Теория вероятностей и математическая статистика—2

Семинар Борзых Д.А.

Винер Даниил @danya_vin

7 февраля 2025 г.

Определение. Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ — случайный вектор, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \dots & \sigma_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

$\Sigma^T = \Sigma$, $\det \Sigma \neq 0$ и Σ — неотрицательно определенная, то есть $\forall x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ $x^T \Sigma x \geqslant 0$

Тогда, говорят, что случайный вектор X имеет невырожденное n-мерное нормальное распределение, $X \sim N(\mu, \Sigma)$, если

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\Sigma)}} e^{-0.5(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)}, \text{ где } x = (x_1, \dots, x_n)$$

Для случая $n = 1$: $\mu \in \mathbb{R}^1$, $\Sigma = (\sigma_{11}) = \sigma^2$, тогда

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-0.5(x-\mu)\frac{1}{\sigma^2}(x-\mu)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

Задача 1

$X = (X_1, \dots, X_n)$ имеет плотность

$$f_X(x) = \frac{9}{2\pi} e^{-\frac{9}{2}x_1^2 - \frac{25}{2}x_2^2 - 12x_1x_2 + 3x_1 + 13x_2 - 5}$$

Нужно убедиться, что X имеет невырожденное двумерное нормальное распределение. Найти μ и Σ

Пусть $q(x_1, x_2) = -\frac{9}{2}x_1^2 - \frac{25}{2}x_2^2 - 12x_1x_2 + 3x_1 + 13x_2 - 5$

$$(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu) = x^T\Sigma^{-1}x - \mu^T\Sigma^{-1}x - x^T\Sigma^{-1}\mu + \mu^T\Sigma^{-1}\mu \tag{1}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} x^T\Sigma^{-1}\mu &= (x^T\Sigma^{-1}\mu)^T \\ &= \mu^T \left(\Sigma^{-1}\right)^T (x^T)^T \\ &= \mu^T \left(\Sigma^T\right)^{-1} x \\ &= \mu^T \Sigma x \end{aligned}$$

Тогда, выражение 1 можно записать так

$$x^T\Sigma^{-1}x - 2\mu^T\Sigma^{-1}x + \mu^T\Sigma^{-1}\mu$$

$$q(x_1, x_2) = -\frac{1}{2}\left(\underbrace{9x_1^2 + 25x_2^2 + 24x_1x_2}_{\text{квадратичная форма}} \underbrace{-6x_1 - 26x_2}_{\text{линейная форма}} + 10\right)$$

$9x_1^2 + 24x_1x_2 + 25x_2^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 25 \end{pmatrix} \Longrightarrow \Sigma = \frac{1}{9 \cdot 25 - 12 \cdot 12} \begin{pmatrix} 25 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{25}{81} & -\frac{12}{81} \\ -\frac{12}{81} & \frac{9}{81} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} -6x_1 - 26x_2 = \begin{pmatrix} -6 & -26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= -2\mu^T \Sigma^{-1} x \\ \Longrightarrow \begin{pmatrix} -6 & -26 \end{pmatrix} &= -2\mu \Sigma^{-1} \\ \Longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 13 \end{pmatrix} &= \mu^T \Sigma^{-1} \\ \mu^T = \begin{pmatrix} 3 & 13 \end{pmatrix} \Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{25}{81} & -\frac{12}{81} \\ -\frac{12}{81} & \frac{9}{81} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\sqrt{\det(2\pi\Sigma)} = \sqrt{(2\pi)^2 \det(\Sigma)} = \sqrt{4\pi^2 \frac{1}{81}} = \frac{2\pi}{9}$

Задача 2 (минимум)

X — рост, Y — вес. $Z = (X, Y)$, $\mathbb{E}[Z] = \begin{pmatrix} 175 \\ 74 \end{pmatrix}$, $V(Z) = \begin{pmatrix} 49 & 28 \\ 28 & 36 \end{pmatrix}$

а)

Определить вероятность того, что рост отличается от среднего на 10 сантиметров

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \leqslant 10) &= \mathbb{P}(-10 \leqslant X - 175 \leqslant 10) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{-10}{7} \leqslant \frac{X - 175}{7} \leqslant \frac{10}{7} \right) \\ &= \Phi\left(\frac{10}{7}\right) - \Phi\left(-\frac{10}{7}\right) \\ &= 2\Phi\left(\frac{10}{7}\right) - 1 \\ &= 0.1531 \end{aligned}$$

б)

Пусть $U := X - Y$. Если $U < 90$, то считаем, что человек страдает избыточным весом

$U \sim ?,\ f_U(u) = ?$

$\mathbb{E}[U] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y] = 175 - 74 = 101$

$\mathbb{D}[U] = \mathbb{D}[X] + \mathbb{D}[Y] - 2cov(X, Y) = 49 + 46 - 2 \cdot 28 = 29$

$$f_U(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 29}} e^{-\frac{(u-101)^2}{2 \cdot 29}}$$

в)

Найти соответствующую вероятность

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U < 90) &= \mathbb{P}\left(\frac{U - 101}{\sqrt{29}} < \frac{90 - 101}{\sqrt{29}} \right) \\ &= \Phi(-2.0426) \\ &= 0.0205 \end{aligned}$$

Задача 3 (минимум)

Теорема. Если $(X, Y) \sim N\left(\begin{pmatrix}\mu x \\ \mu y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y \\ \rho\sigma_y\sigma_x & \sigma_y^2\end{pmatrix}\right)$, то

$$(X|Y=y) \sim N\left(\mu_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\mu_y),\ \sigma_x^2\left(1-\rho^2\right)\right)$$
$$(Y|X=x) \sim N\left(\mu_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\mu_x),\ \sigma_y^2\left(1-\rho^2\right)\right)$$

а)

$\rho = \frac{28}{\sqrt{49\cdot 36}} = \frac{2}{3}$

$$(Y|X=170) \sim N\left(\underbrace{74 + \frac{2}{3}\cdot\frac{6}{7}\cdot(170-175);}_{\mathbb{E}[Y|X=170]=71.14}\ \underbrace{36\left(1-\frac{4}{9}\right)}_{\mathbb{D}[Y|X=170]}\right)$$

б)

$$f_{Y|X}(y|x=170) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 20}}e^{-\frac{(y-71.14)^2}{2\cdot 20}}$$

в)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(Y > 90|X=170\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{Y-71.14}{\sqrt{20}} > \frac{90-71.14}{\sqrt{20}}\middle| X=170\right)\\ &= 1-\mathbb{P}\left(\frac{Y-71.14}{\sqrt{20}} < 4.217\middle| X=170\right)\\ &\approx 0\end{aligned}$$