Теория вероятностей и математическая статистика—1
Теоретический и задачный минимумы
ФЭН НИУ ВШЭ

Винер Даниил @danya_vin

Версия от 29 ноября 2024 г.

Содержание

1 Теоретический минимум

1.1 Дайте определение функции распределения $F_X(x)$ случайной величины X. Укажите необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция была функцией распределения некоторой случайной величины

Определение. Функцией рапсредделния случайной величины X называется функция

$$F_X(x) := \mathbb{P}\left(\{X \leqslant x\}\right), x \in \mathbb{R}$$

Теорема. Функция $G : \mathbb{R} \to [0; 1]$ является функцией распределения некоторой случайной величины $\xi \iff$

- $G(x)$ является нестрого возрастающей, то есть $\forall x_1, x_2, x_1 \leqslant x_2$ $G(x_1) \leqslant G(x_2)$
- $G(x)$ является непрерывной справа в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, то есть $\forall x \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{y \to x+0} G(y) = G(x)$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} G(x) = 0$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = 1$

1.2 Дайте определение функции плотности $f_X(x)$ случайной величины X. Укажите необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция была функцией плотности некоторой случайной величины

Определение. Говорят, что случайная величина X является абсолютно непрерывной, если ее функция распределения $F_X(x)$ представима в виде

$$F_X(x) := \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t, x \in \mathbb{R},$$

где $f_X(t)$ — неотрицательная интегрируемая функция, которая называется *плотностью распределения* случайной величины X

Теорема. Функция $g : \mathbb{R} \to [0; +\infty)$ является плотностью распределения некоторой случайной величины ξ тогда и только тогда, когда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x = 1$

1.3 Дайте определение математического ожидания для дискретных и абсолютно непрерывных случайных величин. Укажите, чему равно $\mathbb{E}\left[\alpha X + \beta Y\right]$, где X и Y — случайные величины, а α и β — произвольные константы

Определение. Пусть дискретная случайная величина X принимает значения $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \cdot \mathbb{P}\left(\{X = a_k\}\right)$$

сходится

Тогда, математическим ожиданием случайной величины X называется

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \mathbb{P}\left(\{X = a_k\}\right)$$

Определение. Пусть случайная величина X является абсолютно непрерывной и интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x)\mathrm{d}x$$

сходится

Тогда, математическим ожиданием случайной величины X называется

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x$$

Теорема. Пусть случайные величины X и Y имеют конечное математическое ожидание
Тогда, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ случайная величина $\alpha X + \beta Y$ тоже имеет конечное математичское ожидание и

$$\mathbb{E}\left[\alpha X + \beta Y\right] = \alpha \mathbb{E}\left[X\right] + \beta \mathbb{E}\left[Y\right]$$

1.4 Дайте определение дисперсии случайной величины. Укажите, чему равно $\mathbb{D}\left[\alpha X + \beta\right]$, где X — случайная величина, а α и β — произвольные константы

Определение. Пусть случайная величина X имеет конечное математическое ожидание, тогда дисперсией случайной величины X называется

$$\mathbb{D}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\left[X\right])^2\right]$$

Теорема. Пусть случайная величина X имеет конечное математическое ожидание, тогда $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{D}\left[\alpha X + \beta\right] = \alpha^2 \mathbb{D}\left[X\right]$$

1.5 Укажите математическое ожидание, дисперсию, множество значений, принимаемых с ненулевой вероятностью, а также функцию плотности или функцию вероятности

