

Макроэкономика—1 (углубленный курс)

Семинар

Винер Даниил @danya_vin

17 февраля 2025 г.

№1

Пусть $Y = K^\alpha (AL)^{1-\alpha}$, $\frac{\dot{A}}{A} = g$, $\frac{\dot{L}}{L} = n$, $\dot{K} = sY - \delta K$

а) Характеризуется ли данная производственная функция постоянной отдачей от масштаба по труду и капиталу? Какая отдача от масштаба у данной производственной функции по труду, капиталу и технологии?

Производственная функция обладает постоянной отдачей от масштаба, если

$$F(\lambda K, \lambda AL) = \lambda F(K, AL)$$

В нашем случае, эта производственная функция *обладает* постоянной отдачей от масштаба по труду и капиталу:

$$\begin{aligned} F(\lambda K, \lambda AL) &= \lambda F(K, AL) \\ (\lambda K)^\alpha (\lambda AL)^{1-\alpha} &= \lambda K^\alpha (AL)^\alpha \\ \lambda^\alpha K^\alpha \lambda^{1-\alpha} A^{1-\alpha} L^{1-\alpha} &= \lambda K^\alpha (AL)^\alpha \\ \lambda K^\alpha (AL)^{1-\alpha} &= \lambda K^\alpha (AL)^\alpha \end{aligned}$$

Рассмотрим, как изменяется выпуск при пропорциональном увеличении капитала, труда и технологии при $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} F(\lambda K, \lambda A \lambda L) &= (\lambda K)^\alpha (\lambda A \lambda L)^{1-\alpha} \\ &= \lambda^{2-\alpha} K^\alpha (AL)^{1-\alpha} > \lambda K^\alpha (AL)^{1-\alpha} \end{aligned}$$

Это означает, что функция показывает *возрастающую* отдачу от масштаба

б) Запишите производственную функцию в интенсивной форме и основное уравнение динамики модели Солоу.

$$\begin{aligned} y &= \frac{Y}{AL} \\ &= \frac{K^\alpha (AL)^{1-\alpha}}{AL} \\ &= \frac{K^\alpha}{(AL)^\alpha} \\ &= \left(\frac{K}{AL} \right)^\alpha \\ &= k^\alpha \end{aligned}$$

$y = k^\alpha$ — производственная функция в *интенсивной* форме

$$\begin{aligned}
\dot{k} &= \left(\frac{\dot{K}}{AL} \right) \\
&= \frac{\dot{K} \cdot AL - K \cdot (\dot{AL})}{(AL)^2} \\
&= \frac{\dot{K}}{AL} - \frac{K}{AL} \cdot \frac{\dot{AL}}{AL} \\
&= \frac{sy - \delta k}{AL} - \frac{K}{AL} \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{L}}{L} \right) \\
&= sy - \delta k - k(g + n) \\
&= sy - (n + g + \delta)k
\end{aligned}$$

$\dot{k} = sy - (n + g + \delta)k$ — основное уравнение динамики модели Солоу

с) Найдите капиталовооруженность эффективного труда на траектории сбалансированного роста (ТСР). Проверьте, что в модели существует единственно глобально устойчивое стационарное состояние. Найдите выпуск и потребление в расчете на одного эффективного работника на ТСР

На ТСР переменная k находится в стационарном состоянии, то есть темп её изменения равен нулю:

$$\dot{k} = 0$$

Из основного уравнения динамики модели Солоу получаем

$$\begin{aligned}
sk^\alpha &= (n + g + \delta)k \quad | : k \\
sk^{\alpha-1} &= n + g + \delta \\
k^* &= \left(\frac{s}{n + g + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}
\end{aligned}$$

На ТСР выпуск на одного эффективного работника определяется как:

$$\begin{aligned}
y^* &= (k^*)^\alpha \\
&= \left(\frac{s}{n + g + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}
\end{aligned}$$

Потребление на одного эффективного работника:

$$\begin{aligned}
c^* &= (1 - s)y^* \\
&= (1 - s) \left(\frac{s}{n + g + \delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}
\end{aligned}$$

d) Найдите капитал (K), выпуск (Y) и потребление (c) на ТСР, а также темпы их роста.

$$\begin{aligned}
y &= \frac{Y}{AL} \\
Y &= y \cdot AL \quad \text{— прологарифмируем} \\
\ln Y &= \ln y + \ln A + \ln L \quad | \frac{\partial}{\partial t} \\
(\ln Y)'_t &= \frac{1}{y} \cdot y'_t, \text{ при этом } (\ln Y)'_t = \ln \dot{Y} = \frac{\dot{Y}}{Y} \\
\frac{\dot{Y}}{Y} &= \frac{\dot{y}}{y} + \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{L}}{L} \\
&= g + n
\end{aligned}$$

То есть, темпы роста ВВП равны $g + n$

По условию

$$\begin{aligned}\frac{\dot{A}}{A} &= g \\ \frac{\frac{dA}{dt}}{A} &= g \\ \int \frac{1}{A} dA &= \int g dt \\ \ln A &= gt + C \\ A &= e^{gt} \cdot e^C\end{aligned}$$

Положим, что в начальный момент времени $A(t=0) = e^C = A_0$, тогда

$$A = A_0 e^{gt}$$

Рассуждая аналогично, получим $L = L_0 e^{nt}$, тогда выпуск

$$Y^*(t) = \underbrace{\left(\frac{s}{n+g+\delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}_{y^*} \cdot \underbrace{A_0 e^{gt}}_{A(t)} \cdot \underbrace{L_0 e^{nt}}_{L(t)}$$

Рассмотрим для капитала

$$\begin{aligned}k &= \frac{K}{AL} \\ K &= kAL \\ \ln K &= \ln k + \ln A + \ln L \\ \frac{\dot{K}}{K} &= \frac{\dot{k}}{k} + \frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{L}}{L} \\ &= g + n\end{aligned}$$

$$K^*(t) = \left(\frac{s}{n+g+\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} A_0 e^{gt} \cdot L_0 e^{nt}$$