

 <b>TRƯỜNG ĐH BÁCH KHOA</b> <b>- ĐHQG-HCM</b> <b>KHOA KHUD</b>	<b>THI CUỐI KỲ</b>		<b>Học kỳ/ Năm học</b>		<b>2</b>	<b>2019 - 2020</b>
			<b>Ngày thi</b>		<b>21/7/2020</b>	
	<b>Môn học</b>		<b>Đại số tuyến tính</b>			
	<b>Mã môn học</b>		<b>MT1007</b>			
	<b>Thời lượng</b>		<b>100 phút</b>	<b>Mã đề</b>	<b>CA 1</b>	
<b>Ghi chú:</b> - Đề thi có 9 câu in trên HAI mặt (xem thêm mặt sau).						
- Không được sử dụng: tài liệu, laptop.						
- <b>Nộp lại đề thi cùng với bài làm.</b>						

**Câu 1) (L.O.1.2):** a/ Tìm hạng của ma trận  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -3 & 7 \\ 7 & 4 & 0 & 10 \\ 8 & 3 & -5 & 11 \end{pmatrix}$ .

b/ Giải hệ phương trình  $AX = b$ , với  $b = (2; -1; 5; -4)^T$ .

**Câu 2) (L.O.2.1):** Trong không gian  $\mathbb{R}_3$ , với tích vô hướng  $(x, y) = ((x_1; x_2; x_3), (y_1; y_2; y_3)) = 4x_1y_1 - x_1y_2 + 2x_1y_3 - x_2y_1 + 6x_2y_2 + 3x_2y_3 + 2x_3y_1 + 3x_3y_2 + 5x_3y_3$ , cho hai vectơ  $u = (1; -1; 2)$  và  $v = (2; 1; m)$ .  
 Tìm tất cả các tham số thực của  $m$  để  $u \perp v$ .

**Câu 3) (L.O.2.2):** Cho ánh xạ tuyến tính  $f: \mathbb{R}_3 \rightarrow \mathbb{R}_3$ , biết ma trận của ánh xạ  $f$  trong cơ sở

$$E = \{(1; 1; 2), (3; 4; 7), (2; 3; 6)\} \text{ là } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

a/ Tìm tọa độ của vectơ  $v_0 = (5; 3; m)$  trong cơ sở  $E$ , với  $m$  là tham số.

b/ Tính  $f(v_0)$ .

**Câu 4) (L.O.3.2):** Cho ánh xạ tuyến tính  $f$  là phép chiếu vuông góc lên đường thẳng  $(\Delta): 3x - 2y = 0$  trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ  $Oxy$ .

a/ Tìm ma trận  $A$  của  $f$  trong cơ sở  $E = \{(1; 3), (2; 7)\}$ .

b/ Tính số chiều và tìm một cơ sở của  $Im f$  (ảnh của ánh xạ  $f$ ).

**Câu 5) (L.O.1.2):** Cho ánh xạ tuyến tính  $f: M_2[\mathbb{R}] \rightarrow \mathbb{R}$ , biết  $\forall A \in M_2[\mathbb{R}], f(A) = trace A$ , với  $trace(A)$  là vết của ma trận  $A$ .

a/ Cho  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & m \end{pmatrix}$  với  $m$  là tham số thực, tính  $f(A)$ .

b/ Tính số chiều và tìm một cơ sở của  $Ker f$  (nhân của ánh xạ  $f$ ).

**Câu 6) (L.O.2.2):** Cho ánh xạ tuyến tính  $f: \mathbb{P}_1[x] \rightarrow \mathbb{P}_1[x]$ ,

$\forall p(x) \in \mathbb{P}_1[x], f(p(x)) = p'(x)$  (phép lấy đạo hàm).

a/ Tìm ma trận  $A$  của  $f$  trong cơ sở  $E = \{2x + 5; 3x + 7\}$ .

b/ Chéo hóa  $A$  (nếu được).

**Câu 7) (L.O.1.2):** Đưa dạng toàn phương  $Q(x_1; x_2) = -5x_1^2 + 10x_2^2 + 8x_1x_2$  về dạng chính tắc bằng một phép biến đổi trực giao. Nêu rõ phép đổi biến.

**Câu 8) (L.O.3.1):** Trong một ngày người ta quy ước chỉ có ba trạng thái thời tiết: nắng, mây và mưa. Sau thời gian dài quan sát, các nhà nghiên cứu nhận thấy thời tiết của ngày hôm sau chỉ phụ thuộc vào thời tiết của ngày liền trước đó và xác suất để:

Ngày hôm nay nắng mà sang ngày hôm sau mây là 0.2, sang mưa là 0.1;

Ngày hôm nay mây mà sang ngày hôm sau mưa là 0.35, sang nắng là 0.15;

Ngày hôm nay mưa mà sang ngày hôm sau mây là 0.3, sang nắng là 0.2.

a/ Viết ma trận Markov mô tả cho mô hình trên.

b/ Giả sử ta có dự báo thời tiết của ngày 08/03/2021 là 70% là nắng, 20% là mây và 10% là mưa. Hãy dự đoán thời tiết vào ngày 13/03/2021 (sau 5 ngày).

