасса о непрерывной функции на компакте

Теорема. Пусть $K \in \mathbb{R}^n$ — компакт и функция $f : K \mapsto \mathbb{R}$ — непрерывная. Тогда f на K достигает наибольшее и наименьшее значения.

Доказательство.

- *Ограниченность.* От противного: пусть существует последовательность $\{x^k\} \subset K : |f(x^k)| > k$. Из ограниченности K следует ограниченность последовательности $\{x^k\}$, и как следствие ограничены последовательности отдельных координат:

$$|x_i^k| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i^k|^2} = \|x^k\| \leq C \quad \text{для некоторого } C$$

По теореме Больцано-Вейерштрасса у $\{x_1^k\}$ существует сходящаяся подпоследовательность $x_1^{k_{j_1}} \rightarrow a_1, j_1 \rightarrow \infty$. Для последовательности $\{x_2^{k_{j_1}}\}$ существует сходящаяся последовательность $x_2^{k_{j_2}} \rightarrow a_2, j_2 \rightarrow \infty$. И т.д. Получаем сходящуюся подпоследовательность:

$$x^{k_j} = (x_1^{k_j}, x_2^{k_j}, \dots, x_n^{k_j}) \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n) = a$$

Точка a — предельная для K . В силу замкнутости K т. $a \in K$. А из непрерывности функции f получаем $f(x^{k_j}) \rightarrow f(a)$. А с другой стороны, $f(x^{k_j}) \rightarrow \infty$ из выбора исходной последовательности.
противоречие

- *Достижение наибольшего (наименьшего) значения.* Итак, мы доказали, что f — ограничена на K . Выберем последовательность $\{x^k\}$:

$$\sup_K f - \frac{1}{k_j} \leq f(x^{k_j}) \leq \sup_K f$$

в силу непрерывности f :

$$\sup_K f \leq f(a) \leq \sup_K f$$

Получаем $f(a) = \sup_K f$, т.е. максимальное значение достигается в точке $x = a$. Для $\inf_K f$ доказательство аналогично \square

3.9 Теорема о связи непрерывности функции в точке с колебанием

Теорема. Пусть $x_0 \in M \subset \mathbb{R}^n$; $f : M \mapsto \mathbb{R}$. f — непрерывна в точке $x_0 \iff \omega(f, x_0) = 0$

Доказательство.

- *Необходимость*

f — непрерывна в т. $x_0 \in M \implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta(x_0) \cap M = B_\delta^M(x_0) \implies |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$
Рассмотрим $\omega(f, x_0) := \lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega(f, B_\delta^M(x_0))$:

$$\omega(f, B_\delta^M(x_0)) = \sup_{x, y \in B_\delta(x_0)} |f(x) - f(y)| \leq \sup_{x \in B_\delta(x_0)} |f(x) - f(x_0)| + \sup_{y \in B_\delta(x_0)} |f(y) - f(x_0)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

При $\varepsilon \rightarrow 0 \implies \delta \rightarrow 0$ и $\omega(f, B_\delta^M(x_0)) \rightarrow 0$, т.е. $\omega(f, x_0) = 0$

• *Достаточность*

Пусть $0 = \omega(f, x_0) := \lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega(f, B_\delta^M(x_0))$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y \in B_\delta^M(x_0) \sup_{x, y \in B_\delta^M(x_0)} |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Получаем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta^M(x_0) \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \implies$$

□

3.10 Свойства интегральных сумм Дарбу

3.10.1 Нижняя сумма Дарбу не больше верхней

Теорема.

$$\underline{S}(f, \mathbb{T}) = \inf_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \leq \sup_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \bar{S}(f, \mathbb{T})$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, \mathbb{T}) &= \sum_{i=1}^K m_i |I_i| = \sum_i \inf_{\xi_i} (f(\xi_i)) |I_i| = \inf_{\xi} \sum_i f(\xi_i) |I_i| = \inf_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \leq \\ \sup_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) &= \sum_i \sup_{\xi} (f(\xi_i)) |I_i| = \sum_i M_i |I_i| = \bar{S}(f, \mathbb{T}) \end{aligned}$$

3.10.2 Монотонность сумм относительно измельчений разбиения

Теорема. Пусть $\tilde{\mathbb{T}}$ — измельчение разбиения \mathbb{T} , тогда

$$\underline{S}(f, \mathbb{T}) \leq \underline{S}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \bar{S}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \bar{S}(f, \mathbb{T})$$

□

Доказательство. Если $L \subset M$, то $\inf L \geq \inf M$ и $\sup L \leq \sup M$, тогда:

$$\underline{S}(f, \mathbb{T}) \leq \underline{S}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \underset{\text{по 6.2}}{\leq} \bar{S}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \bar{S}(f, \mathbb{T})$$

□

3.10.3 Никакая нижняя сумма Дарбу не больше какой-либо верхней суммы на том же брус

Теорема. $\forall \mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2 : \underline{S}(f, \mathbb{T}_1) \leq \bar{S}(f, \mathbb{T}_2)$

Доказательство. $\forall \mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2$ рассмотрим $\tilde{\mathbb{T}} = \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$, тогда по 6.3:

$$\underline{S}(f, \mathbb{T}_1) \leq \underline{S}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \bar{S}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \bar{S}(f, \mathbb{T}_2)$$

