Теория вероятностей и математическая статистика—2
Теоретический и задачный минимумы
ФЭН НИУ ВШЭ

Винер Даниил @danya_vin

Версия от 18 мая 2025 г.

Спасибо Яне Рейтман за эстетик конспект

Содержание

1 Теоретический минимум

1.1 Сформулируйте неравенство Крамера-Рао для несмещённых оценок

Определение. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка и $\ell(x_1, \ldots, x_m; \theta)$ — логарифмическая функция правдоподобия. Тогда, величина

$$I_n(\theta) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ell(x_1, \ldots, x_n\theta)\right)^2\right]$$

называется *информацией Фишера* о параметре θ, содержащейся в n наблюдениях случайной выборки X

Теорема. Пусть $\widehat{\theta}$ — несмещенная оценка параметра θ, а также выполнены некоторые условия регулярности. Тогда, имеет место неравенство (*Рао-Крамера*):

$$I_n^{-1}(\theta) \leqslant \mathbb{D}\left[\widehat{\theta}\right]$$

Определение. Несмещенная оценка $\widehat{\theta}$ называется *эффективной* оценкой параметра θ, если для нее неравенство Рао-Крамера обращается в равенство

$$I_n^{-1}(\theta) = \mathbb{D}\left[\widehat{\theta}\right]$$

1.2 Дайте определение функции правдоподобия и логарифмической функция правдоподобия

Определение. Пусть задана случайная выборка $X = (X_1, \ldots, X_n)$, компоненты которой имеют функцию распределения $F(x; \theta)$, зависящую от неизвестного параметра $\theta \in \Theta$

- Если случайный вектор $X = (X_1, \ldots, X_n)$ имеет дискретное распределение, то его функцией правдоподобия называется совместная вероятность

  $$\mathcal{L}\left(x_1, \ldots, x_n; \theta\right) := \mathbb{P}_\theta\left(\{X_1 = x_1\} \cap \ldots \cap \{X_n = x_n\}\right),$$

  которая рассматривается как функция от переменной θ при фиксированных значениях переменных $x_1, \ldots, x_n$

- Если случайный вектор $X = (X_1, \ldots, X_n)$ имеет абсолютно непрерывное распределение, то его функцией правдоподобия называется совместная плотность

  $$\mathcal{L}\left(x_1, \ldots, x_n; \theta\right) := f_{X_1, \ldots, X_n}\left(x_1, \ldots, x_n; \theta\right)$$

  В независимом случае:

  $$\mathcal{L}\left(x_1, \ldots, x_n; \theta\right) = f_{X_1}\left(x_1; \theta\right) \cdot \ldots \cdot f_{X_n}\left(x_n; \theta\right)$$

Определение. Логарифмической функцией правдоподобия называется функция

$$l\left(x_1, \ldots, x_n; \theta\right) := \ln \mathcal{L}\left(x_1, \ldots, x_n; \theta\right)$$

1.3 Дайте определение информации Фишера о параметре θ, содержащейся в одном наблюдении

Определение. Информацией Фишера за одно наблюдение называется

$$\underbrace{I_1(\theta)}_{i(\theta)} = \mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ell(x_1; \theta)\right)^2\right]$$

1.4 Дайте определение оценки метода моментов параметра θ с использованием первого момента, если $\mathrm{E}(X_i) = g(\theta)$ и существует обратная функция g^{-1}

$\mu_1 = \widehat{\mu}_1$ — моментное тождество, где $\mu_1 = \mathbb{E}[X_i] = g(\theta)$, $\widehat{\mu}_1 = \overline{X}$, $g(\theta) = \overline{X}$

$g(\theta)$ имеет обратную функцию $\theta = g^{-1}(\overline{X})$

Определение. Оценка метода моментов параметра θ определяется как:

$$\hat{\theta}_{MM} = g^{-1}\left(\overline{X}\right)$$

1.5 Дайте определение оценки метода максимального правдоподобия параметра θ

Определение. Оценкой $\hat{\theta}_{ML}$ неизвестного параметра $\theta \in \Theta$ по ММП называется точка глобального максимума функции правдоподобия по переменной $\theta \in \Theta$ при фиксированных значениях переменных $x_1, \ldots, x_n$, т.е.

$$\mathcal{L}\left(x_1, \ldots, x_n; \hat{\theta}_{ML}\right) = \max_{\theta \in \Theta} \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n; \theta)$$

1.6 Укажите закон распределения выборочного среднего, величины $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$, величины $\frac{\overline{X}-\mu}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$, величины $\frac{\hat{\sigma}^2(n-1)}{\sigma^2}$

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины, $X_i \sim (\mu, \sigma^2)$

- $\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim \mathcal{N}(0;1)$
- $\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}}{n}}} \sim t_{n-1}$, $\widehat{\sigma^2} := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$
- $\frac{\hat{\sigma}^2(n-1)}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$
- $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, $\overline{X} := \frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$

