```
(*The analysis for the model in Chapter 4 with fertility. Parameters are rho,
b and omega. In this code, mu = gamma (early versions of variable names) *)
P = (1 / 2) * ((k ^ 2 - 2 * k * mu + 4 * k + mu ^ 2) ^ (1 / 2) - (k + 3 * mu))
```

Out[1]=
$$\frac{1}{2}\left(-k-3\,mu+\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}\right)$$

```
X = (2 * mu) / (2 * mu + P)
```

Out[2]=
$$\frac{2\,mu}{2\,mu+\frac{1}{2}\left(-k-3\,mu+\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}\right)}$$

```
(*Compute the eigenvalues *){l1, l2, l3, l4} =
 Eigenvalues [{{-(k + mu + 2 * P), -k * (1 - P - X) / (1 - P), -k - P, -k}, {0, -(1 / 2) * P, (1 / 2), 0},
   {0, k * (1 - P - X) / (1 - P), -1 - mu - (1 / 2) * P, 0}, {-X / 2, 0, -X / 2, -mu - (1 / 2) * P}}]
```

Out[3]=
$$\left\{\left(40\,k+56\,k^2+12\,k^3+60\,k\,mu+4\,k^2\,mu-4\,mu^2-12\,k\,mu^2-4\,mu^3-\right.\right.$$
$$32\,k\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}-12\,k^2\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}-4\,mu\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}-$$
$$16\,k\,mu\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}-4\,mu^2\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}-$$
$$\sqrt{\left(\left(-40\,k-56\,k^2-12\,k^3-60\,k\,mu-4\,k^2\,mu+4\,mu^2+12\,k\,mu^2+4\,mu^3+32\,k\right.\right.}$$
$$\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}+12\,k^2\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}+4\,mu\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}+$$
$$\left.16\,k\,mu\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}+4\,mu^2\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}\right)^2-$$
$$4\times\left(256\,k^2+1600\,k^3+1664\,k^4+576\,k^5+64\,k^6+896\,k^2\,mu+1536\,k^3\,mu+384\,k^4\,mu-\right.$$
$$192\,k\,mu^2+64\,k^2\,mu^2-640\,k^3\,mu^2-192\,k^4\,mu^2-128\,k\,mu^3-256\,k^2\,mu^3-64\,mu^4+$$
$$64\,k\,mu^4+192\,k^2\,mu^4-128\,mu^5-64\,mu^6-448\,k^2\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}-$$
$$896\,k^3\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}-448\,k^4\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}-$$
$$64\,k^5\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}-64\,k\,mu\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}-$$
$$896\,k^2\,mu\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}-576\,k^3\,mu\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}-$$
$$64\,k^4\,mu\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}+64\,k\,mu^2\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}+$$
$$64\,k^2\,mu^2\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}+128\,k^3\,mu^2\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}-$$
$$64\,mu^3\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}+64\,k\,mu^3\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}+$$
$$128\,k^2\,mu^3\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}-128\,mu^4\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}-$$
$$\left.\left.64\,k\,mu^4\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}-64\,mu^5\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}\right)\right)\Big/$$
$$\left(8\times\left(-2-k-3\,mu+\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}\right)\left(-k+mu+\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}\right)\right),$$
$$\left(40\,k+\right.$$
$$56\,k^2+$$
$$12\,k^3+$$

