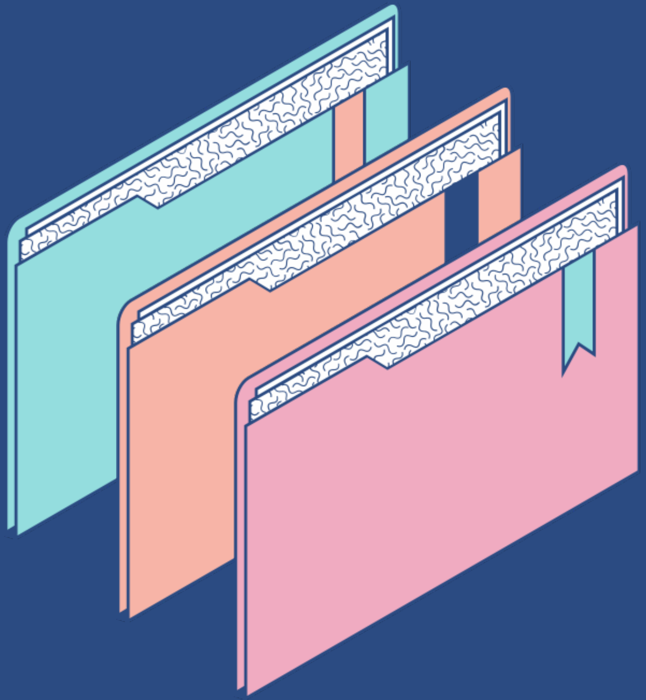
Một số phương pháp giải bài toán xếp ba lô

Sinh viên thực hiện:

Đặng Quang Vinh – 18001218

Ngô Quang Vinh - 18001219

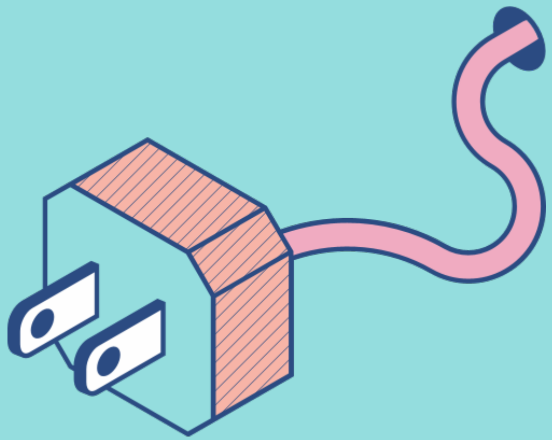


Nội dung chính

- Giới thiệu bài toán xếp ba lô
- Phương pháp Quay lui/Vét cạn
- Phương pháp Đệ quy
- Phương pháp Tham lam
- Phương pháp Quy hoạch động
- Nhận xét

Giới thiệu bài toán xếp ba lô

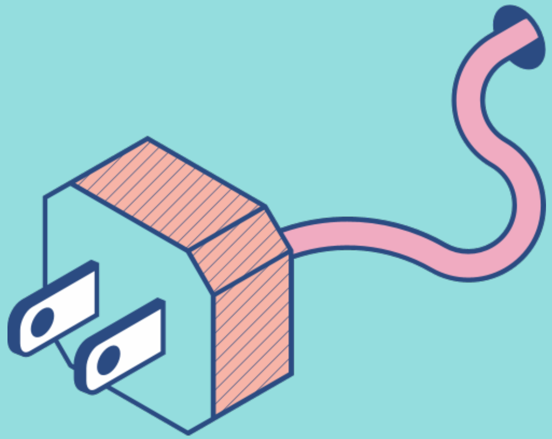
Bài toán xếp ba lô(hay còn gọi là bài toán cái túi) là một bài toán tối ưu hoá tổ hợp. Tên gọi của bài toán xuất phát từ vấn đề cách chọn những thứ quan trọng để nhét vừa một cái túi(bị giới hạn về khối lượng) để mang theo.