1. **Биномиальное.** Случайная величина X имеет биномиальное распределение с параметрами $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0; 1)$, пишут $X \sim Bi(n, p)$, если случайная величина X принимает значения $0, 1, 2, \ldots, n$ с вероятностями
   - $\mathbb{P}\left(\{\xi = k\}\right) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, где $k = 0, 1, \ldots, n$
   - $\mathbb{E}\left[\xi\right] = np$
   - $\mathbb{D}\left[\xi\right] = np(1-p)$
2. **Пуассоновское.** Случайная величина X имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$, пишут $X \sim Pois(\lambda)$, если случайная величина X принимает значения с вероятностями
   - $\mathbb{P}\left(\{\xi = k\}\right) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, где $k \in \{0, 1, \ldots\}$
   - $\mathbb{E}\left[\xi\right] = \lambda$
   - $\mathbb{D}\left[\xi\right] = \lambda$
3. **Геометрическое.** Случайная величина X имеет геометрическое распределение с параметром $p \in (0; 1)$, пишут $X \sim Geom(p)$, если случайная величина X принимает значения $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ с вероятностями
   - $\mathbb{P}\left(\{\xi = k\}\right) = p(1-p)^{k-1}$
   - $\mathbb{E}\left[\xi\right] = \dfrac{1}{p}$
   - $\mathbb{D}\left[\xi\right] = \dfrac{1-p}{p^2}$
4. **Равномерное.** Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[a; b]$, где $a < b$, пишут $X \sim U[a; b]$, если случайная величина X имеет плотность
   - $f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{если } x \in [a; b] \\ 0, & \text{если } x \notin [a; b] \end{cases}$

- $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } x \in [a;b] \\ 1, & \text{если } x > b \end{cases}$
- $\mathbb{E}[\xi] = \dfrac{a+b}{2}$
- $\mathbb{D}[\xi] = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

5. **Экспоненциальное (показательное).** Случайная величина X имеет экпоненциальное распределение с параметром $\lambda > 0$, пишут $X \sim Exp(\lambda)$, если случайная величина X имеет плотность

- $f_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$
- $F_\xi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geqslant 0 \\ 0, & \text{если } x < 0 \end{cases}$
- $\mathbb{E}[\xi] = \dfrac{1}{\lambda}$
- $\mathbb{D}[\xi] = \dfrac{1}{\lambda^2}$

1.6 Сформулируйте определение функции совместного распределения двух случайных величин, независимости случайных величин. Укажите, как связаны совместное распределение и частные распределения компонент случайного вектора

Определение. Совместной функцией распределения случайных величин X и Y называется функция

$$F_{X,Y}(x,y) := \mathbb{P}\left(\{X \leqslant x\} \cap \{Y \leqslant y\}\right), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$$

Определение. Случайные величины X и Y независимы, если $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ события $\{X \in B_1\}$ и $\{Y \in B_2\}$ являются независимыми, то есть

$$\mathbb{P}\left(\{X \in B_1\} \cap \{Y \in B_2\}\right) = \mathbb{P}\left(\{X \in B_1\}\right) \cdot \mathbb{P}\left(\{Y \in B_2\}\right)$$

Теорема. Случайные величины X и Y независимы тогда и только тогда, когда

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y),\ \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$$

Теорема.

1. $F_\xi(x) \in [0;1]$. Здесь и далее $x = (x_1, \ldots, x_n)$
2. $\lim\limits_{x_1 \to -\infty} F_\xi(x_1, x_2) = 0$

   $\lim\limits_{x_1 \to +\infty} F_\xi(x_1, x_2) = F_{\xi_2}(x_2)$

   $\lim\limits_{\substack{x_1 \to +\infty, \\ x_2 \to +\infty}} F_\xi(x_1, x_2) = 1$
3. $F_\xi(x_1, x_2)$ не убывает по каждому из аргументов
4. $F_\xi(x_1, x_2)$ непрерынва справа по каждому из аргументов

1.7 Сформулируйте определение совместной функции плотности двух случайных величин. Укажите необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция была совместной функцией плотности некоторой пары случайных величин. Сформулируйте определение независимости случайных величин

Определение. Случайный вектор (X, Y) имеет абсолютно непрерывное распределение, если совместнаяфункция распределения $F_{X,Y}(x, y)$ представима в виде

$$F_{X,Y}(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s, t) \mathrm{d}s\mathrm{d}t,\ \forall x, y \in \mathbb{R},$$

где $f_{X,Y}(s, t)$ — неотрицательная интегрируемая функция, называемая плотностью распределения случайного вектора (X, Y)

Теорема. Функция $g : \mathbb{R}^2 \to [0; +\infty)$ является плотностью распределения случайного вектора $(X, Y) \iff$

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} g(x, y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$$

