Следовательно, формула $\mathcal{F}_g$, которая реализует ФАЛ g, $g(0,\ldots,0)=\sigma$, с глубиной, удовлетворяющей (7.6), получается в результате подстановки t удовлетворяющих (7.9) формул для $\overline{\sigma}$–степеней характеристических ФАЛ отрезков $I_1,\ldots,I_{2t-1}$ вместо t БП бесповторной формулы, дерево которой представляет собой квазиполное двоичное дерево глубины $\lceil \log t\rceil$ из ФЭ &, если $\sigma=1$, и ФЭ $\vee$, если $\sigma=0$. Действительно,

$$D(\mathcal{F}_g) \leqslant 2\lceil \log n\rceil + 1 + \lceil \log t\rceil = \\ = 2\lceil \log n\rceil + \lceil \log(2\lfloor (q+1)/2\rfloor)\rceil \leqslant 2\lceil \log n\rceil + \lceil \log(q+1)\rceil .$$

Лемма доказана. □

§8 Задача синтеза схем для функций из специальных классов, примеры её решения и мощностные нижние оценки. Инвариантные классы С. В. Яблонского, теорема о числе инвариантных классов

Для множества ФАЛ Q, $Q\subseteq P_2$, и натурального n через $Q(n)$ будем обозначать множество $Q\cap P_2(n)$. При этом, как само множество Q, так и связанную с ним последовательность $Q(1),Q(2),\ldots$ будем называть *классом ФАЛ*. Аналогичным образом последовательность $Q(1),\ldots,Q(n),\ldots$, где $Q(n)\subseteq P_2^m(n)$ и $m=m_Q(n)$, а также их объединение называется *классом операторов*. Будем предполагать, что ни одно из множеств $Q(n)$, $n=1,2,\ldots$, рассматриваемого класса ФАЛ или операторов Q не является пустым и, как правило, $|Q(n)|\geqslant 3$.

Пусть заданы класс ФАЛ или операторов Q, класс схем $\mathcal{U}$ и функционал сложности $\mathcal{L}$. Тогда *функцией Шеннона для класса ФАЛ или операторов Q при их реализации в классе схем $\mathcal{U}$ относительно функционала сложности $\mathcal{L}$* называется функция натурального аргумента

$$\mathcal{L}(Q(n)) = \max_{f\in Q(n)} \mathcal{L}(f),$$

где $\mathcal{L}(f)$ — минимальная $\mathcal{L}$–сложность схем из $\mathcal{U}$, реализующих (систему) ФАЛ f. Для класса ФАЛ или операторов Q' и класса ФАЛ Q'' введём такие функции

$$\mathcal{J}\big(Q'(n)\big) = \frac{\log|Q'(n)|}{\log\log|Q'(n)|} \quad \text{и} \quad \sigma_Q(n) = \frac{\log|Q''(n)|}{2^n},$$

где $n=1,2,\ldots$. При этом из определения следует, что $0\leqslant \sigma_Q(n)\leqslant 1$ для всех n, $n=1,2,\ldots$.

Класс ФАЛ (операторов) Q называется:

1) *невырожденным*, если $n+m_Q(n)=o\big(\mathcal{J}\big(Q(n)\big)\big)$;

2) *строго невырожденным* классом ФАЛ, если $\log n = o\big(\log|Q(n)|\big)$;

3) *ненулевым классом ФАЛ*, если $\underline{\lim}_{n\to\infty} \sigma_Q(n) > 0$.

На основе стандартного мощностного метода получения нижних оценок можно установить справедливость следующего утверждения.

Лемма 8.1. *Если Q — невырожденный класс ФАЛ (операторов), то*

$$\mathcal{L}^{\mathrm{C}}_{\text{Б}}\big(Q(n)\big) \gtrsim \rho_{\text{Б}} \cdot \mathcal{J}\big(Q(n)\big), \qquad L^{\text{ИКС}}\big(Q(n)\big) \gtrsim \frac{1}{2} \cdot \mathcal{J}\big(Q(n)\big),$$

а если Q — строго невырожденный класс ФАЛ, то

$$L^{\mathrm{K}}\big(Q(n)\big) \gtrsim \mathcal{J}\big(Q(n)\big).$$

Следствие. *Для всякого ненулевого класса ФАЛ Q выполнены асимптотические неравенства*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{\mathrm{C}}_{\text{Б}}\big(Q(n)\big) &\gtrsim \rho_{\text{Б}} \cdot \sigma_Q(n)\frac{2^n}{n},\\
L^{\text{ИКС}}\big(Q(n)\big) &\gtrsim \frac{1}{2} \cdot \sigma_Q(n)\frac{\log|Q(n)|}{n},\\
L^{\mathrm{K}}\big(Q(n)\big) &\gtrsim \sigma_Q(n)\frac{2^n}{n}.
\end{aligned}$$

Класс ФАЛ (операторов) Q называется *стандартным относительно функционала сложности $\mathcal{L}$ класса схем $\mathcal{U}^{\mathrm{C}}_{\text{Б}}$*, если выполнено асимптотическое неравенство

$$\mathcal{L}^{\mathrm{C}}_{\text{Б}}\big(Q(n)\big) \lesssim \rho_{\text{Б}} \cdot \mathcal{J}\big(Q(n)\big) + O\big(n + m(n)\big).$$

