Математический анализ—2

Винер Даниил, Хоранян Нарек

Версия от 19 ноября 2024 г.

Содержание

1 Кратные интегралы. Брусы. Интегрируемые функции по Риману

1.1 Брус. Мера бруса

Определение. Замкнутый брус (координатный промежуток) в $\mathbb{R}^n$ — множество, описываемое как

$$\begin{aligned} I &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leqslant x_i \leqslant q_i,\ i \in \{1, n\}\} \\ &= [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \end{aligned}$$

Примечание. $I = \{a_1, b_1\} \times \ldots \times \{a_n, b_n\}$, где $\{\}$ может быть отрезком, интервалом и т.д.

Определение. Мера бруса — его объём:

$$\mu(I) = |I| = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

1.2 Свойства меры бруса в $\mathbb{R}^n$

1. **Однородность:** $\mu(I_{\lambda a, \lambda b}) = \lambda^n \cdot \mu(I_{a,b})$, где $\lambda \geqslant 0$
2. **Аддитивность:** Пусть $I, I_1, \ldots, I_k$ — брусы

   Тогда, если $\forall i, j\, I_i, I_j$ не имею общих внтренних точек, и $\bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i = I$, то

   $$|I| = \sum_{i=1}^{k} |I_i|$$

3. **Монотонность**: Пусть I — брус, покрытый конечной системой брусов, то есть $I \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i$, тогда

   $$|I| < \sum_{i=1}^{k} |I_i|$$

1.3 Разбиение бруса. Диаметр множества. Масштаб разбиения

Определение. I — замкнутый, невырожденный брус и $\bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i = I$, где I_i попарно не имеют общих внутренних точек. Тогда набор $\mathbb{T} = \{\mathbb{T}\}_{i=1}^{k}$ называется разбиением бруса I

Определение. Диаметр произвольного ограниченного множества $M \subset \mathbb{R}^n$ будем называть

$$d(M) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant k} \|x - y\|, \text{ где}$$
$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Определение. Масштаб разбиения $\mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^{k}$ — число $\lambda(\mathbb{T}) = \Delta_{\mathbb{T}} = \max\limits_{1 \leq i \leq k} d(I_i)$

Определение. Пусть $\forall\ I_i$ выбрана точка $\xi_i \in I_i$. Тогда, набор $\xi = \{\xi_i\}_{i=1}^{k}$ будем называть **отмеченными точками**

Определение. Размеченное разбиение — пара $(\mathbb{T}, \xi)$

1.4 Интегральная сумма Римана. Интегрируемость по Риману

Пусть I — невырожденный, замкнутый брус, функция $f : I \to \mathbb{R}$ определена на I

Определение. Интегральная сумма Римана функции f на $(\mathbb{T}, \xi)$ — величина

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) := \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i) \cdot |I_i|$$

Определение. Функция f интегрируема (по Риману) на замкнутом брусе I ($f : I \to \mathbb{R}$), если

$$\begin{aligned}\exists A \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta : \\ |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi)| - A| < \varepsilon\end{aligned}$$

Тогда

$$A = \int\limits_I f(x)\mathrm{d}x = \int \dots \int\limits_I f(x_1, \dots, x_n)\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n$$

Обозначение: $f \in \mathcal{R}(I)$

1.5 Пример константной функции

Пуусть у нас есть функция $f = \mathrm{const}$

$$\begin{aligned}\forall (\mathbb{T}, \xi) :\ \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) &= \sum_{i=1}^{k} \mathrm{const} \cdot |I_i| \\ &= \mathrm{const} \cdot |I| \Longrightarrow \int_I f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{const} \cdot |I|\end{aligned}$$

1.6 Неинтегрируемая функция

Имеется брус $I = [0, 1]^n$, а также определена функция, такая что

$$f = \begin{cases} 1, & \forall i = \overline{1, \dots, n}\ x_i \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Доказательство. $\forall\, \mathbb{T}$ можно выбрать $\xi_i \in \mathbb{Q}$, тогда для такой пары $(\mathbb{T}, \overline{\xi})$:

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \overline{\xi}) = \sum_{i=1}^{k} 1 \cdot |I_i| = |I| = 1$$

В то же время, $\forall\, \mathbb{T}$ можно выбрать $\xi_i \notin \mathbb{Q}$, тогда для такой пары $(\mathbb{T}, \hat{\xi})$:

$$\sigma(f, \mathbb{T}, \hat{\xi}) = \sum_{i=1}^{k} 0 \cdot |I_i| = 0 \Longrightarrow f \notin \mathcal{R}(I)$$

1.7 Вычисление многомерного интеграла

Вычислите интеграл

$$\iint\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1}} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

рассматривая его как представление интегральной суммы при сеточном разбиении квадрата

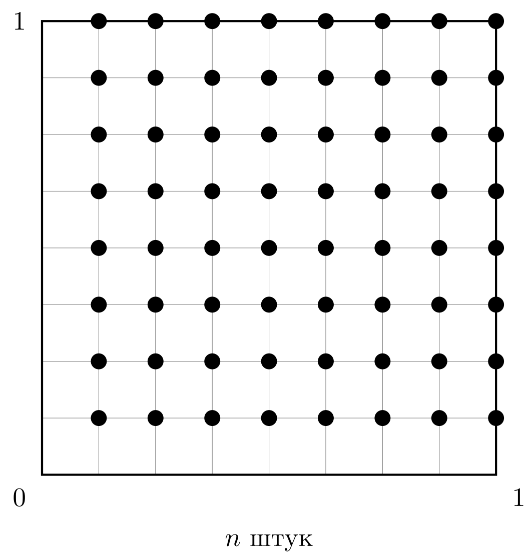
$$I = [0, 1] \times [0, 1]$$

на ячейки — квадраты со сторонами, длины которых равны $\frac{1}{n}$, выбирая в качестве точек ξ_i верхние правые вершины ячеек

Имеется функция $f = xy,\ |I| = \dfrac{1}{n^2}$

$$\begin{aligned}
\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{j}{n} \cdot \frac{1}{n^2} \\
&= \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i \cdot j \\
&= \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=1}^{n} j \\
&= \frac{n(n+1)}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4}
\end{aligned}$$

Заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2(n+1)^2}{4n^4} = \dfrac{1}{4}$



2 Свойства кратных интегралов. Условия интегрирования. Лебегова мера

2.1 Свойства кратных интегралов

1. **Линейность.**

$$f, g \in \mathcal{R}(I) \implies (\alpha f + \beta g) \in \mathcal{R}(I)\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

И верно, что:

$$\int_I (\alpha f + \beta g) \mathrm{d}x = \alpha \int_I f \mathrm{d}x + \beta \int_I g \mathrm{d}x$$

Доказательство.

(a)

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{R}(I): \quad & \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta_1 > 0\ \forall (\mathbb{T}, \Xi)\colon \Delta_{\mathbb{T}} < \delta_1 \\ & |\sigma(f, \mathbb{T}, \Xi) - \int_I f \mathrm{d}x| =: |\sigma_f - A_f| < \varepsilon \end{aligned}$$

(b) По определению:

$$\begin{aligned} g \in \mathcal{R}(I): \quad & \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta_2 > 0\ \forall (\mathbb{T}, \Xi)\colon \Delta_{\mathbb{T}} < \delta_2 \\ & |\sigma(g, \mathbb{T}, \Xi) - \int_I g \mathrm{d}x| =: |\sigma_g - A_g| < \varepsilon \end{aligned}$$

(c) Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда (a) и (b) верно для $\delta \implies$

$$|\sigma_{\alpha f + \beta g} - A_{\alpha f + \beta g}| = |\alpha \sigma_f + \beta \sigma_g - \alpha A_f - \beta A_g| \leqslant |\alpha| \cdot |\sigma_f - A_f| + |\beta| \cdot |\sigma_g - A_g| < (|\alpha| + |\beta|)\, \varepsilon$$

□

2. **Монотонность**

$$f, g \in \mathcal{R}(I);\ f|_I \leqslant g|_I \implies \int_I f \mathrm{d}x \leqslant \int_I g \mathrm{d}x$$

Доказательство.

