BÀI TẬP ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

BỘ MÔN TOÁN ỨNG DỤNG

Ngày 3 tháng 3 năm 2020

BÀI TẬP TUẦN 3: CHƯƠNG ĐỊNH THỨC

Xét ma trận vuông $A = (a_{ij})_n$

Định thức của ma trận A được ký hiệu: $det(A) = |A|$

I. Phần bù đại số

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}.\,|\text{định thức con thu được từ A bỏ hàng i, cột j}|$$

II. Cách tính định thức

1. Khai triển theo hàng hoặc cột bất kỳ

$$|A| = \begin{vmatrix} & * & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ & * & & \end{vmatrix} = a_{i1}.A_{i1} + a_{i2}.A_{i2} + \dots + a_{in}.A_{in}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} & a_{1j} & \\ * & a_{2j} & * \\ & \dots & \\ & a_{nj} & \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$$

2. Tích các phần tử trên đường chéo của ma trận bậc thang

3. Theo qui tắc hình sao (Chỉ áp dụng cho định thức cấp 3)

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) -$$

$$(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

III. Phép biến đổi sơ cấp của định thức (đối với hàng)

1. $A \xrightarrow{h_i \to \alpha h_i} B \Rightarrow |B| = \alpha\,|A|$
2. $A \xrightarrow{h_i \to h_i + \beta h_j} B \Rightarrow |B| = |A|$
3. $A \xrightarrow{h_i \leftrightarrow h_j} B \Rightarrow |B| = -\,|A|$

IV. Tính chất của định thức

+ $|AB| = |A||B|$, $|A^T| = |A|$, $|\alpha A| = \alpha^n |A|$
+ $|A^m| = |A|^m$, $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ (A khả nghịch)
+ Ma trận có hàng (cột) là các phần tử bằng 0 thì det(A) = |A| = 0
+ Ma trận có 2 hàng (2 cột) tỉ lệ với nhau thì det(A) = |A| = 0
+ A khả nghịch $\leftrightarrow det(A) \neq 0$

V. Ma trận phụ hợp: A là ma trận khả nghịch

$$P_A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & .. \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

+ $|P_A| = |A|^{n-1}, \quad A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} P_A$

+ $$r(P_A) = \begin{cases} n & r(A) = n \\ 1 & r(A) = n - 1 \\ 0 & r(A) < n - 1 \end{cases}$$

BÀI TẬP CHƯƠNG ĐỊNH THỨC

Bài 1: Tính định thức các ma trận sau:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 6 & 5 & -2 \\ v3 & 4 & -2 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 2 \\ 7 & m & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Bài 2: Tìm m để ma trận:

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 5 & 0 & 7 & m \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ khả nghịch

b. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & 0 & m \end{pmatrix}$ có $r(P_A) = 4$

c. $C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & m \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ có $r(P_A) = 1$

d. $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & m & 3 \\ 6 & 5 & 8 & m \end{pmatrix}$ có $\det(D) = 12$

Bài 3: Cho 2 ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Tính $det(A^{-1}), det(AB), det(3A)^{-1}, det(2P_A), det(AP_B),$
$det(2A^{-1}B), det(P_{AB}), det((3A)^{-1}B), det(A^4 P_{2B}^{-1})$.

Bài 4: Cho $f(x) = x^2 + 5x - 1$ và $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Tính det(f(A)).