Макроэкономика—1 (углубленный курс)

Семинар

Винер Даниил @danya_vin

17 февраля 2025 г.

№1

Пусть $Y = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}$, $\dfrac{\dot{A}}{A} = g, \dfrac{\dot{L}}{L} = n, \dot{K} = sY - \delta K$

a) Характеризуется ли данная производственная функция постоянной отдачей от масштаба по труду и капиталу? Какая отдача от масштаба у данной производственной функции по труду, капиталу и технологии?

Производственная функция обладает постоянной отдачей от масштаба, если

$$F(\lambda K, \lambda AL) = \lambda F(K, AL)$$

В нашем случае, эта производственная функция *обладает* постоянной отдачей от масштаба по труду и капиталу:

$$\begin{aligned}
F(\lambda K, \lambda AL) &= \lambda F(K, AL) \\
(\lambda K)^{\alpha}(\lambda AL)^{1-\alpha} &= \lambda K^{\alpha}(AL)^{\alpha} \\
\lambda^{\alpha} K^{\alpha} \lambda^{1-\alpha} A^{1-\alpha} L^{1-\alpha} &= \lambda K^{\alpha}(AL)^{\alpha} \\
\lambda K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha} &= \lambda K^{\alpha}(AL)^{\alpha}
\end{aligned}$$

Рассмотрим, как изменяется выпуск при пропорциональном увеличении капитала, труда и технологии при $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned}
F(\lambda K, \lambda A \lambda L) &= (\lambda K)^{\alpha}(\lambda A \lambda L)^{1-\alpha} \\
&= \lambda^{2-\alpha} K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha} > \lambda K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}
\end{aligned}$$

Это означает, что функция показывает *возрастающую* отдачу от масштаба

b) Запишите производственную функцию в интенсивной форме и основное уравнение динамики модели Солоу.

$$\begin{aligned}
y &= \frac{Y}{AL} \\
&= \frac{K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}}{AL} \\
&= \frac{K^{\alpha}}{(AL)^{\alpha}} \\
&= \left(\frac{K}{AL}\right)^{\alpha} \\
&= k^{\alpha}
\end{aligned}$$

$y = k^{\alpha}$ — производственная функция в *интенсивной* форме

$$
\begin{aligned}
\dot{k} &= \left(\frac{\dot{K}}{AL}\right) \\
&= \frac{\dot{K}\cdot AL - K\cdot(\dot{AL})}{(AL)^2} \\
&= \frac{\dot{K}}{AL} - \frac{K}{AL}\cdot\frac{\dot{AL}}{AL} \\
&= \frac{sy-\delta k}{AL} - \frac{K}{AL}\left(\frac{\dot{A}}{A}+\frac{\dot{L}}{L}\right) \\
&= sy - \delta k - k(g+n) \\
&= sy - (n+g+\delta)k
\end{aligned}
$$

$\dot{k} = sy - (n+g+\delta)k$ — основное уравнение динамики модели Солоу

c) Найдите капиталовооруженность эффективного труда на траектории сбалансированного роста (ТСР). Проверьте, что в модели существует единственно глобально устойчивое стационарное состояние. Найдите выпуск и потребление в расчете на одного эффективного работника на ТСР

На ТСР переменная k находится в стационарном состоянии, то есть темп её изменения равен нулю:

$$\dot{k} = 0$$

Из основного уравнения динамики модели Солоу получаем

$$
\begin{aligned}
sk^{\alpha} &= (n+g+\delta)k \quad |:k \\
sk^{\alpha-1} &= n+g_{\delta} \\
k^* &= \left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}
\end{aligned}
$$

На ТСР выпуск на одного эффективного работника определяется как:

$$
\begin{aligned}
y^* &= (k^*)^{\alpha} \\
&= \left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}
\end{aligned}
$$

Потребление на одного эффективного работника:

$$
\begin{aligned}
c^* &= (1-s)y^* \\
&= (1-s) = \left(\frac{s}{n+g+\delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}
\end{aligned}
$$

d) Найдите капитал (K), выпуск (Y) и потребление () на ТСР, а также темпы их роста.

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{Y}{AL} \\
Y &= y\cdot AL \text{ — прологарифмируем} \\
\ln Y &= \ln y + \ln A + \ln L \quad |\frac{\partial}{\partial t} \\
(\ln Y)'_t &= \frac{1}{y}\cdot y'_t,\ \text{при этом } (\ln Y)'_t = \dot{\ln Y} = \frac{\dot{Y}}{Y} \\
\frac{\dot{Y}}{Y} &= \frac{\dot{y}}{y} + \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{L}}{L} \\
&= g+n
\end{aligned}
$$

То есть, темпы роста ВВП равны $g+n$

По условию

$$\frac{\dot{A}}{A} = g$$
$$\frac{\frac{dA}{dt}}{A} = g$$
$$\int \frac{1}{A} dA = \int g dt$$
$$\ln A = gt + C$$
$$A = e^{gt} \cdot e^{C}$$

Положим, что в начальный момент времени $A(t = 0) = e^c = A_0$, тогда

$$A = A_0 e^{gt}$$

Рассуждая аналогично, получим $L = L_0 e^{nt}$, тогда выпуск

$$\boxed{Y^*(t) = \underbrace{\left(\frac{s}{n + g + \delta}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}_{y^*} \cdot \underbrace{A_0 e^{gt}}_{A(t)} \cdot \underbrace{L_0 e^{nt}}_{L(t)}}$$

Рассмотрим для капитала

$$k = \frac{K}{AL}$$
$$K = kAL$$
$$\ln K = \ln k + \ln A + \ln L$$
$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{k}}{k} + \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{L}}{L}$$
$$= g + n$$

$$\boxed{K^*(t) = \left(\frac{s}{n + g + \delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} A_0 e^{gt} \cdot L_0 e^{nt}}$$

Теперь для потребления

$$C = (1 - s)Y$$
$$\ln C = \ln(1 - s) + \ln Y$$
$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{\dot{Y}}{Y}$$
$$= n + g$$

Получется, что $\boxed{C^*(t) = (1 - S)Y^*(t)}$