Giới thiệu bài toán xếp ba lô

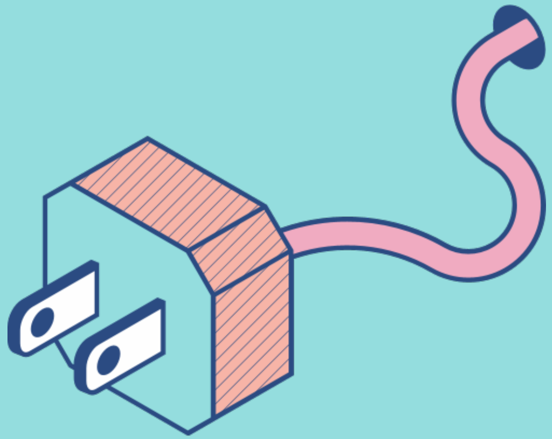
⭐Có N gói hàng, gói hàng thứ i có trọng lượng W_i và giá trị là V_i .

⭐Cái túi có sức chứa tối đa là M, vậy ta cần chọn những đồ vật nào để giá trị thu được là lớn nhất?



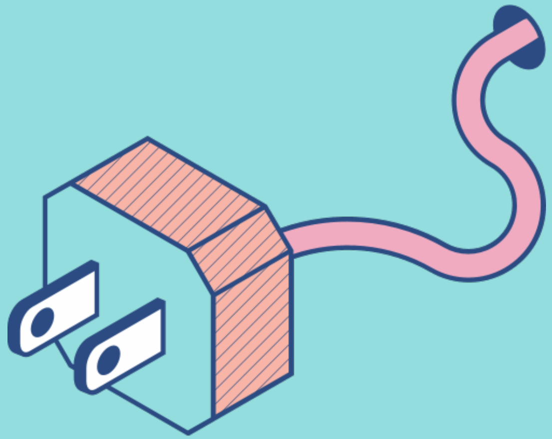
Giới thiệu bài toán xếp ba lô

Ví dụ: Ba lô sức chứa là 11kg và ta có 5 gói hàng, với khối lượng lần lượt là 3, 4, 5, 9, 4 kg và giá trị tương ứng lần lượt là 3, 4, 4, 10, 5 $. Chọn những đồ vật nào để tổng giá trị các đồ vật là lớn nhất?



Giới thiệu bài toán xếp ba lô

Kết quả thu được đó là chọn các đồ vật: 1, 2 và 5 với tổng giá trị là 12
→ 12$ = 3$ + 4$ + 5$ và tổng khối lượng là 3kg + 4kg + 4kg = 11kg bằng sức chứa của ba lô.



Phương pháp quay lui/vét cạn

⭐***Hướng tiếp cận***: Dễ thấy trong N gói ban đầu, đối với gói thứ i ta có thể chọn gói hoặc là không, từ đó ta có thể suy ra một ý tưởng giải bài toán. Ta sẽ sinh tất cả các chuỗi nhị phân độ dài N để biểu diễn tập con của N phần tử đại diện cho N gói hàng. Gọi dãy nhị phân thứ k là $S_k = a_1a_2\ldots a_N$ với $a_i \in \{0,1\}$, từ đó trong phương án chọn, nếu ta chọn gói hàng thứ i thì $a_i = 1$ và nếu ta không chọn gói hàng thứ i thì $a_i = 0$.

Sau khi xây dựng được tất cả các chuỗi nhị phân độ dài N ta sẽ tính toán tổng trọng lượng và tổng giá trị của từng phương án ứng với dãy nhị phân vừa tạo ra.

Chuỗi nhị phân nào thoả mãn tổng trọng lượng không lớn hơn M và tổng giá trị là lớn nhất thì phương án ứng với nó chính là đáp án tối ưu của bài toán.

Phương pháp quay lui/vét cạn

⭐***Truy vết***: Sau mỗi bước so sánh, ta sẽ lưu lại giá trị tối ưu hiện tại và chuỗi nhị phân ứng với giá trị đó. Khi duyệt hết các chuỗi nhị phân, ta sẽ thu được đáp án. Từ chuỗi nhị phân đã lưu, đưa ra phương án ứng với nó, đó chính là đáp án của bài toán.