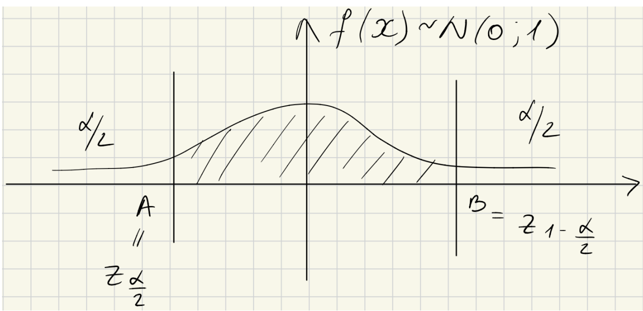
1.7 Укажите формулу доверительного интервала с уровнем доверия $(1-\alpha)$ для μ при известной дисперсии, для μ при неизвестной дисперсии, для σ^2

Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — независимые случайные величины, $X_i \sim (\mu, \sigma^2)$

1.7.1 Для μ при известной дисперсии

Доверительный интервал для μ при известной дисперсии σ^2 уровня доверия $\gamma = 1 - \alpha$

$T(\text{статистика}) = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim \mathcal{N}(0;1)$



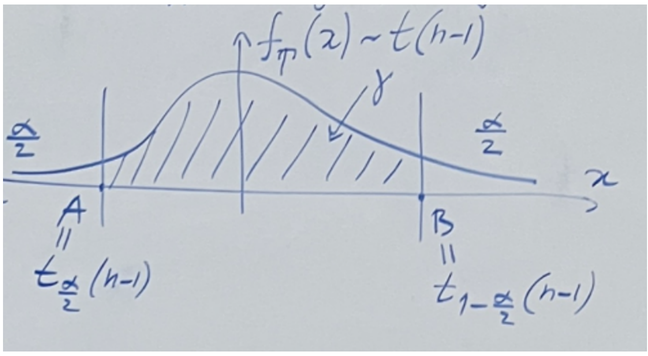
С вероятностью γ выполняется событие:

$$
\begin{aligned}
A \leqslant T \leqslant B \iff & A \leqslant \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \leqslant B \\
\iff & A\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leqslant \overline{X}-\mu \leqslant B\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \\
\iff & -\overline{X}+A\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leqslant -\mu \leqslant -\overline{X}+B\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \\
\iff & \overline{X}-B\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leqslant \mu \leqslant \overline{X}-A\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \\
& -z_{\alpha/2} = z_{1-\alpha/2} \\
\iff & \overline{X}-z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leqslant \mu \leqslant \overline{X}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \\
& -z_{1-\alpha/2} = z_{\alpha/2} \\
\iff & \underbrace{\overline{X}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}_{T_1(X)} \leqslant \mu \leqslant \underbrace{\overline{X}+z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}_{T_2(X)}
\end{aligned}
$$

1.7.2 Для μ при неизвестной дисперсии

Доверительный интервал для μ при неизвестной дисперсии σ^2 уровня доверия $\gamma = 1-\alpha$

$T = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}}} \sim t_{n-1}$, где $\widehat{\sigma^2} := \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$



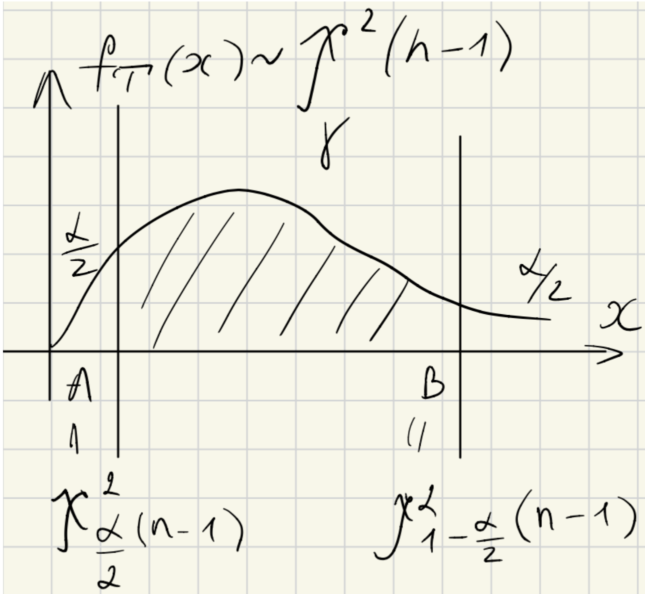
С вероятностью γ выполняется событие:

$$
\begin{aligned}
A \leqslant T \leqslant B \iff & A \leqslant \frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}}} \leqslant B \\
\iff & A\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}} \leqslant \overline{X}-\mu \leqslant B\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}} \\
\iff & -\overline{X}+A\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}} \leqslant -\mu \leqslant -\overline{X}+B\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}} \\
\iff & \overline{X}-B\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}} \leqslant \mu \leqslant \overline{X}-A\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}} \\
\iff & \overline{X}-t_{n-1,1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}} \leqslant \mu \leqslant \overline{X}-t_{n-1,\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}} \\
\iff & \underbrace{\overline{X}+t_{n-1,\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}}}_{T_1(X)} \leqslant \mu \leqslant \underbrace{\overline{X}+t_{n-1,1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{\sigma^2}}{n}}}_{T_2(X)}
\end{aligned}
$$

