# Дискретная математика—1
# Коллоквиум

Лектор: Оноприенко Анастасия Александровна
LaTeX by Винер Даниил @danya_vin

Версия от 7 декабря 2024 г.

## Содержание

# 1 Определения и формулировки

## 1.1 Таблица истинности логических связок

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ | $A \vee B$ | $A \to B$ | $A \equiv B$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

## 1.2 Равносильные высказывания. Тавтологии

**Определение.** Если два разных составных высказывания означают по сути одно и то же, то есть принимают одинаковое логическое значение при одинаковых значениях входящих в них элементарных высказываний. В этом случае мы говорим, что высказывания *равносильны*

**Определение.** Высказывание, которое истинно при любых значениях входящих в него элементарных высказываний называется ***тавтологией***. Тавтологии не обязательно имеют вид логических тождеств. Например, $A \to A$ — тавтология

## 1.3 Коммутативность и ассоциативность конъюнкции и дизъюнкции

Справедливость этих тождеств ясна из определения конъюнкции и дизъюнкции. Первая истинна, когда все члены истинны (необязательно членов два), вторая — когда хотя бы один истинен

- Коммутативность: $A \wedge B \equiv B \wedge A, \;\; A \vee B \equiv B \vee A$
- Ассоциативность: $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C), \;\; (A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$

## 1.4 Тавтологии упрощения для $\wedge, \vee, \to$

Пусть $X$ — константа, тогда имеем *тавталогии упрощения*:

- $X \wedge 0 \equiv 0, \;\; X \wedge 1 \equiv X$
- $X \vee 0 \equiv X, \;\; X \vee 1 \equiv 1$
- $X \to 1 \equiv 1, \;\; X \to 0 \equiv \neg X$
- $0 \to X \equiv 1, \;\; 1 \to X \equiv X$

Их справедливость очевидна из таблиц истинности связок

Некоторые теоремы о тавтологиях доказываются здесь — 2.2

## 1.5 Тавтология для правила modus ponens. Дистрибутивность конъюкции и дизъюнкции (оба закона)

**Правило modus ponens** можно записать в виде такой тавтологии: $A \wedge (A \to B) \to B$

Это правило описывает стандартный шаг математического рассуждения, что из истинности высказывания $A$ и составного высказывания «$A$, то $B$», мы говорим, что истинно $B$

Законы дистрибутивности:

- $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Доказательство — 2.1

## 1.6 Равные множества. Подмножество. Пустое множество

**Определение.** Множества $A$ и $B$ называются равными, если каждый элемент множества $A$ является элементом множества $B$, а каждый элемент множества $B$ является элементом множества $A$

$$A = B \overset{\text{def}}{\iff} \forall x (x \in A \equiv x \in B)$$

**Определение.** Множество $A$ является подмножеством множества $B$, если каждый элемент множества $A$ принадлежит множеству $B$ (обозначение $A \subseteq B$)

$$A \subseteq B \overset{\text{def}}{\iff} \forall x (x \in A \to x \in B)$$

**Определение.** Пустое множество (обозначение $\varnothing$) не содержит ни одного элемента. Другими словами, высказывание $x \in \varnothing$ ложно для любого $x$

## 1.7 Операции над множествами: объединение, пересечение, разность, симметрическая разность

Имеем два множества: $A$ и $B$. С ними можно выполнять следующие опреации:

- **Объединение множеств.** $A \cup B$. Это множество, состоящее из тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств $A$ и $B$. Формально это определение выглядит так:

$$(x \in A \cup B) \equiv (x \in A) \vee (x \in B)$$

- **Пересечение множеств.** $A \cap B$. Это множество, состоящее из тех элементов, которые принадлежат обоим множествам $A$ и $B$. Формально:

$$(x \in A \cap B) \equiv (x \in A) \wedge (x \in B)$$

- **Разность множеств.** $A \setminus B$. Это множество, состоящее из тех элементов, которые принадлежат множеству $A$, но не принадлежат множеству $B$. В формальной записи это определение выглядит так:

$$(x \in A \setminus B) = (x \in A) \wedge \neg(x \in B)$$

- **Симметрическая разность множеств.** $A \triangle B$. Это множество, состоящее из тех элементов, которые принадлежат ровно одному из множеств: либо $A$, либо $B$. Формально:

$$(x \in A \triangle B) = ((x \in A) \wedge \neg(x \in B)) \vee (\neg(x \in A) \wedge (x \in B))$$

## 1.8 Отрицание выражений с логическими связками и кванторами

Тавтологии $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$, $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ называются *законами де Моргана*

**Аналоги законов для кванторов:** $\neg \forall x A(x) \equiv \exists x \neg A(x)$, $\neg \exists x A(x) \equiv \forall x \neg A(x)$

## 1.9 Ограниченные кванторные высказывания, квантор $\exists!$ и их запись через неограниченные кванторные высказывания

В ограниченном кванторном высказывании $x$ пробегает не все возможные значения, а лишь множество, ограниченное некоторым условием. Формальная запись:

$$\forall x \in A \ B(x) \text{ и } \exists x \in A \ B(x)$$

В неограниченных кванторных высказываниях это выглядит так:

$$\forall x (x \in A \to B(x)) \text{ и } \exists x (x \in A \wedge B(x))$$

**Определение.** Квантор $\exists!$ означает, что существует единственный элемент, удовлетворяющий заданным условиям

## 1.10 Неформальное определение конечного множества и подсчёта

**Определение.** Конечное множество — это такое множество, в котором конечное количество элементов, то есть оно *конечно*, если его элементы можно *пересчитать*

Неформально *подсчёт* осуществляется так: «вот первый элемент, вот второй, вот третий, ...». Если такой подсчёт заканчивается, то последнее названное число и будет количеством элементов в множестве, т.е. множество конечно

Более строгое описание подсчёта такое: это такая последовательность элементов множества $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ в которой все элементы различны, принадлежат множеству и каждый элемент множества входит в последовательность (причём ровно один раз)

## 1.11 Правило суммы. Декартово произведение множеств. Правило произведения

**Правило суммы.** Для конечных непересекающихся множеств $A$ и $B$, то есть $A \cap B = \varnothing$, выполняется равенство $|A \cup B| = |A| + |B|$

**Декартово произведение множеств.** $(A \times B)$. Это множество, состоящее в точности из всех таких упорядоченных пар $(a,\ b)$, то есть последовательностей длины 2, в которых $a \in A,\ b \in B$

Если множества конечны, то декартово произведение можно нарисовать в виде прямоугольника: столбцы — элементы $A$, строки — элементы $B$, на пересечении столбца $a$ и строки $b$ расположена пара, такая что

$$(a,\ b) \in (A \times B)$$

**Правило произведения.** Для конечных множеств $A,\ B$ выполняется равенство $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

## 1.12 Принцип математической индукции

**Определение.** Пусть для последовательности утверждений $A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$, занумерованных натуральными числами, верны утверждения:

- **База индукции:** $A_0$ истинно
- **Шаг индукции:** $A_n \to A_{n+1}$ истинно для любого $n$. Посылку импликации $A_n$ называют индуктивным предположением

Тогда $A_n$ истинно $\forall n$

Положим, что $n$ принимает только натуральные значения и запишем это в виде формулы (вместо $A_n$ пишем $A(n)$):

$$(A(0) \land \forall n(A(n) \to A(n+1))) \to \forall n\ A(n)$$

Доказательство — 2.5

## 1.13 Принцип полной математической индукции

**Определение.** Пусть для последовательности утверждений $A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$, занумерованных натуральными числами, истинно утверждение: «для любого $n$ из истинности $A_i$ при всех $i < n$ следует истинность $A_n$». Тогда $A_n$ истинно $\forall n$

В виде формулы это можно записать так:

$$\forall n((\forall k < n\ A(k)) \to A(n)) \to \forall n A(n)$$

## 1.14 Упорядоченная пара по Куратовскому

Пусть для упорядоченных пар выполняется свойство: $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$

**Определение.** Упорядоченной парой по Куратовскому $(x, y)$ будем называть множество $\{\{x\}, \{x, y\}\}$

Доказательство — 2.6

## 1.15 Бинарное отношение на множествах $A$ и $B$. Бинарное отношение на множестве $A$

**Определение.** Бинарное отношение $R$ на множествах $A$ и $B$ — это подмножество декартового произведения $A \times B$

Если $(x, y) \in R$, то говорят, что $x$ и $y$ находятся в отношении $R$ (порядок важен). Вместо $(x, y) \in R$ также пишут $xRy$

**Определение.** Бинарное отношение $R$ на множетсвах $A, A$ называют бинарным отношением на множестве $A$

## 1.16 Функция. Аргументы и значения

**Определение.** Функцией $f$ из множества $A$ в множество $B$ будем называть такое бинарное отношение $f \subseteq A \times B$, что для каждого $a \in A$ есть не более одной пары $(a, b) \in f$

**Определение.** Элементы множества $A$ называются *аргументами* функции, а элементы множества $B$ — *значениями* функции

## 1.17 Область определения функции. Область значений функции. Тотальные функции

**Определение.** Область определения Dom $f$ функции из $A$ в $B$ — это множество тех $a$, для которых существует такой $b$, что $(a, b) \in f$. Формальная запись:

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in A \mid \exists y \in B : y = f(x)\}$$

**Определение.** Область значений Range $f$ — это множество тех $b$, для котороых существует такой $a$, что $(a, b) \in f$. Формальная запись:

$$\mathrm{Range}(f) = \{y \in B \mid \exists x \in A : y = f(x)\}$$

**Определение.** Если $\mathrm{Dom}(f) = A$, то функция называется *тотальной* (=всюду определнной). Нетотальные функции называют *частичными*

## 1.18 Инъекция. Примеры инъекции и не инъекции

**Определение.** Инъекция — тотальная функция $f : A \to B$, если значения функции в различных точках различны. То есть: $f-$инъекция, если $x_1 \neq x_2$ влечет $f(x_1) \neq f(x_2)$

**Пример.** Пусть $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ задается формулой $f(x) = x^2$. Эта функция тотальна, а также инъективна, так как если $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ и $x_1^2 = x_2^2$, то $x_1 = x_2$

**Контрпример.** $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2$. Она тотальная, но не инъективна, так как $g(-1) = g(1) = 1$

## 1.19 Сюръекция. Примеры сюръекции и не сюръекции

**Определение.** Сюръекция — тотальная функция $f : A \to B$, если область значений совпадает со всем множеством $B$, то есть $\mathrm{Range} f = B$. Другими словами, $f$ сюръекция, если для всякого элемента $y \in B$ найдется такой элемент $x \in A$, что $f(x) = y$

**Пример.** Рассмотрим функцию $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, задаваемую формулой $g(x) = x^2$. Эта функция тотальна и сюръективна, так как для любого $y \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ существует $x \in \mathbb{R}$, что $x^2 = y$

**Контрпример.** Рассмотрим функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, задваемую той же формулой. Эта функция тотальна, но не сюръективна, так каак не существует такого $x \in \mathbb{R}$, при котором $f(x) = -1$

## 1.20 Биекция. Обратная функция

**Определение.** Тотальная функция $f : A \to B$ называется *биекцией*, если она одновременно является инъекцией и сюръекцией

Для биекции $f : A \to B$ определена ***обратная функция*** $f^{-1}$ : если $f$ отображает $x$ в $y$, то обратная функция $f^{-1}$ отображает $y$ в $x$. Иными словами, $(x, y) \in f \Leftrightarrow (y, x) \in f^{-1}$

## 1.21 Композиция функций. Ассоциативность композиции

**Определение.** Для функции $f : A \to B$ и функции $g : B \to C$ *композицией* $g \circ f$ этих функций является такая функция $A \to C$, которая определена на тех $x$ из $\mathrm{Dom}(f)$, для которых $f(x)$ принадлежит $\mathrm{Dom}(g)$, и равна $g(f(x))$. Формальная запись:

$$(x, z) \in g \circ f \iff \exists y \in B : (x, y) \in f \text{ и } (y, z) \in g$$

Порядок записи функций в композиции согласован с порядком записи функций в привычном обозначении $g(f(x))$ и порядок функций в композиции важен

**Ассоциативность композиции:** $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

**Пример.** Пусть $f(x) = x + 1, g(x) = 2x$ — функции из целых чисел в целые числа. Тогда $(g \circ f)(x) = 2x + 2,\ (f \circ g)(x) = 2x + 1$

## 1.22 Образ и полный прообраз

**Определение.** Пусть $X \subseteq A$. Функция $f$ сопоставляет ему образ $f[X] \subseteq B$ подмножества $X$. $f[X]$ состоит в точности из тех элементов множества $B$, которые являеются значениями элементов из $X$. Формально:

$$f[X] = \{b \in B \mid \exists x \in X : b = f(x)\}$$

Заметим, что если в качестве $X$ взять само множество $A$, то легко увидеть, что $f[A] = Range(f)$

**Определение.** Пусть $Y \subseteq B$. Полный прообраз $f^{-1}[Y]$ состоит в точности из тех элементов $A$, значения которых лежат в $Y$. Формально:

$$f^{-1}[Y] = \{a \in A : f(a) \in Y\}$$

Аналогично образу, $f^{-1}[B] = Dom(f)$, то есть прообраз всего множества $B$ совпадает с областью определения функции

## 1.23 Выражение мощности полного прообраза множества через мощности прообраза отдельных элементов

$$|f^{-1}[Y]| = \sum_{b \in Y} |f^{-1}[\{b\}]|$$

## 1.24 Начальный отрезок натурального ряда. Конечная последовательность элементов множества $A$. Бесконечная последовательность элементов множества $A$

**Определение.** Начальный отрезок натурального ряда — множество вида $[n] = \{x : x < n, x \in \mathbb{N}\}$. Оно состоит из чисел $0, 1, \ldots, n - 1$, всего $n$ чисел

**Определение.** Конечная последовательность элементов множества $A$ — тотальная функция $[n] \to A$

**Определение.** Бесконечная последовательность элементов множества $A$ — тотальная функция $\mathbb{N} \to A$

## 1.25 Принцип Дирихле

Принцип Дирихле можно представить на кроликах. Если $k > n$ и $k$ кроликов рассажены по $n$ клеткам, то хотя бы в одной клетке сидит как минимум два кролика

Занумеруем клетки, и пусть в клетку с номером $i$ посажено $r_i$ кроликов. Если $k > n,\ r_1, \ldots, r_n$ — натуральные числа и $r_1 + \ldots + r_n = k$, то для какого-то $i$ выполняется неравенство $r_i > 1$

## 1.26 Конечное множество. Мощность конечного множества

**Определение.** Множество $A$ называется конечным, если для некоторого натурального $n$ существует биекция $f : [n] \to A$

**Определение.** Число $n$ называется размером (=мощностью) $A$ и обозначается $|A|$

## 1.27 Сравнение конечных множеств с помощью инъекций, сюръекций, биекций

Для тотальных функций из конечного множества в конечное выполняются следующие свойства:

1. Если $f : A \to B$ инъекция, то $|A| \leqslant |B|$
2. Если $f : A \to B$ сюръекция, то $|A| \geqslant |B|$
3. Если $f : A \to B$ биекция, то $|A| = |B|$

## 1.28 Лемма про тотальную функцию из конечного множества в себя

Для тотальных функций из конечного множества в себя выполнены следующие свойства:

1. Если $f : A \to A$ инъекция, то $f$ — сюръекия
2. Если $f : A \to A$ сюръекия, то $f$ — инъекция

## 1.29 Количество слов длины $n$ в алфавите из $k$ символов. Количество тотальных функций из $n$-элементного множества в $k$-элементное. Количество всех функций из $n$-элементного множества в $k$-элементное