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies \exists A_f \in \mathbb{R} : |\sigma_f - A_f| < \varepsilon\, (\forall\, \varepsilon > 0\ \exists \delta : \forall (\mathbb{T}, \Xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta)$$

Аналогично для $g \in \mathcal{R}(I)$, тогда:

$$A_f - \varepsilon < \sigma_f \leqslant \sigma_g < A_g + \varepsilon \implies A_f < A_g + 2\,\varepsilon\ \ \forall\, \varepsilon > 0 \implies A_f \leqslant A_g$$

□

3. **Оценка интеграла (сверху)**

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies \left| \int_I f \mathrm{d}x \right| \leqslant \sup_I |f| |I|$$

Доказательство. По необходимому условию для интегрируемости функции (см. ниже)

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{R}(I) & \implies f \text{ Ограничена на } I \\ & \implies -\sup_I |f| \leqslant f \leqslant \sup_I |f| \end{aligned}$$

Тогда,

$$\begin{aligned} -\int_I \sup |f| \mathrm{d}x \leqslant \int_I f \mathrm{d}x \quad & \leqslant \int_I \sup |f| dx \\ -\sup_I |f||I| \leqslant \int_I f \mathrm{d}x \qquad & \leqslant \sup_I |f||I| \end{aligned}$$

□

2.2 Необходимое условие интегрирования.

Теорема. Пусть I — замкнутый брус.

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies f \text{ ограничена на } I$$

Доказательство. От противного.

1. Пусть $f \in \mathcal{R}(I)$, тогда

$$\exists \underbrace{A_f}_{\text{конечное}} \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \forall (\mathbb{T}, \Xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta \colon |\sigma_f - A_f| < \varepsilon$$

   Значит, для $\varepsilon = 1$ это тоже верно, поэтому:

$$A_f - 1 < \sigma_f < A_f + 1 \implies \sigma_f - \text{ ограничена}$$

2. Пусть f — неограничена на I, но $f \in \mathcal{R}(I) \implies \forall \mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^{K} \, \exists i_0 : f$ неограничена на I_{i_0}.
   Тогда можно представить так:

$$\sigma_f = \sum_{i \neq i_0} f(\xi_i)|I_i| + f(\xi_{i_0})|I_{i_0}|$$

   Тогда, σ_f может принимать любые сколь угодно большие (малые) значения, в зависимости от $I_{i_o} \implies$ **противоречие**

Из пунктов 1 и 2 следует, что

$$f \in \mathcal{R}(I) \implies f \text{ ограничена на } I$$

□

2.3 Множество меры нуль по Лебегу

Определение. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ будем называть **множеством меры 0 по Лебегу**, если $\forall \varepsilon > 0$ существует не более чем счетный набор (замкнутых) брусов $\{I_i\}$ и выполняются:

1. $M \subset \bigcup\limits_i I_i$
2. $\sum\limits_i |I_i| < \varepsilon \;\; \forall \varepsilon < 0$

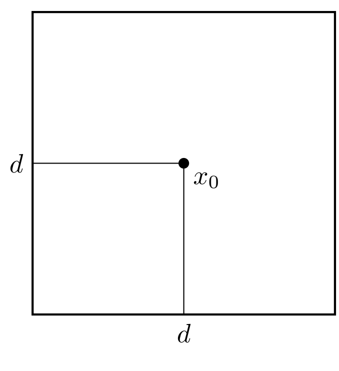
Пример: $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — множество меры нуль по Лебегу в $\mathbb{R}^n$

Доказательство. Пусть $x_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0n})$. Покроем точку замкнутым брусом, причем

$$I = [x_{01} - d, x_{01} + d] \times \ldots \times [x_{0n} - d, x_{0n} + d]$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists I : |I| = (2d)^n < \varepsilon \implies d < \frac{\sqrt[n]{\varepsilon}}{2}$$

Значит, точка является множеством меры нуль по Лебегу



2.4 Свойства множества меры нуль по Лебегу

1. В определении множества меры 0 можно использовать *открытые* брусы

Доказательство. Пусть $\{I_i\}$ — открытые брусы $M \subset \bigcup\limits_i I_i$, то есть $M \subset \mathbb{R}^n$ — множество меры 0 по Лебегу

Пусть $\{\bar{I}_i\}$ — замкнутые брусы I_i.

$$M \subset \bigcup_i I_i \subset \bigcup_i \bar{I}_i,\ |I_i| = |\bar{I}_i|$$

Если

$$\forall\, \varepsilon\ \exists \{I_i\} : M \subset \bigcup_i I_i : \sum_i |I_i| < \varepsilon$$

то

$$\forall\, \varepsilon\ \exists \{\bar{I}_i\} : M \subset \bigcup_i \bar{I}_i : \sum_i |\bar{I}_i| < \varepsilon$$

Докажем в обратную сторону. Пусть $\{I_i\}$ — набор замкнутых брусов

$$I_i = [a_1^i, b_1^i] \times \ldots \times [a_n^i, b_n^i], \quad V_i = \sum_i |I_i| < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Пусть

$$D_i = \left(\frac{a_1^i + b_1^i}{2} - (b_1^i - a_1^i); \frac{a_1^i + b_1^i}{2} + (b_1^i - a_1^i)\right) \times \ldots \times \left(\frac{a_n^i + b_n^i}{2} - (b_n^i - a_n^i); \frac{a_n^i + b_n^i}{2} + (b_n^i - a_n^i)\right)$$

$$\implies V_2 = \sum_i |D_i| = 2^n V_1 < \varepsilon$$ □

2. M — множество меры нуль, $L \subset M \implies L$ — множество меры нуль

   Доказательство. $L \subset M$ и $\forall\, \varepsilon > 0 \exists$ не более чем счетное $\{I_i\}$:

   $$L \subset M \subset \bigcup_i I_i \text{ и } \sum |I + i| < \varepsilon$$

   по транзитивности это верно и для L □

3. Не более чем счетное объединение множеств меры нуль — множество меры нуль

   Доказательство. Пусть $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ — счетное,[1] так как $\forall i\ M_k$ — множество меры нуль, то $\forall i, \forall\, \varepsilon_i\ \exists$ не более чем счетное $\{I_i^k\}$:

   $$M_k \subset I_i^k \text{ и } \sum |I_i^k| < \varepsilon_k = \frac{\varepsilon}{2^k} \forall\, \varepsilon_k > 0$$

   Рассмотрим $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$, тогда $M \subset \bigcup_{i,k} I_i^k$ и

   $$\sum_{i,k} \underbrace{|I_i^k|}_{>0} < \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = \varepsilon$$

   □

   - **Пример.** Пусть $\{M_i\}_{i=1}^{N}$ — конечный набор

     $$\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_N = \frac{N}{N+1}\varepsilon < \varepsilon$$
     $$\varepsilon_i = \frac{\varepsilon}{N+1}$$

[1] Для конечного доказательство тривиально

3 Топология в $\mathbb{R}^n$

Определение. Пусть имеется $M \subset \mathbb{R}^n$. Точку $x_0 \in M$ будем называть *внутренней* точкой M, если

$$\exists\, \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subset M$$

Определение. Точку $x_0 \in M$ будем называть *внешней* точкой M, если

$$\exists\, \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subset (\mathbb{R}^n \setminus M)$$

Пример. $M = [0;1)$. тогда

$$\begin{cases} x = 0.5 & \text{— внутренняя} \\ x = 0 & \text{— не внутренняя} \\ x = 2 & \text{— внешняя} \end{cases}$$

Определение. Точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ будем называть *граничной* точкой M, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \ (B_\varepsilon(x_0) \cap M) \neq \varnothing \wedge B_\varepsilon(x_0) \cap (\mathbb{R}^n \setminus M) \neq \varnothing$$

Обозначение. ∂M — множетсво всех граничных точек M

Пример. $M = [0;1) \Longrightarrow x = 0; 1$ — граничные

Определение. Точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ будем называть *изолированной* точкой M, если

$$\exists\, \varepsilon > 0 : \overset{\circ}{B}_\varepsilon (x_0) \cap M = \varnothing$$

Пример. $M = [0;1] \cup \{3\} \Longrightarrow x = 3$ — изолированная

Определение. Точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ будем называть *предельной* точкой M, если

$$\exists\, \varepsilon > 0 : \overset{\circ}{B}_\varepsilon (x_0) \cap M \neq \varnothing$$

Примечание. Из определения следует, что изолированные точки не являются предельными

Определение. Точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ будем называть *точкой прикосновения* M, если

$$\exists\, \varepsilon > 0 : \ B_\varepsilon(x_0) \cap M \neq \varnothing$$

Примечание. Точки прикосновения = изолированные точки $\oplus$ предельные точки

Определение. Множество всех точек прикосновения M называется *замыканием* M и обозначается как $\overline{M}$