□

3.11 Теорема об интегралах Дарбу как пределах интегральных сумм Дарбу

Теорема. Пусть $I \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутый брус, а $f : I \mapsto \mathbb{R}$ — ограничена. Тогда:

$$\bar{\mathcal{I}} = \lim_{\Delta_T \rightarrow 0} \bar{\mathcal{S}}(f, T) \text{ и } \underline{\mathcal{I}} = \lim_{\Delta_T \rightarrow 0} \underline{\mathcal{S}}(f, T)$$

Доказательство. Докажем, что $\underline{\mathcal{I}} = \lim_{\Delta_T \rightarrow 0} \underline{\mathcal{S}}(f, T) \quad (= \sup_T \underline{\mathcal{S}}(f, T))$

1. f -ограничена на I , то $\exists C > 0 : \forall x \in I \quad |f(x)| < C$
2. т.к. по определению $\underline{\mathcal{I}} = \sup_T \underline{\mathcal{S}}(f, T)$, то $\forall \varepsilon > 0 \exists T_1 = \{I_i^1\}_{i=1}^{m_1} : \underline{\mathcal{I}} - \varepsilon < \underline{\mathcal{S}}(f, T_1) \leq \underline{\mathcal{I}} < \underline{\mathcal{I}} + \varepsilon$
3. Пусть $G = \bigcup_{i=1}^{m_1} \partial I_i^1$ — объединение границ брусков (без повторов). Тогда G множество меры нуль по Лебегу (т.к. границы — множества меры нуль по Лебегу)
4. Пусть T_2 — произвольное разбиение $I : T_2 = \{I_i^2\}_{i=1}^{m_2}$
Рассмотрим две кучки брусков:

$$A = \{I_i^2 \in T_2 : I_i^2 \cap G \neq \emptyset\} \quad \text{и} \quad B = T_2 \setminus A \implies \\ \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T_2 : \Delta_{T_2} < \delta \text{ верно, что } \sum_{I_i^2 \in A} |I_i^2| < \varepsilon$$

по определению множества меры нуль, а также т.к. A — покрытие замкнутыми брусками, а G — множество меры нуль.

5. С другой стороны $\forall I_i^2 \in B$ верно, что $I_i^2 \in T_1 \cap T_2$

Хотим рассмотреть

$$|\underline{\mathcal{I}} - \underline{\mathcal{S}}(f, T_2)| = |I - \underline{\mathcal{S}}(f, T_1 \cap T_2) + \underline{\mathcal{S}}(f, T_1 \cap T_2) - \underline{\mathcal{S}}(f, T_2)| \leq \underbrace{|I - \underline{\mathcal{S}}(f, T_1 \cap T_2)|}_* + \underbrace{|\underline{\mathcal{S}}(f, T_1 \cap T_2) - \underline{\mathcal{S}}(f, T_2)|}_{**} \\ < \varepsilon + 2M\varepsilon = \varepsilon(1 + 2M)$$

* из п.2: $\underline{\mathcal{I}} - \varepsilon < \underline{\mathcal{S}}(f, T_1) \leq \underline{\mathcal{S}}(f, T_1 \cap T_2) \leq \underline{\mathcal{I}} < \underline{\mathcal{I}} + \varepsilon \implies |\underline{\mathcal{I}} - \underline{\mathcal{S}}(f, T_1 \cap T_2)| < \varepsilon$

**

$$|\underline{\mathcal{S}}(f, T_1 \cap T_2) - \underline{\mathcal{S}}(f, T_2)| = \left| \sum_{I_i^2 \in B} m_i |I_i^2| + \sum_{I_i^2 \in T_2 \cap A} m_i |I_i^2| - \sum_{I_i^2 \in B} m_i |I_i^2| - \sum_{I_i^2 \in A} m_i |I_i^2| \right| \\ \leq \left| \sum_{I_i^2 \in T_2 \cap A} m_i |I_i^2| \right| + \left| \sum_{I_i^2 \in A} m_i |I_i^2| \right| \\ \leq 2 \left| \sum_{I_i^2 \in A} m_i |I_i^2| \right| \\ < 2M \left| \sum_{I_i^2 \in A} |I_i^2| \right| \\ \leq 2M\varepsilon$$

□

3.12 Критерий Дарбу интегрируемости функции на замкнутом брусе

$I \in \mathbb{R}^n$ — замкнутый брус, $f : I \mapsto \mathbb{R}, f \in \mathcal{R}(I) \iff f$ — ограничена на I и $\underline{\mathcal{I}} = \bar{\mathcal{I}}$

