

 TRƯỜNG ĐH BÁCH KHOA - ĐHQG-HCM KHOA KHUD	THI CUỐI KỲ		Học kỳ/ Năm học		2	2019 - 2020
			Ngày thi		21/7/2020	
	Môn học		Đại số tuyến tính			
	Mã môn học		MT1007			
	Thời lượng		100 phút	Mã đề	CA 2	
Ghi chú: - Đề thi có 9 câu in trên HAI mặt (xem thêm mặt sau). - Không được sử dụng: tài liệu, laptop. - Nộp lại đề thi cùng với bài làm.						

Câu 1) (L.O.1.2): a/ Tìm m để định thức của ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 3 & 8 \\ 7 & -4 & 5 & 10 \\ 9 & 0 & 2 & m \end{pmatrix}$ bằng 0.

b/ Với m ở câu a/, giải hệ phương trình $AX = 0$.

Câu 2) (L.O.2.1): Trong không gian \mathbb{R}_2 , với tích vô hướng $(x, y) = ((x_1; x_2), (y_1; y_2)) = 3x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 5x_2y_2$, cho hai vectơ $u = (1; -1)$ và $v = (2; 3)$. Tính góc giữa hai vectơ này.

Câu 3) (L.O.2.2): Cho ánh xạ tuyến tính $f: \mathbb{R}_3 \rightarrow \mathbb{R}_3$, biết $f(1; 2; -1) = (-1; 1; 3)$, $f(2; 5; -3) = (2; 1; 4)$ và $f(3; 7; -5) = (3; 0; 1)$. Cho vectơ $v_0 = (4; 2; m)$.

a/ Tính $f(v_0)$.

b/ Ánh xạ f từ \mathbb{R}_3 vào chính nó, nên vectơ v_0 có thể thuộc $Im f$. Tìm tất cả các tham số thực m để $v_0 \in Im f$.

Câu 4) (L.O.3.2): Cho ánh xạ tuyến tính f là phép lấy đạo hàm trong không gian $\mathbb{P}_1[x]$ (không gian các đa thức với hệ số thực có bậc nhỏ hơn hoặc bằng 1).

a/ Tìm ma trận A của f trong cơ sở $E = \{x + 2; 4x + 7\}$.

b/ Tính số chiều và tìm một cơ sở của $Ker f$ (nhân của ánh xạ f).

Câu 5) (L.O.1.2): Cho ánh xạ tuyến tính $f: M_2[\mathbb{R}] \rightarrow \mathbb{R}$, biết $\forall A \in M_2[\mathbb{R}], f(A) = trace A$, với $trace(A)$ là vết của ma trận A .

a/ Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & m \end{pmatrix}$ với m là tham số thực, tính $f(A)$.

b/ Tính số chiều và tìm một cơ sở của $Im f$ (ảnh của ánh xạ f).

Câu 6) (L.O.2.2): Cho ánh xạ tuyến tính f là phép chiếu vuông góc lên đường thẳng $(\Delta): 2x - y = 0$ trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy.

a/ Tìm ma trận A của f trong cơ sở $E = \{(2; 5); (3; 7)\}$.

b/ Chéo hóa A (nếu được).

Câu 7) (L.O.1.2): Đưa dạng toàn phương $Q(x_1; x_2) = -4x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_1x_2$ về dạng chính tắc bằng một phép biến đổi trực giao. Nêu rõ phép đổi biến.

Câu 8) (L.O.3.1): Theo nhóm chuyên gia nghiên cứu thị trường gạch men, tình hình biến động khách hàng tiêu thụ giữa các công ty sau một tháng:

Đối với công ty Ina, có 5% khách hàng chuyển sang sử dụng sản phẩm của Danu và 15% chuyển sang sử dụng sản phẩm của Santa.

Đối với công ty Danu, có 8% khách hàng chuyển sang sử dụng sản phẩm của Ina và 12% chuyển sang sử dụng sản phẩm của Santa.

Đối với công ty Santa, có 10% khách hàng chuyển sang sử dụng sản phẩm của Danu và 25% chuyển sang sử dụng sản phẩm của Ina.

Tại thời điểm hiện tại, cả 3 công ty chiếm giữ thị phần bằng nhau.

a/ Viết ma trận Markov mô tả cho mô hình trên.

b/ Dự đoán thị phần của công ty sau 3 tháng.