Аналогично вводится определения стандартного класса операторов относительно других классов схем и функционалов их сложности, если соответствующая функция Шеннона имеет порядок роста $2^n/n$. Отметим, что при этом для невырожденного стандартного класса ФАЛ Q имеет место асимптотическое равенство

$$\mathcal{L}^{\mathrm{C}}_{\text{Б}}\big(Q(n)\big) \sim \rho_{\text{Б}} \cdot \mathcal{J}\big(Q(n)\big).$$

Для $n = 1, 2, \ldots$ и $r = r(n) \geqslant 1$ рассмотрим множество ФАЛ $P_2(n,t)$, которое включает в себя все ФАЛ из $P_2(n)$, обращающиеся в 0 на наборах с номерами $t, t+1, \ldots, 2^n - 1$, и мощность которого равна, очевидно, 2^t. Для любой функции $r = r(n) \geqslant 1$ рассмотрим класс ФАЛ Q, определённый равенствами $Q(n) = P_2(n, r(n))$, $n = 1, 2, \ldots$.

Лемма 8.2. *Для любой функции $r = r(n) \geqslant 1$ соответствующий класс $Q(n) = P_2(n, r(n))$ является стандартным относительно функционала сложности $\mathcal{L}$ схем класса $\mathcal{U}^{\mathrm{C}}_{\text{Б}}$, то есть*

$$\mathcal{L}^{\mathrm{C}}_{\text{Б}}\big(Q(n)\big) \lesssim \rho_{\text{Б}}\frac{r}{\log r} + O(n).$$

Доказательство. Будем считать, для удобства, что при лексикографической ν–нумерации наборов куба B^n от БП $X(n)$, $n = 1, 2, \ldots$, БП x_i «старше» БП x_j, если $i > j$. Полученные при этом предположении оценки сложности будут справедливы, очевидно, и для «обычного» порядка «старшинства» БП.

Рассмотрим сначала случай, когда $r > 2^{n-1}$. Выберем из множества $P_2(n, r)$ произвольую ФАЛ f и построим для неё СФЭ Σ_f с помощью асимптотически наилучшего метода синтеза (см. §5). Напомним, что при этом ФАЛ f (см. доказательство теоремы 5.1) разлагается по БП $x'' = (x_{q+1}, \ldots, x_n)$ следующим образом:

$$f(x', x'') = \bigvee_{\sigma'' \in B^{n-q}} K_{\sigma''}(x'') f_{\sigma''}(x'),$$

где $x' = (x_1, \ldots, x_q)$, и что для реализации каждой ФАЛ $f_{\sigma''}(x')$ в СФЭ Σ_f используется одна формула $\mathcal{F}_t$. Из принадлежности ФАЛ f классу $P_2(n, r)$ следует, что при $\nu(\sigma'') > \lceil r/2^q \rceil$ функция $f_{\sigma''}(x')$ тождественно равна нулю, и, таким образом, из схемы Σ_f можно удалить подсхемы, реализующие все указанные подфункции. Для сложности полученной при этом СФЭ $\widetilde{\Sigma}_f$ в силу (5.9) будет выполняться неравенство

$$\mathcal{L}\big(\widetilde{\Sigma}_f\big) \leqslant \mathcal{L}_j \left\lceil \frac{r}{2^q} \right\rceil t + O\big(2^{n-m} + p \cdot 2^s + p \cdot 2^{\frac{s}{2}+m}\big),$$

из которого при значениях параметров (5.10) следует, что

$$\mathcal{L}\big(\widetilde{\Sigma}_f\big) \lesssim \rho_{\text{Б}} \frac{r}{\log r}. \tag{8.1}$$

Пусть теперь $r \leqslant 2^{n-1}$. В этом случае найдём число k такое, что

$$k < n, \qquad 2^{k-1} < r \leqslant 2^k$$

и, следовательно,

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \overline{x}_{k+1} \cdot \ldots \cdot \overline{x}_n \cdot f'(x_1, \ldots, x_k). \tag{8.2}$$

Заметим, что функция f' принадлежит классу $P_2(k, r)$, где $r > 2^{k-1}$, и для неё по предыдущему случаю можно построить СФЭ $\widetilde{\Sigma}_{f'}$, удовлетворяющую (8.1). Искомая СФЭ $\widetilde{\Sigma}_f$ строится на основе (8.2) так, что

$$\mathcal{L}\big(\widetilde{\Sigma}_f\big) \leqslant \mathcal{L}\big(\widetilde{\Sigma}_{f'}\big) + O(n) \lesssim \rho_{\text{Б}} \frac{r}{\log r} + O(n).$$

Лемма доказана. □

Следствие. *Если $n = o\big(\frac{r}{\log r}\big)$, то $Q(n) = P_2(n, r(n))$ — стандартный невырожденный класс ФАЛ, для которого выполнено асимптотическое равенство*

$$\mathcal{L}^{\text{C}}_{\text{Б}}\big(Q(n)\big) \sim \rho_{\text{Б}} \frac{r}{\log r}.$$