Пример. $M = (0;1) \cup (1;2] \Longrightarrow \overline{M} = [0;2]$

Пример. $M = \{x \in [0;1] \colon x \in \mathbb{Q}\} \Longrightarrow \overline{M} = [0;1]$

Определение. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *открытым*, если все его точки внутренние

Определение. Множество $M \subset R^n$ называется замкнутым, если $\mathbb{R}^n \setminus M$ — открыто

Пример. $\begin{cases} (0;1) & \text{— открыто в } \mathbb{R} \\ [0;1] & \text{— замкнуто, т.к. } (-\infty;0) \cup (1;+\infty) \text{ открыто в } \mathbb{R} \\ [0;1) & \text{— ни открыто, ни замкнуто в } \mathbb{R} \end{cases}$

Определение. Множество $K \in \mathbb{R}^n$ называется *компактом*, если из $\forall$ его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие

Примечание. Если хотя бы для какого-то покрытия это не выполняется, то K — не компакт

Пример. Пусть $M = (0,1)$ покроем $\left\{A_n = \left(0; 1 - \frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$

При $n \to \infty$ $M \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, но $\forall$ фиксированного N: $M \not\subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Longrightarrow$ не компакт

Определение. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ — называется *ограниченным*, если

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ и } \exists r > 0, \text{ такой что } M \subset B_r(x_0)$$

3.1 Критерий замкнутости

Теорема. M — замкнуто $\Longleftrightarrow$ M содержит **все** свои предельные точки

Доказательство. Докажем необходимость и достаточность

1. *(Необходимость)* Докажем $\Longrightarrow$ от противного

    - Пусть x_0 — предельная для M и $x_0 \notin M$. Тогда, $\forall\, \varepsilon > 0\ \ \overset{\circ}{B_\varepsilon}(x_0) \cap M \neq \varnothing$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$
    - По условию M — замкнуто, то есть $\mathbb{R}^n \setminus M$ — открыто $\Longrightarrow$ все его точки внутренние и $\exists r > 0$:
    $$B_r(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus M \Longrightarrow \overset{\circ}{B_r}(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus M \text{ и } \overset{\circ}{B_r}(x_0) \cap M = \varnothing$$

    Пришли к противоречию $\Longrightarrow$ M содержит все свои предельные точки □

2. *(Достаточность)* Докажем $\Longleftarrow$

    Пусть y_0 — не является предельной для M, то есть $y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M \Longrightarrow \exists r > 0$:
    $$\begin{cases} \overset{\circ}{B_r}(y_0) \cap M = \varnothing \\ y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M \end{cases} \Longrightarrow B_r(y_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus M$$

    $\Longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus M$ — открытое и состоит из всех точек, не являющихся предельными $\Longrightarrow$ M — замкнуто по определению □

4 Компакты в $\mathbb{R}^n$

4.1 Замкнутый брус — компакт

Теорема. Пусть $I \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутый брус $\Longrightarrow I$ — компакт

Доказательство. Пойдем от противного

Пусть $I = [a_1; b_1] \times \ldots \times [a_n; b_n]$

1. Положим, что I — не компакт. Значит, существует его покрытие $\{A_\alpha\}$ — открытые множества, такие что $I \subset \{A_\alpha\}$, не допускающее выделения конечного подкпорытия

2. Поделим каждую сторону пополам. Тогда, $\exists I_1$, такой что не допускает конечного подпокрытия. Иначе, I — компакт

3. Аналогично, повторим процесс и получим систему вложенных брусов:

$$I \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$$

   То есть на каждой стороне возникает последовательность вложенных отрезков, которые стягиваются в точку $a = (a_1, \ldots, a_n)$

   При этом, $a \in I_i \ \forall i$ или $a \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} I_i$

4. $a \in I \Longrightarrow a \in \bigcup A_\alpha \Longrightarrow \exists \alpha_0 : a \in \underbrace{A_{\alpha_0}}_{\text{открытое}} \Longrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(a) \subset A_{\alpha_0}$

5. Мы знаем, что $d(I_i) \mapsto 0$ при $i \mapsto \infty$. Тогда,

$$\exists N : \forall i > N \ I_i \subset B_\varepsilon(a) \subset A_{\alpha_0}$$

   Получается, что $\forall i > N \ I_i$ покрывается одним лишь A_{α_0} из системы $\{A_\alpha\}$

   Получаем противоречие тому, что любое I_i не допускает конечного подпокрытия, а у нас получилось, что $I_i \in A_{\alpha_0} \forall i > N$

Примечание. Любое ограниченное множество можно вписать в замкнутый брус. Потому что можно вокруг него описать шарик, который точно можно вписать в брус

4.2 Критерий компактности

Теорема. $K \subset \mathbb{R}^n$. K — компакт $\Longleftrightarrow K$ замкнуто и ограниченного

Доказательство. Докажем необходимость ($\Longrightarrow$)

- *Ограниченность.* K — компакт, значит монжо выбрать покрытие $\{B_m(0)\}_{m=1}^{\infty}$ — открытые шары

  Тогда, $\exists m_0 : K \subset \bigcup\limits_{m=1}^{m_0} B_m(0) \Longrightarrow K \subset B_{m_0}(0) \Longrightarrow$ по определению K — ограничено

- *Замкнутость.* Пойдем от противного. K — компакт, тогда возьмем $\{B_{\frac{\delta(x)}{2}}(0)\}_{x \in K}$ — покрытие открытыми шарами, где $\delta(x) = \rho(x, x_0)$. x_0 — предельная точка, которая $\notin K$ (или же $\in \mathbb{R}^n \setminus K$)

  Так как K — компакт, $\exists x_1, \ldots, x_s : K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{s} B_{\frac{\delta(x_i)}{2}}(x_i)$

  Пусть $\delta = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant s} \delta(x_i)$, тогда

$$B_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \cap \bigcup_{i=1}^{s} B_{\frac{\delta(x_i)}{2}}(x_i) = \varnothing \Longrightarrow B_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \subset \mathbb{R}^n \setminus K$$

$$\Longrightarrow \overset{\circ}{B}_{\frac{\delta}{2}}(x_0) \cap K = \varnothing$$

  Значит, x_0 *не является предельной точкой* K, что противоречит нашему предположению

Доказательство. Докажем достаточность

K — замкнуто и ограничено $\Longrightarrow r > 0 : B_r(0) \supset K \Longrightarrow \exists I$ — замкнутый брус, такой что

$$K \subset I \text{ и } I = [-r; r]^n \supset K$$

Пусть A_α — произвольное покрытие открытыми множествами для K. Тогда, $I \subset \{A_\alpha\} \cup \underbrace{\{\mathbb{R}^n \setminus K\}}_{\text{открыто}}$. Так как I — компакт, то $\exists$ конечное подпокрытие

$$\{A_{\alpha_i}\}_{i=1}^m \cup \{\mathbb{R}^n \setminus K\} \supset I \supset K \text{ — покрытие для } I$$

Значит, $K \subset \{A_{\alpha_i}\}_{i=1}^m$ — конечное и $\{A_\alpha\}$ — произвольное, тогда K — компакт по определению $\square$

5 Теорема Вейерштрасса о непрерывной функции на компакте. Колебания функции

5.1 Теорема Вейерштрасса о непрерывной функции на компакте

Теорема. Пусть $K \in \mathbb{R}^n$ — компакт и функция $f : K \mapsto \mathbb{R}$ - непрерывная. Тогда f на K достигает наибольшее и наименьшее значения.

Доказательство.