1.8 Для σ^2

Доверительный интервал для σ^2 при неизветсном математическом ожидании уровня доверия $\gamma = 1-\alpha$

$T = \dfrac{\widehat{\sigma}^2(n-1)}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$



С вероятностью γ выполняется событие:

$$
\begin{aligned}
A \leqslant T \leqslant B \iff A \leqslant \frac{\widehat{\sigma}^2(n-1)}{\sigma^2} \leqslant B \\
\iff \begin{cases} A \leqslant \frac{\widehat{\sigma}^2(n-1)}{\sigma^2} \\ \frac{\widehat{\sigma}^2(n-1)}{\sigma^2} \leqslant B \end{cases} \\
\iff \begin{cases} \sigma^2 \leqslant \frac{\widehat{\sigma}^2(n-1)}{A} \\ \frac{\widehat{\sigma}^2(n-1)}{B} \leqslant \sigma^2 \end{cases} \\
\iff \frac{\widehat{\sigma}^2(n-1)}{B} \leqslant \sigma^2 \leqslant \frac{\widehat{\sigma}^2(n-1)}{A} \\
\iff \underbrace{\frac{\widehat{\sigma}^2(n-1)}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}_{T_1(X)} \leqslant \sigma^2 \leqslant \underbrace{\frac{\widehat{\sigma}^2(n-1)}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}_{T_2(X)}
\end{aligned}
$$

1.9 Дайте определение ошибки первого и второго рода, критической области

Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка с плотностью распределения $f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n)$

Пусть $f_0(x_1, \ldots, x_n)$ и $f_1(x_1, \ldots, x_n)$ — две конкретные функции плотности, при этом

$$f_0(x_1, \ldots, x_n) \neq f_1(x_1, \ldots, x_n)$$

Мы хотим проверить две гипотезы:

- $H_0 : f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = f_0(x_1, \ldots, x_n)$
- $H_1 : f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1, \ldots, x_n)$

Рассмотрим множество $S \in \mathbb{R}^n$ — критическую область. Тогда, S-критерием называется правило

- если $(x_1, \ldots, x_n) \in S$, то мы принимаем H_1

- если $(x_1, \dots, x_n) \notin S$, то мы принимаем H_0

При этом, возможны такие 4 ситуации:

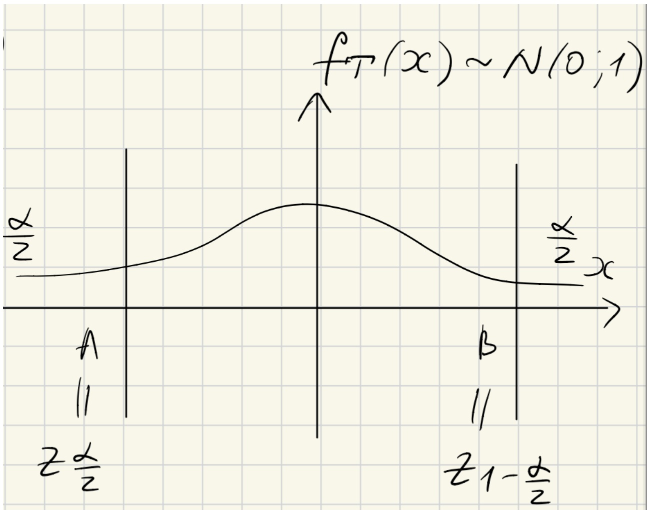
	accepted H_0	accepted H_1
real H_0	OK	ошибка 1 рода
real H_1	ошибка 2 рода	OK

1.10 Укажите формулу доверительного интервала с уровнем доверия $(1-\alpha)$ для вероятности успеха, построенного по случайной выборке большого размера из распределения Бернулли $\mathrm{Be}(p)$

Дана выборка $X_1, \dots, X_n$ — независимые случайные величины, $X_i \sim Be(p)$, $p \in (0;1)$

Доверительный интервал для p уровня доверия $\gamma = 1-\alpha$

$T = \dfrac{\overline{X} - p}{\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}} \sim \mathcal{N}(0;1)$



С вероятностью γ выполняется событие:

$$\begin{aligned}
A \leqslant p \leqslant B &\iff A \leqslant \frac{\overline{X} - p}{\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}} \leqslant B \\
&\iff A\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}} \leqslant \overline{X} - p \leqslant B\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}} \\
&\iff -\overline{X} + A\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}} \leqslant -p \leqslant -\overline{X} + B\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}} \\
&\iff \overline{X} - A\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}} \leqslant p \leqslant \overline{X} - B\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}} \\
&\iff \overline{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}} \leqslant p \leqslant \overline{X} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}
\end{aligned}$$

2 Задачный минимум

2.1 Пусть$X_1, \dots, X_n$ — случайная выборка из распределения с плотностью распределения...

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{6x(\theta-x)}{\theta^3} & \text{при } x \in [0;\theta] \\ 0 & \text{при } x \notin [0;\theta] \end{cases}$$

где $\theta > 0$ — неизвестный параметр распределения. Используя центральный момент второго порядка, при помощи метода моментов найдите оценку для неизвестного параметра θ.

