Теория вероятностей и математическая статистика—2

Винер Даниил @danya_vin

Версия от 10 февраля 2025 г.

Содержание

1 Закон больших чисел. Центральная предельная теорема

1.1 Закон больших чисел в форме Бернулли

Пусть имеются некоторые случайные величины $\xi_i = \begin{cases} 1, & p \\ 0, & 1-p \end{cases}$, где p — вероятность, что какое-то событие произошло. Тогда $\mathbb{E}[\xi] = p$, $\mathbb{D}[\xi] = p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$

Теорема. Пусть $\hat{p} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$ — доля успехов в n испытаниях Бернулли, тогда $\hat{p} \xrightarrow{p} p$

Доказательство. Распишем по неравенству Чебышёва:

$$\mathbb{P}(|\hat{p} - p| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \leqslant \frac{1}{4n\varepsilon^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Пример

Пусть 87% новорожденных доживают до 50 лет. Тогда $p = 0,87$ — вероятность дожить до 50. Рассмотрим $n = 1000$ новорожденных

Опредедлим с какой вероятностью данная случайная величина отклонится от своего математического ожидания не более, чем на $0,04$ — $\mathbb{P}(|\hat{p} - 0,87| \leqslant 0,04)$. По Чебышёву:

$$\mathbb{P}(|\hat{p} - p| \leqslant 0,04) \geqslant 1 - \frac{\mathbb{D}[\hat{p}]}{(0,04)^2} = 1 - \frac{0,87 \cdot 0,13}{0,0016 \cdot 1000} = 0,929$$

1.2 Центральная предельная теорема

Рассмотрим сумму независимых одинаково распределенных случайных величин:

$$S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n,$$

при этом существует $\mathbb{D}[\xi_i] \leqslant c$, $\mathbb{E}[\xi_i] = \mu$, $\mathbb{D}[\xi_n] = \sigma^2$

Тогда, $Z_n = \dfrac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{d} Z$, где $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$ — имеет стандартное нормальное распределение

Функция плотности:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}}$$

1.3 Теорема Муавра-Лапласа

Теорема. Имеется $\xi_i = \begin{cases} 1, & p \\ 0, & 1-p \end{cases}$. $S_n = \sum \xi_i$ — число успехов в n испытаниях. Тогда

$$Z_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{N}(0;1)$$

Пример

Проходит суд над Бенджамином Споком. Из 300 человек 90 — женщины, которые симпатизируют Споку, при этом 12 присяжных будут судить Спока. Требуется определить мог ли отбор присяжных быть случайным.

Число успехов в данном случае — число женщин среди 300 присяжных. Будем считать, что $p = 0.5$, то есть половина женщин.

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_{300} - 150}{\sqrt{0.5 \cdot 0.5 \cdot 300}} \leqslant \frac{90 - 150}{\sqrt{75}}\right) \simeq \Phi(-6.93) \simeq 2.3 \cdot 10^{-12}$$

Значит, практически невозможно случайным образом выбрать 90 или меньше женщин среди 300 присяжных при справедливом распределении, то есть отбор был предвзятым

1.4 Неравенство Берри-Эссена

$$|F_n - \Phi| \leqslant \frac{C_0 \cdot \mathbb{E}\left[|\xi_1 - \mu|^3\right]}{\sigma^3\sqrt{n}}, \text{ где } \begin{cases} F_n \text{ — функция распределения стандартизированной СВ} \\ C_0 \text{ — константа} \\ \mathbb{E}\left[|\xi_1 - \mu|^3\right] \text{ — третий абсолютный центральный момент} \end{cases}$$

Пример

Пусть имеется $n = 1000$ заключенных договоров страхования с 1 января на 1 год. С вероятностью $p = 0.05$ произойдет страховой случай, выплаты по каждому договору — 2000 у.е. R — резерв страховой компании

Требуется определить какой должен быть размер резерва, чтобы страховая компания выполнила свои обязательства с вероятностью 0.99