- *Ограниченность.* От противного: пусть существует последовательность $\{x^k\} \subset K : |f(x^k)| > k$. Из ограниченности K следует ограниченность последовательности $\{x^k\}$, и как следствие ограничены последовательности отдельных коордиант:
$$|x_i^k| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i^k|} = ||x^k|| \leq C \quad \text{для некоторого } C$$
По теореме Больцано-Вейерштрасса у $\{x_1^k\}$ существует сходящаяся подпоследовательность $x_1^{k_{j_1}} \to a_1, j_1 \to \infty$. Для последовательности $\{x_2^{k_{j_1}}\}$ существует сходящаяся последовательность $x_2^{k_{j_2}} \to a_2, j_2 \to \infty$. И т.д. Получаем сходящуюося подпоследовательность:
$$x^{k_j} = (x_1^{k_j}, x_2^{k_J}, \ldots, x_n^{k_j}) \to (a_1, a_2, \ldots, a_n) = a$$
Точка a — предельная для K. В силу замкнутости K т. $a \in K$. А из непрерывности функции f получаем $f(x^{k_j}) \to f(a)$. А с другой стороны, $f(x^{k_j}) \to \infty$ из выбора исходной последовательности. **противоречие**
- *Достижение наибольшего (наименьшего) значения.* Итак, мы доказали, что f — ограничена на K. Выберем последовательность $\{x^k\}$:
$$\sup_K f - \frac{1}{k_j} \leq f(x^{k_j}) \leq \sup_K f$$
в силу непрерывности f:
$$\sup_K f \leq f(a) \leq \sup_K f$$
Получаем $f(a) = \sup\limits_K f$, т.е. максимальное значение достиигается в точке $x = a$. Для $\inf\limits_K f$ доказательство аналогично ☐

5.2 Расстояние между двумя множествами

Определение. Расстоянием между двумя множествами X и Y, где $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ будем называть число $\rho(X, Y)$:
$$\rho(X, Y) = \inf_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} ||x - y||$$

Примеры:

1. $X \cap Y \neq \varnothing \implies \rho(X, Y) = 0$
2. $\rho(X, Y) = 0 \implies X \cap Y \neq \varnothing$? — нет, пример: $X = (0, 1); (Y = (1; 2)$ - не компакты

5.3 Расстояние между непересекающимися компактами

Теорема. Если $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^n$ — компакты и $K_1 \cap K_2 = \varnothing$, то $\rho(K_1, K_2) > 0$

Доказательство. Функция $f(x, y) = ||x - y||$ определена на $K_1 \times K_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$, причем f–непрерывная функция.

По теореме Вейерштрасса эта функция достигает своего максимального и минимального значений. Т.е. существуют $x_0 \in K_1, y_0 \in K_1 : f(x_0, y_0) = \rho(K_1, K_2)$. А $f(x_0, y_0) = 0$ тогда и только тогда, когда $x_0 = y_0$. ☐

5.4 Колебание функции на множестве

Определение. Колебанием функции f на множестве $M \subset \mathbb{R}^n$ будем называть число $\omega(f, M)$:

$$\omega(f, M) = \sup_{x,y \in M} |f(x) - f(y)| = \sup_{x \in M} - \inf_{y \in M} f(y)$$

5.5 Колебание функции в точке

Определение. Колебанием функции f в точке $x_0 \in M \subset \mathbb{R}^n$ будем называть число

$$\omega(f, x_0) := \lim_{r \to 0+} \omega(f, B_r^M(x_0)), \quad \text{где } B_r^M = B_r(x_0) \cap M$$

Напоминание: По определению, функция $f : M \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $x_o \in M$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in M \quad |x - x_0| < \delta \iff x \in B_\delta(x_0) \cap M$ верно $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

5.6 Колебание функции, непрерывной в точке

Теорема. Пусть $x_0 \in M \subset \mathbb{R}^n;\ f : M \mapsto \mathbb{R}$. f — непрерывна в точке $x_0 \iff \omega(f, x_0) = 0$

Доказательство.

- *Необходимость*

  f — непрерывна в т. $x_0 \in M \implies \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \ \forall x \in B_\delta(x_0) \cap M = B_\delta^M(x_0) \implies |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$
  Рассмотрим $\omega(f, x_0) := \lim\limits_{\delta \to 0+} \omega(f, B_\delta^M(x_0))$:

  $$\omega(f, B_\delta^M(x_0)) = \sup_{x,y \in B_\delta(x_0)} |f(x) - f(y)| \le \sup_{x \in B_\delta(x_0)} |f(x) - f(x_0)| + \sup_{y \in B_\delta(x_0)} |f(y) - f(x_0)| \le \frac{2\,\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

  При $\varepsilon \to 0 \implies \delta \to 0$ и $\omega(f, B_\delta^M(x_0)) \to 0$, т.е. $\omega(f, x_0) = 0$

- *Достаточность*
  Пусть $0 = \omega(f, x_0) := \lim\limits_{\delta \to 0+} \omega(f, B_\delta^M(x_0))$, т.е.

  $$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \quad \forall x, y \in B_\delta^M(x_0) \qquad \sup_{x,y \in B_\delta^M(x_0)} |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

  Получаем, что

  $$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta^M(x_0) \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \implies$$

$\square$

Определение. Если какое-то свойство не выполняется лишь на множестве меры нуль, то говорят, что это свойство выполняется почти всюду.

Пример: $f(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ 0, x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ — непрерывна почти всюду на $\mathbb{R}$

5.7 Пересечение разбиений бруса

Определение. Пусть $\mathbb{T}_1 = \{I_k^1\}$ и $\mathbb{T}_2 = \{I_m^2\}$ — два разбиения бруса $I \subset \mathbb{R}^n$.

Пересечением разбиений ($\mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$) будем называть мн-во всех брусов $\{I_{ij}\} : \forall I_{ij} \begin{cases} 1) \exists k : I_{ij} \in \{I_k^1\} \\ 2) \exists m : I_{ij} \in \{I_m^2\} \\ 3) \{I_{ij}\} - \text{ разбиение бруса } I \end{cases}$

5.8 Критерий Лебега об интегрируемости функции по Риману

Теорема. Критерий Лебега. Если $I \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутый невырожденный брус, $f : I \to \mathbb{R}$, то $f \in R(I) \iff f$ ограничена и непрерывна почти всюду на I

Доказательство.

- *Необходимость*

  Если f интегрируема, то она ограничена по необходимому условию интегрируемости. Осталось показать, что множества разрыва меры нуль. От противного: пусть это не так.

  Обозначим множество всех точек разрыва ф-ии f на I за T и заметим, что $T = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} T_k$, где $T_k = \{x \in I | \omega(f,x) \geq \frac{1}{k}\}$. Если T не меры нуль, то существует T_{k_0} не меры нуль (если они все меры нуль, то по свойству множеств меры нуль счетное объединение таких множеств тоже было бы меры нуль).

  Для произвольного разбиения $\mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^m$ бруска I разобъем эти бруски на две кучи: первая $A = \{I_i | I_i \cap T_{k_0} \neq \varnothing, \omega(f, I_i) \geq \frac{1}{2k_0}\}$ и вторая $B = \mathbb{T} \backslash A$. Покажем что A является покрытием множества T_{k_0}, т.е. $T_{k_0} \subset \bigcup\limits_{i:I_i\in A} I_i$ любая точка $x \in T_{k_0}$ является либо

  a) внутренней для некоторого бруска I_i. В этом случае $\omega(f, I_i) \geq \omega(f,x) \geq \frac{1}{k_0} > \frac{1}{2k_0}$, т.е. $I_i \in A$, либо
  b) точка x лежит на границе некоторого количества брусков (не более чем 2^n штук). Тогда хотя бы на одном из них колебание $\omega(f, I_i) \geq \frac{1}{2k_0}$ (т.е. $I_i \in A$): если бы такого не нашлось, то в любой малой окрестности $B_\varepsilon(x)$ выполняется следующее:

  $$\omega(f,x) \leq \sup_{x',x''\in B_\varepsilon(x)} |f(x')-f(x'')| \leq \sup_{x'\in B_\varepsilon(x)} |f(x')-f(x)| + \sup_{x''\in B_\varepsilon(x)} |f(x)-f(x'')| < \frac{1}{2k_0} + \frac{1}{2k_0} = \frac{1}{k_0}$$

  т.е. $x \notin T_{k_0}$ — **противоречие**.

