МФТИ. ЗОШ 2025

Винер Даниил

10 января 2025 г.

План на сегодня

1. Вещественные числа
2. Базовые определения геометрии
3. Скалярное и псевдоскалярное произведение векторов
4. Прямая, отрезок, луч
5. Выпуклая оболочка
6. Выпуклая оболочка

Вещественные числа

Определение

Число с плавающей точкой — форма представления вещественных чисел, при которой число хранится в виде мантиссы и показателя степени

- float — одинарная точность
- double — двойная точность
- long double — расширенная точность

Примечание

$float \leqslant double \leqslant long\ double$

Хранение вещественных чисел

Хранится 3 «массива»:

- Основание
- Мантисса
- Порядок (экспонента)

Хранение вещественных чисел

Хранится 3 «массива»:

- Основание
- Мантисса
- Порядок (экспонента)

Формула

$$x = (-1)^{\text{sign}} \cdot (1.M) \cdot B^{P-S}$$

- sign — знак числа
- M — мантисса
- B — основание системы
- P — степень
- S — сдвиг

Вместимость вещественных чисел

Тип	Размер (байт)
float	4
double	8
long double	16

Арифметические операции с числами с плавающей точкой такие же, как и с целыми числами. При этом операция деления по модулю не определена

Точка, вектор

Определение

Точка — характеристика объекта в пространстве, не имеет ни размера, ни формы

Пример

Точка a в n-мерном пространстве:

$$a = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Определение

Вектор — это направленный отрезок, имеющий длину и направление

Примечание

Вектор $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, из точки $A(x_1, y_1)$ в точку $B(x_2, y_2)$

Расстояние между точками

Определение

Пусть дано две точки $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $B(y_1, y_2, \ldots, y_n)$

Расстояние между точками A и B:

$$d(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$$

Скалярное произведение

Определение

Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{a}$ *и* $\overrightarrow{b}$ — произведение их длин на косинус угла между ними:

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos\theta$$

Оно показывает проекцию одного вектора на другой

Примечание

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = x_1x_2 + y_1y_2$$

Псевдоскалярное произведение векторов

Определение

Псевдоскалярное произведение — это число равное площади параллелограмма, построенного на этих векторах:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

Примечание

Псевдоскалярное произведение показывает поворот одного вектора относительно другого:

- Если $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} > 0$, то поворот от $\overrightarrow{a}$ к $\overrightarrow{b}$ против часовой стрелки
- Если $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} < 0$, то по часовой

Определение

Дано две точки в $\mathbb{R}^2$: $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Тогда прямая, проходящая через них может быть выражена как:

$$A(x - x_1) = B(y - y_1),$$

где $A = y_2 - y_1$, $B = x_1 - x_2$

Вектор нормали, уравнение прямой

Определение

Вектор нормали — это вектор, который перпендикулярен данной прямой (плоскости)

Определение

Пусть $\overrightarrow{n} = (A, B)$ — вектор нормали, тогда уравнение прямой, проходящей через точку (x_0, y_0):

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

Выпуклая оболочка

Определение

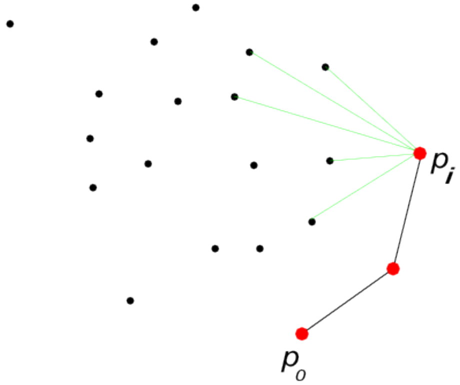
Выпуклая оболочка (или выпуклая оболочка множества точек) — это геометрический объект, который представляет собой наименьший выпуклый многоугольник, который может полностью покрыть заданное множество точек на плоскости (или в пространстве)

Алгоритмы построения

- Джарвиса
- Грэхэма
- Алгоритм QuickHull

Алгоритм Джарвиса

- Начинаем с самой левой точки, например p_0
- Ищем точку, которая образует наименьший полярный угол с текущей точкой
- Повторяем пока не придем снова в точку p_0



Алгоритм Грэхэма

- Алгоритм Грэхэма — оптимизация алгоритма Джарвиса

Шаги алгоритма:

- Выбираем точку с наименьшими координатами, которая будет опорной
- Сортируем все точки по углу, который они составляют с опорной точкой
- Строим выпуклую оболочку, начиная с опорной точки и добавляя точки, если они не образуют правый поворот. Когда же происходит правый поворот, удаляем последнюю добавленную точку

При добавлении i-й точки в оболочку нужно лишь удалить сколько-то последних добавленных точек, которые не будут входить в новую оболочку, а именно тех, которые «покрываются» новой точкой и своей предыдущей.

Алгоритм QuickHull

- Находим два крайних по x значения, которые будут служить концами отрезка
- Строим прямую между этими точками и находим точку, которая наиболее удалена от этой прямой
- Это будет точка, которая гарантированно лежит на границе выпуклой оболочки
- Далее мы повторяем шаги для двух оставшихся подмножеств точек и продолжаем до тех пор, пока не будут найдены все точки выпуклой оболочки