$$
\begin{aligned}
&60\,k\,mu + \\
&4\,k^2\,mu - \\
&4\,mu^2 - \\
&12\,k\,mu^2 - \\
&4\,mu^3 - \\
&32\,k\,\sqrt{4\,k + k^2 - 2\,k\,mu + mu^2} - \\
&12\,k^2\,\sqrt{4\,k + k^2 - 2\,k\,mu + mu^2} - \\
&4\,mu\,\sqrt{4\,k + k^2 - 2\,k\,mu + mu^2} - \\
&16\,k\,mu\,\sqrt{4\,k + k^2 - 2\,k\,mu + mu^2} - \\
&4\,mu^2\,\sqrt{4\,k + k^2 - 2\,k\,mu + mu^2} + \\
&\sqrt{\left(\left(-40\,k - 56\,k^2 - 12\,k^3 - 60\,k\,mu - 4\,k^2\,mu + 4\,mu^2 + 12\,k\,mu^2 + 4\,mu^3 + 32\,k\right.\right.} \\
&\qquad \sqrt{4\,k + k^2 - 2\,k\,mu + mu^2} + 12\,k^2\,\sqrt{4\,k + k^2 - 2\,k\,mu + mu^2} + 4\,mu\,\sqrt{4\,k + k^2 - 2\,k\,mu + mu^2} + \\
&\qquad \left.16\,k\,mu\,\sqrt{4\,k + k^2 - 2\,k\,mu + mu^2} + 4\,mu^2\,\sqrt{4\,k + k^2 - 2\,k\,mu + mu^2}\right)^2 - \\
&\quad 4 \times \left(256\,k^2 + 1600\,k^3 + 1664\,k^4 + 576\,k^5 + 64\,k^6 + 896\,k^2\,mu + 1536\,k^3\,mu + 384\,k^4\,mu - \right. \\
&\qquad 192\,k\,mu^2 + 64\,k^2\,mu^2 - 640\,k^3\,mu^2 - 192\,k^4\,mu^2 - 128\,k\,mu^3 - 256\,k^2\,mu^3 - 64\,mu^4 + \\
&\qquad 64\,k\,mu^4 + 192\,k^2\,mu^4 - 128\,mu^5 - 64\,mu^6 - 448\,k^2\,\sqrt{4\,k + k^2 - 2\,k\,mu + mu^2} - \\
&\qquad 896\,k^3\,\sqrt{4\,k + k^2 - 2\,k\,mu + mu^2} - 448\,k^4\,\sqrt{4\,k + k^2 - 2\,k\,mu + mu^2} - \\
&\qquad 64\,k^5\,\sqrt{4\,k + k^2 - 2\,k\,mu + mu^2} - 64\,k\,mu\,\sqrt{4\,k + k^2 - 2\,k\,mu + mu^2} - \\
&\qquad 896\,k^2\,mu\,\sqrt{4\,k + k^2 - 2\,k\,mu + mu^2} - 576\,k^3\,mu\,\sqrt{4\,k + k^2 - 2\,k\,mu + mu^2} - \\
&\qquad 64\,k^4\,mu\,\sqrt{4\,k + k^2 - 2\,k\,mu + mu^2} + 64\,k\,mu^2\,\sqrt{4\,k + k^2 - 2\,k\,mu + mu^2} + \\
&\qquad 64\,k^2\,mu^2\,\sqrt{4\,k + k^2 - 2\,k\,mu + mu^2} + 128\,k^3\,mu^2\,\sqrt{4\,k + k^2 - 2\,k\,mu + mu^2} - \\
&\qquad 64\,mu^3\,\sqrt{4\,k + k^2 - 2\,k\,mu + mu^2} + 64\,k\,mu^3\,\sqrt{4\,k + k^2 - 2\,k\,mu + mu^2} + \\
&\qquad 128\,k^2\,mu^3\,\sqrt{4\,k + k^2 - 2\,k\,mu + mu^2} - 128\,mu^4\,\sqrt{4\,k + k^2 - 2\,k\,mu + mu^2} - \\
&\qquad \left.64\,k\,mu^4\,\sqrt{4\,k + k^2 - 2\,k\,mu + mu^2} - 64\,mu^5\,\sqrt{4\,k + k^2 - 2\,k\,mu + mu^2}\right)\Big)\Big) \Big/ \\
&\left(8 \times \left(-2 - k - 3\,mu + \sqrt{4\,k + k^2 - 2\,k\,mu + mu^2}\right)\left(-k + mu + \sqrt{4\,k + k^2 - 2\,k\,mu + mu^2}\right)\right), \\
&\left(-8\,k + \right. \\
&\qquad 24\,k^2 + \\
&\qquad 8\,k^3 + \\
&\qquad 8\,mu + \\
&\qquad 16\,k\,mu + \\
&\qquad 8\,mu^2 - \\
&\qquad 8\,k\,mu^2 + \\
&\qquad 8\,\sqrt{4\,k + k^2 - 2\,k\,mu + mu^2} - \\
&\qquad 8\,k\,\sqrt{4\,k + k^2 - 2\,k\,mu + mu^2} -
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&8\,k^2\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}\,+\\
&8\,mu\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}\,-\\
&8\,k\,mu\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}\,-\\
&\sqrt{\left(\left(8\,k-24\,k^2-8\,k^3-8\,mu-16\,k\,mu-8\,mu^2+8\,k\,mu^2-8\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}\,+\right.\right.}\\