$S_n = 2000(\xi_1 + \ldots + \xi_n)$, $\xi_i \sim Bi(p = 0.05)$

$$\mathbb{P}\left(S_n \leqslant R\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\sum \xi_i - 0.05 \cdot 1000}{\sqrt{1000 \cdot 0.05 \cdot 0.95}} \leqslant \frac{\frac{R}{2000} - 0.05 \cdot 1000}{\sqrt{1000 \cdot 0.05 \cdot 0.95}}\right) \geqslant 0,99$$

Значит, требуется найти квантиль уровня 0.99. Он равен 2.33, тогда

$$\frac{\frac{R}{2000} - 0.05 \cdot 1000}{\sqrt{1000 \cdot 0.05 \cdot 0.95}} = 2.33 \Longrightarrow R = 132117$$

То есть, для покрытия 99% страховых случаев у страховой компании резерв должен быть размером 132117 у.е. Напротив, для покрытия всех случаев $R = 2000000$

2 Многомерное нормальное распределение

2.1 Одномерное нормальное распределение

Определение. Случайная величина имеет нормальное распределение $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, если функция плотности равна

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

2.2 Многомерное нормальное распределение—1

Определение. Пусть случайные величины $z_1, \ldots, z_n$ независимы и $\sim N(0,1)$. Тогда $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ имеет многомерное нормальное распределение $N(0, I)$, где I — единичная матрица

Функция плотности:

$$f_Z(z) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} z_i^2} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-0.5Z^T Z}$$

Примечание. Пусть $Z \sim N(0, I)$, $A \in \mathrm{Mat}_{k\times n}$ — матрица полного ранга и $k < n$, то есть $\mathrm{rank} A = k$. Тогда

$$Y = AZ + b \sim N(b, AA^T)$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{1}{|\det A|} f_Z(A^{-1}(y-b)) \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \frac{1}{|\det A|} e^{-0.5(y-b)^T (A^{-1})^T A^{-1}(y-b)} \\ &\text{пусть } AA^T = C \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \frac{1}{\sqrt{|C|}} e^{-0.5(y-b)^T C^{-1}(y-b)} \end{aligned}$$

Определение. Случайная величина $Y \sim N(b, C)$, если

$$f_Y(y) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \frac{1}{\sqrt{|C|}} e^{-0.5(y-b)^T C^{-1}(y-b)}$$

Определение. Случайный вектор $Y \sim N(0, C)$, если $\forall a_1, \ldots, a_n$

$$a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + \ldots + a_n Y_n$$

либо $N(0, \dot{)}$ либо const

2.3 Свойства многомерного нормального распределения

Пусть $Y \sim N(b, C)$

1. $\mathbb{E}[Y] = b, cov(Y) = C$

   Доказательство. $Y = AZ + b$, $Z \sim N(0, I)$

   $$cov(Y) = \mathbb{E}\left[(AZ + b - \mathbb{E}[AZ + b])(AZ + b - AEZ - b)^T\right] = AcovZA^T = AA^T = C$$

2. Любое линейное невырожденное преобразование многомерного нормаьного дает многомерный нормальный вектор

   $\forall B, a : BY + a \sim N(Bb + a, BCB^T)$

3. $\forall$ подвектор нормального вектора нормален

4. Если $Y \sim N(b, D)$, то его компоненты независимы

   Примечание. Некоррелированность = независимость

   Доказательство.