⭐***Tính đúng đắn***: Khi mà ta tạo ra tất cả các chuỗi nhị phân độ dài N cũng chính là đi tìm tất cả các khả năng chọn có thể xảy ra, thì chọn được chuỗi nhị phân phù hợp với yêu cầu bài toán cũng chính là tìm được phương án tối ưu của bài toán.

⭐***Phân tích hiệu quả:*** Quay lui/Vét cạn là một phương pháp thuộc lớp *Brute-force*, tức là ta sẽ tìm đáp án bằng cách xét tất cả các trường hợp có thể xảy ra, rồi chọn từ đó phương án tối ưu toàn cục.

Phương pháp này dễ hiểu, dễ cài đặt, nhưng thứ cần phải đánh đổi đó là độ phức tạp về thời gian rất lớn. Sinh tất cả các dãy nhị phân độ dài N, lên tới 2^N dãy, con số này là rất lớn khi N lớn. Độ phức tạp thời gian của phương pháp sẽ là $O(2^N)$ và độ phức tạp không gian là $O(N)$.

Phương pháp quay lui/vét cạn

★Cải tiến: Ta có một nhận xét là có thể trong quá trình sinh cấu hình, cấu hình nào chưa sinh xong mà đã vi phạm về giới hạn trọng lượng hoặc không có khả năng tốt hơn cấu hình tối ưu hiện tại (theo nghĩa không thể đạt được tổng giá trị lớn hơn cấu hình tối ưu hiện tại) ta có thể bỏ qua và tiến hành xét tiếp cấu hình tiếp theo.

Kỹ thuật này có tên là Nhánh Cận(*Branch and Bound*), sẽ giảm đáng kể độ phức tạp tính toán trong quá trình giải theo phương pháp Quay Lui/Vét Cạn.

Phương pháp đệ quy

⭐***Hướng tiếp cận***: Ta có thể có được phương án tối ưu của bài toán gốc bằng cách kết hợp các phương án tối ưu của các bài toán con.

Cụ thể tổng giá trị lớn nhất khi chọn trong i gói hàng, trọng lượng không vượt quá j, bằng tổng giá trị lớn nhất khi chọn trong $i - 1$ gói hàng sao cho tổng trọng lượng không vượt quá j nếu ta không lấy gói hàng thứ i hoặc tổng trọng lượng không vượt quá $j - W_i$ nếu ta lấy gói hàng thứ i cộng với giá trị tối ưu ở bước chọn thứ i.

Ta xây dựng được công thức truy hồi nghiệm của bài toán như sau:

$f(0,j) = 0, \forall j = 1..M$

$f(i,0) = 0, \forall i = 1..N$

$f(i, j) = f(i-1,j), j < W_i$

$f(i, j) = \max(f(i-1,j-W_i) + V_i, f(i-1,j))$

với $j \geq W_i$

⭐***Tính đúng đắn***: Vì ta đã xây dựng kết quả mỗi bước bằng cách lấy kết quả tối ưu của các bước chọn trước rồi kết hợp với kết quả tối ưu ở bước hiện tại, nên theo quy nạp, ta thu được phương án tối ưu của cả bài toán ở bước chọn cuối cùng.

Phương pháp đệ quy

⭐***Truy vết đáp án***: Ta duy trì một bảng phương án chứa kết quả của các bài toán con $f(i, j)$:

- Nếu trong bước thứ i, ta chọn gói hàng thứ i thì $f(i, j) \equiv f(i-1, j-W_i) + V_i$.
- Nếu trong bước thứ i, ta không chọn gói hàng thứ i thì $f(i, j) \equiv f(i-1, j)$.

Vậy gói hàng thứ i được chọn trong phương án tối ưu khi $f(i, j) \equiv f(i-1, j-W_i) + V_i$, ngược lại gói hàng thứ i không có trong phương án tối ưu - ta xét tiếp bước thứ $i-1$. Dựa vào nhận xét này ta có thể truy vết đáp án từ $f(N.M)$.

