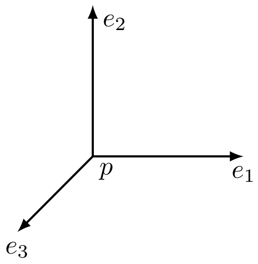
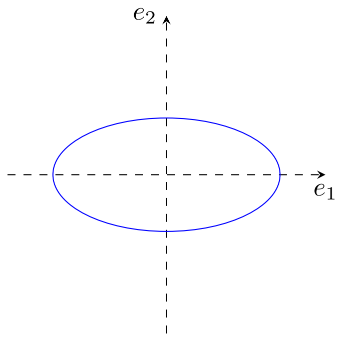
Кривые и плоскости

Афинная система координат — $(p, \underbrace{e_1, \ldots, e_n}_{\text{базис в } \mathbb{R}^n})$, где p — начало отсчета



Например, эллипс



$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Общее уравнение кривых 2—го порядка выглядит так

$$\boxed{\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j}_{\text{кв.форма}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} b_ix_i}_{\text{лин.форма}} + c = 0}$$

Как пересчитывать координаты?

$(p, e_1, \ldots, e_n) \longrightarrow (p', e_1', \ldots, e_n')$

$$\begin{aligned} v &= p + x_1e_1 + \ldots + x_ne_n = p + \mathbb{e} \cdot x \\ &= p' + y_1e_1' + \ldots + y_ne_n' = p' + \mathbb{e}' \cdot y \end{aligned} \tag{1}$$

Пусть $p' = p + \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n = p + \mathbb{e} \cdot \alpha$, а $\mathbb{e}' = \mathbb{e} \cdot C$

Тогда уравнение 1 примет вид

$$\begin{aligned} v = p' + y_1e_1' + \ldots + y_ne_n' &= p' + \mathbb{e}' \cdot y \\ &= p + \mathbb{e} \cdot \alpha + \mathbb{e} \cdot C \cdot y \end{aligned}$$

$p + \mathbb{e} \cdot x = p + \mathbb{e} \cdot \alpha + \mathbb{e} \cdot C \cdot y = p + \mathbb{e}(\alpha + Cy)$

Тогда, $\boxed{x = Cy + \alpha}$, где

$$\begin{gathered} x - v \text{ в } \mathbb{e} \\ y - v \text{ в } \mathbb{e}' \\ \alpha - p' \text{ в } \mathbb{e} \end{gathered}$$

ПДСК — прямоугольная декартова система координат — $(p, \mathbb{e} - \text{ОНБ})$

Знаем приведение квадратичной формы к главным осям — $\lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \begin{cases} 1 & \text{— эллипс} \\ -1 & \text{— мнимый эллипс} \\ 0 & \text{— мнимые пересек. прямые. } y = \pm ix \text{ для } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \begin{cases} 1 & \text{— гипербола} \\ 0 & \text{— веществ. пересек. прямые} \end{cases}$$

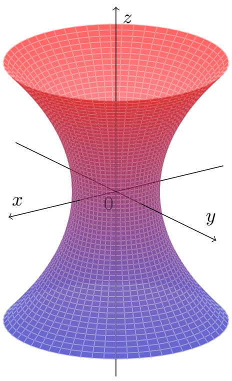
$y^2 = 2px$ — парабола, где p — фокальный параметр

$y^2 = 1$ — параллельные прямые

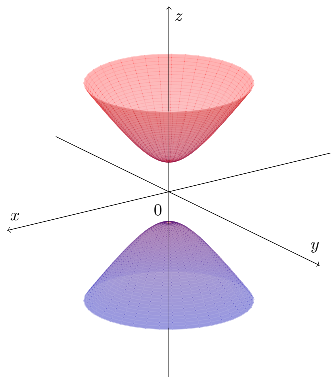
$y^2 = -1$ — мнимые параллельные прямые

$y^2 = 0$ — пара совпадающих прямых

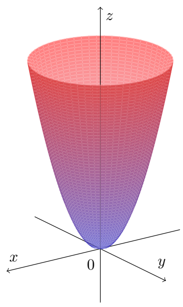
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ — эллиптический **однополостный** гиперболоид