Составим моментное тождество $\nu_2 = \widehat{\nu}_2$. Найдем ν_2:

$$\begin{aligned}\nu_2 = \mathbb{E}\left[(X_i - \mathbb{E}[X_i])^2\right] = \mathbb{D}[X_i] = \mathbb{E}\left[X_i^2\right] - (\mathbb{E}[X_i])^2 \\ = \frac{3\theta^2}{10} - \frac{\theta^2}{4} \\ = \frac{\theta^2}{20}\end{aligned}$$

При этом, $\widehat{\nu}_2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$, тогда моментное тождество $\nu_2 = \widehat{\nu}_2$ принимает вид

$$\frac{\theta^2}{20} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \Longrightarrow \widehat{\theta}_{MM} = \sqrt{\frac{20}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$$

2.2 Пусть $X_1, \dots, X_n$ — случайная выборка. Случайные величины $X_1, \dots, X_n$ имеют дискретное распределение, которое задано при помощи таблицы

x	-3	0	2
$\mathbb{P}(X_i = x)$	$2/3 - \theta$	$1/3$	θ

Используя второй начальный момент, при помощи метода моментов найдите оценку неизвестного параметра θ. Для реализации случайной выборки $x = (0, 0, -3, 0, 2)$ найдите числовое значение найденной оценки параметра θ.

По определению метода моментов:

$$\mathbb{E}\left[X_i^k\right] = \mu_k = \widehat{\mu}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k,$$

то есть теоретический момент равен выборочному. Найдем $\mu_2 = \mathbb{E}\left[X_i^2\right]$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[X_i^2\right] &= (-3)^2 \cdot \left(\frac{2}{3} - \theta\right) + 0^2 \cdot \frac{1}{3} + 2^2 \cdot \theta \\ &= 6 - 5\theta\end{aligned}$$

Тогда,

$$\begin{aligned}\mu_2 &= \widehat{\mu}_2 \\ 6 - 5\theta &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \Longrightarrow \theta = \frac{1}{5}\left(6 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k\right)\end{aligned}$$

Вычислим $\widehat{\mu}_2$:

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}_2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \\ &= \frac{1}{5}\left(0^2 + 0^2 + (-3)^2 + 0^2 + 2^2\right) \\ &= 2.6\end{aligned}$$

Тогда, численно $\theta = \frac{1}{5}\left(6 - \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^k\right) = \frac{1}{5}(6 - 2.6) = \frac{1}{5} \cdot 3.4 = 0.68$

2.3 Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из распределения с функцией плотности

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}} & \text{при } x > 0 \\ 0 & \text{при } x \leqslant 0 \end{cases}$$

где $\theta > 0$. При помощи метода максимального правдоподобия найдите оценку неизвестного параметра θ

Функция правдоподобия имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n; \theta) &= \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i; \theta) \\ &= \frac{2^n}{\theta^n} \prod_{i=1}^{n} x_i \cdot \exp\left(-\frac{x_i^2}{\theta}\right) \end{aligned}$$

Логарифмическая функция правдоподобия:

$$\begin{aligned} \ell(x_1, \ldots, x_n; \theta) &= n \ln \frac{2}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \ln \left(x_i \cdot \exp\left(-\frac{x_i^2}{\theta}\right)\right) \\ &= n \ln \frac{2}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i + \sum_{i=1}^{n} \ln \exp\left(-\frac{x_i^2}{\theta}\right) \\ &= n \ln \frac{2}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ &= n \ln 2 - n \ln \theta + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{aligned}$$

Дифференцируем по θ, приравняем к 0 и максимизируем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= 0 \\ \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= \frac{n}{\theta} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= n\theta \Longrightarrow \widehat{\theta}_{ML} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{aligned}$$

2.4 Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из распределения Бернулли с параметром $p \in (0;1)$. При помощи метода максимального правдоподобия найдите оценку неизвестного параметра p

Функцию вероятности для величины из распределения Бернулли можно записать так:

$$\mathbb{P}\left(X_i, p\right) = p^{X_i} (1-p)^{1-X_i},$$

где $X_i \in \{0, 1\}$

Тогда функция правдоподобия имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; p) &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i, p) \\ &= p^{\sum X_i} \cdot (1-p)^{n - \sum X_i} \end{aligned}$$

Тогда Логарифмическая функция правдоподобия:

$$\ell(X_1, \ldots, X_n; p) = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \ln p + \left(n - \sum_{i=1}^{n} X_i\right) \ln(1-p)$$

Дифференцируем по p, приравняем к 0 и максимизируем

$$\frac{\partial \ell}{\partial p} = \frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) - \frac{1}{1-p}\left(n - \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = 0$$

Найдем оценку параметра:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) &= \frac{1}{1-p}\left(n - \sum_{i=1}^{n} X_i\right)\\
\sum_{i=1}^{n} X_i(1-p) &= \left(n - \sum_{i=1}^{n} X_i\right)p\\
\sum_{i=1}^{n} X_i - p\sum_{i=1}^{n} X_i &= np - p\sum_{i=1}^{n} X_i\\
\sum_{i=1}^{n} X_i = np &\Longrightarrow p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i
\end{aligned}$$

2.5 Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — случайная выборка из распределения с плотностью

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & \text{при } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

где $\theta > 0$ — неизвестный параметр. Является ли оценка $\hat{\theta} = \overline{X}$ эффективной?