  Таким образом, каждая точка $x \in T_{k_0}$ покрывается некоторым бруском $I_i \in A$, т.е. A - покрытие T_{k_0}. Тогда существует $c : \sum\limits_{i:I_i\in A} |I_i| \geq c > 0$ для всех разбиений $\mathbb{T}$ (если бы меняя разбиения мы могли получить сумму объемов этих брусков сколь угодно маленькую, то получилось бы, что T_{k_0} меры нуль)

  Возьмем два набора отмеченных точек ξ^1 и ξ^2. На брусках из кучки B будем их брать одинаковыми, т.е. для $I_i \in B$ $\xi_i^1 = \xi_i^2$. А на брусках из кучки A будем брать такие, чтобы

  $$f(\xi_i^1) - f(\xi_i)^2 \geq \frac{1}{3k_0} \text{ (у нас там колебания} \geq 1/2k_0, \text{ так что такие найдутся)}$$

  Получаем:

  $$|\sigma(f, \mathbb{T}, \xi^1) - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi^2) = \left| \sum_i (f(\xi_i^1) - f(\xi_i^2))|I_i| \right|$$
  $$= \left| \sum_{i:I_i\in A} (f(\xi_i^1) - f(\xi_i^2))|I_i| + \sum_{i:I_i\in B} (f(\xi_i^1) - f(\xi_i^2))|I_i| \right|$$
  $$= \left| \sum_{i:I_i\in A} (f(\xi_i^1) - f(\xi_i^2))|I_i| \right| \geq \frac{1}{3k_0} \sum_{i:I_i\in A} |I_i| \geq \frac{c}{3k_0} > 0$$

  т.е. интегральные суммы не могут стремиться к одному и тому же числу, значит f не интегрируема — **противоречие**.

- *Достаточность*

  Для любого $\varepsilon > 0$ рассмотрим $T_\varepsilon = \{x \in I | \omega(f,x) \geq \varepsilon\}$. Покажем, что это множество - компакт. Ограниченность очевидна (подмножества бруска), а замкнутость проверим от противного. Пусть a - предельная точка $T_\varepsilon :\ a \notin T_\varepsilon$. Т.к. она предельная, то существует $\{x^k\} : x^k \in B_{\frac{1}{k}}(a)$. Т.к. $B_{\frac{1}{k}}$ - открытые шары, то наши точки лежат в них с окрестностями, т.е. сущесвтуют $\delta_k : B_{\delta_k}(x_K) \subset B_{\frac{1}{k}}(a)$. Тогда

  $$\omega(f, B_{\frac{1}{k}}(a)) \geq \omega(f, B_{\delta_k}(x_K)) \geq \omega(f, x_k) \geq \varepsilon$$

Переходя к пределу $k \to \infty : \omega(f, a) \geq \varepsilon$, т.е. $a \in T_\varepsilon$ - противоречие. Значит T_ε - замкнуто, и, следовательно, компактно.

Множество T_ε - множество меры нуль (как подмножество множества меры нуль). Значит, его можно покрыть не более чем счетным объединением открытых брусков $I_i : \sum\limits_i |I_i| < \varepsilon$. Т.к. это открытое покрытие, а T_ε - компакт, то существует конечное подпокрытие: $T_\varepsilon \subset \bigcup\limits_{i=1}^m I_i$, при этом $\sum\limits_{i=1}^m |I_i| < \varepsilon$.

Обозначим три множества: $C_1 = \bigcup\limits_{i=1}^m I_i, \quad C_2 = \bigcup\limits_{i=1}^m I'_i, C_3 = \bigcup\limits_{i=1}^m I''_i$, где I'_i, I''_i - бруски, полученные гомотетией с центром в центре I_i с коэффициентом 2 и 3 соответственно.

Заметим, что

a) $|C_3| \leq \sum\limits_{i=1}^m |I''_i|| = 3^n \sum\limits_{i=1}^m |I_i| < 3^n\,\varepsilon$

b) расстояние $\rho(\partial C_2, \partial C_3) = \delta_1 > 0$ (теорема про расстояние между компактами)

c) Множество $K = I \backslash (C_2 \backslash \partial C_2)$ - компакт. Кстати, любое множество с диаметром меньше δ_1 либо польностью лежит в C_3, либо полностью в K.

d) $T_\varepsilon \cap K = \varnothing$, т.к. $T_\varepsilon \subset C_1 \subset C_2$. Следовательно, $\forall x \in K\ \omega(f, x) < \varepsilon$. Тогда по теореме Кантора-Гейне $\exists \delta_2 > 0 :\ \forall x \in K\ \omega(f, B_{\delta_2}(x)) < \varepsilon + \varepsilon = 2\,\varepsilon$

Выберем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда для любых разбиений $\mathbb{T}_1 = \{I_k^1\}, \mathbb{T}_2 = \{I_i^2\} : \lambda \mathbb{T}_1 < \delta, \lambda(\mathbb{T}_2) < \delta$

Рассмотрим пересечение этих разбиений $\mathbb{T} = \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$, т.е. такое разбиение $\mathbb{T} = \{I_{ik}\}$, что $I_k^1 = I_{i_1 k} \bigsqcup \ldots \bigsqcup I_{i_m k}$ и $I_i^2 = I_{ik_1} \bigsqcup \ldots \bigsqcup I_{ik_l}$. Очевидно $\lambda(\mathbb{T}) < \delta$.

Для произвольных наборов отмеченных точек:

$$|\sigma(f, \mathbb{T}_1, \xi^1) - \sigma(f, \mathbb{T}_2, \xi^2)| \leq |\sigma(f, \mathbb{T}_1, \xi^1) - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)| + |\sigma(f, \mathbb{T}_2, \xi^2) - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)|$$

Рассмотрим отдельное слагаемое:

$$|\sigma(f, \mathbb{T}_1, \xi^1) - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)| = \left| \sum_{i,j} (f(\xi_i^1) - f(\xi_{ij})) |I_{ij} \right| \leq \sum_{I_{ij} \in C_3} |f(\xi_i^1) - f(\xi_{ij})||I_{ij}| + \sum_{I_{ij \in K}} |f(\xi_i^1) - f(\xi_{ij})||I_{ij}| \leq 2M \cdot$$

т.к. f ограничена некоторой константой M и см пункты $a), d)$, то

Т.к. для $(\mathbb{T}_2, \xi^2)$ все выкладки аналогичные, то получаем:

$$|\sigma(f, \mathbb{T}_1, \xi^1) - \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)| \leq \epsilon (2M \cdot 3^n + 2|I|)$$

Следовательно, существует предел $\lim\limits_{\lambda(\mathbb{T}) \to 0} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)$ (Критерий коши для функций)

$\square$

5.9 Измельчение разбиения

Определение. Разбиение $\mathbb{T}_1 = \{I_k^1\}$ будем называть измельчением разбиения $\mathbb{T}_2 = \{I_m^2\}$, если $\forall k\ \exists m :$ $I_k^1 \in I_m^2 \implies \mathbb{T} = \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$ является измельчением $\mathbb{T}_1$ и $\mathbb{T}_2$

6 Суммы Дарбу

6.1 Нижняя и верхняя суммы Дарбу

Определение. Пусть I - замкнутый брус, $f : I \mapsto \mathbb{R}$, $\mathbb{T} = \{I_i\}_{i=1}^{K}$ -разбиение бруса I, $m_i = \inf\limits_{I_i}(f)$, и $M_i = \sup\limits_{I_i}(f)$. Тогда числа $\underline{S}(f, \mathbb{T}) = \sum\limits_{i=1}^{K} m_i|I_i|$ и $\overline{S}(f, \mathbb{T}) = \sum\limits_{i=1}^{K} M_i|I_i|$ будем называть **нижней и верхней суммой Дарбу** соответственно

6.2 Нижняя сумма Дарбу не больше верхней

Теорема.

$$\underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}) = \int_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \leq \sup_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \overline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T})$$

Доказательство.

$$\underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}) = \sum_{i=1}^{K} m_i|I_i| = \sum_{i} \inf_{\xi_i}(f(\xi_i))|I_i| = \inf_{\xi} \sum_{i} f(\xi_i)|I_i| = \inf_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \leq$$
$$\sup_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) = \sum_{i} (f(\xi_i))|I_i| = \sum_{i} M_i|I_i| = \overline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T})$$

6.3 Монотонность сумм относительно измельчений разбиения

Теорема. Пусть $\tilde{\mathbb{T}}$ - измельчение разбиения $\mathbb{T}$, тогда

$$\underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}) \leq \underline{\mathrm{S}}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \overline{\mathrm{S}}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \overline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T})$$

□

Доказательство. Если $L \subset M$, то $\inf L \geq \inf M$ и $\sup L \leq \sup M$, тогда:

$$\underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}) \leq \underline{\mathrm{S}}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \underset{\text{по } 6.2}{\leq} \overline{\mathrm{S}}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \overline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T})$$

□

6.4 Никакая нижняя сумма Дарбу не больше какой-либо верхней суммы на том же брусе

Теорема. $\forall\, \mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2 : \quad \underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}_1) \leq \overline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}_2)$