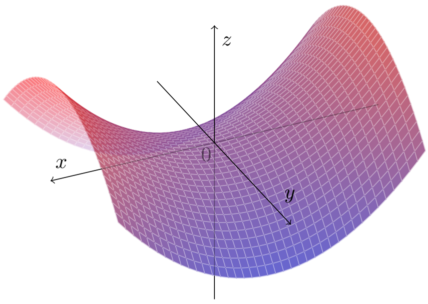
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ — эллиптический **двуполостный** гиперболоид



$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$ — эллиптический параболоид



$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z$ — гиперболический параболоид



Алгоритм приведения общего уравнения кривой 2-го порядка к каноническому виду

1. Приводим квадратичную форму к главным осям

   $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 \dots \quad |\lambda_i$ — СЗ

   Расположим λ_i от меньшего по модулю к большему

   $C = (v_1, v_2)$ — ОНБ из СВ (в порядке λ)

2. Подставляем $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ в линейную форму

   $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + ax' + by' + c = 0$

3. Делаем сдвиг начала координат путем сворачивания в полный квадрат

   $\lambda_1(x' - x_0)^2 + \lambda_2(y' - y_0)^2 + \widetilde{c} = 0$

   x_0, y_0 — куда мы сдвигаем

   Если коэффициент при $x' \neq 1$, значит мы пытаемся растянуть, а не сдвинуть координаты

КК35.24(2). Используя параллельный перенос, выяснить вид и расположение на координатной плоскости следующих линий второго порядка

$$x^2 + 4y^2 + 4x - 8y - 8 = 0$$

Так как нет слагаемого xy, то мы уже в главных осях

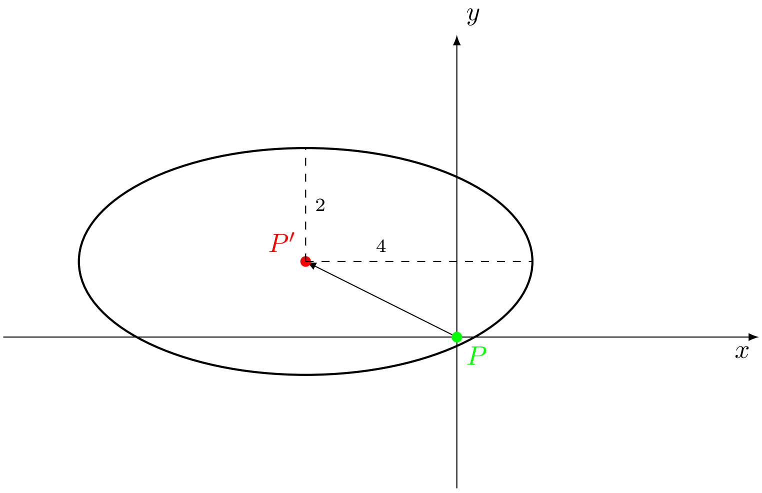
$$(x^2 + 4x + 4) + (4y^2 - 8y + 4) - 16 = 0$$
$$(x+2)^2 + 4(y-1)^2 = 16$$

Пусть

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \end{cases}$$

Тогда, $C = E, \alpha = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ — координаты p' в старом базисе

$(x')^2 + 4(y')^2 = 16 \Longleftrightarrow \dfrac{(x')^2}{4^2} + \dfrac{(y')^2}{2^2} = 1$



КК35.27(2). Используя метод вращений, определить форму и расположение на плоскости следующих линий второго порядка:

$$xy + x + y = 0$$

1. Приводим к главным осям

   $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   СЗ: $\lambda_1 = \frac{1}{2},\ \lambda_2 = -\frac{1}{2}$

   СВ: $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   $C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (x, y) \to (x', y')$

   $$\text{поворот на } 45^\circ \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \end{cases}$$

   $xy + x + y = 0$

   $\frac{1}{2}(x')^2 - \frac{1}{2}(y')^2 + \sqrt{2}x' = 0$

2. Сдвиг:

   $\frac{1}{2}\left(x' + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{2}(y')^2 = \frac{1}{4}$

   $x'' = x' + \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y'' = y'$

   Получаем $\frac{(x'')^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{(y'')^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$

   Это гипербола, с повернутыми на 45° осями, и $p' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$