Плотность указывает, что у нас экспоненциальное распределение с параметром $\lambda = \frac{1}{\theta}$. Проверим несмещенность оценки

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\widehat{\theta}\right] &= \mathbb{E}\left[\overline{X}\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right]\\
&= \mathbb{E}\left[X_i\right]\\
&= \theta
\end{aligned}$$

Значит, оценка несмещенная

Теперь найдем информацию Фишера для одного наблюдения, которая определяется как

$$I(\theta) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\ln f(x,\theta)\right)^2\right]$$

Составим функцию правдоподобия

$$\ln f(x,\theta) = -\ln\theta - \frac{x}{\theta} \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x,\theta) = -\frac{1}{\theta} + \frac{x}{\theta^2}$$

Тогда,

$$\begin{aligned}
I(\theta) &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\ln f(x,\theta)\right)^2\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\left(-\frac{1}{\theta} + \frac{x}{\theta^2}\right)^2\right]\\
&= \mathbb{E}\left[\frac{1}{\theta^2} - \frac{2x}{\theta^3} + \frac{x^2}{\theta^4}\right]\\
&= \frac{1}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3}\mathbb{E}\left[X\right] + \frac{1}{\theta^4}\mathbb{E}\left[X^2\right]
\end{aligned}$$

Вычислим $\mathbb{E}\left[X^2\right] = \mathbb{D}\left[X\right] + (\mathbb{E}\left[X\right])^2 = \left(\frac{1}{\theta}\right)^{-2} + \theta^2 = 2\theta^2$, тогда

$$I(\theta) = \frac{1}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3}\theta + \frac{1}{\theta^4}2\theta^2 = \frac{1}{\theta^2}$$

Используем неравенство Рао-Крамера:

$$\mathbb{D}\left[\widehat{\theta}\right] \geqslant \frac{1}{n \cdot I(\theta)}$$
$$\mathbb{D}\left[\overline{X}\right] \geqslant \frac{1}{n \cdot \frac{1}{\theta^2}}$$
$$\frac{1}{n}\mathbb{D}\left[X_i\right] \geqslant \frac{\theta^2}{n}$$
$$\frac{\theta^2}{n} \geqslant \frac{\theta^2}{n}$$

Неравенство выполняется, значит оценка эффективна

2.6 [DELETE] Стоимость выборочного исследования генеральной совокупности, состоящей из трех страт,..

определяется по формуле $TC = c_1 n_1 + c_2 n_2 + c_3 n_3$, где c_i — цена одного наблюдения в i-й страте, а n_i — число наблюдений, которые приходятся на i-ю страту. Найдите n_1, n_2 и n_3, при которых дисперсия стратифицированного среднего достигает наименьшего значения, если бюджет исследования 8000 и имеется следующая информация:

Страта	1	2	3
Среднее значение	30	40	50
Стандартная ошибка	5	10	20
Вес	25%	25%	50%
Цена наблюдения	1	5	10

2.7 Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из нормального распределения с параметрами μ и $\sigma^2 = 4$

Используя реализацию случайной выборки,

$$x_1 = -1.11,\ x_2 = -6.10,\ x_3 = 2.42$$

постройте 90%-й доверительный интервал для неизвестного параметра μ

Уровень доверия — $0.9 = 1 - \alpha \implies \alpha = 0.1$ — уровень значимости. Для выборки из нормального распределения с **известной** дисперсией доверительный интревал имеет вид:

$$\overline{X} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

где $z_{1-\alpha/2}$ — квантиль уровня $1 - \alpha/2$ для стандратного нормального распределения (из таблички)

Примечание. $\overline{X} = \dfrac{-1.11 + (-6.10) + 2.42}{3} = -\dfrac{4.79}{3}$

Тогда, в нашем случае:

$$\overline{X} - z_{0.95} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} < \mu < \overline{X} + z_{0.95} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$-\frac{4.79}{3} - 1.65 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} < \mu < -\frac{4.79}{3} + 1.65 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$-3.50192 < \mu < 0.30859$$

2.8 Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами μ и σ^2

Используя реализацию случайной выборки,

$$x_1 = -1.11,\ x_2 = -6.10,\ x_3 = 2.42$$

постройте 90%-й доверительный интервал для неизвестного параметра μ

Уровень доверия — $0.9 = 1 - \alpha \implies \alpha = 0.1$ — уровень значимости. Для выборки из нормального распределения с **неизвестной** дисперсией доверительный интревал имеет вид:

$$\overline{X} - t_{n-1,1-\alpha/2} \cdot \frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + t_{n-1,1-\alpha/2} \cdot \frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

Найдем несмещенную выборочную дисперсию

$$\overline{X} = \frac{-1.11 + (-6.10) + 2.42}{3} = -\frac{4.79}{3}$$
$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2 \approx 18.32523$$