Определение. Случайные величины X и Y независимы, если $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ события $\{X \in B_1\}$ и $\{Y \in B_2\}$ являются независимыми, то есть

$$\mathbb{P}\left(\{X \in B_1\} \cap \{Y \in B_2\}\right) = \mathbb{P}\left(\{X \in B_1\}\right) \cdot \mathbb{P}\left(\{Y \in B_2\}\right)$$

Необязательно, но для общего понимания:

Теорема. (в дискретном случае). Пусть случайная величина X принимает значения $a_1, \ldots, a_m$, случайная величина Y принимает значения $b_1, \ldots, b_n$, тогда случайные величины X и Y независимы $\iff$ $\forall i \in \{1, \ldots, m\}, \forall j \in \{1, \ldots, n\}$ события $\{X = a_i\}$ и $\{Y = b_j\}$ независимы, то есть

$$\mathbb{P}\left(\{X = a_i\} \cap \{Y = b_j\}\right) = \mathbb{P}\left(\{X = a_i\}\right) \cdot \mathbb{P}\left(\{Y = b_j\}\right)$$

Теорема. (в абсолютно непрерывном). Пусть случайный вектор (X, Y) имеет абсолютно непрерывное распределение. Тогда, случайные величины X и Y независимы $\iff$

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y), \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$$

2 Задачный минимум

Заметьте, что обозначения $P(\dots)$ и $\mathbb{P}(\{\dots\})$ — это одно и то же, я просто еще не везде исправил

2.1 Пусть случайная величина X имеет следующую функцию плотности...

Дана функция плотности $f_X(x) = \begin{cases} cx, & x \in [0;1] \\ 0, & x \notin [0;1] \end{cases}$

Найдите

- $F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t$. Тогда, при $x \to +\infty$

$$\begin{aligned} 1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\mathrm{d}t &= \int\limits_0^1 ct\mathrm{d}t \\ &= c \cdot \frac{t^2}{2}\Big|_{t=0}^{t=1} \\ &= \frac{c}{2} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow c = 2$

- **Теорема.** Пусть ξ — абсолютно непрерывная случайная величина, тогда

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\ \mathbb{P}(\{\xi \in B\}) = \int\limits_B f_\xi(t)\mathrm{d}t$$

Тогда, в нашем случае

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\{X \leqslant \frac{1}{2}\}\right) &= \mathbb{P}\left(\{X \in (-\infty; \frac{1}{2}]\}\right) \\ &= \int\limits_B f_X(t)\mathrm{d}t \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f_X(t)\mathrm{d}t \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\frac{1}{2}} 2t\mathrm{d}t \\ &= t^2\Big|_{t=0}^{t=\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

- $\mathbb{P}\left(\{X \in [\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]\}\right) = \int\limits_B f_X(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} 2t\mathrm{d}t = t^2\Big|_{t=\frac{1}{2}}^{t=1} = \frac{3}{4}$

- $\mathbb{P}(\{X \in [2;3]\}) = \int\limits_{[2;3]} f_X(t)\mathrm{d}t = 0$

- $f_X(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0;1] \\ 0, & x \notin [0;1] \end{cases}$

Теперь рассмотрим три участка:

$$x < 0 : F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t = 0$$

$$0 \leqslant x \leqslant 1 : F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}t + \int\limits_{0}^{x} 2t\mathrm{d}t = t^2\Big|_{t=0}^{t=x} = x^2$$

$$x > 1 : F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\mathrm{d}t + \int\limits_{0}^{1} f_X(t)\mathrm{d}t + \int\limits_{1}^{x} 0\mathrm{d}t = 1$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & x \in [0;1] \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

2.2 Пусть случайная величина X имеет следующую функцию плотности...