&\qquad 8\,k\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}\,+8\,k^2\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}\,-\\
&\qquad \left.8\,mu\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}\,+8\,k\,mu\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}\right)^2-\\
&\quad 4\times\left(-512\,k^2-960\,k^3-192\,k^4+128\,k^5+32\,k^6-64\,k\,mu-1152\,k^2\,mu-448\,k^3\,mu+\right.\\
&\qquad 64\,k^4\,mu+64\,k\,mu^2-32\,k^2\,mu^2-64\,k^3\,mu^2-96\,k^4\,mu^2-64\,mu^3+\\
&\qquad 64\,k\,mu^3+64\,k^2\,mu^3-160\,mu^4-64\,k\,mu^4+96\,k^2\,mu^4-128\,mu^5-32\,mu^6+\\
&\qquad 64\,k\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}\,+448\,k^2\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}\,+\\
&\qquad 256\,k^3\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}\,-64\,k^4\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}\,-\\
&\qquad 32\,k^5\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}\,+320\,k\,mu\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}\,+\\
&\qquad 576\,k^2\,mu\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}\,-32\,k^4\,mu\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}\,-\\
&\qquad 64\,mu^2\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}\,+160\,k\,mu^2\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}\,+\\
&\qquad 64\,k^2\,mu^2\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}\,+64\,k^3\,mu^2\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}\,-\\
&\qquad 160\,mu^3\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}\,-128\,k\,mu^3\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}\,+\\
&\qquad 64\,k^2\,mu^3\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}\,-128\,mu^4\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}\,-\\
&\qquad \left.32\,k\,mu^4\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}\,-32\,mu^5\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}\right)\Big)\Big)\Big/\\
&\left(8\times\left(-2-k-3\,mu+\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}\right)\left(-k+mu+\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}\right)\right),\\
&\left(-8\,k+\right.\\
&\qquad 24\,k^2+\\
&\qquad 8\,k^3+\\
&\qquad 8\,mu+\\
&\qquad 16\,k\,mu+\\
&\qquad 8\,mu^2-\\
&\qquad 8\,k\,mu^2+\\
&\qquad 8\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}\,-\\
&\qquad 8\,k\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}\,-\\
&\qquad 8\,k^2\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}\,+\\
&\qquad 8\,mu\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}\,-\\
&\qquad 8\,k\,mu\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}\,+\\
&\qquad \sqrt{\left(\left(8\,k-24\,k^2-8\,k^3-8\,mu-16\,k\,mu-8\,mu^2+8\,k\,mu^2-8\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}\,+\right.\right.}\\
&\qquad\qquad 8\,k\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}\,+8\,k^2\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,mu+mu^2}\,-
\end{aligned}
$$