#### Количество слов длины $n$ в алфавите $A$ из $k$ символов

Слово — это последовательность $a_1 \dots a_n$, где $a_i \in A$. Или же, множество слов длины $n$ — это декартова степень $A^n$. По формуле произведения получаем, что количество слов равно $k^n$

#### Количество тотальных функций из конечного $n$-элементного множества $A$ в конечное $k$-элементное множество $B$

Этих функций столько же, сколько есть слов длины $n$ в алфавите из $k$ элементов, то есть $k^n$

#### Количество всех функций из $n$-элементного множества в $k$-элементное

Таких функций $(k+1)^n$

## 1.30 Количество размещений из $n$ по $k$: определение и формула

**Определение.** Размещение из $n$ по $k$ — это слово длины $k$ в алфавите из $n$ символов, в котором все символы разные. Считаем, что алфавит состоит из чисел 1, 2 ... $n$

**Формула.** $A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

## 1.31 Перестановка. Количество перестановок n-элементного множества

**Определение.** Перестановкой конечного множества $A$ называется любая биекция $f : A \to A$

Количество перестановок множества, состоящего из $n$ элементов равно $n!$

## 1.32 Количество сочетаний из $n$ по $k$: определение и формула

**Определение.** Сочетанием из $n$ элементов по $k$ называют подмножество $n$-элементного множества, в котором ровно $k$ элементов

**Формула.** $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

## 1.33 Индикаторная функция. Биекция между подмножествами и индикаторными функциями. Количество подмножеств n-элементного множества

Через $\mathcal{P}(X)$ обозначаем множество всех подмножеств $X$. Если $X$ содержит $n$ элементов, то можно узнать сколько элементов в $\mathcal{P}(X)$

**Определение.** Зададим биекцию между подмножествами $X$ и тотальными функциями $X \to \{0, 1\}$. Эта биекция сопоставляет множеству $X$ его *индикаторную функцию* $\chi_{\mathcal{S}} : X \to \{0, 1\}$. Она определяется так:

$$\chi_{\mathcal{S}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathcal{S} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Количество подмножеств $n$-элементного множества равно $2^n$

## 1.34 Выражение для бинома. Биномиальные коэффициенты и числа сочетаний

Рассматривается бином $(x + y)^n$

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \binom{n}{0} y^n + \binom{n}{1} y^{n-1}x + \ldots + \binom{n}{n-1} yx^{n-1} + \binom{n}{n} x^n$$

**Определение.** $\dbinom{n}{k}$ — числа, называющиеся *биномиальными коэффициентами*

При этом они представляют собой в точности числа сочетаний из $n$ по $k$: $\dbinom{n}{k} = C_n^k$

## 1.35 Треугольник Паскаля. Формулировка задачи о монотонных путях в квадранте и связь этой задачи с треугольником Паскаля

**Определение.** В $n$-й строке треугольника Паскаля записаны биномиальные коэффициенты $\binom{n}{k}$, причем $0 \leqslant k \leqslant n$. При других значениях $k$ биномиальные коэффициенты равны нулю

Строки располагаются со сдвигом. При таком расположении выполняется свойство: каждое число в треугольнике Паскаля, за исключением крайних единиц, равно сумме двух соседних чисел, которые стоят выше в треугольнике

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

**Задача про монотонные пути в квадранте**

Мы двигаем фишку по точкам плоскости с целыми координатами. Путём из точки $(0,0)$ в точку $(a,b)$ мы называем конечную последовательность точек (то есть пар целых чисел), первая равна $(0,0)$, а последняя равна $(a,b)$. Путь будем называть монотонным, если для каждой пары соседних точек $(x_1,y_1),\ (x_2,y_2)$ в этой последовательности выполнено $x_1 \leqslant x_2,\ y_1 \leqslant y_2$

За один шаг возможно увеличить абсциссу на 1 или увеличить ординату на 1, то есть из точки $(x,y)$ можем пойти в $(x+1,y)$ или в $(x,y+1)$. Обозначим количество различных монотонных путей из точки $(0,0)$ в точку $(a,b)$ за $T(a,b)$. Из правила суммы следует рекуррентное соотношение

$$T(a,b) = T(a-1,b) + T(a,b-1)$$

Получается, что все пути в $(a,b)$ разбиваются на две группы: те, в которых на последнем шаге увеличивалась абсцисса, и те, в которых на последнем шаге увеличивалась ордината. Это первое и второе слагаемое в $T(a,b)$ соответственно. Также нужно такое условие: $T(0,b) = T(a,0) = 1$

Теперь считаем количество монотонных путей для $(a,b)$ :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 15 | 35 | 70 |
| 1 | 4 | 10 | 20 | 35 |
| 1 | 3 | 6 | 10 | 15 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

И тут мы видим, что это треугольник Паскаля, но повернутый на 135 градусов. Отсюда выводится число путей

$$T(a,b) = \binom{a+b}{a} = \frac{(a+b)!}{a!b!}$$

## 1.36 Числа Фибоначчи: определение и явная формула

**Определение.** Числами Фибоначчи называются $F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

Формула, выражающая $n$-й член как функцию от $n$:

$$F_n = \frac{\psi^n - \phi^n}{\sqrt{5}},\ \text{где } \psi = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

## 1.37 Мультиномиальные коэффициенты. Определение и формула для их вычисления

**Определение.** Мультиномиальными коэффициентами называются коэффициенты в разложении $(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n$ по мономам $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_k^{a_k}$. Формально:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum_{a_1+\ldots+a_k=n} \binom{n}{a_1,\ a_2,\ldots,a_k} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_k^{a_k}$$

**Формула.** $\dbinom{n}{a_1,a_2,\ldots,a_k} = \dfrac{n!}{a_1!a_2!\cdot\ldots\cdot a_k!}\ (a_1+\ldots+a_k=n)$

## 1.38 Сочетания с повторениями. Определение через разложение $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^k$ и через количество решений уравнения

Имеется разложение:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum_{\substack{\alpha=(a_1,\ldots,a_k)\\ a_1+\ldots+a_k=n}} \binom{n}{\alpha} x^\alpha$$

Моном $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}$ имеет степень $a_1 + \ldots + a_n$ и мономы совпадают тогда и только тогда, когда соответствующие последовательности показателей равны. Поэтому нам нужно найти количество решений уравнения

$$a_1 + \ldots + a_n = k$$

в натуральных числах. Это число называется *числом сочетаний с повторениями* из $n$ по $k$. Обозначим его

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)$$

Пояснение формулы см. в след. пункте

## 1.39 Сочетания с повторениями. Определение через количество мультимножеств с элементами из $n$-элементного множества. Формула для вычисления

**Формула.** $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \binom{n+k-1}{k}$

**Определение.** Сочетания из $n$ по $k$ — это $k$-элементные подмножества $n$ элементного множества. Выражение «с повторениями» означает, что теперь элементы считаются с кратностями $a_i$ (натуральные числа)

Приходим к новому понятию мультимножества: порядок элементов не важен, но важно, сколько раз элемент попал в мультимножество. В отличие от обычных множеств, в мультимножество каждый элемент входит с некоторой кратностью

Размер мультимножества — сумма кратностей. Сочетание с повторениями из $n$ по $k$ — это мультимножество с элементами из $[n]$ размера $k$

## 1.40 Формула включений и исключений для 2, 3 и $n$ множеств

Для двух: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Для трёх: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Для $n$

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + \ldots + |A_n| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \ldots + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \ldots + (-1)^{n+1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

В первой строчке правой части равенства выписаны мощности всех множеств. Во второй — мощности всех попарных пересечений множеств (со знаком минус). Далее выписываем пересечения троек, четвёрок и т.д. множеств с чередующимися знаками

## 1.41 Выражение характеристических функций для $A \cap B$, $\overline{A}$, $A \setminus B$, $A \cup B$ через характеристические функции для $A$ и $B$

$\overline{A}$– дополнение множества $A$ до множества $U : \overline{A} = U \setminus A$

Запишем так:

- $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$
- $\chi_{\overline{A}}(x) = 1 - \chi_A(x)$
- $\chi_{A\setminus B}(x) = \chi_A(x) \cdot (1 - \chi_B(x))$
- $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_A(x) = 1 - (1 - \chi_A(x))(1 - \chi_B(x))$

## 1.42 Количество сюръекций из $n$-элементного множества в $k$-элементное

Количество сюръекций $n$-элементного множества в $k$-элементное равно

$$\sum_{p=0}^{k}(-1)^p \binom{k}{p} (k-p)^n = k^n - \sum_{p=1}^{k}(-1)^{p+1} \binom{k}{p} (k-p)^n$$

### 1.43 Формула для числа разбиений $n$-элементного множества на $k$ непустых непомеченных классов. Связь с числом сюръекций

**Определение.** $\Phi(n,k)$ — число разбиений $n$-элементного множества на $k$ непустых непомеченных классов

**Определение.** $\mathrm{Surj}(n,k)$ - число сюръекций $n$-элементного множества в $k-$элементное. Тогда верны следующие утверждения:

$$\Phi(n,k) = \sum_{\substack{l_1,\ldots,l_n \geqslant 0 \\ 1\cdot l_1+2l_2+\ldots+nl_n=n \\ l_1+\ldots+l_n=k}} \frac{n!}{l_1!l_2!\ldots l_n!(1!)^{l_1}(2!)^{l_2}\ldots(n!)^{l_n}}$$

$$\mathrm{Surj}(n,k) = \Phi(n,k)\cdot k!$$

### 1.44 Задача о числе беспорядков. Формула для количества беспорядков на $n$-элементном множестве. Доля беспорядков среди всех перестановок

**Определение.** Количество беспорядков задается формулой

$$n!\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right)$$

**Определение.** Доля беспорядков равна $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

### 1.45 Теоретико-множественные операции над бинарными отношениями. Область определения, область значений бинарного отношения

Пусть $R$ — бинарное отношение на множествах $A$ и $B$, тогда:

$$\mathrm{Dom}(R) = \{x\in A \mid \exists y \in B : (x,y)\in R\}$$
$$\mathrm{Range}(R) = \{y\in B \mid \exists x \in A : (x,y)\in R\}$$

Поскольку бинарные отношения являются множествами, с ними можно делать любые теоретико-множественные операции

Пусть $R_1, R_2$ — бинарные отношения на множествах $A$ и $B$. Тогда $R_1\cap R_2, R_1\cup R_2, R_1\setminus R_2$ — тоже бинарные отношения на множествах $A$ и $B$. Можно рассмотреть также дополнение: $\overline{R} = (A\times B)\setminus R$

### 1.46 Обратное отношение. Композиция отношений

Пусть $R$ — бинарное отношение на множествах $A$ и $B$, тогда:

- Обратное отношение $R^{-1} = \{(b,a) \mid a\in A, b\in B, (a,b)\in R\}$
- Если $R_1$ - бинарное отношение на множествах $A$ и $B$, а $R_2$ - на множествах $B$ и $C$, тогда $R_2\circ R_1 = \{(a,c) \mid a\in A, c\in C, \exists b\in B : (a,b)\in R_1 \wedge (b,c)\in R_2\}$

### 1.47 Свойства обратного отношения и композиции

1. $\mathrm{Dom}(R^{-1}) = Range(R)$, $Range(R^{-1}) = Dom(R)$
2. $(R^{-1})^{-1} = 1$
3. Пусть $R$ — бинарное отношение на множествах $A$ и $B$, $S$ — бинарное отношение на $B$ и $C$, $T$ — бинарное отношение на $C$ и $D$. Тогда выполнена ассоциативность: $T\circ(S\circ R) = (T\circ S)\circ R$
4. Пусть $R$ — бинарное отношение на $A$ и $B$, $S$ — бинарное отношение на $B$ и $C$. Тогда $(S\circ R)^{-1} = R^{-1}\circ S^{-1}$

## 1.48 Свойства бинарных отношений: рефлексивность, антирефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность

Пусть $R$ — бинарное отношение на множестве $A$

$R$ называется...

1. *рефлексивным*, если $\forall x \in A$ выполнено $(x, x) \in R$. Или же $id_A \subseteq R$
2. *антирефлексивным*, если $\forall x \in A$ выполнено $(x, x) \notin R$. Или же $id_A \cap R = \varnothing$
3. *симметричным*, если $\forall x, y \in A$ из $(x, y) \in R$ следует $(y, x) \in R$. Или же $R^{-1} = R$
4. *антисимметричным*, если $\forall x, y \in A$ из $(x, y) \in R$ и $(y, x) \in R$ следует $x = y$. Или же $R^{-1} \cap R \subseteq id_A$
5. *транзитивным*, если $\forall x, y, z \in A$ из $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$ следует $(x, z) \in R$

## 1.49 Обратное отношение, свойства бинарных отношений в терминах ориентированных графов

**Определение.** Пусть $R$ — бинарное отношение на множествах $A$ и $B$, тогда

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid a \in A, b \in B, (a, b) \in R\}$$

В терминах графов можно описать такие свойства бинарных отношений:

1. Чтобы нарисовать граф обратного отношения $R^{-1}$, нужно в графе отношения $R$ поменять направления стрелочек
2. В графе рефлексивного отношения любая вершина имеет петлю
3. В графе антирефлексивного отношения любая вершина не имеет петли
4. В графе симметричного отношения у каждой стрелочки есть противоположно направленная стрелочка
5. В графе антисимметричного отношения нет противоположно направленных стрелочек
6. В графе транзитивного отношения для любой пары стрелочек $(x, y)$ и $(y, z)$ есть замыкающая их стрелочка $(x, z)$

## 1.50 Задание бинарного отношения с помощью матрицы. Выражение свойств бинарных отношений, обратного отношения, композиции отношений в терминах матриц

Пусть $R$ — отношение на конечных множествах $A$ и $B$. Занумеруем элементы этих множеств:

$$A = \{a_1, \ldots, a_n\}, B = \{b_1, \ldots, b_m\}$$

Построим матрицу размера $n \times m$. Строки матрицы соответствуют первым координатам, а столбцы — вторым. На пересечении $i$-той строки и $j$-того столбца ставится 1, если $(a_i, b_j) \in R$, иначе ставится 0

**Пример.** Пусть $A = \{1, 2, 3, 4\},\ B = \{1, 2, 3\},\ R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (4, 1)\}$. Тогда матрица отношения $R$ выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 1.51 Транзитивное замыкание отношения, его свойства

Пусть $R$ — бинарное отношение на множестве $A$

**Определение.** Транзитивное замыкание отношения $R$ — наименьшее по включению транзитивное бинарное отношение на множестве $A$, содержащее отношение $R$. Обозначение: $R^*$

Свойства транзитивного замыкания отношения:

1. Если $R$ - транзитивное отношение, то $R^* = R$
2. Для любого отношения $R$ выполнено $R^* = R^{**}$

## 1.52 Построение транзитивного замыкания по заданному отношению

**Теорема.** Пусть $R$ — бинарное отношение на множестве $A$, тогда верно следующее

$$R^* = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^n \cup \ldots$$

## 1.53 Отношение эквивалентности. Примеры. Построение отношения эквивалентности по разбиению множества

**Определение.** Отношение эквивалентности — отношение $R$ на некотором множестве $A$, которое одновременно

- рефлексивно: $xRx \forall x \in A$
- симметрично: если $xRy$, то $yRx \forall x, y \in A$
- транзитивно: если $xRy$ и $yRz$, то $xRz \forall x, y, z \in A$

**Пример.** Пусть $A$ разбито в дизъюнктное объединение множеств $A_i$:

$$A = \bigcup_i A_i, \quad A_i \cap A_j = \varnothing,\ if i \neq j$$

Тогда пары $(x, y)$, для которых выполняется условие $x \in A_i, y \in A_i$ для некоторого $i$, образуют отношение эквивалентности