Доказательство. Необходимость

- $f \in \mathcal{R}(I) \implies$ по необходимому условию интегрируемости функции по Риману на замкнутом бруске, f — ограничена на I
- Покажем, что $\underline{I} = \mathcal{I}, \bar{I} = \mathcal{I} \implies \underline{I} = \bar{I}$
 1. $f \in \mathcal{R}(I) \implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta \hookrightarrow |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - \mathcal{I}| < \varepsilon$
 2. $\underline{I} = \sup_{\mathbb{T}} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} = \underline{S}(f, \mathbb{T}) \implies |\underline{I} - \underline{S}| < \varepsilon$
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \exists \mathbb{T} : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta : |\underline{I} - \underline{S}| < \varepsilon$
 3. $\underline{S}(\mathbb{T}, \xi) = \inf_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)$
 $\forall \mathbb{T}, \forall \varepsilon > 0 \exists \xi : |\underline{S} - \sigma| < \varepsilon$

$$|\mathcal{I} - \underline{I}| \leq |\mathcal{I} - \underline{I} - \sigma + \sigma + \underline{S} - \underline{S}| \leq |\mathcal{I} - \sigma| + |\underline{I} - \underline{S}| + |\sigma - \underline{S}| < 3\varepsilon \quad \square$$

Доказательство. Достаточность

f — ограничена и $\underline{I} = \bar{I}$. Имеем

$$\underline{S}(f, \mathcal{T}) = \inf_{\xi} \leq \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \leq \sup_{\xi} (f, \mathbb{T}, \xi) = \bar{S}(f, \mathbb{T})$$

Тогда, при $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \underline{S} = \underline{I}$, $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \bar{S} = \bar{I}$ получаем $\underline{I} = \bar{I}$ □

3.13 Утверждение о независимости определения допустимого множества от выбора бруса

Пусть $I_1 \supset D, I_2 \supset D$, тогда

$$\int_{I_1} f \cdot \chi_D dx \text{ и } \int_{I_2} f \cdot \chi_D dx$$

либо существуют и равны, либо оба не существуют вообще

Покажем существование

- $f \cdot \chi_D \in \mathcal{R}(I_1) \implies$ по критерию Лебега $f \cdot \chi_D$ ограничена на $I_1 \implies f \cdot \chi_D$ ограничена на $D \implies f$ ограничена на $D \implies f \cdot \chi_D$ ограничена на I_2
- $f \cdot \chi_D \in \mathcal{R}(I_1) \implies$ по критерию Лебега $f \cdot \chi_D$ непрерывна почти всюду на $I_1 \implies f \cdot \chi_D$ непрерывна почти всюду на $D \implies$ в худшем случае для $f \cdot \chi_D$ на I_2 добавятся разрывы на $\partial D \implies f \cdot \chi_D$ непрерывна почти всюду на I_2
- Тогда, $f \cdot \chi_D \in \mathcal{R}(I_1) \iff f \cdot \chi_D \in \mathcal{R}(I_2)$

Покажем равенство

- Пусть \mathbb{T}_i — разбиение на I_i : \mathbb{T}_1 и \mathbb{T}_2 совпадают на общей части $I_1 \cap I_2$
- Пусть ξ^i — отмеченные точки I_i : совпадают на общей части
- $\sigma(f \chi_D, \mathbb{T}_1, \xi^1) = \sum_j f \chi_D(\xi_j^1) |I_j^1| = \sum_j f(\xi_j^1) |I_j^1| = \sum_j f(\xi_j^2) |I_j^2| = \sum_j f \chi_D(\xi_j^2) |I_j^2| = \sigma(f \chi_D, \mathbb{T}_2, \xi^2)$

Примечание. Все свойства интеграла Римана и критерия Лебега для бруса справедливы и для других допустимых множеств

3.14 Теорема Фубини о переходе к повторному интегралу

Пусть имеются $I_x \subset \mathbb{R}^n, I_y \subset \mathbb{R}^n, I_x \times I_y \subset \mathbb{R}^{m+n}$ — замкнутые брусы, $f : I_x \times I_y \rightarrow \mathbb{R}, f \in \mathcal{R}(I_x \times I_y)$ и \forall фиксированной $x \in I_x : f(x, y) \in \mathcal{R}(I_y) \implies$

$$\int_{I_x \times I_y} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} = \int_{I_x} \left(\int_{I_y} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y} \right) d\bar{x} = \int_{I_x} d\bar{x} \int_{I_y} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y}$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что $f \in \mathcal{R}(I_x \times I_y)$, $f \in \mathcal{R}(I_y)$, а также Критерием Дарбу

- $\mathbb{T}_x = \{I_i^x\}$ — разбиение на I_x , $\mathbb{T}_y = \{I_j^y\}$ — разбиение на I_y , $\mathbb{T}_{x,y} = \{I_i^x \times I_j^y\} = \{I_{ij}\}$ — разбиение на $I_x \times I_y$
-

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, \mathbb{T}_{x,y}) &= \sum_{i,j} \inf_{(x,y) \in I_{ij}} f(x,y) |I_{ij}| \leq \sum_{i,j} \inf_{x \in I_i^x} \left(\inf_{y \in I_j^y} f(x,y) \right) |I_i^x| |I_j^y| = \sum_i \inf_{I_i^x} \left(\underbrace{\sum_j \inf_{I_j^y} f(x,y) |I_j^y|}_{\underline{S}(f(y), \mathbb{T}_y)} \right) |I_i^x| \\ &\leq \sum_i \inf_{I_i^x} \left(\underbrace{\int_{I_y} f(x,y) dy}_{g(x)} \right) |I_i^x| = \underline{S}(g(x), \mathbb{T}_x) \\ &\leq \bar{S}(g(x), \mathbb{T}_x) \end{aligned}$$

$$\underline{S}(f, \mathbb{T}_{x,y}) \leq \underline{S}(g(x), \mathbb{T}_x) \leq \bar{S}(g(x), \mathbb{T}_x) \leq \bar{S}(f, \mathbb{T}_{x,y}) \implies \exists \bar{I} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \underline{S}(g(x), \mathbb{T}_x) = I$$

