BÀI TẬP ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

BỘ MÔN TOÁN ỨNG DỤNG

Ngày 19 tháng 10 năm 2020

BÀI TẬP TUẦN 2: CHƯƠNG MA TRẬN

I. Các định nghĩa cơ bản:

+ Ma trận vuông: $A_{n \times n}$
+ Ma trận đơn vị: phần tử trên đường chéo chính bằng 1, tam giác trên và tam giác dưới là các phần tử 0
+ Ma trận bậc thang
+ Ma trận không: là có các phần tử 0
+ Ma trận chuyển vị: đưa các phần tử ở cột về hàng và ngược lại (Ký hiệu: A^T)
+ Vết ma trận: tổng các phần tử trên đường chéo chính $tr(A) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$
+ Ma trận đối xứng: $A^T = A$
+ Ma trận phản đối xứng: $A = -A^T$

II. Các phép toán cơ bản: $A = (a_{ij})_{m \times n}$

+ Cộng (trừ) 2 ma trận (cùng cỡ) lấy từng phần tử tương ứng vị trí với nhau cộng (trừ).
+ Nhân ma trận với 1 số: lấy số đó x từng phần tử của ma trận $\alpha \times A = (\alpha a_{ij})_{m \times n}$
+ Nhân 2 ma trận: $A_{m \times n} \times B_{n \times p} = C_{m \times p}$
với $A = (a_{ij})_{m \times n}, B = (b_{ij})_{n \times p}, C = (c_{ij})_{m \times p} = AB$
c_{ij} = hàng i của A $\times$ cột j của B (tích vô hướng)

III. Tính chất (Xem trong giáo trình ĐSTT)

+ $(AB)^T = B^T.A^T; \quad IA = AI = A; \quad AB \neq BA$
+ $AB = 0$ không suy ra được A $=$ 0 hoặc B $=$ 0
+ $A^o = I; \quad A^1 = A; \quad A^2 = A.A; \quad A^n = A...A$(n ma trận A)
+ $f(x) = \alpha_n.x^n + \alpha_{n-1}.x^{n-1} + ... + \alpha_1.x + \alpha_0 \to f(A) = \alpha_n.A^n + \alpha_{n-1}.A^{n-1} + ... + \alpha_1.A + \alpha_0.I.$

IV. Các phép biến đổi sơ cấp

+ $h_i \longrightarrow \alpha h_j, \quad \forall \alpha \neq 0$
+ $h_i \longrightarrow h_i + \beta h_j, \quad \forall \beta$
+ $h_i \longleftrightarrow h_j$

V. Hạng của ma trận

+ Ký hiệu rank(A) = r(A)
+ Hạng ma trận là số hàng khác 0 của ma trận bậc thang
+ Cách tìm: $A \xrightarrow[\text{hoặc bđsc theo cột}]{\text{bđsc theo hàng}}$ ma trận bậc thang.
+ Tính chất:
    * $r(A) = 0 \Longleftrightarrow A = 0$
    * $A = (a_{ij})_{m\times n} \longrightarrow r(A) \leq min\{m, n\}$
    * Nếu $A \xrightarrow{\text{bđsc}} B$ thì $r(B) = r(A)$

VI. Ma trận khả nghịch

+ Ma trận vuông A khả nghịch nếu $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$, trong đó A là ma trận khả nghịch, A^{-1} là ma trận nghịch đảo của A.
+ Ma trận khả nghịch là ma trận không suy biến.
+ Cách tìm A^{-1}: $[A|I] \xrightarrow{\text{bđsc theo hàng}} [I|A^{-1}]$
+ Tính chất:
    * $(A^{-1})^{-1} = A, \quad (AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$
    * $\forall \alpha \neq 0, \quad (\alpha A)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha} A^{-1}$

VII. Liên hệ giữa phép biến đổi sơ cấp và phép nhân ma trận

+ Biến đổi sơ cấp theo **hàng** $\Longleftrightarrow$ nhân bên **trái** ma trận.
+ Biến đổi sơ cấp theo **cột** $\Longleftrightarrow$ nhân bên **phải** ma trận.

BÀI TẬP MA TRẬN

Bài 1: Tính $C = A^T.B, \quad tr(C), \quad rank(C), \quad det(C)$ biết
A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ và B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Bài 2: Cho A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ và C = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Tìm $2AC - (CB)^T$.

Bài 3: Đưa các ma trận sau về dạng bậc thang và tìm hạng:
A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$; B = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; C = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

Bài 4: Tìm α để hạng ma trận sau nhỏ nhất:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ \alpha & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Bài 5: Cho $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ và ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Tính f(A)

Bài 6: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & m \end{pmatrix}$. Tìm m để hạng của ma trận A bằng 2.

Bài 7: Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$. Tính A^2, A^3, từ đó suy ra A^n.

Bài 8: Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ và $f(x) = 6x^{100} + 5x^{99} + 4x + 3$. Tìm $f(A)$

Bài 9: Cho A là ma trận vuông cấp 3. Thực hiện phép biến đổi sơ cấp $h_2 \to h_2 + 2h_1$ với ma trận A thì tương ứng với phép nhân ma trận nào và nhân bên nào của ma trận A? Kiểm tra lại với A $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Bài 10: Cho ma trận $A \in M_{3\times 4}[\mathbb{R}]$. Thực hiện phép biến đổi sơ cấp $c_2 \to c_3 + 2c_2$ với ma trận A thì tương ứng với phép nhân ma trận nào và nhân bên nào của ma trận A? Kiểm tra lại với ma trận
A $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

Bài 11: Cho A $= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & m+5 & m^2+1 \\ 1 & -1 & 2 & m-1 \end{pmatrix}$. Tìm m để r(A) $= 3$.

Bài 12: Tìm ma trận X thỏa mãn:

a. $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}. X + \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b. $X \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

c. $XA + 3B = A^T + 2X$, biết $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d. $A(X - 3B^2) = C^T - 4X$, biết

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 5 \\ 3 & 10 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ và } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

e. $A(X + 2B) = 3A^T + 2X$, với

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 9 & -4 \\ 4 & 9 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Bài 13: Cho A = $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & 7 \\ 5 & -7 & 9 & 16 \\ 4 & -4 & m & m+1 \end{pmatrix}$. Tìm m để r(A) = 3.

Bài 14: Cho A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & m \end{pmatrix}$. Tìm m để

$a)$ A khả nghịch

$b)$ $r(A^{-1}) = 3$

Bài 15: Cho các ma trận:

A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 7 & 7 & -1 \\ -2 & 3 & 8 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$, C = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

$a)$ Tính $det(B-2C)$ và tìm ma trận nghịch đảo của A (nếu có)

$b)$ Tìm ma trận X thỏa $X(AB-2AC) = (B-2C)^2$.