Рефлексивность и симметричность очевидны из определения. Проверим транзитивность

Пусть $x, y \in A_i; y, z \in A_j$. Так как $A_i \cap A_j \supseteq \{y\} \neq \varnothing$, то $A_i = A_j$. Значит $(x, z)$ также находится в отношении

## 1.54 Теорема о том, что отношение эквивалентности делит множество на классы эквивалентности. Компоненты связности графа

**Теорема.** Любое отношение $R$, являющееся отношением эквивалентности на множестве $A$, делит $A$ на классы эквивалентности — непересекающиеся подмножества множества $A$, при этом любые два элемента одного класса находятся в отношении $R$, а любые два элемента разных классов не находятся в отношении $R$

**Определение.** В случае отношения достижимости на простом неориентированном графе классами эквивалентности называются *компоненты связности* графа

Если граф связный, у него одна компонента связности. В общем случае компоненты связности совпадают с областями достижимости $C(v)$ вершины $v$

## 1.55 Простой неориентированный граф. Матрица смежности и матрица инцидентности. Связь графа с бинарными отношениями на конечных множествах

**Определение.** Простой неориентированный граф — это конечное множество вершин $V$ и множество рёбер $E$. Рёбрами являются 2-элементные подмножества множества $V$

**Определение.** Матрица смежности графа — матрица, такая что на пересечении $i$-й строки и $j$-го столбца стоит 1, если вершины $i, j$ соседние (соединены ребром); иначе там стоит 0

**Определение.** Матрица инцидентности графа — такая матрица, что на пересечении $i$-й строки и $j$-го столбца стоит 1, если вершина $i$ инцидентна ребру $j$; иначе там стоит 0

Если $e = \{u, v\} \in E$, то вершины $u, v$ называются концами ребра $e$. Концы ребра называются *смежными вершинами* или *соседями*

Говорят также, что ребро $e = \{u, v\}$ *инцидентно* вершине $u$ (как и вершине $v$)

**Примечание.** Каждый граф $G$ задаёт бинарное отношение $A_G$ на множестве вершин $V : (x, y) \in A_G$, если $\{x, y\} \in E(G)$. Это отношение обладает следующими свойствами:

- *симметричность*, $(x, y) \in A_G$ равносильно $(y, x) \in A_G \forall x, y \in V$
- *антирефлексивность*, $(x, x) \notin A_G \ \forall x \in V$ (у каждого ребра ровно два конца)

**Определение.** Матрица смежности графа — это матрица соответствующего ему бинарного отношения

## 1.56 Степень вершины. Теорема о сумме степеней вершин. Лемма о рукопожатиях

**Определение.** Степень вершины — количество соседей вершины $v$ (оно же количество инцидентных её рёбер). Обозначается, как $d(v)$

**Теорема.** Сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному числу его рёбер

**Лемма.** В любом графе количество вершин с нечётными степенями чётно

## 1.57 Путь в графе. Начало, конец, длина пути. Связанные вершины. Связный граф

**Определение.** Путь по графу — это такая последовательность вершин $v_0, \ v_1, \dots, \ v_t$, в которой стоящие рядом члены (вершины $v_i$ и $v_{i+1}$ при всех допустимых $i$) соединены ребром

**Определение.** Вершина $v_0$ называется **началом** пути

**Определение.** Вершина $v_t$ называется **концом**

**Определение.** **Длиной** пути называется число рёбер в нём, то есть $t$

**Определение.** Вершины $v$ и $w$ называются **связанными**, если существует путь с началом в $v$ и концом $w$

**Определение.** Граф называется **связным**, если любые две его вершины связаны

## 1.58 Отношение достижимости в графе, его свойства. Отношение достижимости как транзитивное замыкание

**Отношение достижимости** $R \subseteq V \times V$ на его множестве вершин $V$. Вершины $u, v$ находятся в этом отношении, если они связанные

**Свойства. (Лемма)**

1. (рефлексивность) $(v, v) \in R$ (вершина достижима из себя самой)
2. (симметричность) $(v_1, v_2) \in R$ равносильно $(v_2, v_1) \in R$
3. (транзитивность) если $(v_1, v_2) \in R$ и $(v_2, v_3) \in R$, то $(v_1, v_3) \in R$

**Определение.** Отношением достижимости в графе $G$ является транзитивное замыкание отношения $\mathrm{id}_V \cup A_G$. Вершины $u$ и $v$ связанные, если $u = v$, или существует путь из $u$ в $v$ какой-то длины: 1, 2, 3 и т.д.

Поэтому отношение достижимости равно $\mathrm{id}_V \cup A_G \cup A_G^2 \cup A_G^3 \dots$, что и является транзитивным замыканием отношения $\mathrm{id}_V \cup A_G$ по теореме 1.52

## 1.59 Цикл. Простой цикл. Простой путь

**Определение.** Цикл — путь, у которого начало совпадает с концом (замкнутый путь)

**Определение.** Простой цикл — цикл, в котором все вершины различны, кроме начала и конца

**Определение.** Простой путь — путь, в котором все вершины различны

## 1.60 Ориентированный граф. Петли. Матрица смежности. Связь с бинарными отношениями

**Определение.** Простой ориентированный граф (орграф) — это конечное множество вершин $V$ и множество рёбер $E$. Рёбрами являются упорядоченные пары вершин

**Определение.** Петля — упорядоченная пара $(w, w)$. У петли начало и конец совпадают

**Определение.** Матрица смежности орграфа — квадратная матрица порядка $n$, где $n$ — количество вершин графа. На пересечении $i$-й строки и $j$-го столбца стоит 1, если в орграфе есть ребро $(i, j)$, иначе — стоит 0

**Связь с бинарными отношениями.** Возьмем множество $V$ и бинарное отношение на этом множестве. Это подмножество декартова произведения $E \subseteq V \times V$. Это то же самое, что орграф с множеством вершин $V$ и множеством ребер $E$

## 1.61 Исходящая и входящая степени вершин. Лемма про сумму исходящих и входящих степеней вершин

**Определение.** Исходящая степень — число ребер, выходящих из вершины

**Определение.** Входящая степень — число ребер, входящих в вершину

**Лемма.** Сумма исходящих степеней всех вершин равна сумме входящих степеней всех вершин: обе суммы равны числу рёбер графа

## 1.62 Путь по орграфу. Цикл, простой путь, простой цикл. Простой в рёбрах путь

**Определение.** Путь по орграфу — это последовательность вершин $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_k$, в которой стоящие рядом члены (вершины $v_i$ и $v_{i+1}$ при всех допустимых $i$) соединены ребром, причём $v_i$ — начало ребра, а $v_{i+1}$ — его конец

**Определение.** Цикл — это путь, у которого первая и последняя вершины совпадают

**Определение.** Простой путь — путь, в котором все вершины различны

**Определение.** Простой цикл — цикл, в котором различны все вершины, кроме первой и последней вершин

**Определение.** Простой в ребрах путь — путь, в последовательности ребер которого все ребра различны

## 1.63 Отношение достижимости в орграфе, его свойства. Отношение сильной связанности в орграфе, его свойства. Компоненты сильной связности, сильно связный орграф

**Определение.** $R$ — отношение достижимости в орграфе, тогда $(u, v) \in R$, если существует путь с началом в $u$ и концом в $v$

Свойства любого простого ориентированного графа и любых его вершин $v_1$, $v_2$, $v_3$:

1. *рефлексивность:* $(v, v) \in R$ - вершина достижима из самой себя
2. *транзитивность:* если $(v_1, v_2) \in R$ и $(v_2, v_3) \in R$, то $(v_1, v_3) \in R$

**Определение.** Вершина $u$ *сильно связана* с вершиной $v$, если $v$ достижима из $u$ и наоборот, т.е. если есть путь из $u$ в $v$, а также путь из $v$ в $u$. Формально:

$$(u, v) \in C, \text{ если } (u, v) \in R \text{ и } (v, u) \in R$$

**Примечание.** Для любого ориентированного графа отношение сильной связанности *рефлексивно*, *симметрично* и *транзитивно*, то есть является отношением эквивалентности

**Определение.** Компоненты сильной связности — классы эквивалентности отношения сильной связанности

**Определение.** Сильно связный орграф — орграф, в котором всё множество вершин образует компоненту сильной связности

## 1.64 Эйлеров цикл. Эйлеров граф. Критерий эйлеровости ориентированного и неориентированного графа

**Определение.** Эйлеров цикл — цикл, который проходит по всем рёбрам графа ровно по одному разу (любое ребро соединяет соседние вершины в цикле, и никакое ребро не встречается в цикле дважды)

**Определение.** Эйлеров граф — граф, в котором есть эйлеров цикл

**Критерий для орграфа.** Орграф без изолированных вершин содержит эйлеров цикл тогда и только тогда, когда граф сильно связен и у любой вершины входящая степень равна исходящей

**Критерий для неориентированного графа.** Неориентированный граф без вершин нулевой степени содержит эйлеров цикл тогда и только тогда, когда он связен и степени всех вершин чётны

## 1.65 Ациклический граф. Равносильные определения ациклического графа

**Определение.** Ациклический граф — граф, в котором нет циклов длины больше 0 (в том числе, нет петель)

Равносильные свойства ориентированного графа без петель:

1. Каждая компонента сильной связности состоит из одной вершины
2. Орграф ациклический
3. Вершины орграфа можно пронумеровать натуральными числами таким образом, чтобы все рёбра вели из вершины с меньшим номером в вершину с бо́льшим

## 1.66 Дерево. Мост. Лес

**Определение.** Дерево — такой связный граф, что выбрасывание любого его ребра даёт несвязный граф

**Определение.** Мост — это такое ребро в графе, что его удаление увеличивает количество компонент связности

**Определение.** Лес — произвольные графы, у которых каждое ребро является мостом

## 1.67 Критерий того, что граф является лесом, в терминах простых путей и простых циклов. Аналогичный критерий для дерева

Равносильные свойства *простых* неориентированных графов:

1. каждое ребро — мост
2. для любых связанных вершин $u$, $v$ существует единственный простой путь из $u$ в $v$
3. нет простых циклов длины больше 2

Равносильные свойства *связных простых* неориентированных графов:

1. граф — дерево
2. для любых двух вершин $u$, $v$ существует единственный простой путь из $u$ в $v$
3. нет простых циклов длины больше 2

## 1.68 Цикломатическое число графа. Критерий того, что граф является лесом, в терминах цикломатического числа. Критерий того, что граф является деревом, в терминах рёбер и вершин

**Определение.** Цикломатическое число графа — величина $r(G) = m - n + c$, где $m$ - количество рёбер, $n$ - количество вершин графа, $c$ - количество компонент связности

**Критерий—1.** Графы, у которых $r(G) = 0$, — это в точности леса, то есть графы, у которых каждое ребро — мост

**Критерий—2.** Связный граф является деревом тогда и только тогда, когда число рёбер в нём на единицу меньше числа вершин

## 1.69 Свойства цикломатического числа графа

Свойства:

1. Граф $G' = G + e$ получается добавлением к графу $G$ ребра $e = \{x, y\}$ к множеству рёбер, а вершины у него те же

   Тогда $r(G') = r(G)$, если концы ребра $x$, $y$ лежат в разных компонентах связности графа $G$, и $r(G') = r(G) + 1$, если $x$, $y$ лежат в одной компоненте связности графа $G$
2. Цикломатическое число графа неотрицательное

## 1.70 Изолированные вершины, висячие вершины. Теорема про висячие вершины в дереве

**Определение.** Вершины степени 0 называются *изолированными*, а вершины степени 1 — *висячими*

**Теорема.** В дереве с хотя бы двумя вершинами найдутся по крайней мере две висячие вершины

## 1.71 Подграф. Индуцированный подграф. Остовный подграф. Теорема об остовном дереве

**Определение.** Подграф — некоторое подмножество вершин и некоторое подмножество рёбер с концами в выбранных вершинах

**Определение.** Остовный подграф — подграф, в котором множество вершин совпадает с множеством вершин самого графа

**Теорема.** В любом связном графе есть остовное дерево

# 2 Вопросы на доказательство

## 2.1 Дистрибутивность конъюкции и дизъюнкции (доказать один из законов). Закон контрапозиции: доказательство и пример применения

**Теорема.** $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

**Доказательство.** Разберем случаи: когда $A = 0$ и $A = 1$

- Если $A = 0$, то левая часть равна 0, а правая — $0 \vee 0 \equiv 0$
- Если $A = 1$, то тождество обращается в $1 \wedge (B \vee C) \equiv (1 \wedge B) \vee (1 \wedge C)$
  Так как $1 \wedge X = X$, получаем, что обе части обращаются в $B \vee C$

Дистрибутивность дизъюнкции доказывается аналогично □

**Определение.** Пусть $X$ — константа, тогда имеем *тавталогии упрощения*:

- $X \wedge 0 \equiv 0,\ X \wedge 1 \equiv X$
- $X \vee 0 \equiv X,\ X \vee 1 \equiv 1$
- $X \to 1 \equiv 1,\ X \to 0 \equiv \neg X$
- $0 \to X \equiv 1,\ 1 \to X \equiv X$

Их справедливость очевидна из таблиц истинности связок

## 2.2 Единственность пустого множества. Связь тавтологий и теоретико-множественных тождеств. Пример доказательства теоретико-множественного тождества при помощи соответствующей тавтологии

**Теорема.** Все пустые множества равны между собой

**Доказательство.** Заметим, что два множества можно назвать разными, если в одном из них есть какой-то элемент, которого нет в другом. В пустых множествах нет вообще никаких элементов, значит и отличить их невозможно. Следовательно, $\exists! \varnothing$ □

**Теорема.** С помощью тавтологий можно доказывать различные теоретико-множественные тождества

**Доказательство.** Предположим, что все рассматриваемые множества являются подмножествами универсума $U$. Каждому множеству $A$ и каждому элементу $U$ сопоставляется высказывание $x \in A$. Как видно из определений, принадлежность элемента множеству, которое является теоретико-множественной операцией над другими множествами, выражается с помощью логических связок

Отсюда возникает взаимно однозначное соответствие между логическими и теоретико-множественными тождествами □

**Пример.** Докажем, что равенство $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap B$ выполняется для любых $A, B, C$

Из определений получим:

$$(x \in (A \cap B) \setminus C) \equiv (x \in A \cap B) \wedge \neg(x \in C) \equiv ((x \in A) \wedge (x \in B)) \wedge \neg(x \in C)$$
$$(x \in (A \setminus C) \cap B) \equiv (x \in A \setminus C) \wedge (x \in B) \equiv ((x \in A) \wedge \neg(x \in C)) \wedge (x \in B)$$

Поэтому логическая формула, соответствующая равенству в множествах, имеет вид

$$(A \wedge B) \wedge \neg C \equiv (A \wedge \neg C) \wedge B$$

Эта формула является тождеством, потому что конъюнкция коммутативна и ассоциативна. Значит, и равенство с множествами выполняется для всех множеств $A, B, C$. То есть она тавтологична □

## 2.3 Доказательства тавтологий: метод доказательства от противного, транзитивность импликации, закон контрапозиции, законы де Моргана

**Теорема.** $((A \to B) \land (B \to C) \to (A \to C))$

**Доказательство.** Предположим, что формула ложна при каких-то значениях элементарных высказываний

Из таблицы истинности импликации видим, что тогда заключение $A \to C$ внешней импликации ложно, а посылка $(A \to B) \land (B \to C)$ истинна

