Câu 1

$x \in \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} \alpha_i e_i = x,\ \alpha_i \in \mathbb{R}$ có nghiệm

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 1 & 3 & -1 & b \\ 1 & -1 & 1 & c \\ 1 & 0 & 1 & d \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & b-a \\ 0 & -3 & 2 & c-a \\ 0 & -2 & 2 & d-a \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 2 & c-4a+3b \\ 0 & 0 & 2 & d-3a+2b \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 2 & c-4a+3b \\ 0 & 0 & 0 & d+a-b-c \end{array}\right)$$

$\Rightarrow d+a-b-c=0$

Câu 2

· $f(e_1) = (1,2,1) \Rightarrow [f(e_1)]_E = (1\ \ 1\ \ 3)^T$

$f(e_2) = (1,0,1) \Rightarrow [f(e_2)]_E = (1\ \ -1\ \ 1)^T$

$f(e_3) = (1,1,0) \Rightarrow [f(e_3)]_E = (0\ \ 1\ \ 2)^T$

$\Rightarrow A_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ là ma trận axtt f trong cơ sở E.

Câu 3

· Để ý, $e_1 - e_2 = e_3$ nên phát biểu $\{e_1, e_2, e_3\}$ đltt là SAI

Câu 4

· $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ ptđt của A là $\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)=0$

$\Rightarrow$ A có 3 trị riêng $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$ (bđs đều $=1$)

$\Rightarrow$ A chéo hoá được $\Rightarrow$ A đồng dạng với $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

· $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & m \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$ ptđt của B là $-\lambda^3 + 5\lambda^2 + (2m-10)\lambda + (8-4m) = 0$

Để A và B cùng đồng dạng với ma trận chéo $\Rightarrow$ B có 3 trị riêng 0, 2, 3

Thay vào $\Rightarrow m = 2$.

Câu 5

$S^TAS = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -15 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$

Câu 6

Gọi $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ là ma trận dạng toàn phương f

· $|5| = 5 > 0$, $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$, $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1 > 0$

$\Rightarrow$ Theo Tc Sylvester $\Rightarrow f$ xác định dương $\Rightarrow$ (A)

Câu 7

Ma trận của axtt f trong cơ sở chính tắc là

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ ptđt của A là $\lambda^2(3-\lambda) = 0$

Với $\lambda_1 = 0 \Rightarrow \dim(E_{\lambda_1}) = 2 \Rightarrow$ bhh = bội đs $= 2$

$\lambda_2 = 3 \Rightarrow$ b đs = b hh $= 1$

Vậy A chéo hoá được $\Rightarrow$ ma trận biểu diễn của f

trong cơ sở E nào đó là $[f]_E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow [f^{2021}]_E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^{2021} \end{pmatrix} = 3^{2020}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3^{2020}[f]_E \Rightarrow f^{2021} = 3^{2020} \cdot f$

Câu 8

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ n & 1 & 1 \\ -1 & -3 & m \end{pmatrix} \Rightarrow \det(E) = m + 9n$

Hạng $\{e_1, e_2, e_3\} > 2 \Rightarrow \det(E) \neq 0$

Câu 9

$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)\, q(x)\, dx$

· $p = x^{2m},\ q = -x^{2m+1} \Rightarrow \langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} -x^{4m+1}\, dx = -\frac{x^{4m+2}}{4m+2}\Big|_{-1}^{1} = -\frac{2}{4m+2} \neq 0$

(tương tự có thể kiểm tra các cặp còn lại).

Câu 10

· Dễ dàng chứng tỏ $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ là tập đltt

$\Rightarrow \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^4$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^4$, x là thtt của e_1, e_2, e_3 và e_4

$\Rightarrow$ ĐA

Câu 11

· Tổng quát, Xét $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, A thoả đk đề bài

$\Rightarrow$ ptđt $(a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Rightarrow \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$

$\Rightarrow \Delta = (a+d)^2 - 4ad + 4bc$

$= (a-d)^2 + 4bc$

$\Rightarrow$ Ràng buộc phải thoả $(a-d)^2 + 4bc > 0$

Với $A = \begin{pmatrix} m^2 - n^2 + 2mn + m & m+n \\ m-n & n^2 + m^2 - 2mn + n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ ràng buộc $(m-n)^2 + 4(m^2 - n^2) > 0$.

Câu 12

· $f(e_1) = A.e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 15 \end{pmatrix}$

$f(e_2) = A.e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 26 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Ma trận của AXTT f trong cơ sở E là $A_E = E^{-1} f(E) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 15 & 26 \end{pmatrix}$.