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi}^n)} e^{-0.5(y-b)^T D^{-1}(y-b)} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi}^n)} e^{-0.5 \sum \left(\frac{y_i - b_i}{\sigma_i}\right)^2} \\ &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5\left(\frac{y_i-b_i}{\sigma_i}\right)^2} \end{aligned}$$

Пример. $Y_1 \sim N(0,1),\ \lambda = \begin{cases} 1, & p = 0.5 \\ -1, & p = 0.5 \end{cases},\ Y_2 = 2Y_1$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(Y_2 \leqslant y\right) &= \mathbb{P}\left(Y_1 \leqslant y | \alpha = 1\right) \cdot \mathbb{P}\left(\alpha = 1\right) + \mathbb{P}\left(-Y_1 \leqslant y | \alpha = -1\right) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \Phi(y) \end{aligned}$$

$cov(Y_1, Y_2) = cov(Y_1, 2Y_1) = \mathbb{E}\left[\alpha Y_1^2\right] - \mathbb{E}\left[Y\right]\mathbb{E}\left[\alpha Y_1\right] = 0$. То есть они не коррелированы

2.4 Условное нормальное распределение

Имеется случайный вектор $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right)$, пишут $\Phi_2(z_1, z_2; \rho)$

Допустим, что z_1 фиксирован, тогда $z_2 | z_1 = z \sim N(\rho z, 1 - \rho^2)$

$z_2 = \rho z_1 + u$, где z_1 и u независимы и $u \sim N(.,.)$

3 Многомерное нормальное распределение—2

3.1 Условное нормальное распределение

$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right)$, пишут $\Phi_2(z_1, z_2; \rho)$

Допустим, что z_1 фиксирован, тогда $z_2|z_1 = z \sim N(\rho z, 1-\rho^2)$

Утверждение. $z_2 = \rho z_1 + u$, где z_1 и u независимы и $(u, z_1) \sim N(.,.)$

Доказательство. $u = z_1 - \rho z_1 \Longrightarrow (z_1, u) = (z_1, z_2 - \rho z_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\rho & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\rho^2 \end{pmatrix}\right)$

$cov(z_1, u) = A \cdot cov(z_1, z_2) \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\rho^2 \end{pmatrix}$ □

Доказательство свойства. $\mathbb{E}[z_2] = \rho\mathbb{E}[z_1] + \mathbb{E}[u] = 0$, $\mathbb{D}[z_2] = \rho^2\mathbb{D}[z_1] + \mathbb{D}[u] = \rho^2 + 1 - \rho^2 = 1$

$(z_2|z_1 = z) = \rho z + u \Longrightarrow \begin{cases} \mathbb{E}[z_2|z_1 = z] = \rho z + \mathbb{E}[u] = \rho z \\ \mathbb{D}[z_2|z_1 = z] = \mathbb{D}[u] = 1 - \rho^2 \end{cases}$ □

Примечание. Пусть вектор Y такой, что $AY \sim N(.,.)$ (многомерное нормальное), меньшей размерности, чем Y, тогда говорят, что Y имеет обобщенное нормальное распределение

Примечание. Двумерная Гауссова копула представима в виде $\Phi_2(\Phi^{-1}(F_1(u_1)), \Phi^{-1}(F_2(u_2)); \rho)$

3.2 Многомерная центральная предельная теорема

Теорема. Пусть $\xi_1^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(n)}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов, у каждого из которых $\mathbb{E}\left[\xi^{(k)}\right] = b\ \forall k$, $cov(\xi^{(k)}) = c$, $\det C > 0$.

Обозначим $S_n = \xi_1^{(1)} + \ldots + \xi_n^{(n)}$ — вектор частичных сумм. Тогда, при $n \to \infty$ последовательность $\eta^{(n)}$, где $\eta^{(n)} = \frac{S_n - nb}{\sqrt{n}}$ сходится по распределению к вектору $\eta \sim N\left(\overrightarrow{0}, C\right)$

4 TBA

5 Введение в математическую статистику

- Имеется n независимых случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, которые имеют одинаковые функции распределения: $F_{X_1}(x) = \ldots = F_{X_n}(x) = F(x)$
- Пусть функция распределения $F(x)$ зависит от некоторого вектора неизвестных параметров $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_r)$
- $F(x) = F(x; \theta)$, где x — переменная, а θ — вектор неизвестных параметров
- Θ — множество допустимых значений вектора θ

