

Теория вероятностей и математическая статистика—2

Семинар Борзых Д.А.

Винер Даниил @danya_vin

7 февраля 2025 г.

Определение. Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ — случайный вектор, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \dots & \sigma_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

$\Sigma^T = \Sigma$, $\det \Sigma \neq 0$ и Σ — неотрицательно определенная, то есть $\forall x \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad x^T \Sigma x \geq 0$

Тогда, говорят, что случайный вектор X имеет невырожденное n -мерное нормальное распределение, $X \sim N(\mu, \Sigma)$, если

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\Sigma)}} e^{-0.5(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)}, \text{ где } x = (x_1, \dots, x_n)$$

Для случая $n = 1$: $\mu \in \mathbb{R}^1$, $\Sigma = (\sigma_{11}) = \sigma^2$, тогда

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-0.5(x-\mu) \frac{1}{\sigma^2}(x-\mu)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

Задача 1

$X = (X_1, \dots, X_n)$ имеет плотность

$$f_X(x) = \frac{9}{2\pi} e^{-\frac{9}{2}x_1^2 - \frac{25}{2}x_2^2 - 12x_1x_2 + 3x_1 + 13x_2 - 5}$$

Нужно убедиться, что X имеет невырожденное двумерное нормальное распределение. Найти μ и Σ

Пусть $q(x_1, x_2) = -\frac{9}{2}x_1^2 - \frac{25}{2}x_2^2 - 12x_1x_2 + 3x_1 + 13x_2 - 5$

$$(x - \mu)^T \Sigma^{-1}(x - \mu) = x^T \Sigma^{-1}x - \mu^T \Sigma^{-1}x - x^T \Sigma^{-1}\mu + \mu^T \Sigma^{-1}\mu \quad (1)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} x^T \Sigma^{-1}\mu &= (x^T \Sigma^{-1}\mu)^T \\ &= \mu^T (\Sigma^{-1})^T (x^T)^T \\ &= \mu^T (\Sigma^T)^{-1} x \\ &= \mu^T \Sigma x \end{aligned}$$

Тогда, выражение 1 можно записать так

$$x^T \Sigma^{-1}x - 2\mu^T \Sigma^{-1}x + \mu^T \Sigma^{-1}\mu$$

$$q(x_1, x_2) = -\frac{1}{2} \left(\underbrace{9x_1^2 + 25x_2^2 + 24x_1x_2}_{\text{квадратичная форма}} \underbrace{-6x_1 - 26x_2}_{\text{линейная форма}} + 10 \right)$$

$$9x_1^2 + 24x_1x_2 + 25x_2^2 = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 25 \end{pmatrix} \Rightarrow \Sigma = \frac{1}{9 \cdot 25 - 12 \cdot 12} \begin{pmatrix} 25 & -12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{25}{81} & -\frac{12}{81} \\ -\frac{12}{81} & \frac{9}{81} \end{pmatrix}$$

$$-6x_1 - 26x_2 = \begin{pmatrix} -6 & -26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -2\mu^T \Sigma^{-1} x$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -6 & -26 \end{pmatrix} = -2\mu \Sigma^{-1}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 13 \end{pmatrix} = \mu^T \Sigma^{-1}$$

$$\mu^T = \begin{pmatrix} 3 & 13 \end{pmatrix} \Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{25}{81} & -\frac{12}{81} \\ -\frac{12}{81} & \frac{9}{81} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{\det(2\pi\Sigma)} = \sqrt{(2\pi)^2 \det(\Sigma)} = \sqrt{4\pi^2 \frac{1}{81}} = \frac{2\pi}{9}$$

Задача 2 (минимум)

$$X - \text{рост}, Y - \text{вес}. Z = (X, Y), \mathbb{E}[Z] = \begin{pmatrix} 175 \\ 74 \end{pmatrix}, V(Z) = \begin{pmatrix} 49 & 28 \\ 28 & 36 \end{pmatrix}$$

а)

Определить вероятность того, что рост отличается от среднего на 10 сантиметров

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \leq 10) &= \mathbb{P}(-10 \leq X - 175 \leq 10) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{-10}{7} \leq \frac{X - 175}{7} \leq \frac{10}{7}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{10}{7}\right) - \Phi\left(-\frac{10}{7}\right) \\ &= 2\Phi\left(\frac{10}{7}\right) - 1 \\ &= 0.1531 \end{aligned}$$

б)

Пусть $U := X - Y$. Если $U < 90$, то считаем, что человек страдает избыточным весом

$U \sim ?$, $f_U(u) = ?$

$$\mathbb{E}[U] = \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y] = 175 - 74 = 101$$

$$\mathbb{D}[U] = \mathbb{D}[X] + \mathbb{D}[Y] - 2\text{cov}(X, Y) = 49 + 36 - 2 \cdot 28 = 29$$

$$f_U(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 29}} e^{-\frac{(u-101)^2}{2 \cdot 29}}$$

в)

Найти соответствующую вероятность

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(U < 90) &= \mathbb{P}\left(\frac{U - 101}{\sqrt{29}} < \frac{90 - 101}{\sqrt{29}}\right) \\ &= \Phi(-2.0426) \\ &= 0.0205 \end{aligned}$$

Задача 3 (минимум)

Теорема. Если $(X, Y) \sim N\left(\begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y \\ \rho\sigma_y\sigma_x & \sigma_y^2 \end{pmatrix}\right)$, то

$$(X|Y=y) \sim N\left(\mu_x + \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \mu_y), \sigma_x^2(1 - \rho^2)\right)$$

$$(Y|X=x) \sim N\left(\mu_y + \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \mu_x), \sigma_y^2(1 - \rho^2)\right)$$

а)

$$\rho = \frac{28}{\sqrt{49 \cdot 36}} = \frac{2}{3}$$

$$(Y|X=170) \sim N\left(\underbrace{74 + \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7} \cdot (170 - 175)}_{\mathbb{E}[Y|X=170]=71.14}; \underbrace{36 \left(1 - \frac{4}{9}\right)}_{\mathbb{D}[Y|X=170]}\right)$$

б)

$$f_{Y|X}(y|x=170) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}20} e^{-\frac{(y-71.14)^2}{2 \cdot 20}}$$

в)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y > 90|X=170) &= \mathbb{P}\left(\frac{Y - 71.14}{\sqrt{20}} > \frac{90 - 71.14}{\sqrt{20}} \middle| X=170\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{Y - 71.14}{\sqrt{20}} < 4.217 \middle| X=170\right) \\ &\approx 0 \end{aligned}$$