Из ложности $A \to C$ заключаем, что $A = 1, C = 0$. Истинность конъюнкции означает, что истинны оба члена конъюнкции, в частности $B \to C = B \to 0 = 1$. Это возможно лишь при $B = 0$. Но тогда $A \to B = 1 \to 0 = 0$, а мы уже установили, что $A \to B = 1$. Пришли к противоречию. □

**Теорема.** Закон контрапозиции. $A \to B \equiv \neg B \to \neg A$

**Доказательство.** Используем представление импликации через дизъюнкцию ($A \to B \equiv \neg A \lor B$) для обеих частей тождества. Получаем равносильное тождество $\neg A \lor B \equiv \neg\neg B \lor \neg A$. При этом $\neg\neg B \equiv B$, а дизъюнкция коммутативна, поэтому это тождество — тавтология. □

**Пример.** Докажем с помощью закона контрапозиции утверждение о том, что если $a_1 + \ldots + a_n > n$, то какое-то $a_i > 1$

Пусть $A-$ утверждение $a_1 + \ldots + a_n > n$, $B$ - утверждение, что какое-то $a_i > 1$. Нужно доказать, что $A \to B$. По контрапозиции, это то же самое, что $\neg B \to \neg A$. $\neg B$ означает, что все слагаемые не больше 1: $a_1 \leqslant 1, \ldots, a_n \leqslant 1$. Складываем неравенства и получаем, что $a_1 + \ldots + a_n \leqslant \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ раз}} = n$. Таким образом получили $\neg A$. □

**Теорема.** Законы де Моргана. $\neg(A \land B) \equiv \neg A \lor \neg B,\ \neg(A \lor B) \equiv \neg A \land \neg B$

**Доказательство.**

1. Отрицание конъюнкции ложно тогда и только тогда, когда конъюнкция истинна, то есть $A = B = 1$. Дизъюнкция ложна тогда и только тогда, когда каждый её член ложен, то есть $\neg A = \neg B = 0$. Эти условия равносильны
2. Отрицание дизъюнкции истинно тогда и только тогда, когда дизъюнкция ложна, то есть $A = B = 0$. Конъюнкция истинна тогда и только тогда, когда каждый её член истинен, то есть $\neg A = \neg B = 1$. Эти условия равносильны

□

## 2.4 Элементы пустого множества обладают любыми свойствами (2 доказательства). Парадокс Рассела

**Теорема.** Пусть $A$ — любое свойство. Тогда все элементы пустого множества обладают свойством $A$

**Доказательство.** (от противного) Пусть это не так. Тогда существует элемент пустого множества, не обладающий свойством $A$. Получили, что в пустом множестве существует элемент — противоречие □

**Доказательство.** (перебором) Проверим все элементы в пустом множестве, обладают ли они свойством $A$. Сделали 0 проверок - всё, проверка кончилась □

**Теорема.** (Парадокс Рассела) Утверждение о том, что всё, что угодно, является множеством, неверно. Множества, как правило, своими элементами не являются. Соберём такие «обычные» множества вместе. Получим при этом множество $A$.

Таким образом, $A$ — это множество всех множеств, не содержащих себя в качестве элемента. Формально:

$$x \in A \equiv x \notin x$$

Выясним, содержит ли множество $A$ само себя, подставив вместо переменной $x$ множество $A$:

$$A \in A \equiv A \notin A$$

Пришли к противоречию: $A$ принадлежит $A$ тогда и только тогда, когда $A$ не принадлежит $A$ □

## 2.5 Принцип математической индукции. Обоснование и пример применения

Принцип математической индукции описан здесь — 1.12 и 1.13

**Пример.** Для конечных множеств $A$ и $B$ выполняется равенство $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

**Доказательство.** В качестве параметра индукции возьмём размер $A$. База индукции $|A| = 1$. В этом случае $A \times B$ состоит из пар $(a, b)$, где $a$ — единственный элемент $A$, а $b \in B$. Таких пар ровно $|B|$, поскольку они находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами $B$. Значит, выполняется равенство $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Шаг индукции. Индуктивное предположение: правило произведения выполняется для всех $A$ размера $n$. Рассмотрим теперь множество $A$ размера $(n+1)$, выделим в нём элемент $a_0$ и обозначим $A' = A \setminus \{a_0\}$. По правилу суммы $|A'| = n$.

Равенство $A \times B = (\{a_0\} \times B) \cup (A' \times B)$ непосредственно следует из определения декартова произведения, причём множества $\{a_0\} \times B$ и $A' \times B$ не пересекаются (не имеют общих элементов), потому что первые члены упорядоченных пар у них разные. Применяя правило суммы, базу индукции и индуктивное предположение, получаем

$$|A \times B| = |\{a_0\} \times B| + |A' \times B| = |B| + n \cdot |B| = (1 + n) \cdot |B| = |A| \cdot |B|,$$

## 2.6 Упорядоченная пара по Куратовскому. Доказательство основного свойства: $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$

Пусть для упорядоченных пар выполняется свойство: $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$

**Определение.** Упорядоченной парой по Куратовскому $(x, y)$ будем называть множество $\{\{x\}, \{x, y\}\}$

**Теорема.** $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \iff x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$

**Доказательство.** Пусть $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$. Это означает, что

$$\{\{x_1\}, \{x_1, y_1\}\} = \{\{x_2\}, \{x_2, y_2\}\}$$

Теперь разберем два случая

1. $x_1 = y_1$. В этом случае $\{x_1, y_1\} = \{x_1\}$, поэтому $(x_1, y_1) = \{\{x_1\}\}$. Значит, множество $\{\{x_2\}, \{x_2, y_2\}\}$ состоит из одного элемента. Это возможно только если $x_2 = y_2$, то есть $(x_2, y_2) = \{\{x_2\}\}$. Из равенства $\{\{x_1\}\} = \{\{x_2\}\}$ заключаем $x_1 = x_2$. Отсюда, $x_1 = x_2 = y_1 = y_2$

2. $x_1 \neq y_1$. Тогда множество $\{x_1, y_1\}$ состоит из двух элементов, и оно должно быть равно либо $\{x_2\}$, либо $\{x_2, y_2\}$. Первое невозможно, так как двухэлементное множество не может быть равно одноэлементному. Значит, $\{x_1, y_1\} = \{x_2, y_2\}$. С другой стороны, одноэлементное множество $\{x_1\}$ должно быть равно одноэлементному множеству $\{x_2\}$. Значит, $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$

□

## 2.7 Доказательство того, что если $f : A \to B$ — биекция, то $f^{-1}$ — также биекция

Докажем, что $f^{-1}$ — функция, то есть что если $(y, x_1) \in f^{-1}$ и $(y, x_2) \in f^{-1}$, то $x_1 = x_2$. Перепишем: если $(x_1, y) \in f$ и $(x_2, y) \in f$, то $x_1 = x_2$. Отсюда понимаем, что $f-$ инъекция. А следовательно, $f^{-1}$ — функция

Теперь докажем, что $f^{-1}$ — тотальна, то есть $\forall y \in B\ \exists x \in A:\ (y, x) \in f^{-1}$. Перепишем: $\forall y \in B\ \exists x \in A:\ (x, y) \in f$. Отсюда заключаем, что $f-$ сюръекция. А отсюда вытекает, что $f^{-1}$ тотальна

Докажем, что $f^{-1}$ — инъекция, то есть если $(y_1, x) \in f^{-1}$ и $(y_2, x) \in f^{-1}$, то $y_1 = y_2$. Перепишем: если $(x, y_1) \in f$ и $(x, y_2) \in f$, то $y_1 = y_2$. Это определение функции $f$. Отсюда вытекает, что $f^{-1}$ — инъекция

Докажем теперь, что $f^{-1}$ — сюръекция, то есть $\forall x \in A\ \exists y \in B:\ (y, x) \in f^{-1}$. Перепишем: $\forall x \in A\ \exists y \in B:\ (x, y) \in f$. Это означает тотальность функции $f$, а из этого следует сюръективность $f^{-1}$

Так как $f^{-1}$ и инъекция, и сюръекция, она биекция. □

## 2.8 Композиции сохраняют классы тотальных, инъективных, сюръективных и биективных функций

**Теорема.**

1. Если $f : A \to B,\ g : B \to C$ тотальны, то и $g \circ f$ тоже тотальная
2. Если $f : A \to B,\ g : B \to C$ инъекции, то и $g \circ f$ тоже инъективна
3. Если $f : A \to B,\ g : B \to C$ сюръекции, то и $g \circ f$ тоже сюръективна
4. Если $f : A \to B,\ g : B \to C$ биекции, то и $g \circ f$ тоже биективна

**Доказательство.**

1. Пусть $x \in A$. Так как $f$ тотальна, то $\exists y \in B : y = f(x)$. Так как $g$ тотальна, то $\exists z \in C : z = g(y)$. По определению композиции $z = (g \circ f)(x)$, что доказывает тотальность $g \circ f$
2. $g \circ f$ — тотальная. Пусть $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. По определению композиции это равносильно $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Так как $g$ — инъекция, то $f(x_1) = f(x_2)$. Так как $f$ - инъекция, то $x_1 = x_2$
3. Доказано, что $g \circ f$ тотальна. Из определению сюръективности $g$ заключаем, что $\forall z \in C \exists y \in B : g(y) = z$. При этом $f$ — сюръекция, значит $\forall y \exists x \in A : f(x) = y$. По определению композиции $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = z$, что и означает, что $g \circ f$ — сюръективна
4. Из утверждений 2 и 3 следует биективность $g \circ f$

□

## 2.9 Доказательство принципа Дирихле. Доказательство корректности определения мощности конечного множества

**Теорема.** Занумеруем клетки, и пусть в клетку с номером $i$ посажено $r_i$ кроликов. Если $k > n$, $r_1, \ldots, r_n$ - натуральные числа и $r_1 + \ldots + r_n = k$, то для какого-то $i$ выполняется неравенство $r_i > 1$

**Доказательство.** Предположим противное: пусть для всех $r_i$ выполнено $r_i \leqslant 1$. Сложим все эти неравенства и получим $r_1 + \ldots + r_n \geqslant n$. Так как $r_1 + \ldots r_n = k$, получили $k \leqslant n$, что противоречит условию $k > n$ □

**Теорема.** Пусть $f : [n] \to A,\ g : [m] \to A$ — две биекции, тогда $n = m$

**Доказательство.** Докажем от противного. Предположим, что $n \neq m$. Пусть, для опредленности, $n > m$.

Знаем, что $\exists$ биекция $g^{-1} : A \to [m]$ и функция $g^{-1} \circ f : [n] \to [m]$ (тоже биекция). По приницпу Дирихле $[n]$ — кролики, а $[m]$ — клетки.

Кроликов больше, чем клеток $\to$ в какой-то клетке два кролика, то есть $\exists i, j \in [n]$, для которых $g^{-1} \circ f(i) = g^{-1} \circ f(j)$.

Таким образом получаем противоречие, в котором $g^{-1} \circ f$ инъективна □

## 2.10 Сравнение конечных множеств с помощью инъекций, сюръекций, биекций

**Теорема.** Для тотальных функций из конечного множества в конечное выполняются следующие свойства:

1. Если $f : A \to B$ инъекция, то $|A| \leqslant |B|$
2. Если $f : A \to B$ сюръекция, то $|A| \geqslant |B|$
3. Если $f : A \to B$ биекция, то $|A| = |B|$

**Доказательство.**

1. Обозначим через $a_i,\ i \in B$ количество элементов $a \in A$, для которых $f(a) = i$ (то есть размер *полного прообраза* $f^{-1}[\{i\}]$)

   Так как $f-$ инъекция, то $a_i \leqslant 1 \forall i \in B$. Тогда
   $$|A| = \sum_{i \in B} a_i \leqslant \sum_{i \in B} 1 = |B|$$
   Так как $f$ — тотальная и $|f^{-1}[Y]| = \sum_{b \in Y} |f^{-1}[\{b\}]|$, то каждый $x \in A$ входит ровно в один прообраз какого-то $y \in B$

2. Так как $f-$ сюръекция, то $a_i \geqslant 1 \forall i \in B$. Тогда
   $$|A| = \sum_{i \in B} a_i \geqslant \sum_{i \in B} 1 = |B|$$

3. Так как 1 и 2 утверждение верны, то данный факт также верный

□

## 2.11 Лемма про тотальную функцию из конечного множества в себя

**Теорема.** Для тотальных функций из конечного множества в себя выполнены следующие свойства:

1. Если $f : A \to A$ инъекция, то $f$ — сюръекия
2. Если $f : A \to A$ сюръекия, то $f$ — инъекция

**Доказательство.**

1. Пусть $f$ — инъекция, тогда $|f[A]| = |A| = n$. Значит, $f$ — сюръекция
2. Если $f$ — сюръекция. В силу утверждения 1.23, $|f^{-1}(A)| = \sum_{b \in A} |f^{-1}[\{b\}]|$. Так как $f$ — сюръекция, то $|f^{-1}[\{b\}]| \geqslant 1$. Значит, $|f^{-1}[\{b\}]| = 1$, а значит $f$ инъективна

□

## 2.12 Количество слов длины $n$ в алфавите из $k$ символов. Количество тотальных функций из $n$-элементного множества в $k$-элементное. Количество всех функций из $n$-элементного множества в $k$-элементное

### Количество слов длины $n$ в алфавите из $k$ символов

Слово — это последовательность $a_1, \dots a_n$, где $a_i \in A$. То есть множество слов длины $n$ — это декартова степень $A^n$. По формуле произведения получаем, что количество слов равно $k^n$. □

### Количество тотальных функций

Этих функций столько же, сколько есть слов длины $n$ в алфавите из $k$ символов

Занумеруем элементы $A : a_1, a_2 \dots a_n$. Сопоставим тотальной функции $f : A \to B$ слово $\beta(f) = b_1 b_2 \dots b_n$ длины $n$ в алфавите $B$ по правилу: $b_i = f(a_i)$. Фактически, это таблица значений функции (если мы зафиксировали порядок элементов $A$). Получаем биекцию с множеством слов длины $n$ в алфавите из $k$ символов

Значит, количество тотальных функций из $A$ в $B$ равно количеству слов длины $n$ в алфавите из $k$ символов и равно $k^n$ □

**Количество всех функций**

Рассмотрим элемент **void** $\notin B$. Тотальные функции из $A$ в $B \cup \{\textbf{void}\}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с функциями из $A$ в $B$: значение **void** мы рассматриваем как указание на то, что функция из A в B не определена. Ответ: $(k+1)^n$

## 2.13 Формула для количества размещений из $n$ по $k$. Подсчёт числа инъекций и биекций

**Теорема.** $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

**Доказательство.** Представляем размещение как результат нескольких последовательных выборов: выбираем первый член последовательности, затем второй и т.д. На первом шаге есть $n$ вариантов. На втором - уже $n-1$: результат первого выбора использовать невозможно

Размещениям взаимно однозначно отвечают пути по дереву вариантов. А каж- дый путь задаётся выбором одного из вариантов ветвления. Пронумеруем эти вари- анты в порядке возрастания. Получаем биекцию между размещениями из n по k и декартовым произведением

$$[n] \times [n-1] \times \ldots \times [n-k+1],$$

где $[n]$ — множество $\{1, 2, \ldots\}$ □

**Подсчёт числа инъекций и биекций.** Посчитаем количество инъективных функций из $k$-элементного множества в $n$-элементное. Сопоставляем такой функции $f$ слово $\beta(f)$ длины $k$ в алфавите из $n$ символов: $\beta(f)_i = f(i)$. Нас интересуют те функции, у которых значения в различных точках различны. Им отвечают слова, в которых символы не повторяются, то есть в точности размещения из $n$ по $k$, то есть $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ □

## 2.14 Формула для количества сочетаний из $n$ по $k$

**Теорема.** $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

**Доказательство.** Перепишем формулу, как

$$C_n^k \cdot k! = A_n^k$$

Построим функцию $f : A_n^k \to C_n^k$. Размещению $x = (x_1, \ldots, x_k)$ сопоставим сочетание $\{x_1, \ldots, x_k\}$

Такая функция сюръективна, так как элементы любого конечного множества можно расположить в последовательность.