⭐***Phân tích hiệu quả***: Với hướng tiếp cận đệ quy, dựa vào công thức truy hồi ta thấy độ phức tạp thuật toán là $O(2^N)$, do yêu cầu lưu trữ bảng truy vết ta cần $O(N.M)$ độ phức tạp về không gian.

⭐***Cải tiến***: Ta nhận thấy có thể giảm độ phức tạp về thời gian khi trong cách cài đặt trên, bài toán con $f(i, j)$ có thể được tính đi tính lại nhiều lần mà không có sự thay đổi về kết quả, chỉ làm tăng độ phức tạp. Ta duy trì một bảng phương án để lưu trữ các kết quả tối ưu cục bộ sau khi tính để tra cứu khi gặp lại. Nhờ đó độ phức tạp về thời gian được giảm xuống thành $O(N.M)$ ứng với bảng phương án có $N.M$ ô.

Phương pháp tham lam

⭐***Hướng tiếp cận***: Đối với phương pháp tham lam, có rất nhiều hướng tiếp cận khác nhau như tham lam theo trọng lượng, giá trị,… . Ở đây ta sẽ xét một cách triển khai tham lam hiệu quả hơn.

Ta thấy có 2 đối tượng chính cần tối ưu đó là giá trị và trọng lượng của gói hàng. Có một ý tưởng đó là, ta xây dựng một chiến lược chọn như sau:

Trong tất cả các gói hàng ta sẽ ưu tiên chọn gói hàng nào có trọng lượng nhỏ mà giá trị lớn hay nói cách khác ta xét tỉ lệ giá trị trên khối lượng của từng gói hàng(V/W).

Giữa 2 gói hàng thứ i và thứ j, ta sẽ ưu tiên chọn gói thứ i nếu $V_i/W_i > V_j/W_j$, tức là chọn gói hàng thứ i có giá trị vượt trội so với trọng lượng hơn gói hàng thứ j. Như vậy, đến khi không chọn được gói hàng nào nữa(do tổng trọng lượng không cho phép hoặc đã chọn hết các gói) thì ta sẽ thu được đáp án tối ưu cho bài toán.

Phương pháp tham lam

★***Truy vết***: Trong quá trình lựa chọn, ta duy trì một danh sách lưu chỉ số những đồ vật được chọn. Khi kết thúc quá trình chọn, danh sách của ta sẽ chứa phương án tối ưu cần tìm.

★***Tính đúng đắn***: Đối với các bài toán tối ưu tổ hợp thì tham lam luôn là lựa chọn được ưu tiên cao. Tuy nhiên, tham lam không phải lúc nào cũng cho ta phương án tối ưu nhất.

Ví dụ: Một ba lô có trọng lượng tối đa là 30kg, và 7 gói hàng có khối lượng lần lượt là 5, 13, 9, 6, 14, 10, 12kg và giá trị các gói đồ tương ứng là 11, 12, 8, 5, 8, 17, 6$. Bằng phương pháp tham lam ta chọn được các món 1, 2 và 6 với tổng trọng lượng là 28kg và tổng giá trị là 40$. Nhưng cách chọn tối ưu nhất lại là các món 1, 3, 4, 6 với tổng trọng lượng là 30kg và tổng giá trị là 41$. Có thể kết luận rằng, với bài toán ba lô, tham lam chỉ tìm được phương án gần tối ưu nhất.

★***Phân tích hiệu quả***: Trong thực tế, tham lam là một phương pháp hữu hiệu nếu ta chỉ cần đi tìm xấp xỉ phương án tối ưu. Chi phí thực hiện tham lam chủ yếu là tính toán và sắp xếp dãy tỉ số V_i/W_i. Phương pháp tham lam trình bày trên có độ phức tạp thời gian là $O(N\log N)$ và độ phức tạp không gian là $O(N)$ với thuật toán sắp xếp Quick Sort.