Доказательство. $\forall\, \mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2$ рассм $\tilde{\mathbb{T}} = \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$, тогда по 6.3:

$$\underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}_1) \leq \underline{\mathrm{S}}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \overline{\mathrm{S}}(f, \tilde{\mathbb{T}}) \leq \overline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}_2)$$

□

6.5 Верхние и нижние интегралы Дарбу

Определение. Верхним и нижним интегралом Дарбу будем называть числа

$$\overline{I} := \inf_{\mathbb{T}} \overline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}) \qquad \underline{I} := \sup_{\mathbb{T}} \underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T})$$

соответственно

6.6 Интеграл Дарбу как предел сумм Дарбу

Теорема. Пусть $I \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутый брус, а $f : I \mapsto \mathbb{R}$ — ограничена. Тогда:

$$\overline{\mathcal{I}} = \lim_{\Delta_{\mathbb{T}} \to 0} \overline{\text{S}}(f, \mathbb{T}) \qquad \text{и} \qquad \underline{\mathcal{I}} = \lim_{\Delta_{\mathbb{T}} \to 0} \underline{\text{S}}(f, \mathbb{T})$$

Доказательство. Докажем, что $\underline{\mathcal{I}} = \lim\limits_{\Delta_{\mathbb{T}} \to 0} \underline{\text{S}}(f, \mathbb{T}) \quad (= \sup\limits_{\mathbb{T}} \underline{\text{S}}(f, \mathbb{T}))$

1. f-ограничена на I, то $\exists C > 0 : \forall x \in I \quad |f(x)| < C$
2. т.к. по определению $\underline{I} = \sup\limits_{\mathbb{T}} \underline{\text{S}}(f, \mathbb{T})$, то $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \mathbb{T}_1 = \{I_i^1\}_{i=1}^{m_1} : \; \underline{\mathcal{I}} - \varepsilon < \underline{\text{S}}(f, \mathbb{T}_1) \le \underline{\mathcal{I}} < \underline{\mathcal{I}} + \varepsilon$
3. Пусть $G = \bigcup\limits_{i=1}^{m_1} \partial I_i^1$ - объединение границ брусов (без повторов). Тогда G множество меры нуль по Лебегу (т.к. границы — мн-ва меры нуль по Лебегу)
4. Пусть $\mathbb{T}_2$ - произвольное разбиение I : $\mathbb{T}_2 = \{I_i^2\}_{i=1}^{m_2}$
   Рассмотрим две кучки брусов:
   $$A = \{I_i^2 \in \mathbb{T}_2 : I_i^2 \cap G \neq \varnothing\} \qquad \text{и} \qquad B = \mathbb{T}_2 \setminus A \implies$$
   $$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall \mathbb{T}_2 : \Delta_{\mathbb{T}_2} < \delta \text{ верно, что } \sum_{I_i^2 \in A} |I_i^2| < \epsilon$$
   по определению множества меры нуль, а также т.к. A - покрытие замкнутыми брусами, а G - мн-во меры нуль.
5. С другой стороны $\forall I_i^2 \in B$ верно, что $I_i^2 \in \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$

Хотим рассмотреть

$$|\underline{\mathcal{I}} - \underline{\text{S}}(f, \mathbb{T}_2)| = |I - \underline{\text{S}}(f, \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2) + \underline{\text{S}}(f, \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2) - \underline{\text{S}}(f, \mathbb{T}_2)| \le \underbrace{|I - \underline{\text{S}}(f, \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2)|}_{*} + \underbrace{|\underline{\text{S}}(f, \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2) - \underline{\text{S}}(f, \mathbb{T}_2)|}_{**}$$
$$< \varepsilon + 2M\,\varepsilon = \varepsilon(1 + 2M)$$

* из п.2: $\underline{\mathcal{I}} - \varepsilon < \underline{\text{S}}(f, \mathbb{T}_1) \le \underline{\text{S}}(f, \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2) \le \underline{\mathcal{I}} < \underline{\mathcal{I}} + \varepsilon \implies |\underline{\mathcal{I}} - \underline{\text{S}}(f, \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2)| < \varepsilon$

**

$$\begin{aligned}
|\underline{\text{S}}(f, \mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2) - \underline{\text{S}}(f, \mathbb{T}_2)| &= \left| \sum_{I_i^2 \in B} m_i |I_i^2| + \sum_{I_i^2 \in \mathbb{T}_2 \cap A} m_i |I_i^2| - \sum_{I_i^2 \in B} m_i |I_i^2| - \sum_{I_i^2 \in A} m_i |I_i^2| \right| \\
&\le \left| \sum_{I_i^2 \in \mathbb{T}_2 \cap A} m_i |I_i^2| \right| + \left| \sum_{I_i^2 \in A} m_i |I_i^2| \right| \\
&\le 2 \left| \sum_{I_i^2 \in A} m_i |I_i^2| \right| \\
&< 2M \left| \sum_{I_i^2 \in A} |I_i^2| \right| \\
&\le 2M\,\varepsilon
\end{aligned}$$

□

7 Критерий Дарбу. Теорема Фубини

7.1 Критерий Дарбу интегрируемости функции по Риману

$I \in \mathbb{R}^n$ — замкнутый брус, $f : I \mapsto \mathbb{R}, f \in \mathcal{R}(I) \Longleftrightarrow f$ — ограничена на I и $\underline{\mathcal{I}} = \overline{\mathcal{I}}$

Доказательство. Необходимость

- $f \in \mathcal{R}(I) \Longrightarrow$ по необходимому условию интегрируемости функции по Риману на замкнутом брусе, f — ограничена на I
- Покажем, что $\underline{\mathcal{I}} = \mathcal{I}, \overline{\mathcal{I}} = \mathcal{I} \Longrightarrow \underline{\mathcal{I}} = \overline{\mathcal{I}}$

    1. $f \in \mathcal{R}(I) \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall (\mathbb{T}, \xi) : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta \hookrightarrow |\sigma(f, \mathbb{T}, \xi) - \mathcal{I}| < \varepsilon$
    2. $\underline{\mathcal{I}} = \sup\limits_{\mathbb{T}} = \lim\limits_{\Delta \to 0} = \underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}) \Longrightarrow |\, \underline{\mathcal{I}} - \underline{\mathrm{S}}\,| < \varepsilon$
    $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta \; \exists \mathbb{T} : \Delta_{\mathbb{T}} < \delta : |\, \underline{\mathcal{I}} - \underline{\mathrm{S}}\,| < \varepsilon$
    3. $\underline{\mathrm{S}}(\mathbb{T}, \xi) = \inf\limits_{\xi} \sigma(f, \mathbb{T}, \xi)$
    $\forall \mathbb{T}, \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \xi : |\, \underline{\mathrm{S}} - \sigma| < \varepsilon$

$|\mathcal{I} - \underline{\mathcal{I}}\,| \leqslant |\mathcal{I} - \underline{\mathcal{I}} - \sigma + \sigma + \underline{\mathrm{S}} - \underline{\mathrm{S}}\,| \leqslant |\mathcal{I} - \sigma| + |\,\underline{\mathcal{I}} - \underline{\mathrm{S}}\,| + |\sigma - \underline{\mathrm{S}}\,| < 3\,\varepsilon$ □

Доказательство. Достаточность

f — ограничена и $\underline{\mathcal{I}} = \overline{\mathcal{I}}$. Имеем

$$\underline{\mathrm{S}}(f, \mathcal{T}) = \inf_{\xi} \leqslant \sigma(f, \mathbb{T}, \xi) \leqslant \sup_{\xi}(f, \mathbb{T}, \xi) = \overline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T})$$

Тогда, при $\lim\limits_{\Delta \to 0} \underline{\mathrm{S}} = \underline{\mathcal{I}}, \; \lim\limits_{\Delta \to 0} \overline{\mathrm{S}} = \overline{\mathcal{I}}$ получаем $\underline{\mathcal{I}} = \overline{\mathcal{I}}$ □

7.2 Интегрирование по допустимым множествам

Определение. Множество $D \subset \mathbb{R}^n$ называется *допустимым*, если

- D — ограниченно
- ∂D — множество меры нуль по Лебегу

Определение. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n, f : D \to \mathbb{R}$. Тогда, интегралом Римана f по D называется число $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I} = \int\limits_{D} f(\overline{x})\mathrm{d}\overline{x} = \int\limits_{I \supset D} f \cdot \chi_D(\overline{x})\mathrm{d}\overline{x}, \text{ где } \chi_D = \begin{cases} 1, \overline{x} \in D \\ 0, \overline{x} \in D \end{cases}$$