Однако она не инъективна, но можно вычислить $f^{-1}[\{S\}]$, где $S$ — произвольное сочетание. Существует $k!$ способов упорядочить $k$ элементов

Вспомним, что $|f^{-1}[Y]| = \sum\limits_{b \in Y} |f^{-1}[\{b\}]|$, отсюда следует $C_n^k \cdot k! = A_n^k$ □

## 2.15 Биекция между подмножествами и индикаторными функциями. Количество подмножеств n-элементного множества. Комбинаторное доказательство формулы $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$

Определние индикаторной функции дано здесь — 1.33

**Доказательство.** Докажем, что индикаторные функции $\chi_A$ и $\chi_B$ равны тогда и только тогда, когда подмножества $A$ и $B$ равны. Из определений ясно, что $A = B$ равносильно $A \triangle B = \varnothing$, где

$$A \triangle B \equiv (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

обозначает симметрическую разность

Если $x \in A \triangle B$, то $\chi_A(x) \neq \chi_B(x)$. И наоборот, если $\chi_A(x) \neq \chi_B(x)$, то $x \in A \triangle B$

$S \mapsto \chi_S$ — биекция $\mathcal{P}(X) \to \{0,1\}^X$. Поскольку количество тотальных функций уже подсчитано, получаем и количество подмножеств

**Теорема.** Количество подмножеств $n$-элементного множества равно $2^n$

**Доказательство.** Найдём количество двоичных слов (то есть слов из 0 и 1) длины $n$, в которых ровно $k$ единиц

На двоичное слово длины $n$ смотрим как на таблицу значений индикаторной функции подмножества $[n]$. Если в слове $k$ единиц, это означает, что в соответствующем подмножестве $k$ элементов. Поэтому ответом будет число сочетаний $C_n^k$ □

**Теорема.** $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$

**Доказательство.** (комбинаторное) С одной стороны, мы посчитали, что таких подмножеств $2^n$.

С другой стороны, подмножества $n$-элементного множества бывают пустые, одноэлементные, ..., $n$-элементные. $k$-элементных подмножеств $n-$элементного множества имеется $C_n^k$. Отсюда следует утверждение теоремы □

## 2.16 Теорема о совпадении биномиальных коэффициентов и чисел сочетаний. Доказательство формулы $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$ с помощью бинома

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \binom{n}{0} y^n + \binom{n}{1} y^{n-1}x + \ldots + \binom{n}{n-1} yx^{n-1} + \binom{n}{n} x^n$$

**Теорема.** $\displaystyle\binom{n}{k} = C_n^k$

**Доказательство.** Будем переходить от левой части бинома к правой в два этапа. Раскрываем скобки и получаем сумму выражений вида $xyyx\ldots$, где всего сомножителей $n$, а каждый из них — это $x$ или $y$. Количество таких сомножителей равно количеству слов длины $n$ в алфавите $\{x, y\}$, то есть $2^n$

Теперь приведём подобные. Мы знаем, что сложение и умножение коммутативны и ассоциативны. Поэтому все слагаемые с одинаковым количеством $x$ и $y$ равны $x^k y^{n-k}$, где $k$ — количество символов $x$ (а количество символов $y$ равно $n-k$, потому что других символов в этих выражениях нет)

Итак, $\binom{n}{k}$ равен количеству слагаемых с $k$ символами $x$ и $n-k$ символами $y$, а это количество равно количеству двоичных слов с $k$ единицами, то есть $C_n^k$ □

**Доказательство формулы $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$ с биномом.**

Подставим в бином Ньютона $x = y = 1$. Тогда получим, что

$$(1+1)^2 = 2^n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$$

□

## 2.17 Решение задачи о монотонных путях в квадранте. Связь этой задачи с треугольником Паскаля

**Определение.** В $n$-й строке треугольника Паскаля записаны биномиальные коэффициенты $\binom{n}{k}$, причем $0 \leqslant k \leqslant n$. При других значениях $k$ биномиальные коэффициенты равны нулю

Строки располагаются со сдвигом. При таком расположении выполняется свойство: каждое число в треугольнике Паскаля, за исключением крайних единиц, равно сумме двух соседних чисел, которые стоят выше в треугольнике

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

**Задача про монотонные пути в квадранте**

Мы двигаем фишку по точкам плоскости с целыми координатами. Путём из точки $(0,0)$ в точку $(a,b)$ мы называем конечную последовательность точек (то есть пар целых чисел), первая равна $(0,0)$, а последняя равна $(a,b)$. Путь будем называть монотонным, если для каждой пары соседних точек $(x_1,y_1)$, $(x_2,y_2)$ в этой последовательности выполнено $x_1 \leqslant x_2,\ y_1 \leqslant y_2$

За один шаг возможно увеличить абсциссу на 1 или увеличить ординату на 1, то есть из точки $(x,y)$ можем пойти в $(x+1,y)$ или в $(x,y+1)$. Обозначим количество различных монотонных путей из точки $(0,0)$ в точку $(a,b)$ за $T(a,b)$. Из правила суммы следует рекуррентное соотношение

$$T(a,b) = T(a-1,b) + T(a,b-1)$$

Получается, что все пути в $(a,b)$ разбиваются на две группы: те, в которых на последнем шаге увеличивалась абсцисса, и те, в которых на последнем шаге увеличивалась ордината. Это первое и второе слагаемое в $T(a,b)$ соответственно. Также нужно такое условие: $T(0,b) = T(a,0) = 1$

Теперь считаем количество монотонных путей для $(a,b)$ :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 15 | 35 | 70 |
| 1 | 4 | 10 | 20 | 35 |
| 1 | 3 | 6 | 10 | 15 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

И тут мы видим, что это треугольник Паскаля, но повернутый на 135 градусов. Отсюда выводится число путей

$$T(a,b) = \binom{a+b}{a} = \frac{(a+b)!}{a!b!}$$

## 2.18 Свойства биномиальных коэффициентов: каждое число в треугольнике Паскаля (за исключением крайних единиц) равно сумме двух соседних чисел, которые стоят выше в треугольнике; симметричность строк треугольника Паскаля

**Теорема.** $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$

**Доказательство.** Рассмотрим $T(k,n-k)$. С одной стороны, $T(k,n-k) = C_n^k$. С другой стороны, из формулы упомянутой в 2.17 получаем

$$T(k,n-1) = T(k-1,n-k) + T(k,n-k-1) = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

□

**Теорема.** Каждая строка треугольника Паскаля симметрична относительно середины

**Доказательство.** В $n$-й строке треугольника Паскаля записаны биномиальные коэффициенты $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$

Симметрия относительно середины означает, что $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Это равенство ясно из формулы бинома $(x+y)^n$: выражение не изменяется при перестановке $x$ и $y$, значит, коэффициенты при $x^k y^{n-k}$ и $x^{n-k}y^k$ одинаковы. Из формулы для числа сочетаний

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

это также очевидно следует (переставим сомножители в знаменателе) □

## 2.19 Задача о монотонных путях по прямой: разрешены любые ходы. Два способа вычисления ответа

Есть клетчатая лента, по которой можно двигать фишку. Клетки пронумерованы целыми числами. В начале фишка находится в клетке 0. Далее её можно сдвигать вправо. Нужно подсчитать, сколько есть различных способов попасть в клетку с номером $n$

Нужно найти количество всех монотонно возрастающих последовательностей целых чисел, первый член которых равен 0, а последний равен $n$. Обозначим это количество $T(n)$

Нетрудно найти $T(n)$ при малых $n$

**n = 0.** Единственная монотонная последовательность, начинающаяся и заканчивающаяся на 0: это (0). Поэтому $T(0) = 1$

**n = 1.** Единственная монотонная последовательность, начинающаяся на 0 и заканчивающаяся на 1: это $(0, 1)$. Поэтому $T(1) = 1$

**n = 2**. Монотонных последовательностей, начинающихся на 0 и заканчивающаяся на 2 уже две: это $(0, 1, 2)$ и $(0, 2)$. Поэтому $T(2) = 2$

При росте $n$ количество вариантов растёт и уже легко ошибиться в подсчёте. Вместо этого попробуем найти соотношение между этими числами. Оно имеет вид

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + \ldots + T(0)$$

для любого $n$

Докажем эту формулу. Обозначим через $X$ множество всех монотонных последовательностей, начинающихся с 0 и заканчивающихся на $n$. Разделим последовательности на группы, в зависимости от последнего хода. То есть группу $X_i$ образуют те монотонные последовательности, которые имеют вид $0, \ldots,\ i,\ n$

Ясно, что каждая последовательность попала ровно в одну группу и группы не пересекаются (смотрим на последний ход или на предпоследний член последовательности). По правилу суммы получаем

$$|X| = |X_0| + |X_1| + |X_2| + \ldots + |X_{n-1}|$$

С другой стороны, $|X_i| = T(i)$ (монотонные последовательности, начинающиеся в 0 и заканчивающиеся в $i$). Отсюда и получается наша формула

Пользуясь индукцией и доказанной формулой, докажем формулу для $T(n):\ T(n) = 2^{n-1}\ \forall\ n \geqslant 1$

**База:** при $n = 1:\ T(0) = 2^{1-1} = 1$

**Шаг индукции.** Индуктивное предположение: $T(n) = 2^{n-1}$. Поэтому верно:

$$T(n+1) = T(n) + T(n-1) + T(n-1) + \ldots + T(0) = T(n) + T(n) = 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^{(n+1)-1}$$

Есть и другой способ посчитать это число. Давайте задавать протокол движения клетками, в которых побывала фишка. Клетки 0 и $n$ всегда будут, поэтому их пропустим. Получаем протокол движения в виде двоичного слова длины $n-1$ : в позиции $i$ стоит 1, если фишка побывала в $i$-й клетке, иначе стоит 0. Любое двоичное слово задаёт протокол ровно одного движения. Поэтому получили биекцию между способами переместить фишку из 0 в $n$ и двоичными словами длины $n-1$. А это количество мы уже подсчитывали: таких слов ровно $2^{n-1}$

Ещё один способ увидеть ответ: количество таких путей совпадает с количеством подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. Каждому пути взаимно однозначно соответствует множество клеток с номерами от 1 до $n-1$, на которых побывала фишка

## 2.20 Задача о монотонных путях по прямой: разрешены ходы на 1 или 2 клетки. Рекуррентная и явная формула

Теперь нужно подсчитать количество монотонно возрастающих последовательностей целых чисел, первый член которых равен 0, последний равен $n$, а *разность между двумя соседними принимает только значения 1 или 2.* Такие последовательности — это протоколы движения фишки по клеточкам. Каждому способу движения отвечает ровно одна последовательность и по ней этот способ движения так же однозначно определяется

Обозначим количество таких последовательностей $H_n$. При этом, $H_{n+2} = H_{n+1} + H_n$

Все последовательности, заканчивающиеся на n + 2, разделяются на две непересекающиеся группы:

$$0, \dots,\ n,\ n+2$$

$$0, \dots,\ n+1,\ n+2$$

Это так, потому что в клетку $n+2$ можно попасть либо с клетки $n$, либо с клетки $n+1$, на месте многоточий возможно вставить любую последовательность чисел, в которой разности между соседними числами равны 1 или 2

Количество таких последовательностей при малых $n$ легко высчитать. При $n \leqslant 2$ получаются те же числа, что в пункте 2.19, так как ограничения на длину шага выполняются при $n \leqslant 2$ для любой последовательности. Итак, $H_0 = H_1 = 1,\ H_2 = 2$

Продолжив, получим последовательность Фибоначчи: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$

**Реккурентная формула.** $H_0 = 1,\ H_1 = 1,\ H_{n+2} = H_{n+1} + H_n \forall n \geqslant 0$

**Явная формула.** $F_n = \frac{\psi^n - \phi^n}{\sqrt{5}}$, где $\psi = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. То же самое, что здесь - 1.36

## 2.21 Свойства биномиальных коэффициентов: возрастание чисел в первой половине треугольника Паскаля; оценка для $\binom{2n}{n}$

**Утверждение.** В первой половине строки треугольника Паскаля числа возрастают

*Доказательство.* Нужно воспользоваться формулой для числа сочетаний. Запишем условие возрастания биномиальных коэффициентов в виде

$$\binom{n}{k-1} < \binom{n}{k} \Leftrightarrow 1 < \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}}$$

$$1 < \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(k-1)!(n-k+1)!}{n!} = \frac{n-k+1}{n} \Leftrightarrow 2k < n+1$$

Значит, $\binom{n}{k}$ попадает в первую половину строки треугольника Паскаля. □

**Утверждение.** $\binom{2n}{n} \geqslant \frac{2^{2n}}{2n+1}$

*Доказательство.* Из предыдущего утверждения и того, что сумма чисел в $n$-й строке треугольника Паскаля равна $2^n$, сумма всех биномиальных коэффициентов из $2n$ по $k$ равна $2^{2n}$, а средний коэффициент — самый большой. Всего коэффициентов $2n+1$, поэтому

$$(2n+1)\binom{2n}{n} \geqslant 2^{2n} \Leftrightarrow \binom{2n}{n} \geqslant \frac{2^{2n}}{2n+1}$$

□

## 2.22 Равенство количества подмножеств с чётным и нечётным числом элементов. Комбинаторное и аналитическое доказательства

**Формулировка.** Если $n > 0$, тогда количество подмножеств $n$-элементного множества с нечётным количеством элементов равно количеству подмножеств $n$-элементного множества с чётным количеством элементов

*Комбинаторное доказательство.* Рассмотрим $n$-элементное множество $[n]$. Разобьём подмножества $[n]$ на пары:

$$\{\{n-1\} \cup S,\ S\}, \text{ где } S \subseteq [n-1]$$

В каждой паре одно из множеств содержит чётное количество элементов, а другое — нечётное. Получаем биекцию из множества подмножеств с чётным числом элементов в множество подмножеств с нечётным числом элементов. $\square$

*Аналитическое доказательство.* Количество $k$-элементных подмножеств $n$-элементного множества равно $\binom{n}{k}$

Формула бинома: $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$. Подставим в неё $1 = -x = y$

Получаем:

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = \sum_{k\ even} \binom{n}{k} - \sum_{k\ odd} \binom{n}{k}$$

Отсюда следует, что подмножеств с четным и нечетным числом элементов поровну. $\square$

## 2.23 Мультиномиальные коэффициенты: два доказательства формулы для их вычисления

**Формулировка.** $\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_k} = \frac{n!}{a_1! a_2! \ldots \cdot a_k!}$ $(a_1 + \ldots + a_k = n)$

*Комбинарное доказательство.* При раскрытии скобок в равенстве из 1.37 получаются слагаемые, каждое из которых имеет вид $x_1 x_2 x_3 \ldots$: первая переменная взята из первой скобки, вторая — из второй, и т.д. Это слово $w$ в алфавите $\{x_1, \ldots, x_k\}$, в котором $n$ букв. После перестановок переменных из этого слова получается моном $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_k^{a_k}$, где $a_i$ — количество букв $x_i$ в слове $w$

Значит, мультиномиальный коэффициент $\binom{n}{a_1, \ldots a_k}$ равен количеству слов в алфавите $\{x_1, \ldots, x_k\}$, длина которых равна $n$, а количество вхождений каждого символа задаётся числами $a_1, \ldots, a_k$

Итак, нам нужно посчитать количество слов длины $n$, в которых $a_1$ букв $x_1, \ldots, a_k$ букв $x_k$ $(a1 + \ldots + a_k = n)$. Временно забудем, что в нашем слове есть одинаковые буквы. Существует $n!$ слов длины $n$, в которых все буквы разные.

