Chương 2. Ma trận – Định Thức

Nội dung chương 1

2.1. Ma trận

TRƯỜNG ĐẠI HỌC
HÙNG VƯƠNG TPHCM
KHOA KỸ THUẬT CÔNG NGHỆ

Định nghĩa 2.1

Một bảng số hình chữ nhật gồm có m dòng và n cột được gọi là một *ma trận* loại (cấp) $m \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, a_{ij} \in \mathbb{R},\ \forall i \in \overline{1,m}, \forall j \in \overline{1,n}.$$

Chú ý

1. Ma trận trên viết tắt: $A = (a_{ij})_{m \times n}$ hay $A = (a_{ij})$, trong đó $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

2. Ta gọi: a_{ij} là hệ số ở dòng i, cột j của ma trận A.

3. Tập hợp tất cả các ma trận loại $m \times n$ được ký hiệu là $M_{m \times n}$.

Ví dụ 1 Cho ma trận A loại 4×4 như sau:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Hệ số a_{23} của ma trận A là 3 (hệ số ở dòng 2, cột 3).

$$\begin{array}{r c} & \text{Cột 3} \\ \text{Dòng 2} \quad A = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Định nghĩa 2.2

Cho hai ma trận cùng loại $A = (a_{ij})_{m \times n}$ và $B = (b_{ij})_{m \times n}$. Ta nói A *bằng* B, ký hiệu là $A = B$, nếu $a_{ij} = b_{ij},\ \forall i \in \overline{1,m}\ ; \forall j \in \overline{1,n}$.

Nói cách khác

Hai ma trận được gọi là *bằng nhau* nếu chúng cùng cấp và có tất cả các phần tử tương ứng vị trí bằng nhau.

Ví dụ 2: Hai ma trận A và B sau đây

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

là hai ma trận bằng nhau. Ta viết $A = B$.

TRƯỜNG ĐẠI HỌC
HÙNG VƯƠNG TPHCM
KHOA KỸ THUẬT CÔNG NGHỆ

- **Chương 2.** Ma trận – Định thức
- **2.1.** Ma trận

Định nghĩa 2.3

i) *Ma trận không* loại $m \times n$, ký hiệu $0_{m \times n}$, là ma trận loại $m \times n$ mà tất cả các hệ số đều bằng 0.

Ví dụ 3:

$$0_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

TRƯỜNG ĐẠI HỌC
HÙNG VƯƠNG TPHCM
KHOA KỸ THUẬT CÔNG NGHỆ

- **Chương 2.** Ma trận – Định thức
- **2.1.** Ma trận

Định nghĩa 2.3

ii) *Ma trận vuông cấp n* là ma trận loại $n \times n$, (nghĩa là số dòng = số cột = n).Trong ma trận vuông, *đường chéo chính* gồm các hệ số a_{ii}.

Tập hợp tất cả các ma trận vuông cấp n được ký hiệu là M_n.

Ví dụ 4:

$$A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3.$$

Định nghĩa 2.3

iii) *Ma trận chéo cấp n* là ma trận vuông cấp *n* có tất cả các hệ số nằm ngoài đường chéo chính đều bằng 0.

Ví dụ 6:

$$A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

iv) *Ma trận đơn vị cấp n* là ma trận chéo cấp *n* mà tất cả các hệ số nằm trên đường chéo chính đều bằng 1, ký hiệu I_n.

Ví dụ 7:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Định nghĩa 2.3

v) *Ma trận tam giác trên (tương tự ma trận tam giác dưới)* là ma trận vuông mà tất cả các hệ số nằm phía dưới (tương tự phía trên) đường chéo chính đều bằng 0.

Ví dụ 8:

Ma trận tam giác trên: $A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Ví dụ 9:

Ma trận tam giác dưới: $A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

Định nghĩa 2.4

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n}$. Ta gọi *ma trận chuyển vị* của A, ký hiệu A^T, là ma trận loại $n \times m$, có được từ A bằng cách xếp các dòng của A thành các cột tương ứng.

Ví dụ 10:

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ma trận chuyển vị của *A:*

$$A^T{}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bài tập tại lớp

Cho ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 5 \\ 6 & -8 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Tìm ma trận chuyển vị của A.

Đáp số:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -1 & -8 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

2.2. Các phép toán trên ma trận

Định nghĩa 2.5 (Phép cộng ma trận)

Cho hai ma trận cùng loại $m \times n$: $A = (a_{ij})_{m \times n}$ và $B = (b_{ij})_{m \times n}$. Ta định nghĩa *tổng* của hai ma trận A và B, ký hiệu $A+B$, là ma trận loại $m \times n$ mà các hệ số có được bằng cách lấy tổng của các hệ số tương ứng của A và B.