Тогда, для нашей выборки:

$$-\frac{4.79}{3} - t_{2,0.95} \cdot \frac{\sqrt{\widehat{\sigma}^2}}{\sqrt{3}} < \mu < -\frac{4.79}{3} + t_{2,0.95} \cdot \frac{\sqrt{\widehat{\sigma}^2}}{\sqrt{3}}$$
$$-\frac{4.79}{3} - 2.92 \cdot \frac{4.2808}{\sqrt{3}} < \mu < -\frac{4.79}{3} + 2.92 \cdot \frac{4.2808}{\sqrt{3}}$$
$$-8.81351 < \mu < 5.62017$$

2.9 Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная выборка из нормального распределения с неизвестными параметрами μ и σ^2

Используя реализацию случайной выборки,

$$x_1 = 1.07,\ x_2 = 3.66,\ x_3 = -4.51$$

постройте 80%-й доверительный интервал для неизвестного параметра σ^2

Уровень доверия — $0.8 = 1 - \alpha \implies \alpha = 0.2$ — уровень значимости. Для выборки из нормального распределения доверительный интревал имеет вид:

$$\frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}},$$

где $\chi^2_{\alpha/2}$, $\chi^2_{1-\alpha/2}$ — квантили хи-квадрат распределения с $n-1$ степенями свободы.

Вычислим несмещенную выборочную дисперсию:

$$\overline{X} = \frac{1.07 + 3.66 - 4.51}{3} = \frac{11}{150}$$
$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2 \approx 17.43223$$

Тогда, для нашей выборки

$$\frac{2 \cdot 17.43223}{\chi^2_{2,0.9}} < \sigma^2 < \frac{2 \cdot 17.43223}{\chi^2_{2,0.1}}$$
$$\frac{2 \cdot 17.43223}{4.605} < \sigma^2 < \frac{2 \cdot 17.43223}{0.211}$$
$$7.571 < \sigma^2 < 165.23441$$

2.10 Пусть $X_1, \ldots, X_n$ и $Y_1, \ldots, Y_m$ — независимые случайные выборки из нормального распределения с параметрами (μ_X, σ^2_X) и (μ_Y, σ^2_Y) соответственно, причем $\sigma^2_X = 2$ и $\sigma^2_Y = 1$

Используя реализации случайных выборок

$$x_1 = -1.11, \quad x_2 = -6.10, \quad x_3 = 2.42$$
$$y_1 = -2.29, \quad y_2 = -2.91$$

постройте 95%-й доверительный интервал для разности математических ожиданий $\mu_X - \mu_Y$

Уровень доверия — $0.95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0.05$ — уровень значимости. Для выборки из нормального распределения с известными дисперсиями доверительный интревал имеет вид:

$$(\overline{X} - \overline{Y}) - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_X^2}{n} + \frac{\tilde{\sigma}_Y^2}{m}} < \mu_X - \mu_Y < (\overline{X} - \overline{Y}) + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_X^2}{n} + \frac{\tilde{\sigma}_Y^2}{m}}$$

Вычислим выборочные средние:

$$\overline{X} = \frac{-1.11 - 6.10 + 2.42}{3} = -\frac{4.79}{3}$$
$$\overline{Y} = \frac{-2.29 - 2.91}{2} = -2.6$$

Тогда, для наших выборок:

$$\left(-\frac{4.79}{3} + 2.6\right) - z_{0.975}\sqrt{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}} < \mu_X - \mu_Y < \left(-\frac{4.79}{3} + 2.6\right) + z_{0.975}\sqrt{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}$$
$$\left(-\frac{4.79}{3} + 2.6\right) - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}} < \mu_X - \mu_Y < \left(-\frac{4.79}{3} + 2.6\right) + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}$$
$$-1.11371 < \mu_X - \mu_Y < 3.12038$$

2.11 Пусть $X_1, \ldots, X_n$ и $Y_1, \ldots, Y_m$ — независимые случайные выборки из нормального распределения с параметрами (μ_X, σ_X^2) и (μ_Y, σ_Y^2) соответственно. Известно, что $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$

Используя реализации случайных выборок

$$x_1 = 1.53, \quad x_2 = 2.83, \quad x_3 = -1.25$$
$$y_1 = -0.8, \quad y_2 = 0.06$$

постройте 95%-й доверительный интервал для разности математических ожиданий $\mu_X - \mu_Y$

Уровень доверия — $0.95 = 1 - \alpha \Longrightarrow \alpha = 0.05$ — уровень значимости. Для выборки из нормального распределения с неизвестными, но равными дисперсиями доверительный интревал имеет вид:

$$\overline{X} - \overline{Y} - t_{n+m-2;1-\alpha/2}\widehat{\sigma_0}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} < \mu_X - \mu_Y < \overline{X} - \overline{Y} + t_{n+m-2;1-\alpha/2}\widehat{\sigma_0}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}},$$

где

$$\widehat{\sigma_0^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 + \sum\limits_{i=1}^{m}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}{n + m - 2}$$