□

3.15 Супремальный критерий равномерной сходимости функциональной последовательности

Теорема. $f_n \xrightarrow{D} f \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_D |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$

Доказательство. Докажем необходимость (\implies)

Заметим, что $\sup_D |f_n(x) - f(x)| \geq 0$. Тогда,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N, \forall x \in D \hookrightarrow \sup_D |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$f_n \xrightarrow{D} f \implies \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N, \forall x \in D \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

В худшем случае, $\sup_D |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

Доказательство. Докажем достаточность (\impliedby)

$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \hookrightarrow \sup_D |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, тем более $\forall x \in D \sup_D \geq |f_n(x) - f(x)|$

Тогда, $f_n \xrightarrow{D} f$

□

Примечание. $f \rightrightarrows f \implies f_n \longrightarrow f$, но в обратную сторону это не работает

3.16 Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности

Теорема. $f_n(x) \xrightarrow{D} f(x) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m > N, \forall x \in D \hookrightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

Доказательство. \implies Докажем необходимость

Так как $f_n(x) \xrightarrow{D} f(x)$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \forall x \in D \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Рассмотрим $|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Таким образом, мы показали, что $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m > N, \forall x \in D \hookrightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ □

Доказательство. \Leftarrow Докажем достаточность

Распишем определение равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m > N, \exists x \in D : |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Зафиксируем $x_0 \in D \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = f(x_0)$ ¹

$$x_0 \in D : \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m > N : |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

В худшем случае, $\forall x \in D : \text{при } m \rightarrow \infty |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

Тогда,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \forall x \in D \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

□

Примечание. Отрицание Критерия Коши:

$$f_n(x) \not\stackrel{D}{\rightrightarrows} f(x) \iff \exists \varepsilon_0 > 0 \forall N : \exists n, m > N, \exists x_0 \in D |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon_0$$

3.17 Теорема о почленном переходе к пределу для функциональной последовательности

Теорема. Пусть $f_n, f : D \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 — предельная точка D , $f_n \stackrel{D}{\rightrightarrows} f$, $\forall n \in \mathbb{N} \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = c_n$

Тогда,

$$\begin{aligned} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} c_n &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \\ \left(\text{или } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) \right) \end{aligned}$$

Доказательство. Сначала покажем, что $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$, а потом что $\exists c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$

$$1. \text{ Рассмотрим } |c_n - c| \leq \underbrace{|c_n - f_n|}_{(a)} + \underbrace{|f_n - f_m|}_{(b)} + \underbrace{|f_m - c_m|}_{(c)} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

(a), (c) По условию, $\forall n \in \mathbb{N} \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = c_n$ получим

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(x_0) \cap D \hookrightarrow |f_n(x) - c_n| < \frac{\varepsilon}{3}$$

(b) $f_n \stackrel{D}{\rightrightarrows} f \Rightarrow$ по Критерию Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m > N \forall x \in D \hookrightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Получаем, что $\forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(x_0)$

Собираем: $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m > N : \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(x_0) : |c_n - c_m| < \varepsilon \Rightarrow \exists c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ □

2. Теперь покажем, что $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$, то есть $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(x_0) : |f(x) - c| < \varepsilon$

$$\text{Рассмотрим } |f(x) - c| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{(a)} + \underbrace{|f_n(x) - c_n|}_{(b)} + \underbrace{|c_n - c|}_{(c)}$$

$$(a) \quad f_n \stackrel{D}{\rightrightarrows} f(x) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_1 : \forall n > N_1 \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

¹по критерию Коши для числовой последовательности $f_n(x_0)$

$$(b) \quad \forall n \in \mathbb{N} \exists \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = c_n \implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(x_0) \hookrightarrow |f_n(x) - c_n| < \frac{\varepsilon}{3}$$

(с) По доказанному в п. 1 следует, что

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c \implies \forall \varepsilon > 0 \exists N_2 \forall n > N_2 \hookrightarrow |c_n - c| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Собираем: $\forall \varepsilon > 0 (\exists N = \max(N_1, N_2)) \exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(x_0) : |f(x) - c| < \varepsilon$

□

3.18 Теорема о непрерывности предельной функции

Теорема. Пусть имеется
$$\left. \begin{array}{l} f_n, f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \\ f_n \xrightarrow{D} f, \\ \forall n \in \mathbb{N} f_n \in C(D) \end{array} \right\} \implies f \in C(D)$$

Доказательство. Нужно доказать, что $f \in C(D)$. Значит, надо показать, что

$$\forall x_0 \in D : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta(x_0) \cap D \hookrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Рассмотрим $|f(x) - f(x_0)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{(1)} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(x_0)|}_{(2)} + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{(3)}$