Корректность определения. Пусть $I_1 \supset D, I_2 \supset D$, тогда

$$\int\limits_{I_1} f \cdot \chi_D \mathrm{d}x \text{ и } \int\limits_{I_2} f \cdot \chi_D \mathrm{d}x$$

либо существуют и равны, либо оба не сущесвтуют вообще

Покажем существование

- $f \cdot \chi_D \in \mathcal{R}(I_1) \Longrightarrow$ по критерию Лебега $f \cdot \chi_D$ ограничена на $I_1 \Longrightarrow f \cdot \chi_D$ ограничена на $D \Longrightarrow f$ ограничена на $D \Longrightarrow f \cdot \chi_D$ ограничена на I_2
- $f \cdot \chi_D \in \mathcal{R}(I_1) \Longrightarrow$ по критерию Лебега $f \cdot \chi_D$ непрерывна почти всюду на $I_1 \Longrightarrow f \cdot \chi_D$ непрерынва почти всюду на $D \Longrightarrow$ в худшем случае для $f \cdot \chi_D$ на I_2 добавятся разрывы на $\partial D \Longrightarrow f \cdot \chi_D$ непрерынва почти всюду на I_2

- Тогда, $f \cdot \chi_D \in \mathcal{R}(I_1) \Longleftrightarrow f \cdot \chi_D \in \mathcal{R}(I_2)$

Покажем равенство

- Пусть $\mathbb{T}_i$ — разбиение на I_i : $\mathbb{T}_1$ и $\mathbb{T}_2$ совпадают на общей части $I_1 \cap I_2$
- Пусть ξ^i — отмеченные точки I_i : совпадают на общей части
- $\sigma(f\chi_D, \mathbb{T}_1, \xi^1) = \sum\limits_j f\chi_D(\xi_j^1)|I_j^1| = \sum\limits_j f(\xi_j^1)|I_j^1| = \sum\limits_j f(\xi_j^2)|I_j^2| = \sum\limits_j f\chi_D(\xi_j^2)|I_j^2| = \sigma(f\chi_D, \mathbb{T}_2, \xi^2)$

Примечание. Все свойства интеграла Римана и критерия Лебега для бруса справедливы и для других допустимых множеств

7.3 Теорема Фубини

Пусть имеются $I_x \subset \mathbb{R}^n, I_y \subset \mathbb{R}^n, I_x \times I_y \subset \mathbb{R}^{m+n}$ — замкнутые брусы, $f : I_x \times I_y \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{R}(I_x \times I_y)$ и $\forall$ фиксированной $x \in I_x : f(x, y) \in \mathcal{R}(I_y) \Longrightarrow$

$$\int\limits_{I_x \times I_y} f(\overline{x}, \overline{y}) \mathrm{d}\overline{x} \mathrm{d}\overline{y} = \int\limits_{I_x} \left(\int\limits_{I_y} f(\overline{x}, \overline{y}) \mathrm{d}\overline{y} \right) \mathrm{d}\overline{x} = \int\limits_{I_x} \mathrm{d}\overline{x} \int\limits_{I_y} f(\overline{x}, \overline{y}) \mathrm{d}\overline{y}$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что $f \in \mathcal{R}(I_x \times I_y), f \in \mathcal{R}(I_y)$, а также Критерием Дарбу

- $\mathbb{T}_x = \{I_i^x\}$ — разбиение на I_x, $\mathbb{T}_y = \{I_j^y\}$ — разбиение на I_y, $\mathbb{T}_{x,y} = \{I_i^x \times I_j^y\} = \{I_{ij}\}$ — разбиение на $I_x \times I_y$
- $$\begin{aligned}\underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}_{x,y}) = \sum_{i,j} \inf_{(x,y) \in I_{ij}} f(x, y)|I_{ij}| \leqslant \sum_{i,j} \inf_{x \in I_i^x} \left(\inf_{y \in I_j^y} f(x, y) \right) |I_i^x||I_j^y| = \sum_i \inf_{I_i^x} \underbrace{\left(\sum_j \inf_{I_j^y} f(x, y)|I_j^y| \right)}_{\underline{\mathrm{S}}(f(y), \mathbb{T}_y)} |I_i^x| \\ \leqslant \sum_i \inf_{I_i^x} \underbrace{\left(\int\limits_{I_y} f(x, y) \mathrm{d}y \right)}_{g(x)} |I_i^x| = \underline{\mathrm{S}}(g(x), \mathbb{T}_x) \\ \leqslant \overline{\mathrm{S}}(g(x), \mathbb{T}_x)\end{aligned}$$

$\underline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}_{x,y}) \leqslant \underline{\mathrm{S}}(g(x), \mathbb{T}_x) \leqslant \overline{\mathrm{S}}(g(x), \mathbb{T}_x) \leqslant \overline{\mathrm{S}}(f, \mathbb{T}_{x,y}) \Longrightarrow \exists\, \overline{\mathcal{I}} = \lim\limits_{\delta \to 0} \underline{\mathrm{S}}(g(x), \mathbb{T}_x) = I$

$\square$

8 Замена переменных в кратном интеграле. Функциональные последовательности—1

8.1 Теорема о замене переменных в кратном интеграле

Теорема. Пусть имеется $M_1, M_2 \in \mathbb{R}^n$ — открытые множества. $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ — биективно, φ, φ^{-1} — непрерывно дифференцируемые отображения

$D : \overline{D} \subset M_1$ — допустимое множество

$f : \varphi(D) \longrightarrow \mathbb{R}$

$f \in \mathcal{R}(\varphi(D)) \iff f(\varphi(t)) \cdot |\det J_\varphi(t)| \in \mathcal{R}(D)$ и

$$\int\limits_{\varphi(D)} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_D f(\varphi(t)) \cdot |\det J_\varphi(t)|\mathrm{d}t, \text{ где } J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_n} \end{pmatrix}$$

Примечание. $(x_1, \ldots, x_n) \xrightarrow{\varphi} (t_1, \ldots, t_n)$, где $x_i = \varphi_i(t_1, \ldots, t_n)$

Пример. Ранее мы переходили к полярным координатам так: $(x, y) \to (r, \varphi)$, при этом $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

$J = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \cdot r \\ \sin\varphi & \cos\varphi \cdot r \end{pmatrix}$

$|J_{\varphi^{-1}}| = |J_\varphi|^{-1}$

8.2 Функциональные последовательности

Пусть $X \subset \mathbb{R}$ и $f_n : X \to \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Определение. Последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ *сходится* в точке $x_0 \in X$, если сходится соответствующая числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^\infty$:

$$x_0 \in X,\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N \hookrightarrow |f_n(x_0) - a_{x_0}| < \varepsilon \Longrightarrow a_{x_0} = \lim_{n\to\infty} f_n x_0$$

Определение. Множество $D \subset X$ точек, в которых последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ сходится называется *множеством сходимости*

Определение. Пусть $D \subset X$ — множество сходимости $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ и $\forall x \in D$ $f_n(x) \to f(x)$. Тогда, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ будем называть *предельной функцией* $\{f_n(x)\}$

Определение. $D \subset \mathbb{R}, f, f_n : D \to \mathbb{R}$. Будем говорить, что $\{f_n(x)\}$ *сходится поточечно* к $f(x)$ на D, если

$$\forall x \in D,\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N :\ \forall n > N \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Обозначение: $f_n(x) \xrightarrow{D} f(x)$

8.3 Примеры функциональных последовательностей

1. Пусть есть $f_n(x) = \dfrac{x}{n}, x \in \mathbb{R}$

   Рассмотрим $x_0 \in \mathbb{R}$, $f_n(x_0) = \dfrac{x_0}{n} \longrightarrow 0$ при $n \to \infty$. То есть $f(x) = 0 \Longrightarrow \dfrac{x}{n} \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$

2. $f_n(x) = x^n,\ x \in [0; +\infty]$. Тогда, область сходимости — $[0; 1]$

   То есть, предельная функция $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0;1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ — *не непрерывная*

   Таким образом, $f_n(x) \xrightarrow{[0;1]} f(x)$

3. $f_n(x) = \dfrac{\sin(n^2x)}{n}$ на $\mathbb{R}$

   $\forall x_0 \in \mathbb{R} \ \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = 0$