Теперь вспомним, что у нас есть одинаковые буквы и поймём, сколько раз мы посчитали каждое слово. Можно как угодно переставлять буквы $x_j$. Этих букв $a_j$, существует $a_j!$ перестановок этих букв

Таким образом, по правилу произведения каждое слово посчитано $a_1! \cdot \ldots \cdot a_k!$ раз. То есть, когда мы насчитали $n!$ слов, мы на самом деле посчитали каждое слово много раз, а именно $a_1! \cdot \ldots \cdot a_k!$ раз (это число не зависит от слова). Следовательно, всего существует $\frac{n!}{a_1! a_2! \ldots \cdot a_k!}$ разных слов. $\square$

*Алгебраическое доказательство.* Нужно посчитать количество слов длины $n$, в которых $a_1$ букв $x_1, \ldots, a_k$ букв $x_k$. Сначала выберем, на каких местах будут стоять буквы $x_1$. Нужно выбрать $a_1$ мест из имеющихся $n$ — всего есть $\binom{n}{a_1}$ варинатов сделать это. Далее для букв $x_2$. Нужно выбрать $a_2$ мест из оставшихся $n - a_1$. Вариантов сделать это $\binom{n-a_1}{a_2}$. И так далее пока не дойдем до букв $x_k$, для которых останется $n - a_1 - \ldots - a_{k-1}$ мест. Вариантов сделать такой выбор - $\binom{n-a_1-\ldots-a_{k-1}}{a_k}$

Теперь выведем равенство:

$$\binom{n}{a_1}\binom{n-a_1}{a_2} \cdot \ldots \cdot \binom{n-a_1-\ldots-a_{k-1}}{a_k} = \frac{n!}{a_1!(n-a_1)!} \frac{(n-a_1)!}{a_2!(n-a_1-a_2)!} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-a_1-\ldots-a_{k-1})}{a_k! 0!} = \frac{n!}{a_1! a_2! \ldots a_k!}$$

$\square$

## 2.24 Сочетания с повторениями. Формула для вычисления

**Формулировка.** Если $\left(\binom{n}{k}\right)$ - число сочетаний с повторениями, то $\left(\binom{n}{k}\right) = \binom{n+k-1}{k}$

*Доказательство.* Моном $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_k^{a_k}$ имеет степень $a_1 + \ldots + a_n$ и мономы совпадают только тогда, когда соответствующие последовательности показателей равны. Поэтому нам нужно найти количество решений уравнения $a_1 + \ldots + a_n = k$ в натуральных числах

Установим взаимно однозначное соответствие между решениями этого уравнения и $k$-элементными подмножествами $(n+k-1)$-элементного множества. Сделаем это, используя задачи о разделе монет

Выстроим монеты в ряд и разделим их перегородками, чтобы указать, кому какие монеты отходят. Первый получает монеты, которые расположены до первой перегородки, второй — те, которые лежат между первой и второй, и т.д. Получается, $a_1 = 0,\ a_2 = 2,\ a_3 = 0,\ a_4 = 2,\ a_5 = 0,\ a_6 = 1,\ a_7 = 2$

Итак, у нас есть позиции, на каждую из которых можно поставить либо монету, либо перегородку. Всего позиций $n + k - 1$, а монет — $k$. Любой выбор $k$-элементного подмножества позиций, на котором стоят перегородки, возможен, и каждому такому выбору отвечает ровно одно решение уравнения. $\square$

## 2.25 Задача о количестве монотонных путей из n шагов из точки 0 в точку k. Связь с числом сочетаний с повторениями

Монотонный путь, состоящий из $n$ шагов, по прямой из 0 в $k$ — это другое название такой строго возрастающей последовательности целых чисел $x_! < \ldots < x_{n+1}$, что $x_1 = 0, \ x_{n+1} = k$

Такой монотонный путь однозначно задаётся выбором $n - 1$ числа в интервале от 1 до $k - 1$ (путь монотонный, поэтому эти числа он обязан проходить в порядке возрастания)

Поэтому количество таких путей равно количеству $(n-1)$-элементных подмно- жеств $(k-1)$-элементного множества, то есть $\binom{k-1}{n-1}$. $\square$

**Связь с числом сочетаний с повторениями.** Заметим, что путь однозначно задаётся последовательностью длин ходов: $l_1 = x_2 - x_1 = x_2, \ldots \ l_n = x_{n+1} - x_n = k - x_n$. В сумме эти числа обязаны давать $k$

Мы получаем разные решения для уравнения $a_1 + \ldots + a_n = k$ и $l_1 + \ldots + l_n = k$, так как в первом случае мы искали решения в *неотрицательных* целых числах. А во втором нам нужны решения в *положительных* целых числах. Однако эти два уравнения можно связать записав:

$$a_1 + \ldots + a_n = k - n$$

## 2.26 Формула включений и исключений для n множеств

Предполагаем, что все множества $A_i$ содержатся в некотором множестве (универсуме). Например, можно считать универсумом объединение всех этих множеств, обозначим его $A$. Количество элементов в множестве $S$ выражается как сумма индикаторной функции по всему универсуму:

$$|S| = \sum_{u \in A} \chi_S(u)$$

Теперь применим формулу

$$\chi_A(x) = 1 - (1 - \chi_{A_1}(x))\,(1 - \chi_{A_2}(x)) \ldots (1 - \chi_{A_n}(x))$$

и раскроем скобки в полученном выражении. При раскрытии скобок получается -1, которая сокращается с первой 1 в формуле. Остальные слагаемые получаются так: выберем непустое множество $J$ тех скобок, из которых берём слагаемое -$\chi_{A_i}$, из остальных скобок выбираем 1. Получается слагаемое, которое имеет вид произведения индикаторных функций со знаками:

$$-(-1)^k \prod\nolimits_{i \in J} \chi_{A_i} = (-1)^{k+1} \chi_{A_J}, \text{ где } k = |J|$$

а через $A_j$ обозначено пересечение тех множеств, индексы которых попадают в множество $J$, то есть

$$A_J = \bigcap_{i \in J} A_i$$

Отсюда имеем:

$$\chi_A(x) = \sum_{J \neq \varnothing} (-1)^{|J|+1} \chi_{A_J}(x)$$

Суммирование по всему универсуму этого равенства даст в левой части мощность объединения, а в правой — формулу включений и исключений

$$|A| = \sum_x \chi_A(x) = \sum_x \sum_{J \neq \varnothing} (-1)^{|J|+1} \chi_{A_J}(x) = \sum_{J \neq \varnothing} (-1)^{|J|+1} |A_J| \quad .$$

$\square$

## 2.27 Количество сюръекций из n-элементного множества в k-элементное

**Теорема.** Количество сюръекций n-элементного множества в k-элементное равно

$$\sum_{p=0}^{k}(-1)^p\binom{k}{p}(k-p)^n = k^n - \sum_{p=1}^{k}(-1)^{p+1}\binom{k}{p}(k-p)^n$$

Чтобы найти количество сюръекций, нужно из всего количества тотальных функций, их $k^n$, вычесть количество не-сюръекций. Чтобы найти количество не-сюръекций, применим формулу включений и исключений

Не-сюръекции $[n] \to [k]$ — это те тотальные функции, область значений которых не содержит хотя бы одно из чисел $\{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$ то есть объединение множеств

$$A(0) \cup A(1) \cup \ldots \cup A(k-1),$$

где $A(i)$ - множество тех функций, которые не принимают значения $i$

Все множества $A(i)$ имеют размер $(k-1)^n$

Для формулы включений и исключений нужно ещё подсчитать размер пересечений таких множеств. Рассмотрим пересечение $p$ множества $A(i)$. Это функции, которые не принимают некоторые $p$ значений. Таких функций столько же, сколько тотальных функций из $n$-элементного множества в $(k-p)$-элементное, то есть $(k-p)^n$

А всего разных наборов из $p$ множеств $A(i)$ столько же, сколько $p$-элементных подмножеств $k$-элементного множества, то есть $\binom{k}{p}$. Поэтому формула включений и исключений для данного семейства множеств приобретает вид, указанный в теореме. □

## 2.28 Формула для числа разбиений n-элементного множества на k непустых непомеченных классов. Связь с числом сюръекций

**Формула.**

$$\Phi(n,k) = \sum_{\substack{l_1,\ldots,l_n \geqslant 0 \\ 1\cdot l_1 + 2l_2 + \ldots + nl_n = n \\ l_1 + \ldots + l_n = k}} \frac{n!}{l_1! l_2! \ldots l_n! (1!)^{l_1} (2!)^{l_2} \ldots (n!)^{l_n}}$$

*Доказательство.* Рассмотрим разбиение на классы конкретных размеров (потом нужно будет просуммировать получившиеся результаты). Пусть имеется $l_i$ классов размера $i, 1 \leqslant i \leqslant n$. Ясно, что все эти числа неотрицательные, причём их сумма должна быть равна числу классов $(l_1 + \ldots + l_n = k)$. В этих классах содержится $1 \cdot l_1 + 2 \cdot l_2 + \ldots + n \cdot l_n$ элементов, и это число должно быть равно $n$ - размеру всего множества

Допустим, что классы у нас различимые. Существует $\binom{n}{\alpha}$ разбиений на такие различимые классы. Это мультиномиальный коэффициент, где в последовательности $\alpha$ встречается $l_i$ раз число $i$. Было доказано, что $\binom{n}{\alpha} = \frac{n!}{(1!)^{l_1}(2!)^{l_2}\ldots(n!)^{l_n}}$. Классов размера $i$ имеется $l_i$ штук, значит, имеется $l_i!$ их перестановок

Таким образом, всего имеется $l_1! l_2! \ldots l_n!$ возможных перестановок имеющихся классов. Значит, именно столько раз мы учли каждое разбиение в формуле для $\binom{n}{\alpha}$, и на это число надо поделить. Перебрав все возможные варианты разбиений на классы конкретных размеров, получаем формулу из формулировки теоремы. □

**Связь с числом сюръекций.** Обозначим через $\mathrm{Surj}(n,k)$ число сюръекций $n$-элементного множества в $k$-элементное

$$\mathrm{Surj}(n,k) = \Phi(n,k) \cdot k!$$

*Доказательство.* Рассмотрим какую-нибудь сюръекцию из $n$-элементного множества в $k$-элементное $\{a_1, \ldots, a_k\}$. В результате мы разбили $n$-элементное множество на $k$ непустых помеченных классов: в $i$-тый класс попадут элементы, образ которых равен $a_i$. Сюръективность функции обеспечивает непустоту классов

Таким образом, число сюръекций из $n$-элементного множества в $k$-элементное равно числу разбиений $n$-элементного множества на $k$ непустых помеченных классов. Если классы непомеченные, то $k$ классов можно переставлять $k!$ способами

Получается, если теперь посчитать число разбиений с непомеченными классами, то мы каждое разбиение с помеченными классами посчитали $k!$ раз. □

## 2.29 Задача о числе беспорядков. Формула для количества беспорядков на n-элементном множестве. Доля беспорядков среди всех перестановок

**Формулировка.** Количество беспорядков задаётся формулой

$$n!\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right)$$

*Доказательство.* Зафиксируем $n$ и обозначим через $B_i$, где $i = 1, \ldots, n$, множество тех перестановок, для которых $a_i = i$. Тогда $B_1 \cup \ldots \cup B_n$– множество перестановок с неподвижными точками. Дополнением к этому объединению будет в точности множество беспорядков

Применим формулу включений и исключений к множеству $B_1 \cup \ldots \cup B_n$. Для этого нужно посчитать размеры множеств $\bigcap\limits_{i\in S} B_i$ для всевозможных $S \subseteq [n]$. Перестановки из такого пересечения - это перестановки, оставляющие на месте элементы из $S$, и переставляющие остальные элементы произвольным образом. Таких перестановок ровно $(n - |S|)!$ штук. Таким образом, для всякого $S$ верно

$$\left|\bigcap_{i\in S} B_i\right| = (n - |S|)!$$

Множеств $S$ размера $k$ всего $\binom{n}{k}$, так что по формуле включений и исключений мы получаем

$$|B_1 \cup \ldots \cup B_n| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\cdot(n-k)! = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{n!}{k!},$$

а для количества беспорядков

$$n! - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{n!}{k!} = \frac{n!}{0!} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\frac{n!}{k!} = n!\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right)$$

***Доля беспорядков.***

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

## 2.30 Критерий транзитивности отношения. Отношение, являющееся одновременно рефлексивным и антирефлексивным. Отношение, являющееся одновременно симметричным и антисимметричным. Транзитивность пустого и одноэлементного отношения

**Теорема.** Отношение $R$ на множестве $A$ транзитивно тогда и только тогда, когда $R \circ R \subseteq R$

**Доказательство.** Пусть отношение $R$ транзитивно. Рассмотрим какую-нибудь пару $(a, b) \subseteq R \circ R$. Это означает, что для некоторого $y \subseteq A(a, y), (y, b) \in R$. По транзитивности $R$ получаем, что $(a, b) \in R$. Значит, выполняется включение $R \circ R \subseteq R$

Обратно, пусть $R \circ R \subseteq R$. Возьмём две пары $(x, y)$ и $(y, z)$ из отношения $R$. По определению композиции $(x, z) \in R \circ R$. Поскольку квадрат отношения лежит в нём самом, получаем, что $(x, z) \in R$. То есть доказали транзитивность отношения □

**Пример.** Нужно, чтобы $\forall x \in A$ было выполнено $(x, x) \in R$ и $(x, x) \notin R$. Это невозможно, если в множестве $A$ содержится хотя бы один элемент. Если же множество $A$ пусто, то единственное бинарное отношение на множестве $A$ — это пустое отношение. Оно является одновременно и рефлексивным, и антирефлексивным

**Пример.** Пусть какое-то $(x, y) \in R$. В силу симметричности $(y, x) \in R$, а в силу антисимметричности получаем, что $x = y$. Таким образом, если $R$ одновременно симметрично и антисимметрично, то в него могут попасть только пары вида $(x, x)$, то есть $R \subseteq id_A$. Обратно: ясно, что любое бинарное отношение $R$, для которого выполнено $R \subseteq id_A$, является одновременно симметричным и антисимметричным

**Пример.** Пустое бинарное отношение $\varnothing$ на любом множестве $A$ является транзитивным, потому что в импликации $(x, y) \in \varnothing \wedge (y, z) \in \varnothing \to (x, z) \in \varnothing$ левая часть всегда ложна, а импликация всегда истинна. Можно также сказать, что $\varnothing \circ \varnothing = \varnothing$, то есть выполнен критерий транзитивности. Любое отношение, содержащее ровно одну пару, также является транзитивным. Пусть $R = \{(a, b)\}$. Тогда, если $a \neq b$, то $R \circ R = \varnothing$, а если $a = b$, то $R \circ R = \{(a, a)\}$. То есть снова выполнен критерий транзитивности $R \circ R \subseteq R$

## 2.31 Выражение композиции отношений через матрицы. Критерий транзитивности отношения в терминах матриц

Пусть $M_R$ и $M_S$ — матрицы отношений $R$ и $S$ ($R$ — бинарное отношение на множествах $A$ и $B$, а $S$ — бинарное отношение на множествах $B$ и $C$, элементы множества $B$ в обеих матрицах пронумерованы одинаково)