$$8\,\text{mu}\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,\text{mu}+\text{mu}^2}+8\,k\,\text{mu}\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,\text{mu}+\text{mu}^2}\Big)^2-$$

$$4\times\Big(-512\,k^2-960\,k^3-192\,k^4+128\,k^5+32\,k^6-64\,k\,\text{mu}-1152\,k^2\,\text{mu}-448\,k^3\,\text{mu}+$$

$$64\,k^4\,\text{mu}+64\,k\,\text{mu}^2-32\,k^2\,\text{mu}^2-64\,k^3\,\text{mu}^2-96\,k^4\,\text{mu}^2-64\,\text{mu}^3+$$

$$64\,k\,\text{mu}^3+64\,k^2\,\text{mu}^3-160\,\text{mu}^4-64\,k\,\text{mu}^4+96\,k^2\,\text{mu}^4-128\,\text{mu}^5-32\,\text{mu}^6+$$

$$64\,k\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,\text{mu}+\text{mu}^2}+448\,k^2\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,\text{mu}+\text{mu}^2}+$$

$$256\,k^3\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,\text{mu}+\text{mu}^2}-64\,k^4\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,\text{mu}+\text{mu}^2}-$$

$$32\,k^5\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,\text{mu}+\text{mu}^2}+320\,k\,\text{mu}\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,\text{mu}+\text{mu}^2}+$$

$$576\,k^2\,\text{mu}\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,\text{mu}+\text{mu}^2}-32\,k^4\,\text{mu}\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,\text{mu}+\text{mu}^2}-$$

$$64\,\text{mu}^2\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,\text{mu}+\text{mu}^2}+160\,k\,\text{mu}^2\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,\text{mu}+\text{mu}^2}+$$

$$64\,k^2\,\text{mu}^2\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,\text{mu}+\text{mu}^2}+64\,k^3\,\text{mu}^2\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,\text{mu}+\text{mu}^2}-$$

$$160\,\text{mu}^3\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,\text{mu}+\text{mu}^2}-128\,k\,\text{mu}^3\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,\text{mu}+\text{mu}^2}+$$

$$64\,k^2\,\text{mu}^3\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,\text{mu}+\text{mu}^2}-128\,\text{mu}^4\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,\text{mu}+\text{mu}^2}-$$

$$32\,k\,\text{mu}^4\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,\text{mu}+\text{mu}^2}-32\,\text{mu}^5\,\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,\text{mu}+\text{mu}^2}\Big)\Big)\Big/$$

$$\Big(8\times\Big(-2-k-3\,\text{mu}+\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,\text{mu}+\text{mu}^2}\Big)\Big(-k+\text{mu}+\sqrt{4\,k+k^2-2\,k\,\text{mu}+\text{mu}^2}\Big)\Big)\Big\}$$

```
(*While the eigenvalues are decidedly not nice,
the boundary of stability actually is! We've basically computer the upper
 bound beta(kappa)*)Reduce[l1 < 0 && l2 < 0 && l3 < 0 && l4 < 0 && k > 0 && mu > 0, mu]
```

Out[5]=

$$\Big(0<k\le\frac{1}{4}\times\Big(7-\sqrt{17}\Big)\;\&\&\;0<\text{mu}<-\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2\,k+k^2}\Big)\;||\;\Big(\frac{1}{4}\times\Big(7-\sqrt{17}\Big)<k<\boxed{\sqrt{}\;2.37\ldots}\;\&\&$$

$$\text{Root}\big[4-7\,k+2\,k^2+\big(18+15\,k-8\,k^2\big)\#1+(20-2\,k)\#1^2+6\#1^3\;\&,\;1\big]<\text{mu}<-\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2\,k+k^2}\Big)\;||$$

$$\Big(\boxed{\sqrt{}\;2.37\ldots}\le k\le\frac{20}{7}\;\&\&\;\text{Root}\big[4-7\,k+2\,k^2+\big(18+15\,k-8\,k^2\big)\#1+(20-2\,k)\#1^2+6\#1^3\;\&,\;3\big]<$$

$$\text{mu}<-\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2\,k+k^2}\Big)\;||\;\Big(k>\frac{20}{7}\;\&\&$$

$$\text{Root}\big[4-7\,k+2\,k^2+\big(18+15\,k-8\,k^2\big)\#1+(20-2\,k)\#1^2+6\#1^3\;\&,\;2\big]<\text{mu}<-\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2\,k+k^2}\Big)$$