1. $f_n \xrightarrow{D} f : \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N, \forall x \in D \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$
2. Так как $\forall n \in \mathbb{N} f_n \in C(D) \implies \forall x_0 \in D, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta(x_0) \cap D \hookrightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$
3. $f_n \xrightarrow{D} f : \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N, \forall x_0 \in D \hookrightarrow |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Тогда, собрав три части, получим, что $\forall x_0 \in D$

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (\exists N : \forall n > N) \forall x \in B_\delta(x_0) \cap D \hookrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon &\implies f(x) \in C(x_0) \quad \forall x_0 \in D \\ &\implies f(x) \in C(D) \end{aligned}$$

□

3.19 Утверждение о неравномерной сходимости фун. послед. наличия разрыва

Теорема. Пусть имеется
$$\left. \begin{array}{l} f_n \in C([a; b]), \\ f \in C((a; b)) + \text{разрыв в т. } a, \\ f_n \xrightarrow{[a; b]} f \end{array} \right\} \implies f_n \not\xrightarrow{(a; b)} f$$

То есть будет поточечная сходимость, но не будет равномерной:

$$f_n \xrightarrow{(a; b)} f, \text{ но не } f_n \xrightarrow{(a; b)} f$$

Доказательство. От противного

1. Пусть $f_n \xrightarrow{(a; b)} f \implies \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \forall x \in (a; b) \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
2. $f_n \xrightarrow{[a; b]} f \implies f_n(a) \longrightarrow f(a) \implies \forall \varepsilon > 0 \exists N_2 : \forall n > N_2 \hookrightarrow |f_n(a) - f(a)| < \varepsilon$
3. $f_n \xrightarrow{[a; b]} f$, так как $\forall \varepsilon > 0 \exists N = \max(N_1, N_2) \forall n > N, \forall x \in [a; b] \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

4. Получаем, что

$$\left\{ \begin{array}{l} f_n \xrightarrow{[a;b]} f \\ f_n \in C([a;b]) \end{array} \right\}$$

Тогда, по теореме о непрерывности предельной функции следует, что $f \in C([a;b])$, но f имеет разрыв в точке a . Противоречие

□

3.20 Утверждение о неравномерной сходимости фун. послед. при наличии расходимости в точке

$$\text{Теорема. Пусть имеется } \left\{ \begin{array}{l} f_n \in C([a;b]) \\ f_n \xrightarrow{[a;b]} f \\ \nexists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) \end{array} \right\} \Rightarrow f_n \not\xrightarrow{[a;b]} f$$

Доказательство. От противного

1. Пусть $f_n \xrightarrow{[a;b]} f \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m > N \forall x \in (a;b) \hookrightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$
2. $f_n \in C([a;b])$, тогда

$$\forall x_0 \in [a;b] : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta(x_0) \cap [a;b] \hookrightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

В частности, это верно для $x_0 = a$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap (a;b)^2 \hookrightarrow |f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

3. Рассмотрим

$$|f_n(a) - f_m(a)| \leq \underbrace{|f_n(a) - f_n(x)|}_{\text{по п.2}} + \underbrace{|f_n(x) - f_m(x)|}_{\text{по п.1}} + \underbrace{|f_m(x) - f_m(a)|}_{\text{по п.2}} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$$

получаем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N (\exists \delta > 0) : \forall n, m > N (\forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a) \cap (a;b)) \hookrightarrow |f_n(a) - f_m(a)| < \varepsilon$$

то есть, по Критерию Коши для числовой последовательности $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a)$, что противоречит условию, а значит $f_n \not\xrightarrow{[a;b]} f$

□

3.21 Теорема о почленном интегрировании функциональной последовательности

$$\text{Теорема. Пусть имеется } \left\{ \begin{array}{l} f_n, f : [a;b] \rightarrow \mathbb{R} \\ f_n \xrightarrow{[a;b]} f \\ f_n \in \mathcal{R}([a;b]) \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \Rightarrow f \in \mathcal{R}([a;b]) \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Доказательство. По Критерию Дарбу $f \in \mathcal{R}([a;b]) \iff f$ — ограничена на $[a;b]$ и $\mathcal{I} = \overline{\mathcal{I}}$

• Покажем *ограниченность*

1. $\forall n \in \mathbb{N} : f_n \in \mathcal{R}([a;b]) \Rightarrow f_n$ ограничена на $[a;b]$ и

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists M_n \geq 0 \forall x \in [a;b] \hookrightarrow |f_n(x)| \leq M_n$$

²верно $\forall x \in B_\delta(a) \cap [a;b]$, а потому a выколота

2. $f_n \xrightarrow{[a;b]} f$, тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \forall x \in [a; b] \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
 Рассмотрим $\varepsilon = 1$, тогда $\exists N_1 = N : \forall x \in [a; b] \hookrightarrow |f_{N_1+1}(x) - f(x)| < 1$
 Тогда, для $f(x)$ верно $\forall x \in [a; b]$

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_{N_1+1}(x)| + |f_{N_1+1}(x)| < 1 + M_{N_1+1},$$

то есть $f(x)$ — ограничена

- Покажем *интегрируемость*

Напомним, что $\overline{\mathcal{I}} = \lim_{\Delta_{\mathbb{T}} \rightarrow 0} \overline{\mathcal{S}}(f, \mathbb{T})$ и $\underline{\mathcal{I}} = \lim_{\Delta_{\mathbb{T}} \rightarrow 0} \underline{\mathcal{S}}(f, \mathbb{T})$