Выпишем альтернативный вариант доверительного интервала и работать будем с этим вариантом:

$$(\overline{X} - \overline{Y}) \mp t_{n+m-2,1-\alpha/2}\sqrt{\left(\frac{n+m}{nm}\right)\left(\frac{(n-1)\hat{\sigma}_X^2 + (m-1)\hat{\sigma}_Y^2}{n+m-2}\right)}$$

Найдем выборочные средние:

$$\overline{X} = \frac{1.53 + 2.83 - 1.25}{3} = \frac{3.11}{3}$$
$$\overline{Y} = \frac{-0.8 + 0.06}{2} = -0.37$$

Вычилим выборочные дисперсии:

$$\widehat{\sigma}_X^2 = \frac{(1.53 - \frac{3.11}{3})^2 + (2.83 - \frac{3.11}{3})^2 + (-1.25 - \frac{3.11}{3})^2}{2} \approx 4.34413$$
$$\widehat{\sigma}_Y^2 = \frac{(-0.8 + 0.37)^2 + (0.06 + 0.37)^2}{1} = 0.3698$$

Тогда, доверительный интервал имеет вид:

$$\left(\frac{3.11}{3}+0.37\right)-t_{3,0.975}\sqrt{\frac{5}{6}\cdot\frac{2\cdot 4.34413+1\cdot 0.3698}{3}}<\mu_X-\mu_Y<\left(\frac{3.11}{3}+0.37\right)+t_{3,0.975}\sqrt{\frac{5}{6}\cdot\frac{2\cdot 4.34413+1\cdot 0.3698}{3}}$$
$$\frac{21.1}{15}-3.182\cdot\sqrt{\frac{5}{6}\cdot\frac{2\cdot 4.34413+1\cdot 0.3698}{3}}<\mu_X-\mu_Y<\frac{21.1}{15}+3.182\cdot\sqrt{\frac{5}{6}\cdot\frac{2\cdot 4.34413+1\cdot 0.3698}{3}}$$
$$-3.64072<\mu_X-\mu_Y<6.45405$$

2.12 Пусть $X_1,\ldots,X_n$ — случайная выборка из распределения Бернулли с параметром p

Используя реализацию случайной выборки $X_1,\ldots,X_n$, в которой 55 нулей и 45 единиц, постройте приближенный 95%-й доверительный интервал для неизвестного параметра p

Уровень доверия — $0.95=1-\alpha\Longrightarrow\alpha=0.05$ — уровень значимости. Для выборки из распределения Бернулли с неизвестным параметром p доверительный интревал имеет вид:

$$\widehat{p}-z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}<p<\widehat{p}+z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}$$

Так как у нас 55 нулей и 45 единиц, то $n=100$, тогда $\widehat{p}=\overline{X}=\frac{45}{100}$ и доверительный интервал такой:

$$0.45-z_{0.975}\cdot\sqrt{\frac{0.45\cdot 0.55}{100}}<p<0.45+z_{0.975}\cdot\sqrt{\frac{0.45\cdot 0.55}{100}}$$
$$0.45-1.96\cdot\frac{3\sqrt{11}}{200}<p<0.45+1.96\cdot\frac{3\sqrt{11}}{200}$$
$$0.352491<p<0.547509$$

2.13 [DELETE] Пусть $X_1,\ldots,X_n$ и $Y_1,\ldots,Y_m$ — независимые случайные выборки из распределения Бернулли с параметрами $p_X\in(0;1)$ и $p_Y\in(0;1)$ соответственно

Известно, что $n=100,\overline{x}_n=0.6$, $m=200,\overline{y}_m=0.4$. Постройте приближенный 95%-й доверительный интервал для отношения разности вероятностей успеха p_X-p_Y

Уровень доверия — $0.95=1-\alpha\Longrightarrow\alpha=0.05$ — уровень значимости. Для выборки из распределения Бернулли с неизвестными параметрами p_X,p_Y границы доверительного интревала имеют вид:

$$(\widehat{p}_X-\widehat{p}_Y)\mp z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}_X(1-\widehat{p}_X)}{n}+\frac{\widehat{p}_Y(1-\widehat{p}_Y)}{m}}$$

Отметим, что $\widehat{p}_X=\overline{x}_n,\ \widehat{p}_Y=\overline{y}_m$, тогда доверительный интервал:

$$(0.6-0.2)-z_{0.975}\sqrt{\frac{0.6\cdot 0.4}{100}+\frac{0.4\cdot 0.6}{200}}<p_X-p_Y<(0.6-0.2)+z_{0.975}\sqrt{\frac{0.6\cdot 0.4}{100}+\frac{0.4\cdot 0.6}{200}}$$
$$0.2-1.96\cdot 0.06<p_X-p_Y<0.2+1.96\cdot 0.06$$
$$0.0824<p_X-p_Y<0.3176$$

2.14 Дядя Вова (Владимир Николаевич) и Скрипач (Гедеван) зарабатывают на Плюке чатлы, чтобы купить гравицапу

Число заработанных за i-й день чатлов имеет распределение Пуассона с неизвестным параметром λ. Заработки в различные дни независимы. За прошедшие 100 дней они заработали 250 чатлов. С помощью метода максимального правдоподобия постройте приближенный 95%-й доверительный интервал для неизвестного параметра λ