   $f(x) = 0;\ f_n(x) \xrightarrow{\mathbb{R}} f(x)$

   Рассмотрим $f_n'(x) = n\cos(n^2x)$ — эта штука ни к чему не сходится

4. $f_n(x) = 2(n+1)x(1-x^2)^n$ на $[0;1]$

   $f_n(0) = 0,\ f_n(1) = 1$

   Теперь рассмотрим $x \in (0;1)$. $f_n(x) = 2(n+1)xq^n$, где $q \in (0;1)$. Тогда, при $n \to \infty$ $q^n \longrightarrow 0$

   $f_n(x) \xrightarrow{[0;1]} 0$

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0$$

$$\int_0^1 2(n+1)x(1-x^2)^n\mathrm{d}x = \underbrace{-2(n+1)}_{2}\int_0^1 (1-x^2)^n\mathrm{d}(-x^2+1)$$

$$= -\left.(1-x^2)\right|_0^1$$

Определение. Пусть $D \subset \mathbb{R}; f_n, f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Будем говорить, что $\{f_n(x)\}$ *сходится равномерно* к $f(x)$ на D, Если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n > N,\ \forall x \in D \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Обозначение: $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$

8.4 Супремальный критерий

Теорема. $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f \iff \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_D |f_n(x) - f(x)|\right) = 0$

Доказательство. Докажем необходимость ($\Longrightarrow$)

Заметим, что $\sup\limits_D |f_n(x) - f(x)| \geqslant 0$. Тогда,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n > N:\ \sup_D |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N,\ \forall x \in D \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

В худшем случае, $\sup\limits_D |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

Доказательство. Докажем достаточность ($\Longleftarrow$)

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N \hookrightarrow \sup\limits_D |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, тем более $\forall x \in D\ \sup \geqslant |f_n(x) - f(x)|$

Тогда, $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$ $\square$

Примечание. $f \rightrightarrows f \Longrightarrow f_n \longrightarrow f$, но в обратную сторону это не работает

9 Функциональные последовательности—2

9.1 Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности

Теорема. $f_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} f(x) \Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n, m > N,\ \exists x \in D \hookrightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$

Доказательство. $\Longrightarrow$ Докажем необходимость

Так как $f_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} f(x)$, то

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N\ \forall x \in D \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Рассмотрим $|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Таким образом, мы показали, что $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n, m > N,\ \exists x \in D \hookrightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ □

Доказательство. $\Longleftarrow$ Докажем достаточность

Распишем определение равномерной сходимости:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n, m > N,\ \exists x \in D:\ |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Зафиксируем $x_0 \in D \Longrightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$[1]

$$x_0 \in D : \forall\, \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m > N : |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

В худшем случае, $\forall x \in D$: при $m \to \infty$ $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

Тогда,

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n > N\ \forall x \in D \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

□

Примечание. Отрицание Критерия Коши:

$$f_n(x) \overset{D}{\not\rightrightarrows} f(x) \Longleftrightarrow \exists\, \varepsilon_0 > 0\ \forall N:\ \exists n, m > N,\ \exists x_0 \in D\ |f_n(x) - f_m(x)| \geqslant \varepsilon_0$$

Пример. Рассмотрим функциональную последовательность $f_n(x) = \frac{x}{n}$ на $\mathbb{R}$. Покажем, что она *не сходится равномерно*:

$$\exists\, \varepsilon_0 = \frac{1}{6}\ \forall N\ \exists n = 2N, m = 3N,\ \exists x_0 = N \hookrightarrow \left|\frac{N}{2N} - \frac{N}{3N}\right| = \frac{1}{6} = \varepsilon_0$$

9.2 Теорема о почленном переходе к пределу

Теорема. Пусть $f_n, f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ x_0$ — предельная точка $D,\ f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f,\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = c_n$

Тогда,

$$\exists \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{x\to x_0} f(x)$$
$$\left(\text{или } \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)\right)$$

Доказательство. Сначала покажем, что $\exists \lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$, а потом что $\exists c = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$

1. Рассмотрим $|c_n - c| \leqslant \underbrace{|c_n - f_n|}_{(a)} + \underbrace{|f_n - f_m|}_{(b)} + \underbrace{|f_m - c_m|}_{(c)} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

[1] по критерию Коши для числовой последовательности $f_n(x_0)$

(a), (c) По условию, $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = c_n$ получим

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(x_0) \cap D \hookrightarrow |f_n(x) - c_n| < \frac{\varepsilon}{3}$$

(b) $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f \Longrightarrow$ по Критерию Коши

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n, m > N\ \forall x \in D \hookrightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Получаем, что $\forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(x_0)$

Собираем: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n, m > N : \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(x_0) : |c_n - c_m| < \varepsilon \Longrightarrow \exists c = \lim\limits_{n \to \infty} c_n$ $\square$

2. Теперь покажем, что $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$, то есть $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta : \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(x_0) : |f(x) - c| < \varepsilon$

   Рассмотрим $|f(x) - c| \leqslant \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{(a)} + \underbrace{|f_n(x) - c_n|}_{(b)} + \underbrace{|c_n - c|}_{(c)}$

   (a) $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f(x) \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_1 : \forall n > N_1 \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = c_n \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta : \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(x_0) \hookrightarrow |f_n(x) - c_n| < \frac{\varepsilon}{3}$

   (c) По доказанному в п. 1 следует, что

$$\exists \lim_{n \to \infty} c_n = c \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N_2\ \forall n > N_2 \hookrightarrow |c_n - c| < \frac{\varepsilon}{3}$$

   Собираем: $\forall \varepsilon > 0\ (\exists N = \max(N_1, N_2))\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \in \overset{\circ}{B}_\delta(x_0) : |f(x) - c| < \varepsilon$ $\square$

9.3 Теорема о непрерывности предельной функции

Теорема. Пусть имеется $\left.\begin{array}{l} f_n, f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \\ f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f, \\ \forall n \in \mathbb{N}\ f_n \in C(D) \end{array}\right\} \Longrightarrow f \in C(D)$

Доказательство. Нужно доказать, что $f \in C(D)$. Значит, надо показать, что

$$\forall x_0 \in D : \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta(x_0) \cap D \hookrightarrow |f(x) - f(x_0)|$$

Рассмотрим $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{(1)} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(x_0)|}_{(2)} + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{(3)}$

1. $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f : \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N,\ \forall x \in D \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$
2. Так как $\forall n \in \mathbb{N}\ f_n \in C(D) \Longrightarrow \forall x_0 \in D,\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta(x_0) \cap D \hookrightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$
3. $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f : \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N,\ \forall x_0 \in D \hookrightarrow |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Тогда, собрав три части, получим, что $\forall x_0 \in D$

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : (\exists N : \forall n > N)\ \forall x \in B_\delta(x_0) \cap D \hookrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon &\Longrightarrow f(x) \in C(x_0)\ \forall x_0 \in D \\ &\Longrightarrow f(x) \in C(D) \end{aligned}$$

$\square$

9.4 Условие №1 о неравномерной сходимости — разрыв точки

Теорема. Пусть имеется $\left.\begin{array}{l} f_n \in C\left([a;b)\right), \\ f \in C((a;b)) + \text{разрыв в т.}a, \\ f_n \xrightarrow{[a;b)} f \end{array}\right\} \Longrightarrow f_n \overset{(a;b)}{\rightrightarrows} f$

То есть будет поточечная сходимость, но не будет равномерной:

$$f_n \xrightarrow{(a;b)} f, \text{ но } f_n \overset{(a;b)}{\rightrightarrows} f$$

Доказательство. От противного

1. Пусть $f_n \overset{(a;b)}{\rightrightarrows} f \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \forall n > N \; \forall x \in (a;b) \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
2. $f_n \xrightarrow{[a;b)} f \Longrightarrow f_n(a) \longrightarrow f(a) \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N_2 : \forall n > N_2 \hookrightarrow |f_n(a) - f(a)| < \varepsilon$
3. $f_n \overset{[a;b)}{\rightrightarrows} f$, так как $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = \max(N_1, N_2) \; \forall n > N, \; \forall x \in [a;b) \hookrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
4. Получаем, что
$$\begin{cases} f_n \overset{[a;b)}{\rightrightarrows} f \\ f_n \in C([a;b)) \end{cases}$$
Тогда, по теореме о непрерывности предельной функции следует, что $f \in C([a;b))$, но f имеет разрыв в точке a. Противоречие

$\square$