Рассмотрим \mathbb{T} — разбиение $[a; b]$

$$|\underline{\mathcal{S}}(f, \mathbb{T}) - \overline{\mathcal{S}}(f, \mathbb{T})| \leq \underbrace{|\underline{\mathcal{S}}(f, \mathbb{T}) - \underline{\mathcal{S}}(f_n, \mathbb{T})|}_{(1)} + \underbrace{|\underline{\mathcal{S}}(f_n, \mathbb{T}) - \overline{\mathcal{S}}(f_n, \mathbb{T})|}_{(2)} + \underbrace{|\overline{\mathcal{S}}(f_n, \mathbb{T}) - \overline{\mathcal{S}}(f, \mathbb{T})|}_{(3)}$$

(1) Распишем в виде неравенств

$$|\underline{\mathcal{S}}(f, \mathbb{T}) - \underline{\mathcal{S}}(f_n, \mathbb{T})| \leq \sum_i |\inf_{I_i}(f) - \inf_{I_i}(f_n)| |I_i| \leq \sum_i \sup_{I_i} |f - f_n| \cdot |I_i| \leq \sup_{[a;b]} |f - f_n| \cdot |b - a| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Так как $f_n \xrightarrow{[a;b]} f$, то по супремальному критерию:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \hookrightarrow \sup_{[a;b]} |f - f_n| < \frac{\varepsilon}{3|b-a|}$$

(2) $f_n \in \mathcal{R}([a; b]) \implies$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \mathbb{T} : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta \implies |\underline{\mathcal{S}}(f_n, \mathbb{T}) - \overline{\mathcal{S}}(f_n, \mathbb{T})| < \frac{\varepsilon}{3}$$

(3) Аналогично (1): $|\overline{\mathcal{S}}(f_n, \mathbb{T}) - \overline{\mathcal{S}}(f, \mathbb{T})| \leq \sup_{[a;b]} |f - f_n| < \frac{\varepsilon}{3}$

Получаем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 (\exists N) \forall \mathbb{T} : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta (\forall n > N) \hookrightarrow |\underline{\mathcal{S}}(f, \mathbb{T}) - \overline{\mathcal{S}}(f, \mathbb{T})| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

$\implies f(x) \in \mathcal{R}([a; b])$

- Покажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

Рассмотрим

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \sup_{[a;b]} |f_n(x) - f(x)| \cdot |b - a| < \varepsilon$$

Так как $f_n \xrightarrow{[a;b]} f$, то $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \sup_{[a;b]} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{|b-a|}$ и получаем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \hookrightarrow \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon$$

□

3.22 Теорема о почленном дифференцировании функциональной последовательности

$$\left. \begin{array}{l} f_n, f, g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R} \\ f_n \in D([a; b]) \\ \exists c \in [a; b] : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(c) \\ \exists g(x) : f'_n \rightrightarrows g(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \exists f : f_n \rightrightarrows f \\ \oplus f'(x) = g(x) \end{array}$$

Доказательство. Покажем существование

Теорема. (Лагранжа) $f \in C([a, b]), f \in D((a, b)) \Rightarrow \exists c \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

1. Рассмотрим $\varphi(x) = f_n(x) - f_m(x)$
2. $\forall n \in \mathbb{N} f_n \in D([a; b]) \Rightarrow f_n \in C([a; b]) \Rightarrow \varphi(x) \in D([a; b])$ и $\varphi(x) \in C([a; b])$
3. Рассмотрим: для c из условия теоремы Лагранжа

$$\varphi(x) - \varphi(c) = \varphi'(\xi) \cdot (x - c), \text{ где } \xi \in [c; x] \text{ } ([x; c])$$

Тогда, $\varphi(x) = \varphi'(\xi)(x - c) + \varphi(c)$

4. Оценим $|\varphi(x)| \leq |\varphi'(\xi)| \cdot |x - c| + |\varphi(c)| = \underbrace{|f'_n(\xi) - f'_m(\xi)|}_{*} \cdot |x - c| + \underbrace{|f_n(c) - f_m(c)|}_{**}$

$$* f'_n \rightrightarrows g(x) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_1 : \forall n, m > N_1 \forall x \in [a; b] \hookrightarrow |f'_n(\xi) - f'_m(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2|b - a|}$$

$$** \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(c) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_2 : \forall n, m > N_2 \hookrightarrow |f_n(c) - f_m(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Тогда,

$$|\varphi(x)| \leq |\varphi'(\xi)| \cdot |x - c| + |\varphi(c)| = \underbrace{|f'_n(\xi) - f'_m(\xi)|}_{*} \cdot |x - c| + \underbrace{|f_n(c) - f_m(c)|}_{**} < \frac{\varepsilon}{2|b - a|} \cdot |x - c| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = \max\{N_1, N_2\} : \forall n, m > N \forall x \in [a; b] \hookrightarrow |\varphi(x)| = |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \Rightarrow \exists f : f_n \rightrightarrows f$$