Phương pháp quy hoạch động

⭐***Hướng tiếp cận***: Với nhận xét về phương án tối ưu như trong phương pháp Đệ quy, ta có thể giải bài toán sử dụng Quy hoạch động. Trước tiên, ta biểu diễn bài toán thành các trạng thái, từ đó ta xây dựng công thức truy hồi cho biết kết quả của một trạng thái dựa trên các trạng thái con của nó(Quy hoạch động trạng thái).

Ta gọi tổng giá trị lớn nhất có thể đạt được bằng cách chọn trong i gói hàng sao cho tổng trọng lượng không vượt quá j là $f(i, j)$, giá trị món hàng thứ i là V_i , trọng lượng là W_i . Khi đó kết quả của bài toán sẽ là $f(N, M)$.

Trong khi xây dựng phương án tối ưu, xét món hàng thứ i luôn có 2 lựa chọn:

- Lấy món hàng thứ i thì ta có: $f(i, j) = f(i-1, j-W_i) + V_i, (W_i \leq j)$.
- Không lấy món hàng thứ i thì ta có: $f(i, j) = f(i-1, j)$.

Phương pháp quy hoạch động

Từ 2 trường hợp trên, ta muốn tìm tổng giá trị lớn nhất đạt được hay nói cách khác là tìm giá trị lớn nhất của hàm f, ta thu được công thức quy hồi:

$$f(i,j) = f(i-1,j), (W_i > j)$$
$$f(i,j) = \max(f(i-1,j-W_i) + V_i, f(i-1,j)), (W_i \leq j)$$

Ta dễ dàng thấy tổng giá trị lớn nhất trong trường hợp phải chọn trong 0 gói hàng với giới hạn trọng lượng là j là 0. Vì vậy $f(0,j) = 0 \ \forall j \leq M$ là trường hợp suy biến hay còn gọi là cơ sở quy hoạch động.

⭐***Truy vết***: Với cách cài đặt $f(i,j)$ bằng bảng, ta có thể truy vết trên $f(i,j)$ như với phương pháp đệ quy.

Phương pháp quy hoạch động

⭐***Tính đúng đắn***: Giống phương pháp Đệ quy, tính đúng đắn của phương pháp đã được xét trong phần trước. Quy hoạch động có ưu điểm vượt trội so với Đệ quy đó là khi một bài toán con đã được giải, ta có luôn kết quả mà không cần giải lại bài toán con. Một điểm hơn nữa đó là, Quy hoạch động xác định trên bảng phương án một thứ tự tính toán, từ đó ta có thể tính toán hiệu quả hơn bảng phương án mà không cần dùng đến thủ tục gọi đệ quy.

⭐***Phân tích hiệu quả***: So với các phương pháp đã nêu, Quy hoạch động gần như là tối ưu hơn cả về thời gian lẫn không gian lưu trữ. Độ phức tạp thời gian theo phương pháp Quy hoạch động là $O(N.M)$ với trọng lượng và giá trị món hàng là số nguyên. Độ phức tạp về không gian của Quy hoạch động cũng là $O(N.M)$ khi ta phải lưu trữ bảng phương án có $N.M$ ô.

Nhận xét

Bài toán xếp ba lô là một bài toán tối ưu điển hình và được xem là ví dụ vỡ lòng về phương pháp Quy hoạch động. Tuy nhiên ta có thể giải bài toán xếp ba lô bằng nhiều phương pháp khác nhau như Quay lui/Vét cạn, Đệ quy, Tham Lam.

Ngoài các phương pháp đã trình bày ở trên, với bài toán xếp ba lô ta có rất nhiều hướng giải khác, mỗi hướng tiếp cận đều có những ưu nhược điểm và cái hay riêng. Bài báo cáo này trình bày những phương pháp quen thuộc và cơ bản nhất, mang lại cho người đọc cái nhìn tổng quát về "nghệ thuật" giải bài toán tối ưu tổ hợp.

Thanks for listening!

Cảm ơn mọi người đã lắng nghe!