Тогда матрица отношения $S \circ R$ получается так: берём матрицу $M_R \cdot M_S$, после чего меняем все числа, превосходящие 1, на 1

Пусть $(a_i, c_k) \in S \circ R$. Это означает, что $\exists\ b_j$, что $(a_i, b_j) \in R, (b_j, c_k) \in S$. Значит, при вычислении элемента $(i, k)$ матрицы $M_R \cdot M_S$ в сумме $\sum\limits_{l} M_R(i, l) M_S(l, k)$ возникло ненулевое число. А значит, элемент $(i, k)$ матрицы $M_R \cdot M_S$ будет положительным. Аналогично рассуждаем, если $(a_i, c_k) \notin S \circ R$

Пусть $M$ — матрица бинарного отношения $R$. Пусть матрица $N$ получается из матрицы $M \cdot M$ заменой всех элементов, больших 1, на 1. Тогда отношение $R$ транзитивно тогда и только тогда, когда в матрице $N$ каждый элемент не превосходит элемента матрицы $M$, стоящего на том же месте (иными словами, не бывает такого, что в матрице $N$ стоит 1 на том месте, где в матрице $M$ стоит 0). Это наблюдение следует из теоремы 2.30 и того, как считается матрица композиции

**Пример.** Пусть матрица отношения $R$ равна $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда матрица отношения $R \circ R$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

На месте (2,2) в этой матрице стоит 1, а в исходной — 0

Следовательно, $R$ не транзитивно

## 2.32 Свойства транзитивного замыкания. Транзитивность пересечения любого непустого семейства транзитивных отношений. Существование и единственность транзитивного замыкания

Пусть $R$ — бинарное отношение на множестве $A$

**Определение.** Транзитивное замыкание отношения $R$ — наименьшее по включению транзитивное бинарное отношение на множестве $A$, содержащее отношение $R$. Обозначение: $R^*$

Свойства транзитивного замыкания отношения:

1. Если $R$ - транзитивное отношение, то $R^* = R$
2. Для любого отношения $R$ выполнено $R^* = R^{**}$

**Доказательство.**

1. Пусть $R$ - транзитивно. Проверим, что $R$ - его транзитивное замыкание. Действительно, $R$ транзитивно, $R \subseteq R$, и для любого транзитивного $T$, если $R \subseteq T$, то $R \subseteq T$. Значит, по определению, $R^* = R$
2. По определению $R^*$ транзитивно. Осталось применить п. 1

**Лемма о транзитивности пересечения непустого...** Пусть $R_i, i \in I-$ произвольный непустой набор транзитивных отношений на множестве $A$. Тогда их пересечение $\bigcap_{i \in I} R_i$ также транзитивно (это также отношение на множестве $A$)

**Доказательство.** Возьмём любые $(x, y), (y, z) \in \bigcap_{i \in I} R_i$. Раз они лежат в пересечении, то они лежат в каждом $R_i$. Так как каждое $R_i$ транзитивно, имеем $(x, z) \in R_i$ для всех $i$. Отсюда $(x, z) \in \bigcap_{i \in I} R_i$ $\square$

**Теорема о существовании и единственности транзитивного замыкания.** Для любого бинарного отношения $R$ на множестве A существует его транзитивное замыкание $R^*$

**Доказательство.** Рассмотрим все транзитивные отношения $R_i$ на множестве $A$, содержащие отношение $R$ (обозначим $i \in I$ ). Этот набор непуст: ему точно принадлежит полное бинарное отношение. Значит, можно рассмотреть его пересечение $\bigcap_{i \in I} R_i$

По предыдущей лемме это отношение также транзитивно. Далее, поскольку $R \subseteq R_i$ для каждого $i$, то $R \subseteq \bigcap_{i \in I} R_i$. Наконец, если $T$ - какое-то транзитивное отношение на множестве $A$, то оно присутствует в этом наборе $R_i, i \in I$. А это означает, что $\bigcap_{i \in I} R_i \subseteq T$ $\square$

Единственность транзитивного замыкания легко следует из определения. Действительно, если бы $R_1^*$ и $R_2^*$ были бы транзитивными замыканиями отношения $R$, то тогда имеем $R_1^* \subseteq R_2^*$ и $R_2^* \subseteq R_1^*$, откуда следует, что $R_1^* = R_2^*$

## 2.33 Построение транзитивного замыкания по заданному отношению

Пусть $R$ - бинарное отношение на множестве A. Тогда

$$R^* = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots R^n \cup \ldots$$

**Доказательство.** Пусть $T$ - бинарное отношение $R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots R^n \cup \ldots$. Докажем, что $R^* = T$

Докажем, что $T$ транзитивно. Возьмём произвольные $(x, y), (y, z) \in T$. Тогда существуют $k, s \in \mathbb{N}$, что $(x, y) \in R^k, (y, z) \in R^s$. Отсюда $(x, z) \in R^{k+s}$, а, значит, $(x, z) \in T$

Поскольку $T$ транзитивно, отсюда немедленно получаем, что $R^* \subseteq T$

Докажем, что для любого $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ выполнено $R^n \subseteq R^*$ (следовательно, $T \subseteq R^*$)
База очевидна: $R^1 = R \subseteq R^*$ по определению транзитивного замыкания. Шаг: пусть $R^n \subseteq R^*$. Возьмём произвольное $(x, z) \in R^{n+1}$. Поскольку $R^{n+1} = R \circ R^n$, по определению композиции отношений существует $y$, для которого $(x, y) \in R^n$ и $(y, z) \in R$. По предположению индукции $(x, y) \in R^*$ и $(y, z) \in R^*$. Так как $R^*$ транзитивно, получаем, что $(x, z) \in R^*$. Таким образом, доказано, что $R^{n+1} \subseteq R^*$

Поскольку доказаны оба включения $R^* \subseteq T$ и $T \subseteq R^*$, заключаем, что $T = R^*$. $\square$

**Примечание.** Если множество $A$ конечно, то отношения в бесконечной цепочке

$$R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots R^n \cup \ldots$$

с какого-то места начнут повторяться, потому что существует только конечное множество бинарных отношений на конечном множестве $A$. Так что для конечных множеств это будет по существу конечное объединение

## 2.34 Построение отношения эквивалентности по разбиению множества. Теорема о том, что отношение эквивалентности делит множество на классы эквивалентности

**Пример.** Пусть $A$ разбито в дизъюнктное объединение множеств $A_i$ :

$$A = \bigcup_i A_i, \quad A_i \cap A_j = \varnothing, \text{ если } i \neq j$$

Тогда пары $(x, y)$, для которых выполняется условие $x \in A_i, y \in A_i$ для некоторого $i$ (то есть эти элементы лежат в одном множестве разбиения), образуют отношение эквивалентности.

Рефлексивность и симметричность очевидны из определения. Транзитивность легко проверяется. Пусть $x, y \in A_i; y, z \in A_j$. Так как $A_i \cap A_j \supseteq \{y\} \neq \varnothing$, то $A_i = A_j$. Значит ( $x, z$ ) также находится в отношении

**Теорема.** Любое отношение $R$, являющееся отношением эквивалентности на множестве $A$, делит $A$ на классы эквивалентности — непересекающиеся подмножества множества $A$, при этом любые два элемента одного класса находятся в отношении $R$, а любые два элемента разных классов не находятся в отношении $R$

**Доказательство.** Для каждого $x \in A$ рассмотрим множество $C(x) = \{y : xRy\}$ тех $y$, для которых верно $xRy$. Это и есть обещанные классы эквивалентности. Чтобы это доказать, нужно проверить три условия:

1. Объединение всех множеств вида $C(x)$ совпадает с множеством $A$

   В силу рефлексивности множество $C(x)$ содержит $x$ в качестве своего элемента: $x \in C(x)$, поскольку $xRx$. Отсюда следует, что объединение всех этих множеств совпадает с $A$

2. Два множества $C(x)$ и $C(y)$ либо не пересекаются, либо совпадают

   Пусть $z \in C(x) \cap C(y)$, то есть верно $xRz$ и $yRz$. Симметричность даёт $zRy$. Теперь применим транзитивность к $xRz$ и $zRy$, заключаем, что $xRy$ и по симметричности $yRx$

   Пусть $t \in C(y)$, то есть $yRt$. Применим транзитивность к $xRy$ и $yRt$, заключаем, что $xRt$, то есть $t \in C(x)$. Значит, $C(y) \subseteq C(x)$. Аналогично доказывается, что $C(x) \subseteq C(y)$, так что $C(x) = C(y)$

3. $C(x) = C(y)$ в том и только том случае, когда $xRy$ (то есть $R$ совпадает с отношением «принадлежать одному классу», как в примере)

   Если для каких-то $x, y$ верно $xRy$, то $x$ и $y$ оба лежат в одном классе, а именно, в $C(x)$. Обратно, если $x$ и $y$ лежат в каком-то $C(z)$, то по определению имеем $zRx$ и $zRy$. Симметричность даёт $xRz$, после чего транзитивность даёт $xRy$

$\square$

## 2.35 Теорема о сумме степеней вершин. Лемма о рукопожатиях. Число рёбер в полном графе на $n$ вершинах. Свойства отношения достижимости в графе

**Теорема.** Сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному числу его рёбер

**Доказательство.** Применим метод двойного подсчёта. Если посчитать сумму элементов матрицы по строкам, то получится такое же число, как и при суммировании элементов матрицы по столбцам

Посчитаем количество 1 в матрице инцидентности графа. В строке $i$ количество 1 равно количеству инцидентных вершине $i$ рёбер, то есть степени этой вершины. Значит, сумма 1 по строкам равна сумме степеней вершин

В каждом столбце матрицы инцидентности ровно две 1, так как у ребра ровно два конца. Значит, сумма 1 по столбцам равна удвоенному количеству рёбер

Обе суммы равны общему количеству 1 в матрице инцидентности, а значит, равны между собой $\square$

**Лемма.** В любом графе количество вершин с нечётными степенями чётно

**Доказательство.** Лемма следует из предыдущей теоремы. Сумма степеней всех вершин — это всегда чётное число, поэтому нечётных слагаемых в этой сумме должно быть чётное количество

**Лемма.** Свойства отношения достижимости в графе:

1. (рефлексивность) $(v, v) \in R$ (вершина достижима из себя самой)
2. (симметричность) $(v_1, v_2) \in R$ равносильно $(v_2, v_1) \in R$
3. (транзитивность) если $(v_1, v_2) \in R$ и $(v_2, v_3) \in R$, то $(v_1, v_3) \in R$

**Доказательство.** Так как $v$ - путь (длины 0), вершина $v$ связанная с самой собой

Если $v_1u_1 \dots u_sv_2$-путь в графе, то $v_2u_s \dots u_1v_1$ — также путь (записываем те же вершины, но в обратном порядке). Поэтому достижимость $v_2$ из $v_1$ равносильна достижимости $v_1$ из $v_2$

Если в графе есть пути $v_1u_1 \dots u_sv_2$ и $v_2w_1 \dots w_tv_3$ (то есть $(v_1, v_2) \in R$ и $(v_2, v_3) \in R$)), то в этом графе есть также и путь $v_1u_1 \dots u_sv_2w_1 \dots w_tv_3$, то есть $(v_1, v_3) \in R$ (вершина $v_3$ достижима из $v_1$). $\square$

## 2.36 Принцип наименьшего числа. Теорема о том, что между любыми двумя связанными вершинами существует простой путь

### Принцип наименьшего числа

**Теорема.** Любое непустое подмножество натуральных чисел содержит наименьший элемент

**Доказательство.** Пусть $X$ — подмножество натуральных чисел, в котором нет наименьшего элемента, т.е. $\forall a \in X\ \exists b \in X : b < a$

Докажем, что $n \notin X\ \forall n \iff X = \varnothing$ по полной индукции. $0 \notin X$, т.к. $0$ — наименьшее натуральное число. Предположим, что $\forall k < n$ известно, что $k \notin X$. Тогда $n \notin X$, т.к. в противном случае $n$ было бы наименьшим натуральным числом в $X$. Отсюда, $n \notin X\ \forall n$, т.е. $X$ пустое

Мы доказали, что если множество натуральных чисел $X$ не имеет наименьшего натурального элемента, то оно пусто. Контрапозиция к этому утверждению и есть принцип наименьшего числа

### Теорема

**Теорема.** Если две вершины $x, y$ связанные в графе $G$, то в этом графе существует простой путь с началом $x$ и концом $y$

**Доказательство из конспекта.** Используем принцип наименьшего числа. Если существует хотя бы один путь из $x$ в $y$, то существует и путь наименьшей длины (нет пути короче)

Рассмотрим кратчайший путь $x = u_1, \ldots, u_k = y$ и докажем, что он простой с помощью контрапозиции. Тогда нужно доказать, что если путь $x = u_1, \ldots, u_k = y$ не простой, то он не кратчайший. Пусть $u_i = u_j,\ i < j$. Тогда последовательность $x = u_1, \ldots, u_i, u_{j+1}, u_k = y$ также является путем из $x$ в $y$, а длина этого пути меньше. (Если $j = k$, то есть вершина $u_{j+1}$ не существует, то тогда более короткий путь имеет вид $x = u_1, \ldots, u_i = u_k = y$) ☐

**Доказательство из учебника Вялого.** Рассмотрим кратчайший путь из $x$ в $y$. Предположим, что в него дважды входит некоторая вершина $w$, тогда участок между этими вхождениями можно было бы выбросить, и получился бы более короткий (простой) путь из $x$ в $y$, вопреки предположению ☐

## 2.37 Лемма про сумму исходящих и входящих степеней вершин. Свойства отношения достижимости в орграфе. Свойства отношения сильной связанности в орграфе

### Лемма

**Формулировка.** Сумма исходящих степеней всех вершин равна сумме входящих степеней всех вершин: обе суммы равны числу рёбер графа

**Доказательство.** Каждое ребро имеет одно начало (выходит из какой-то вершины) и поэтому учитывается по одному разу, когда мы складываем исходящие степени всех вершин. Аналогично для концов рёбер ☐

### Свойства отношения достижимости в орграфе

**Формулировка.** Свойства любого простого ориентированного графа и любых его вершин $v_1$, $v_2$, $v_3$:

1. *рефлексивность:* $(v, v) \in R$ — вершина достижима из самой себя
2. *транзитивность:* если $(v_1, v_2) \in R$ и $(v_2, v_3) \in R$, то $(v_1, v_3) \in R$

**Доказательство.** Так как $v$ — путь (длины 0), вершина $v$ связанная с самой собой

Если в графе есть пути $v_1 u_1 \ldots u_s v_2$ и $v_2 w_1 \ldots w_t v_3$ (то есть $(v_1, v_2) \in R$ и $(v_2, v_3) \in R$)), то в этом графе есть также и путь $v_1 u_1 \ldots u_s v_2 w_1 \ldots w_t v_3$, то есть $(v_1, v_3) \in R$. Значит, вершина $v_3$ достижима из $v_1$ ☐

**Свойства отношения сильной связанности в орграфе**

**Форулировка.** Для любого ориентированного графа отношение сильной связанности *рефлексивно, симметрично и транзитивно*, то есть является отношением эквивалентности

**Доказательство.**

- *Рефлексивность:* $v_1$ — путь в любом графе, поэтому $v_1$ сильно связана сама с собой
- *Транзитивность:* если в графе есть пути из $v_1$ в $v_2$, из $v_2$ в $v_1$, из $v_2$ в $v_3$, из $v_3$ в $v_2$, то обязательно есть и пути из $v_1$ в $v_3$ (соединяем путь из $v_1$ в $v_2$ с путём из $v_2$ в $v_3$), а также из $v_3$ в $v_1$ (соединяем путь из $v_3$ в $v_2$ с путём из $v_2$ в $v_1$)
- *Симметричность:* если $(u, v) \in C$, то по определению $(u, v) \in R$ и $(v, u) \in R$. Отсюда следует, что и $(v, u) \in C$