Доказательство. Покажем, что $f'(x) = g(x)$

Пусть имеется $x_0 \in [a; b]$, но он произвольный

1. Рассмотрим $\psi_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}$

Покажем по Критерию Коши, что $\psi_n(x) \rightrightarrows$

$$\begin{aligned} |\psi_n(x) - \psi_m(x)| &= \left| \frac{f_n(x) - f_n(x_0) - f_m(x) + f_m(x_0)}{x - x_0} \right| \\ &= \left| \frac{(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))}{x - x_0} \right| \\ &= \left| \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} \right| \\ &\exists \xi \in [x_0, x] \\ &= \frac{|\varphi'(\xi)| |x - x_0|}{|x - x_0|} \\ &= |\varphi'(\xi)| \\ &= |f'_n(\xi) - f'_m(\xi)| < \varepsilon \end{aligned}$$

так как $f_n \rightrightarrows$, то есть

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n, m > N, \forall x \in [a, b] \hookrightarrow |f'_n(x) - f'_m(x)| < \varepsilon$$

то $\psi \rightrightarrows$

$$2. \forall n \in \mathbb{N}, \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \psi_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} = f'_n(x_0), \text{ так как } f_n \in D([a, b])$$

Получаем, что $\psi_n(x) \xrightarrow{[a, b]}$ и $\forall n \in \mathbb{N}, \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \psi_n(x) = f'_n(x_0)$, тогда по теореме о почленном переходе к пределу

$$\begin{aligned} g(x_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x_0) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} \psi_n(x) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0) \end{aligned}$$

□

3.23 [FOR KIARA] Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману

Теорема. Если $I \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутый невырожденный брус, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, то $f \in R(I) \iff f$ ограничена и непрерывна почти всюду на I

Доказательство.

- *Необходимость*

Если f интегрируема, то она ограничена по необходимому условию интегрируемости. Осталось показать, что множества разрыва меры нуль. От противного: пусть это не так.

Обозначим множество всех точек разрыва ф-ии f на I за T и заметим, что $T = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k$, где

$T_k = \{x \in I \mid \omega(f, x) \geq \frac{1}{k}\}$. Если T не меры нуль, то существует T_{k_0} не меры нуль (если они все меры нуль, то по свойству множеств меры нуль счетное объединение таких множеств тоже было бы меры нуль).

Для произвольного разбиения $\mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^m$ бруска I разобьем эти бруски на две кучи: первая $A = \{I_i \mid I_i \cap T_{k_0} \neq \emptyset, \omega(f, I_i) \geq \frac{1}{2k_0}\}$ и вторая $B = \mathbb{T} \setminus A$. Покажем что A является покрытием множества T_{k_0} , т.е. $T_{k_0} \subset \bigcup_{i: I_i \in A} I_i$ любая точка $x \in T_{k_0}$ является либо

- а) внутренней для некоторого бруска I_i . В этом случае $\omega(f, I_i) \geq \omega(f, x) \geq \frac{1}{k_0} > \frac{1}{2k_0}$, т.е. $I_i \in A$, либо
- б) точка x лежит на границе некоторого количества брусков (не более чем 2^n штук). Тогда хотя бы на одном из них колебание $\omega(f, I_i) \geq \frac{1}{2k_0}$ (т.е. $I_i \in A$): если бы такого не нашлось, то в любой малой окрестности $B_\varepsilon(x)$ выполняется следующее:

$$\omega(f, x) \leq \sup_{x', x'' \in B_\varepsilon(x)} |f(x') - f(x'')| \leq \sup_{x' \in B_\varepsilon(x)} |f(x') - f(x)| + \sup_{x'' \in B_\varepsilon(x)} |f(x) - f(x'')| < \frac{1}{2k_0} + \frac{1}{2k_0} = \frac{1}{k_0}$$

т.е. $x \notin T_{k_0}$ — **противоречие**.

Таким образом, каждая точка $x \in T_{k_0}$ покрывается некоторым бруском $I_i \in A$, т.е. A — покрытие T_{k_0} . Тогда существует $c : \sum_{i: I_i \in A} |I_i| \geq c > 0$ для всех разбиений \mathbb{T} (если бы меняя разбиения мы могли получить сумму объемов этих брусков сколь угодно маленькую, то получилось бы, что T_{k_0} меры нуль)

Возьмем два набора отмеченных точек ξ^1 и ξ^2 . На брусках из кучки B будем их брать одинаковыми, т.е. для $I_i \in B$ $\xi_i^1 = \xi_i^2$. А на брусках из кучки A будем брать такие, чтобы

$$f(\xi_i^1) - f(\xi_i^2) \geq \frac{1}{3k_0} \text{ (у нас там колебания } \geq 1/2k_0, \text{ так что такие найдутся)}$$

Получаем:

$$\begin{aligned}
|\sigma(f, \mathbb{T}, \xi^1) - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi^2)| &= \left| \sum_i (f(\xi_i^1) - f(\xi_i^2)) |I_i| \right| \\
&= \left| \sum_{i: I_i \in A} (f(\xi_i^1) - f(\xi_i^2)) |I_i| + \sum_{i: I_i \in B} (f(\xi_i^1) - f(\xi_i^2)) |I_i| \right| \\
&= \left| \sum_{i: I_i \in A} (f(\xi_i^1) - f(\xi_i^2)) |I_i| \right| \geq \frac{1}{3k_0} \sum_{i: I_i \in A} |I_i| \geq \frac{c}{3k_0} > 0
\end{aligned}$$

т.е. интегральные суммы не могут стремиться к одному и тому же числу, значит f не интегрируема — **противоречие**.