Дана функция плотности $f_X(x) = \begin{cases} cx, & x \in [0;1] \\ 0, & x \notin [0;1] \end{cases}$

Найдите

- $F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t$. Тогда, при $x \to +\infty$

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{1} ct\mathrm{d}t$$
$$= c \cdot \frac{t^2}{2}\Big|_{t=0}^{t=1}$$
$$= \frac{c}{2}$$

$\Longrightarrow c = 2$

- $\mathbb{E}[X] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} x2x\mathrm{d}x = 2\int\limits_{0}^{1} x^2\mathrm{d}x = 2 \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$
- $\mathbb{E}\left[X^2\right] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} x^2 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$
- $\mathbb{D}[X] = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$
- $\mathbb{E}\left[\sqrt{X}\right] = \int\limits_{0}^{1} \sqrt{x}2x\mathrm{d}x = \frac{4}{5}$

2.3 Пусть задана таблица совместного распределения случайных величин X и Y

	$Y=-1$	$Y=0$	$Y=1$
$X=-1$	0.2	0.1	0.2
$X=1$	0.1	0.3	0.1

Найдите

- $\mathbb{P}(\{X=-1\}) = 0.2 + 0.1 + 0.2 = 0.5$
- $\mathbb{P}(\{Y=-1\}) = 0.2 + 0.1 = 0.3$
- $\mathbb{P}(\{X=-1\} \cap \{Y=-1\}) = 0.2$
- Проверим, выполняется ли

$$\mathbb{P}(\{X=-1\} \cap \{Y=-1\}) = \mathbb{P}(\{X=-1\}) \cdot \mathbb{P}(\{Y=-1\})$$
$$0.2 \neq 0.3 \cdot 0.5$$

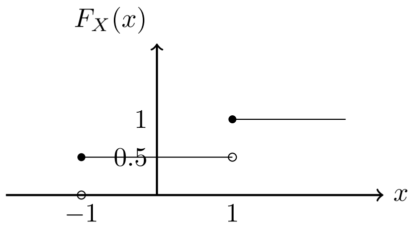
$\Longrightarrow$ величины X и Y *не* независимы

- $F_{X,Y}(-1;0) = \mathbb{P}(\{X \leqslant -1\} \cap \{Y \leqslant 0\}) = \mathbb{P}(\{X=-1\} \cap \{Y=-1\}) + \mathbb{P}(\{X=-1\} \cap \{Y=0\}) = 0.2 + 0.1 = 0.3$
-

X	$\mathbb{P}$
-1	0.5
1	0.5

Примечание. Для случайной величины Y таблица распределения выглядит так:

Y	$\mathbb{P}$
-1	0.3
0	0.4
1	0.3

- $F_X(x) = \mathbb{P}(\{X \leqslant x\}) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 0.5, & x \in [-1;1) \\ 1, & x \geqslant 1 \end{cases}$
- 

2.4 Пусть задана таблица совместного распределения случайных величин X и Y

	$Y=-1$	$Y=0$	$Y=1$
$X=-1$	0.2	0.1	0.2
$X=1$	0.2	0.1	0.2

Найдите

- $\mathbb{P}(\{X=1\}) = 0.2 + 0.1 + 0.2 = 0.5$
- $\mathbb{P}(\{Y=1\}) = 0.2 + 0.2 = 0.4$
- $\mathbb{P}(\{X=1\} \cap \{Y=1\}) = 0.2$
- Проверим, выполняется ли

$$\mathbb{P}(\{X=1\} \cap \{Y=1\}) = \mathbb{P}(\{X=1\}) \cdot \mathbb{P}(\{Y=1\})$$
$$0.2 = 0.5 \cdot 0.4$$

$\Longrightarrow$ величины X и Y независимы

- $$\begin{aligned} F_X(1;0) &= \mathbb{P}(\{X \leqslant 1\} \cap \{Y \leqslant 0\}) \\ &= \mathbb{P}(\{X=-1\} \cap \{Y=-1\}) + \mathbb{P}(\{X=-1\} \cap \{Y=0\}) \\ &+ \mathbb{P}(\{X=1\} \cap \{Y=-1\}) + \mathbb{P}(\{X=1\} \cap \{Y=0\}) \\ &= 0.2 + 0.1 + 0.2 + 0.1 \\ &= 0.6 \end{aligned}$$

Y	$\mathbb{P}$
-1	0.4
0	0.2
1	0.4

- $F_Y(y) = \mathbb{P}\left(\{Y \leqslant y\}\right) = \begin{cases} 0, & y < -1 \\ 0.4, & y \in [-1; 0) \\ 0.6, & y \in [0; 1) \\ 1, & y \geqslant 1 \end{cases}$

-