  Пример. Если $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, то $\theta = (\mu, \sigma^2) \in (-\infty, +\infty) \times (0; +\infty)$

Определение. Случайной выборкой объема n наблюдений из распределения с функицей распределения $F(x; \theta)$ называется случайный вектор $X = (X_1, \ldots, X_n)$, компоненты которого удовлетворяют следующим условиям

- случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ — независимы
- случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ имеют одну и ту же функцию распределения $F(x; \theta)$:

$$F_{X_1}(x; \theta) = \ldots = F_{X_n}(x; \theta) = F(x; \theta)$$

Примечание. Продифференцировав эти равенства, получаем, что все функции плотностей распределения равны

Примечание. Если все величины $X_1, \ldots, X_n$ дискретны, то они должны иметь одинаковые таблицы распределения

Примечание. При $i \neq j: \ cov(X_i, X_j) = \mathbb{E}[X_i X_j] - \mathbb{E}[X_i] \cdot \mathbb{E}[X_j] = 0$, так как X_i и X_j независимы

Имеются случайные величины $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$. Пусть произошел вероятностый эксперимент, в результате которого реализовался исход $\omega_0 \in \Omega$. То есть

$$X_1(\omega_0), \ldots, X_n(\omega_0)$$

Тогда, вектор $x = (X_1(\omega_0), \ldots, X_n(\omega_0))$ называется *реализацией случайной выборки*

Пример. $\Omega = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}, \ \mathcal{F} =$ все подмножества Ω

ω	a	b	c	d	e	f	g	h
$\mathbb{P}(\omega)$	p^3	p^2q	p^2q	pq^2	p^2q	pq^2	pq^2	q^3
$X_1(\omega)$	1	1	1	1	0	0	0	0
$X_2(\omega)$	1	1	0	0	1	1	0	0
$X_3(\omega)$	1	0	1	0	1	0	1	0

- $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p^3 + p^2q + p^2q + pq^2 = p(p^2 + pq + pq + q^2) = p \Longrightarrow X_1 \sim Be(p)$
- $\mathbb{P}(X_2 = 1) = p^3 + p^2q + p^2q + pq^2 = p(p^2 + pq + pq + q^2) = p \Longrightarrow X_2 \sim Be(p)$
- $\mathbb{P}(X_3 = 1) = p^3 + p^2q + p^2q + pq^2 = p(p^2 + pq + pq + q^2) = p \Longrightarrow X_3 \sim Be(p)$

$$\mathbb{P}(\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 1\} \cap \{X_3 = 1\}) = p^3$$
$$\mathbb{P}(X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_2 = 1) \cdot \mathbb{P}(X_3 = 1) = p^3$$

Рассуждая аналогично, перебираем оставшиеся 7 случаев и получаем, что X_1, X_2, X_3 — независимы

Пусть $\omega_0 = c$, тогда $(X_1(\omega_0), X_2(\omega_0), X_3(\omega_0)) = (1, 0, 1)$

- Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка
- Для каждого $\omega \in \Omega$ расположим числа $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ в порядке возрастания
- Получим набор чисел $X_{(1)}(\omega) \leqslant \ldots \leqslant X_{(n)}(\omega)$, где (i) означает уже отсортированный номер

  При этом $X_{(1)}(\omega) = \min(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$, а $X_{(n)}(\omega) = \max(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$

Определение. Набор случайных величин $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$ называется вариационным рядом

Определение. $\overline{X} := \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ — выборочное среднее