Câu 9) (L.O.3.1): Người ta chia độ tuổi của khỉ vàng ra làm 3 lớp: lớp I từ 0 đến 6 tuổi; lớp II từ 6 đến 12 tuổi; lớp III từ 12 tuổi trở lên. Sau mỗi 6 năm, trung bình mỗi con khỉ vàng lớp I sinh được 0.4 con; mỗi con khỉ vàng lớp II sinh được 3 con; và mỗi con khỉ vàng lớp III sinh được 0.7 con. Tỷ lệ sống sót của khỉ vàng trong từng lớp theo thứ tự I, II và III sau mỗi 6 năm lần lượt là 50%, 70%, 30%.

a) Lập ma trận leslie của bài toán trên.

b) Giả sử ban đầu, khu rừng có 200 con khỉ lớp I; 100 con khỉ lớp II và 200 con khỉ lớp III. Hãy dự đoán số khỉ thuộc mỗi lớp sau 18 năm.

– HẾT –

Đáp án ca 2

1/ a/ $\det(A) = 2m - 42 = 0 \Leftrightarrow m = 21$.

b/ Nghiệm tổng quát của hệ $X = (-3\alpha; \alpha; 3\alpha; \alpha)^T$.

2/ Góc α giữa hai vectơ thỏa $\cos \alpha = \frac{(u, v)}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{-8}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{69}} = \frac{-8}{3\sqrt{46}} \approx 113.15^\circ$.

3/ a/ $f(v_0) = (-2m - 24; 2m + 6; 6m + 12)$.

b/ $v_0 \in \text{Im} f \Leftrightarrow v_0$ là THTT của $\{(-1; 1; 3), (2; 1; 4); (3; 0; 1)\} \Rightarrow$

Hệ pt $(4; 2; m) = \alpha(-1; 1; 3) + \beta(2; 1; 4) + \gamma(3; 0; 1)$ có nghiệm $\Leftrightarrow r(A|b) = r(A) \Leftrightarrow m = 8$.

4/ a/ Theo định nghĩa, ma trận của f trong E là

$$A = \begin{pmatrix} [f(x+2)]_E | [f(4x+7)]_E \\ [0x+1]_E | [0x+4]_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 16 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

b/ (Có nhiều cách làm) Vì ánh xạ đạo hàm, nên $\text{Ker} f$ là tập hợp các đa thức mà có đạo hàm bằng 0.

Suy ra $\text{Ker} f$ chứa tất cả các đa thức hằng. Cơ sở của $\text{Ker} f$ $\{1\}$, hoặc một đa thức hằng tùy ý, $\dim(\text{Ker} f) = 1$.

5/ a/ $f(A) = \text{trace}(A) = 3 + m$.

b/ (có nhiều cách làm) Ta có $\dim(\mathbb{R}) = 1$. Chọn ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, tùy ý sao cho $\text{trace}(A) \neq 0$.

Khi đó $f(A)$ là một số khác 0, nên tập hợp chứa $f(A)$ đltt và đây là cơ sở của $\text{Im} f$. Suy ra $\dim(\text{Im} f) = 1$.

6/ a/ Chọn cơ sở $E_1\{(1; 2), (2; -1)\}$ gồm VTCP và VTPT của (Δ) .

Khi đó $f(1; 2) = (1; 2), f(2; -1) = (0; 0)$.

$$f(x, y) = f(E_1) \cdot E_1^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = MX.$$

Ma trận của f trong E là $A = E^{-1} \cdot M \cdot E = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -12 & -17 \\ 12 & 17 \end{pmatrix}$

b/ $A = PDP^{-1}$, với $D = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 17 \\ -1 & -12 \end{pmatrix}$

7/ a/ Ma trận của dạng toàn phương $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Chéo hóa trực giao $A = PDP^T$, với $D = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, P = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Dạng chính tắc $Q(y_1; y_2) = -5y_1^2 + 5y_2^2$. Phép đổi biến $X = PY$.

8/ a/ Ma trận Markov $M = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.08 & 0.1 \\ 0.05 & 0.8 & 0.25 \\ 0.15 & 0.12 & 0.65 \end{pmatrix}$.

b/ $X_0 = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)^T$. Sau ba tháng $X_3 = M^3 \cdot X_0 = (0.3172; 0.3982; 0.2846)^T$.

9/ a/ Ma trận Leslie $L = \begin{pmatrix} 0.4 & 3 & 0.7 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}$.

b/ Sau 18 năm là 3 chu kỳ của 6 năm, nên $X_3 = L^3 \cdot X_0 = (1095, 9; 299, 5; 214, 7)^T$