На этой консультации повторяли материал из листка №5 из модуля 1

**Определение.** Пусть задано измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F})$. Функция $\xi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ называется *измеримой* функцией относительно $\sigma$-алгебры $\mathcal{F}$, если

$$\forall c \in \mathbb{R}\ \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) > c\} \in \mathcal{F}$$

Назовем условием измеримости функцию, измеримую относительно $\sigma$-алгебры $\mathcal{F}$, также называемую $\mathcal{F}$-измеримой функцией или функцией, согласованной с $\sigma$-алгеброй $\mathcal{F}$

# №3

$(\Omega, \mathcal{F})$ — измеримое пространство, $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ — $\mathcal{F}$-измеримая функция $\forall c \in \mathbb{R}$

Доказать утверждения

**a)** $\underbrace{\{\omega \in \Omega :\ \xi(\omega) \geqslant c\}}_{=LHS} = \underbrace{\bigcap_{i=1}^{n} \left\{\omega \in \Omega :\ \xi(\omega) > c - \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{F}}_{=RHS}$

- $(LHS \subseteq RHS)$: $\omega_0 \in LHS \Longrightarrow \xi(\omega) \geqslant c \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \xi w_0 > c - \frac{1}{n} \Longrightarrow \omega_0 \in RHS$
- $(RHS \subseteq LHS)$: $\omega_0 \in RHS \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \xi(\omega_0) > c - \frac{1}{n} \Longrightarrow \xi(\omega_0) \geqslant \lim\limits_{n \mapsto \infty} \left(c - \frac{1}{n}\right) = c \Longrightarrow \omega_0 \in LHS$

**b)** $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = c\} = \underbrace{\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \geqslant c\}}_{\in \mathcal{F}(\text{см.п.а})} \setminus \underbrace{\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) > c\}}_{\in \mathcal{F}(\text{по опр. } \mathcal{F}\text{-изм.ф-и})} \in \mathcal{F}$

**c)** $\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \leqslant c\} = \underbrace{\Omega}_{\in \mathcal{F}} \setminus \underbrace{\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) > c\}}_{\in \mathcal{F}(\text{по опр. } \mathcal{F}\text{-изм.ф-и})} \in \mathcal{F}$

**d)** $\{\omega \in \omega : \xi(\omega) < c\} = \underbrace{\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \leqslant c\}}_{\in \mathcal{F}(\text{см. п.с})} \setminus \underbrace{\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = c\}}_{\in \mathcal{F}(\text{см.п.b})}$

# №4

$(\Omega, \mathcal{F})$ — измеримое пространство, $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ — $\mathcal{F}$-измеримая функция

Докажите, что $\xi^2(\omega)$ — $\mathcal{F}$-измерима Рассмотрим два случая

- $c < 0 :\ \{\omega \in \Omega : \xi^2(\omega) > c\} = \Omega \in \mathcal{F}$
- $c \geqslant 0 :\ \{\omega \in \Omega : \xi^2(\omega) > c\} = \underbrace{\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < -\sqrt{c}\}}_{\in \mathcal{F}(\text{см. п.3d})} \cup \underbrace{\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) > \sqrt{c}\}}_{\in \mathcal{F}(\text{по опр.} \mathcal{F}\text{-изм.ф-и})} \in \mathcal{F}$

# №5

# №6