Теория вероятностей и математическая статистика—2
Консультация Борзых Д.А.
ФЭН НИУ ВШЭ

Винер Даниил @danya_vin

21 февраля 2025г.

23

Определение. Говорят, что случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $\mu \in \mathbb{R}$ и $\sigma^2 > 0$ пишут $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, если

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Множество значений случайной величины X: $(-\infty; +\infty)$

Теорема. Если $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, то

$$\mathbb{E}[X] = \mu, \ \mathbb{D}[X] = \sigma^2$$

24

Определение. Случайная величина W имеет χ^2-распределение с m степенями свободы, пишут $W \sim \chi^2(m)$, если W представима в виде

$$W = X_1^2 + \ldots + X_m^2,$$

где $X_1, \ldots, X_n \sim iidN(0; 1)$

Множество значений случайной величины W: $(0; +\infty)$

Теорема. Если $W \sim \chi^2(m)$, то $\mathbb{E}[W] = m$, $\mathbb{D}[W] = 2m$

25

Определение. Случайная величина W имеет t-распределение (распределение Стьюдента) с m степенями свободы, пишут $W \sim t(m)$, если W представима в виде

$$W = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y_1^2 + \ldots + Y_m^2}{m}}},$$

где $X, Y_1, \ldots, Y_m \sim iidN(0; 1)$

Множество значений случайной величины: $(-\infty; +\infty)$

26

Определение. Случайная величина W имеет F-распределение (распределение Фишера) с m и n степенями свободы, пишут $W \sim F(m, n)$, если W представима в виде

$$W = \frac{(X_1 + \ldots + X_m^2)/m}{(Y_1^2 + \ldots + Y_n^2)/n},$$

где $X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n \sim iidN(0;1)$ и независимы

Множество значений: $(0; +\infty)$

27

Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ — случайная выборка

Определение. Выборочное среднее — $\overline{X} := \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$

Определение. Неисправленная выборочная дисперсия — $s^2 := \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$

28

Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ — случайная выборка, тогда

Определение. Выборочным *начальным* моментом порядка k называется число

$$\widehat{\mu}_k := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(X_i)^k$$

Определение. Выборочным *центральным* моментом порядка k называется число

$$\widehat{\nu}_k := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(X_i - \overline{X})^k$$

29

Определение. Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ — случайная выборка, тогда выборочной функцией распределения случайной выборки X называется функция от действительного переменного X, которая определяется как

$$\widehat{F}_n(x, \omega) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{I}\{X_i(\omega) \leqslant x\},$$

где $\mathbb{I}\{X_i(\omega) \leqslant x\}$ равна 1, если $X_i(\omega) \leqslant x$ и равна 0 в противном случае

30

Теорема. Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ — случайная выборка, причем $\mathbb{D}[X_i] = \sigma^2$, тогда

$$\widehat{\sigma}^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

является несмещённой оценкой параметра σ^2, то есть $\mathbb{E}\left[\widehat{\sigma}^2\right] = \sigma^2$

31

Оценка $\hat{\theta}$ неизвестного параметра $\theta \in \Theta$ называется *несмещённой*, если

$$\mathbb{E}\left[\hat{\theta}\right] = \theta \ \forall \theta \in \Theta,$$

где Θ — множество всех допустимых значений параметра θ

32

Определение. Последовательность оценок $\hat{\theta}_n$ называется *состоятельной оценкой* неизвестного параметра $\theta \in \Theta$, если

$$\forall \theta \in \Theta \ \hat{\theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \theta,$$

то есть $\hat{\theta}_n$ сходится по вероятности к θ

$$\forall \varepsilon > 0: \ \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\hat{\theta}_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = 0$$

Теорема. Пусть

- $forall \theta \Theta \ \mathbb{E}\left[\widehat{\theta}_n\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta$
- $forall \theta \Theta \ \mathbb{D}\left[\widehat{\theta}_n\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Тогда, $\widehat{\theta}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$, то есть $\widehat{\theta}_n$ является состоятельной оценкой неизвестного параметра θ

33

Определение. Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс оценок параметра θ. Оценка $\widehat{\theta} \in \mathcal{K}$ неизвестного параметра θ называется наиболее эффективной в классе $\mathcal{K}$, если для любого конкурента $\widetilde{\theta} \in \mathcal{K}$ $\forall \theta \in \Theta$

$$\mathbb{E}\left[(\widehat{\theta} - \theta)^2\right] \leqslant \mathbb{E}\left[(\widetilde{\theta} - \theta)^2\right]$$