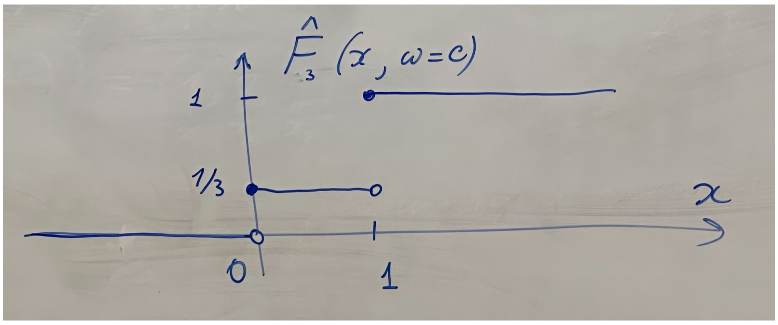
Определение. $s^2 := \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ — выборочная дисперсия

Определение. $\hat{\sigma^2} := \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ — исправленная выброчная дисперсия

Определение.

$$\begin{aligned}\hat{F}_n(x) &= \frac{\text{число элементов случайной выборки, которые нестрого меньше } x}{n} \\ &= \frac{\#\{i \in \{1, \ldots, n\} : \ X_i \leqslant x\}}{n}\end{aligned}$$

Пример. Рассмотрим $\hat{F}_3(x; \omega = c)$ и выборку $(1, 0, 1)$. Тогда график будет выглядеть так



Утверждение. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка, компоненты которой имеют конечное матожидание. Тогда

$$\mathbb{E}\left[\overline{X}\right] = \mathbb{E}\left[X_i\right]$$

Утверждение. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка, компоненты которой имеют конечные дисперсии. Тогда

$$\mathbb{D}\left[\overline{X}\right] = \frac{\mathbb{D}\left[X_i\right]}{n}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\mathbb{D}\left[\overline{X}\right] &= \mathbb{D}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \\ &= \frac{1}{n^2}\mathbb{D}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{D}\left[X_i\right] \\ &= \frac{1}{n^2} n\mathbb{D}\left[X_i\right] \\ &= \frac{\mathbb{D}\left[X_i\right]}{n}\end{aligned}$$

Определение. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из распределения с функцией распределения $F(x; \theta)$, где θ — неизвестный параметр

Оценкой параметра θ называется случайная величина $\hat{\theta}$, которая является произвольной борелевской функцией от элементов случайной выборки, то есть

$$\hat{\theta} = g(X_1, \ldots, X_n),$$

где $d : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ — произвольная борелевская функция

Пример. $X = (X_1, \dots, X_n)$ — случайная выборка из распределения Бернулли с параметром $p \in (0;1)$
$\hat{p} = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ — оценка параметра p

Определение. Оценка $\hat{\theta}$ неизвестного параметра $\theta \in \Theta$ называется *несмещенной*, если

$$\mathbb{E}\left[\hat{\theta}\right] = \theta \ \forall \theta \in \Theta$$

Пример. $X = (X_1, \dots, X_n)$ — случайная выборка из распределения Бернулли с параметром $p \in (0;1)$. Определим, является ли $\hat{p} = \frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$ несмещенной оценкой для параметра p

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\hat{p}\right] &= \frac{\mathbb{E}\left[X_1 + \ldots + X_n\right]}{n} \\ &= \frac{\mathbb{E}\left[X_1\right] + \ldots + \mathbb{E}\left[X_n\right]}{n} \\ &= \frac{np}{p} \\ &= p\end{aligned}$$

То есть $\hat{p}$ — несмещенная оценка

Определение. Говорят, что последовательность случайных величин $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится по вероятности к случайной величине X, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) = 0$$

Обозначение: $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ при $n \to \infty$ ИЛИ $p \lim\limits_{n\to\infty} X_n = x$

Определение. Оценка $\hat{\theta}_n$ называется *состоятельной оценкой* неизвестного параметра $\theta \in \Theta$, если

$$\forall \theta \in \Theta \ \hat{\theta}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta \text{ при } n \to \infty$$

Пример. Проверим, что $\hat{p} = \dfrac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ является состоятельной. По ЗБЧ:

$$\hat{p} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}\left[X_i\right] = p$$

Значит, $\hat{p}$ — состоятельная оценка