• *Достаточность*

Для любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим $T_\varepsilon = \{x \in I \mid \omega(f, x) \geq \varepsilon\}$. Покажем, что это множество — компактно. Ограниченность очевидна (подмножества бруска), а замкнутость проверим от противного. Пусть a — предельная точка T_ε : $a \notin T_\varepsilon$. Т.к. она предельная, то существует $\{x^k\}$: $x^k \in B_{\frac{1}{k}}(a)$. Т.к. $B_{\frac{1}{k}}$ — открытые шары, то наши точки лежат в них с окрестностями, т.е. существуют δ_k : $B_{\delta_k}(x_k) \subset B_{\frac{1}{k}}(a)$. Тогда

$$\omega(f, B_{\frac{1}{k}}(a)) \geq \omega(f, B_{\delta_k}(x_k)) \geq \omega(f, x_k) \geq \varepsilon$$

Переходя к пределу $k \rightarrow \infty$: $\omega(f, a) \geq \varepsilon$, т.е. $a \in T_\varepsilon$ — противоречие. Значит T_ε — замкнуто, и, следовательно, компактно.

Множество T_ε — множество меры нуль (как подмножество множества меры нуль). Значит, его можно покрыть не более чем счетным объединением открытых брусков I_i : $\sum_i |I_i| < \varepsilon$. Т.к. это

открытое покрытие, а T_ε — компактно, то существует конечное подпокрытие: $T_\varepsilon \subset \bigcup_{i=1}^m I_i$, при этом

$$\sum_{i=1}^m |I_i| < \varepsilon.$$

Обозначим три множества: $C_1 = \bigcup_{i=1}^m I_i$, $C_2 = \bigcup_{i=1}^m I'_i$, $C_3 = \bigcup_{i=1}^m I''_i$, где I'_i, I''_i — бруски, полученные гомотетией с центром в центре I_i с коэффициентом 2 и 3 соответственно.

Заметим, что

$$\text{a) } |C_3| \leq \sum_{i=1}^m |I''_i| = 3^n \sum_{i=1}^m |I_i| < 3^n \varepsilon$$

б) расстояние $\rho(\partial C_2, \partial C_3) = \delta_1 > 0$ (теорема про расстояние между компактами)

в) Множество $K = I \setminus (C_2 \cup C_3)$ — компактно. Кстати, любое множество с диаметром меньше δ_1 либо полностью лежит в C_3 , либо полностью в K .

г) $T_\varepsilon \cap K = \emptyset$, т.к. $T_\varepsilon \subset C_1 \subset C_2$. Следовательно, $\forall x \in K$ $\omega(f, x) < \varepsilon$. Тогда по теореме Кантора-Гейне $\exists \delta_2 > 0$: $\forall x \in K$ $\omega(f, B_{\delta_2}(x)) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$

Выберем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда для любых разбиений $\mathbb{T}_1 = \{I_k^1\}$, $\mathbb{T}_2 = \{I_i^2\}$: $\lambda \mathbb{T}_1 < \delta$, $\lambda(\mathbb{T}_2) < \delta$

Рассмотрим пересечение этих разбиений $\mathbb{T} = \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$, т.е. такое разбиение $\mathbb{T} = \{I_{ik}\}$, что $I_k^1 = I_{i_1 k} \sqcup \dots \sqcup I_{i_m k}$ и $I_i^2 = I_{i k_1} \sqcup \dots \sqcup I_{i k_l}$. Очевидно $\lambda(\mathbb{T}) < \delta$.

Для произвольных наборов отмеченных точек:

$$|\sigma(f, \mathbb{T}_1, \xi^1) - \sigma(f, \mathbb{T}_2, \xi^2)| \leq |\sigma(f, \mathbb{T}_1, \xi^1) - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)| + |\sigma(f, \mathbb{T}_2, \xi^2) - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)|$$

Рассмотрим отдельное слагаемое:

$$|\sigma(f, \mathbb{T}_1, \xi^1) - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)| = \left| \sum_{i,j} (f(\xi_i^1) - f(\xi_{ij})) |I_{ij}| \right| \leq \sum_{I_{ij} \in C_3} |f(\xi_i^1) - f(\xi_{ij})| |I_{ij}| + \sum_{I_{ij} \in K} |f(\xi_i^1) - f(\xi_{ij})| |I_{ij}| \leq 2M \cdot$$

т.к. f ограничена некоторой константой M и см пункты а), д), то

Т.к. для (\mathbb{T}_2, ξ^2) все выкладки аналогичные, то получаем:

$$|\sigma(f, \mathbb{T}_1, \xi^1) - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)| \leq \epsilon(2M \cdot 3^n + 2|I|)$$

Следовательно, существует предел $\lim_{\lambda(\mathbb{T}) \rightarrow 0} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)$ (Критерий Коши для функций)

□