**Câu 9) (L.O.3.1):** Khảo sát các cá thể cái của một đàn tôm sú. Xét tôm theo các loại dựa trên chất lượng của thịt tôm. Loại NHỎ ( 0 đến 1 tuổi), loại TRUNG BÌNH (1 đến 2 tuổi), loại LỚN (2 tuổi trở lên). Do quá trình lột vỏ hằng năm, tôm bị đe dọa tính mạng bởi những đồng loại xung quanh và do khai thác nên tỉ lệ sống sót của tôm loại NHỎ qua năm kế tiếp là 0.55, tỉ lệ sống sót của tôm loại TRUNG BÌNH qua năm kế tiếp là 0.65, tỉ lệ sống sót của tôm loại LỚN qua năm kế tiếp là 0.8. Tỉ lệ sinh con cái là 0.5 của tôm loại TRUNG BÌNH và 0.6 của tôm loại LỚN. Khảo sát số lượng tôm cái của một đàn tôm sinh sống ở một vuông tôm ở Vũng Tàu. Theo thống kê năm 2020 đàn tôm có: tôm loại NHỎ là 12.000 con; tôm loại TRUNG BÌNH là 8.000 con và tôm loại LỚN là 10.000 con.

a/ Viết ma trận Leslie mô tả cho mô hình trên.

b/ Tính số lượng của tôm cái từng loại sau 3 năm.

– HẾT –

## Đáp án ca 1

1/  $\text{rank}(A) = 3$  (0.5đ)

b/ Nghiệm của hệ  $X = (3\alpha; \alpha - 8; -4\alpha - 44; -23\alpha - 2)^T$  (1đ)

2/ Ma trận  $M = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ . Điều kiện  $u \cdot M \cdot v^T = 0 \Leftrightarrow 9m + 17 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{17}{9}$  (1đ)

3/ a/ Tọa độ của  $v_0$  là  $[v_0]_E = (3 + m; 6 - m; m - 8)^T$  (0.5đ)

b/  $f(v_0) = (48m - 160; 65m - 217; 120m - 400)^T$  (0.5đ)

4/ Chọn cơ sở  $E_1 = \{(2; 3), (3; -2)\}$ . Khi đó  $f(2; 3) = (2; 3), f(3; -2) = (0; 0)$ .

Suy ra  $f(x, y) = f(E_1) \cdot E_1^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \cdot X$

Ma trận của  $f$  trong cơ sở  $E$  là  $A = \text{inv}(E) * M * E = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 88 & 200 \\ -33 & -75 \end{pmatrix}$

b/ (Có nhiều cách làm) Vì hình chiếu vuông góc lên đường thẳng nên ảnh của  $f$  là đường thẳng ( $\Delta$ ). Suy ra  $\dim(\text{Im}f) = 1$ , cơ sở của  $\text{Im}f$  là  $\{(2; 3)\}$  là VTCP của đường thẳng.

5/ a/  $f(A) = \text{trace}(A) = 1 + m$ .

b/  $\forall A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Ker}f \Leftrightarrow f(A) = \text{trace}(A) = a + d = 0 \Leftrightarrow a = -d$

Khi đó  $A = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & d \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Cơ sở của  $\text{Ker}f$  là  $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ ,  $\dim(\text{Ker}f) = 3$ .

6/ Theo định nghĩa, ma trận của  $f$  trong  $E$  là

$A = \begin{pmatrix} [f(2x+5)]_E & [f(3x+7)]_E \\ [f(0x+2)]_E & [f(0x+3)]_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}$

b/ Phương trình đặc trưng  $\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

VTR ứng với  $\lambda_1$  là  $X = (-3\alpha; 2\alpha)^T, \alpha \neq 0$

Cơ sở của KGCR  $E_{\lambda_1}$  là  $\{(-3; 2)\}$ . Suy ra BHH ( $\lambda_1$ ) = 1 < BDS ( $\lambda_1$ ). Vậy  $A$  không chéo hóa được.

7/ Ma trận của dạng toàn phương  $A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$ .

Chéo hóa trực giao  $A = PDP^T$ , với  $D = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}, P = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

Dạng chính tắc  $Q(y_1; y_2) = -6y_1^2 + 11y_2^2$ . Phép đổi biến  $X = PY$ .

8/ a/ Ma trận Markov  $M = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.15 & 0.2 \\ 0.2 & 0.50 & 0.3 \\ 0.1 & 0.35 & 0.5 \end{pmatrix}$ .

b/  $X_0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.15 \end{pmatrix}$ . Dự báo thời tiết vào ngày 13/03/2021 là  $X_5 = M^5 \cdot X_0 = (0.3716; 0.3252; 0.2964)^T$ .

9/ a/ Ma trận Leslie  $L = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.6 \\ 0.55 & 0 & 0 \\ 0 & 0.65 & 0.8 \end{pmatrix}$ .

b/ Số lượng con cái của từng loại qua 3 năm:  $X_3 = L^3 \cdot X_0 = L^3 \cdot \begin{pmatrix} 12000 \\ 8000 \\ 10000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11660 \\ 6171 \\ 15455 \end{pmatrix}$

MSSV: ..... Họ và tên SV:.....