

Теория вероятностей и математическая статистика—2

Консультация Борзых Д.А. ФЭН НИУ ВШЭ

Винер Даниил @danya_vin

21 февраля 2025г.

23

Определение. Говорят, что случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $\mu \in \mathbb{R}$ и $\sigma^2 > 0$ пишут $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, если

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Множество значений случайной величины X : $(-\infty; +\infty)$

Теорема. Если $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, то

$$\mathbb{E}[X] = \mu, \mathbb{D}[X] = \sigma^2$$

24

Определение. Случайная величина W имеет χ^2 -распределение с m степенями свободы, пишут $W \sim \chi^2(m)$, если W представима в виде

$$W = X_1^2 + \dots + X_m^2,$$

где $X_1, \dots, X_m \sim iidN(0; 1)$

Множество значений случайной величины W : $(0; +\infty)$

Теорема. Если $W \sim \chi^2(m)$, то $\mathbb{E}[W] = m, \mathbb{D}[W] = 2m$

25

Определение. Случайная величина W имеет t -распределение (распределение Стьюдента) с m степенями свободы, пишут $W \sim t(m)$, если W представима в виде

$$W = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y_1^2 + \dots + Y_m^2}{m}}},$$

где $X, Y_1, \dots, Y_m \sim iidN(0; 1)$

Множество значений случайной величины: $(-\infty; +\infty)$

26

Определение. Случайная величина W имеет F -распределение (распределение Фишера) с m и n степенями свободы, пишут $W \sim F(m, n)$, если W представима в виде

$$W = \frac{(X_1^2 + \dots + X_m^2)/m}{(Y_1^2 + \dots + Y_n^2)/n},$$

где $X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n \sim iidN(0; 1)$ и независимы

Множество значений: $(0; +\infty)$

27

Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ — случайная выборка

Определение. Выборочное среднее — $\bar{X} := \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$

Определение. Неисправленная выборочная дисперсия — $s^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

28

Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ — случайная выборка, тогда

Определение. Выборочным *начальным* моментом порядка k называется число

$$\hat{\mu}_k := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i)^k$$

Определение. Выборочным *центральным* моментом порядка k называется число

$$\hat{\nu}_k := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k$$

29

Определение. Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ — случайная выборка, тогда выборочной функцией распределения случайной выборки X называется функция от действительного переменного X , которая определяется как

$$\hat{F}_n(x, \omega) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}\{X_i(\omega) \leq x\},$$

где $\mathbb{I}\{X_i(\omega) \leq x\}$ равна 1, если $X_i(\omega) \leq x$ и равна 0 в противном случае

30

Теорема. Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ — случайная выборка, причем $\mathbb{D}[X_i] = \sigma^2$, тогда

$$\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

является несмещённой оценкой параметра σ^2 , то есть $\mathbb{E}[\hat{\sigma}^2] = \sigma^2$

31

Оценка $\hat{\theta}$ неизвестного параметра $\theta \in \Theta$ называется *несмещённой*, если

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}] = \theta \quad \forall \theta \in \Theta,$$

где Θ — множество всех допустимых значений параметра θ

32

Определение. Последовательность оценок $\hat{\theta}_n$ называется *состоятельной оценкой* неизвестного параметра $\theta \in \Theta$, если

$$\forall \theta \in \Theta \quad \hat{\theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \theta,$$

то есть $\hat{\theta}_n$ сходится по вероятности к θ

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon) = 0$$

Теорема. Пусть

- $\forall \theta \in \Theta \quad \mathbb{E} \left[\hat{\theta}_n \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \theta$
- $\forall \theta \in \Theta \quad \mathbb{D} \left[\hat{\theta}_n \right] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

Тогда, $\hat{\theta}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$, то есть $\hat{\theta}_n$ является состоятельной оценкой неизвестного параметра θ

33

Определение. Пусть \mathcal{K} — некоторый класс оценок параметра θ . Оценка $\hat{\theta} \in \mathcal{K}$ неизвестного параметра θ называется наиболее эффективной в классе \mathcal{K} , если для любого конкурента $\tilde{\theta} \in \mathcal{K} \quad \forall \theta \in \Theta$

$$\mathbb{E} \left[(\hat{\theta} - \theta)^2 \right] \leq \mathbb{E} \left[(\tilde{\theta} - \theta)^2 \right]$$