□

## 2.38 Критерий эйлеровости ориентированного и неоринтированного графа

**Критерий—1**

**Формулировка.** В ориентированном графе без изолированных вершин существует эйлеров цикл тогда и только тогда, когда граф сильно связен и у любой вершины входящая степень равна исходящей

**Доказательство.** Пусть эйлеров цикл в орграфе есть. Тогда он проходит через все вершины (поскольку они имеют ненулевую степень), и по нему можно дойти от любой вершины до любой. Значит, орграф сильно связен

Возьмём какую-то вершину $v$, пусть она встречается в эйлеровом цикле $k$ раз. Двигаясь по циклу, мы приходим в неё $k$ раз и уходим $k$ раз, значит, использовали $k$ входящих и $k$ исходящих рёбер. При этом, раз цикл эйлеров, других рёбер у этой вершины нет, так что в ориентированном графе её входящая и исходящая степени равны $k$

В обратную сторону. Пусть орграф сильно связен и в каждой вершине исходящая степень равна входящей. Выберем самый длинный простой в рёбрах путь, т.е. его длина не больше общего количества рёбер

$$\tau = (v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{t-1}, v_t)$$

и докажем, что этот путь и является искомым циклом, то есть что $v_0 = v_t$ и этот путь содержит все рёбра орграфа

Если $\tau$ самый длинный, то добавить к нему ребро $(v_t, v_{t+1})$ невозможно. Значит, что все выходящие из $v_t$ рёбра уже входят в $\tau$. Это возможно, лишь если $v_0 = v_t$ : если вершина $v_t$ встречалась только внутри пути (пусть она входит $k$ раз внутри пути и ещё раз в конце пути), то мы использовали $k + 1$ входящих рёбер и $k$ выходящих, и больше выходящих нет. Это противоречит равенству входящей и исходящей степени

Итак, мы имеем цикл, и осталось доказать, что в него входят все рёбра. Пусть из какой-то вершины $v_i$ выходит ребро $(v_i, v)$, не входящее в выбранный путь (цикл на самом деле). Тогда этот путь можно удлинить до простого в рёбрах пути

$$(v_{i+1}, \ldots, v_t = v_0, \ldots, v_i, v)$$

вопреки нашему выбору (самого длинного простого в рёбрах пути). Аналогично можно получить противоречие и для входящего ребра $(v, v_i)$, добавив его в начало

Значит, во всех вершинах цикла использованы все инцидентные им рёбра. Но орграф сильно связен, поэтому выбранный цикл содержит все рёбра этого графа и проходит через все вершины □

**Критерий—2**

**Формулировка.** Неориентированный граф без вершин нулевой степени содержит эйлеров цикл тогда и только тогда, когда он связен и степени всех вершин чётны

**Доказательство аналогично критерию—1.** Пусть эйлеров цикл в графе есть. Он проходит по всем вершинам, значит граф связен. В каждую вершину эйлеров цикл $k$ раз заходит и $k$ раз выходит. Значит, степень вершины $k + k = 2$k чётна

В обратную сторону опять рассматриваем самый длинный путь, в котором каждое ребро встречается не больше одного раза. Это цикл, т.к. иначе есть вершина нечётной степени
Этот цикл обязан содержать все рёбра графа, т.к. в противном случае его можно удлинить □

## 2.39 Лемма о существовании в ациклическом графе вершины с исходящей степенью 0 и вершины с входящей степенью 0. Равносильные определения ациклического графа

### Лемма

**Формулировка.** В ациклическом орграфе есть вершина, из которой не выходит ни одного ребра, а также есть вершина, в которую не входит ни одно ребро

**Доказательство.** Выберем в этом орграфе простой путь максимальной длины, обозначим его вершины $v_0, v_1, \ldots, v_t$. Тогда исходящая степень вершины $v_t$ равна 0: если в орграфе есть ребро $(v_t, x), x \notin \{v_0, \ldots, v_{t-1}\}$, то длина выбранного пути не максимальна: его можно продолжить до пути $v_0, \ldots, v_t, x$. Если же в орграфе есть ребро $(v_t, v_i)$, то в этом орграфе есть цикл $v_i, \ldots, v_t, v_i$

Аналогично доказывается, что входящая степень вершины $v_0$ равна 0 □

### Равносильные определения ациклического графа

**Формулировка.** Следующие свойства орграфа без петель равносильны:

1. Каждая компонента сильной связности состоит из одной вершины

2. Орграф ациклический

3. Вершины орграфа можно пронумеровать натуральными числами таким образом, чтобы все рёбра вели из вершины с меньшим номером в вершину с бóльшим

**Доказательство.** Доказываем утверждения теоремы по очереди

*Доказательство* (1) $\implies$ (2). Равносильно контрапозиции $\neg(2) \implies \neg(1)$. Раз в орграфе нет петель, в нём нет циклов длины 1. Если в орграфе есть цикл с $n > 1$ вершинами, то вершины этого цикла сильно связаны (из любой можно попасть в любую по циклу) — и тогда они попадут в одну компоненту связности

*Доказательство* (2) $\implies$ (1). Равносильно контрапозиции $\neg(1) \implies \neg(2)$. Если вершины $a \neq b$ сильно связаны, то существуют пути из $a$ в $b$ и из $b$ в $a$. Соединением этих путей получается цикл длины $> 0$

*Докзательство* (3) $\implies$ (2). Если возможна нумерация вершин, при которой все рёбра идут из меньшей вершины в бóльшую, то циклов нет: вдоль любого пути номера вершин строго возрастают, что невозможно при возвращении в исходную вершину

*Доказательство* (2) $\implies$ (3) докажем индукцией по числу вершин усиленный вариант: нумерация использует числа от 1 до $n$, где $n$ — число вершин в орграфе

**База индукции.** Граф без петель на одной вершине. Он ациклический и требуемая нумерация существует (это очевидно, так как рёбер нет)

**Шаг индукции.** Пусть (2) $\implies$ (3) выполняется для графов с $\leqslant n$ вершинами. Рассмотрим граф без циклов на $n+1$ вершине. Выберем вершину $v_{n+1}$ исходящей степени 0, которая существует в таком орграфе по лемме из **??**. Ей присвоим номер $n+1$. Удалив $v_{n+1}$ и все входящие в неё рёбра, получим ациклический граф. (Циклы в нём были бы циклами и в исходном графе.) По предположению индукции его вершины можно пронумеровать числами от 1 до $n$ с соблюдением условия. Объединяя эту нумерацию с номером $n+1$ вершины $v_{n+1}$, получаем искомую нумерацию. Шаг индукции доказан □

## 2.40 Критерий того, что граф является лесом, в терминах простых путей и простых циклов

**Формулировка.** Равносильные свойства **простых** неориентированных графов:

(1) каждое ребро — мост

(2) для любых связанных вершин $u$, $v$ существует единственный простой путь из $u$ в $v$

(3) нет простых циклов длины больше 2

**Доказательство.** Доказываем утверждения теоремы по очереди

*Доказательство* (2) $\implies$ (3). Равносильно контрапозиции $\neg(3) \implies \neg(2)$. Пусть в графе $G$ есть простой цикл $u_0, u_1, \ldots, u_t = u_0, t > 2$

Вершины $u_0, u_1$ соседние, а значит связанные в этом графе, причем есть как минимум два разных простых пути с концами в этих вершинах: $(u_0, u_1)$, т.е. путь из одного ребра, и путь по остальным ребрам цикла $(u_0 = u_t, u_{t-1}, \ldots, u_2, u_1)$, важно, что длина цикла больше 2 ☐

*Доказательство* (3) $\implies$ (1). Равносильно контрапозиции $\neg(1) \implies \neg(3)$. Пусть ребро $e = \{x, y\}$ можно удалить из графа $G$, и в полученном графе $G' = G - e$ количество компонент связности не увеличится. Значит, вершины $x, y$ связанные в графе $G'$. По теореме из **??** в графе $G'$ есть простой путь $x, u_1, u_2, \ldots, u_t, y$, все вершины которого различны

Тогда в графе $G$ есть простой цикл $x, u_1, u_2, u_3, \ldots, u_t, y, x$ и, т.к. $x, y, u_1$ — три различные вершины, длина этого цикла больше 2 ☐

*Доказательство* (1) $\implies$ (2). Равносильно контрапозиции $\neg(2) \implies \neg(1)$. Пусть между вершинами $u$ и $v$ есть два простых пути

$$(x_0, x_1, \ldots, x_r) \text{ и } (y_0, y_1, \ldots, y_s)$$

здесь $x_0 = y_0 = u, x_r = y_s = v$. Начинаются эти пути в одной вершине, но полностью совпадать не могут. Возьмём наибольшее общее начало этих путей, то есть максимально возможное $i$, для которого $x_j = y_j \ \forall 0 \leqslant j \leqslant i$. Тогда $x_{i+1} \neq y_{i+1}$ и потому ребро $\{x_i, x_{i+1}\}$ не входит во второй путь, но входит в первый по определению. Если $\{x_i, x_{i+1}\}$ входит во второй путь, то этот путь не простой: вершина $y_i = x_i$ встретится в нём по крайней мере дважды: второй раз случится, когда $\{y_t, y_{t+1}\} = \{x_i, x_{i+1}\}$, по построению $t > i$

Докажем, что ребро $\{x_i, x_{i+1}\}$ — не мост. При удалении этого ребра из графа вершины $x_i, x_{i+1}$ остаются в одной компоненте связности: они связаны (необязательно простым) путём

$$x_i, x_{i-1}, \ldots, x_1, u, y_1, \ldots, y_{s-1}, v, x_{r-1}, \ldots, x_{i+1}$$

Остальные области достижимости (отличные от $C(x_i)$) не изменяются: пути из таких вершин не проходят через ребро $\{x_i, x_{i+1}\}$ ☐

Поскольку мы доказали циклическую цепочку импликаций (2) $\implies$ (3) $\implies$ (1) $\implies$ (2), все эти утверждения равносильны ☐

## 2.41 Свойства цикломатического числа графа

**Свойство—1.** Граф $G' = G + e$ получается добавлением к графу $G$ ребра $e = \{x, y\}$ к множеству рёбер, а вершины у него те же

Тогда $r(G') = r(G)$, если концы ребра $x$, $y$ лежат в разных компонентах связности графа $G$, и $r(G') = r(G) + 1$, если $x$, $y$ лежат в одной компоненте связности графа $G$

**Доказательство.** Рассмотри 2 случая из формулировки

(1) *Вершины $x, y$ лежат в одной компоненте связности $C$ графа $G$.* Тогда количество компонент связности не изменилось: для любого пути в $G'$, проходящего через ребро $e$, существует путь в $G$ с теми же концами. Количество ребер увеличилось на 1, количество вершин не изменилось. Значит, цикломатическое число увеличилось на 1 ☐

(2) *Вершины $x, y$ лежат в разных компонентах связности графа $G$.* Тогда в графе $G'$ в область достижимости вершины $x$ добавляется $C(y)$, поскольку в $G'$ вершина $y$ достижима из $x$. Проводя аналогичные рассуждения про $y$, получим

$$C'(x) = C'(y) = C(x) \cup C(y).$$

Значит, области достижимости $x, y$ в $G'$ равны объединению областей достижимости этих вершини в графе $G$. Остальные области достижимости не меняются. Значит, количество компонент связности уменьшилось на 1. Количество рёбер увеличилось на 1, количество вершин не изменилось, цикломатическое число не изменилось ☐

**Свойство—2.** Цикломатическое число графа неотрицательное

**Доказательство.** Используем индукцию по количеству ребер графа. База индукции — графы без рёбер с произвольным количеством вершин. В таких графах цикломатическое число равно нулю, т.к. рёбер нет, каждая вершина является компонентой связности. И такой граф является лесом, т.к. каждое его ребро — мост (рёбер вообще нет, так что это утверждение верно)

Пусть цикломатическое число неотрицательное для всех графов с меньше чем $k$ рёбрами, $k > 0$. Рассмотрим граф $G'$ с $k$ рёбрами и выделим в нём ребро $e = \{x, y\}$. Тогда $r(G') \geqslant r(G' - e) \geqslant 0$: первое неравенство — это предыдущее свойство, а второе — индуктивное предположение. Шаг индукции доказан, свойство выполняется в силу принципа математической индукции ☐

**Альтернативное доказательство.** Тык и в видео - тык 2.0

## 2.42 Критерий того, что граф является лесом, в терминах цикломатического числа

**Формулировка.** Графы, у которых цикломатическое число равно 0, — это в точности леса, то есть графы, у которых каждое ребро — мост

**Доказательство.** Используем индукцию по количеству ребер. База проверена в доказательстве свойства—2 в **??**

Шаг индукции. Пусть теорема выполняется для графов с меньше чем $k$ рёбрами, $k > 0$. Рассмотрим граф $G$ с $k$ рёбрами

Пусть $r(G) = 0$. Так как цикломатическое число любого графа неотрицательное, каждое ребро $G$ — мост, т.к. удаление не моста уменьшает цикломатическое число. Значит, $G$ — лес

Тогда для любого ребра $e$ в графе $(G - e)$ нет простых циклов длины больше 2, т.к. любой такой цикл был бы и простым циклом в лесу $G$. По критерию **??** граф $(G-e)$ также лес. Согласно индуктивному предположению $r(G - e) = 0$. Однако, $e$ — мост в $G$, поэтому из свойства—1 в **??** получаем $r(G) = r(G - e) = 0$

Шаг индукции доказан. По принципу полной математической индукции, цикломатическое число любого леса равно 0 и все графы с цикломатическим числом 0 — леса ☐

## 2.43 Теорема про висячие вершины в дереве: два доказательства. Теорема об остовном дереве

### Теорема про висячие вершины в дереве

**Формулировка.** В дереве с хотя бы двумя вершинами найдутся по крайней мере две висячие вершины

**Доказательство—1.** Выберем вершину, пусть она не изолированная. Куда-нибудь пойдём, чтобы рёбра не повторялись. Вернуться в вершину, в которой мы уже были, невозможно — иначе нашёлся бы цикл. Поэтому ходить по графу бесконечно тоже невозможно, так что мы упрёмся в тупик — это и будет висячая вершина. Чтобы найти вторую висячую вершину, нужно проделать тот же алгоритм, начав с уже найденной висячей вершины ☐

**Доказательство—2.** Воспользуемся критерием—2 из **??**. Пусть в дереве $n \geqslant 2$ вершин. Тогда количество ребер равно $n - 1$

Обозначим степени вершин $d_1, \ldots, d_n$. Так как $n \geqslant 2$, то изолированных вершин нет (каждая изолированная вершина является компонентой связности). Из теоремы о том, что сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному числу его рёбер получим

$$d_1 + \ldots + d_n = 2(n - 1) \iff (d_1 - 2) + (d_2 - 2) + \ldots + (d_n - 2) = -2$$

Так как $d_i > 0$, каждое слагаемое в левой части не меньше —1. Значит, хотя бы два слагаемых должны быть равны —1, они отвечают висячим вершинам, для которых $d_i - 2 = 1 - 2 = -1$ ☐

### Теорема об остовном дереве

**Формулировка.** В любом связном графе есть остовное дерево

**Доказательство.** Удаляем рёбра, не являющиеся мостами графа, пока это возможно. При удалении не моста связный граф остаётся связным. В итоге получится связный граф, в котором каждое ребро — мост, то есть дерево. Оно остовное — вершины те же самые, что в исходном графе □