Дана выборка $(X_1,\ldots,X_n)$, $n=100$, $X_i\sim Pois(\lambda)$

Функция вероятности для распределения Пуассона имеет вид

$$\mathbb{P}(X_i = x_i) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!}$$

Тогда, функция правдоподобия:

$$\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!} = e^{-n\lambda}\lambda^{\sum x_i} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i!}\right)$$

Логарифмическая функция правдоподобия:

$$\ell(X_1, \ldots, X_n; \lambda) = -n\lambda + \left(\sum x_i\right) \ln \lambda - \sum \ln(x_i!)$$

Дифференцируем и максимизируем:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = -n + \frac{\sum x_i}{\lambda} = 0 \\
\lambda &= \frac{1}{n} \sum x_i \\
\lambda &= \overline{X} \\
\lambda &= \frac{250}{100} \Longrightarrow \lambda_{ML} = 2.5
\end{aligned}$$

Для выборки из некоторого распределения с параметром λ, который оценивается ММП доверительный интервал имеет вид:

$$\lambda_{ML} - z_{1-\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{I_n\left(\lambda_{ML}\right)}} < \lambda < \lambda_{ML} + z_{1-\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{I_n\left(\lambda_{ML}\right)}}$$

Информация Фишера определяется так:

$$I(\lambda) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \lambda^2}\right]$$

При этом, $I_n\left(\lambda_{ML}\right) = n \cdot I_1(\lambda_{ML})$. Для одного наблюдения x_i из выборки:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\lambda) = \mathbb{P}(x_i) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!} \\
\ell(x_i, \lambda) = -\lambda + x \ln \lambda
\end{aligned}$$

Тогда,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = -1 + \frac{x}{\lambda} \\
\frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda^2} = -\frac{x}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

Значит, информаицця Фишера:

$$I_1(\lambda) = -\mathbb{E}\left[-\frac{x}{\lambda^2}\right] = \frac{\mathbb{E}\left[x_i\right]}{\lambda^2} = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda} \Longrightarrow I_n(\lambda) = \frac{n}{\lambda}$$

И наконец, искомый доверительный интервал:

$$\begin{aligned}
2.5 - z_{0.975} \frac{1}{\sqrt{I_n\left(2.5\right)}} < \lambda < 2.5 + z_{0.975} \frac{1}{\sqrt{I_n\left(2.5\right)}} \\
2.5 - 1.96 \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{100}{2.5}}} < \lambda < 2.5 + 1.96 \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{100}{2.5}}} \\
2.1901 < \lambda < 2.8099
\end{aligned}$$

2.15 Пусть $X_1, \dots, X_n$ — случайная выборка из показательного (экспоненциального) распределения с плотностью распределения

$$f(x, \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \text{ при } x \geq 0 \\ 0 \text{ при } x < 0 \end{cases}$$

где $\lambda > 0$ — неизвестный параметр распределения. Известно, что $n = 100$ и $\overline{x}_n = 0.52$. С помощью метода максимального правдоподобия постройте приближенный 95%-й доверительный интервал для параметра λ

Функция правдоподобия:

$$\mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum x_i}$$

Логарифмическая функция правдоподобия:

$$\ell(X_1, \dots, X_n; \lambda) = \ln \mathcal{L} = n \ln \lambda - \lambda \sum x_i$$

Дифференцируем и максимизируем:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum x_i = 0 \Longrightarrow \widehat{\lambda}_{ML} = \frac{n}{\sum x_i} = \frac{1}{\overline{x}} = \frac{1}{0.52} \approx 1.9231$$

Для выборки из некоторого распределения с параметром λ, который оценивается ММП доверительный интервал имеет вид:

$$\lambda_{ML} - z_{1-\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{I_n(\lambda_{ML})}} < \lambda < \lambda_{ML} + z_{1-\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{I_n(\lambda_{ML})}}$$

Информация Фишера определяется так:

$$I(\lambda) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \lambda^2}\right]$$

При этом, $I_n(\lambda_{ML}) = n \cdot I_1(\lambda_{ML})$. Для одного наблюдения x_i из выборки:

$$\mathcal{L}(\lambda) = \mathbb{P}(x_i) = \lambda e^{-\lambda x}$$
$$\ell(x_i, \lambda) = \ln \lambda - \lambda x$$
$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \lambda^2} = -\frac{1}{\lambda^2}$$

Значит, информаицня Фишера:

$$I_1(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2} \Longrightarrow I_n(\lambda) = \frac{n}{\lambda^2}$$

И наконец, искомый доверительный интервал:

$$1.9231 - z_{0.975} \frac{1}{\sqrt{\frac{100}{1.9231^2}}} < \lambda < 1.9231 + z_{0.975} \frac{1}{\sqrt{\frac{100}{1.9231^2}}}$$
$$1.9231 - 1.96 \cdot 0.19231 < \lambda < 1.9231 + 1.96 \cdot 0.19231$$
$$1.5461 < \lambda < 2.3$$