Ví dụ 11:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & 1+2 & 0+0 \\ 0+1 & 2+1 & 2+2 \\ 0+1 & 0+1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

TRƯỜNG ĐẠI HỌC
HÙNG VƯƠNG TPHCM
KHOA KỸ THUẬT CÔNG NGHỆ

- **Chương 2.** Ma trận – Định thức
- **2.1.** Ma trận
- **2.2.** Các phép toán ma trận

Định nghĩa 2.6 (Phép nhân vô hướng với ma trận)

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n}$ và số thực $\alpha \in \mathbb{R}$. Ta định nghĩa αA là ma trận có từ A bằng cách nhân tất cả các hệ số của A với α.

Ví dụ 12:

$$3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.1 & 3.1 & 3.0 \\ 3.2 & 3.3 & 3.2 \\ 3.0 & 3.2 & 3.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 6 & 9 & 6 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tính chất Với $A, B, C \in M_{m\times n}$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ta có

1. $A + B = B + A$ $\quad$ (*tính giao hoán*)
2. $(A+B)+C = A+(B+C)$ $\quad$ (*tính kết hợp*)
3. $0_{m\times n} + A = A + 0_{m\times n} = A$
4. $A + (-A) = (-A) + A = 0_{m\times n}$
5. $(A+B)^T = A^T + B^T$
6. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$
7. $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$
8. $(-\alpha)A = \alpha(-A) = -(\alpha A)$

TRƯỜNG ĐẠI HỌC
HÙNG VƯƠNG TPHCM
KHOA KỸ THUẬT CÔNG NGHỆ

- **Chương 2.** Ma trận – Định thức
- **2.1.** Ma trận
- **2.2.** Các phép toán ma trận

Ví dụ 13

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

Định nghĩa 2.7 (Phép nhân hai ma trận)

Cho hai ma trận A và B có tính chất sau: $A=(a_{ij})_{m\times n}$ loại $m\times n$ và $B=(b_{ij})_{n\times p}$ loại $n\times p$ (nghĩa là số cột của ma trận A bằng số dòng của ma trận B). Ta định nghĩa *tích* hai ma trận A và B, ký hiệu AB, là ma trận, định bởi:

- Về loại: AB có loại $m\times p$.
- Về hệ số: AB có hệ số ở dòng i, cột j được tính bằng cách nhân các hệ số dòng i của ma trận A với các hệ số ở cột j của ma trận B tương ứng rồi lấy tổng của chúng:

Ví dụ 14:

$$\begin{pmatrix}2&1&3\\1&2&2\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\3&2\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.1+1.3+3.1 & * & *\\ * & * & *\\ * & * & *\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&8\\9&8\\5&4\end{pmatrix}.$$

TRƯỜNG ĐẠI HỌC
HÙNG VƯƠNG TPHCM
KHOA KỸ THUẬT CÔNG NGHỆ

- **Chương 2.** Ma trận – Định thức
- **2.1.** Ma trận
- **2.2.** Các phép toán ma trận

Bài tập tại lớp Cho các ma trận sau:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&1&2\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}1&3\\2&1\\3&-1\end{pmatrix}.$$

Tính ma trận AB và BA.

Chú ý

Phép nhân ma trận không có tính giao hoán, nghĩa là thông thường

$$AB\neq BA.$$

Tính chất Với $A \in M_{m\times n}$ và $B, B_1, B_2 \in M_{n\times p}, C \in M_{p\times q}$, ta có

1. $I_m A = A$ và $A I_n = A$
2. $0_{p\times m} A = 0_{p\times n}$ và $A 0_{n\times q} = 0_{m\times q}$
3. $(AB)^T = A^T B^T$
4. $(AB)C = A(BC)$
5. $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$

Định nghĩa 2.8 (lũy thừa của ma trận vuông)

Với $A \in M_{m\times n}$ và k là số nguyên không âm, ta đặt

$$A^k = \begin{cases} I_n & \text{khi } k = 0; \\ \underbrace{A\ldots A}_{k} & \text{khi } k = 0. \end{cases}$$

2.3 Phép biến đổi sơ cấp

Định nghĩa 2.8 (Phép biến đổi sơ cấp)

Cho $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Ta gọi *phép biến đổi sơ cấp trên dòng* (t.ứ *phép biến đổi sơ cấp trên cột*), viết tắt là BĐSCTD (t.ứ BĐSCTC) trên A là một trong ba loại biến đổi sau:

Loại 1. Đổi hai dòng (t.ứ cột) cho nhau.

Ký hiệu: $d_i \leftrightarrow d_k$ (t.ứ $c_i \leftrightarrow c_k$).

Loại 2. Nhân một dòng (t.ứ cột) cho một số thực khác 0.

Ký hiệu: $d_i := \alpha d_i$ (t.ứ $c_i := \alpha c_k$).

Loại 3. Cộng vào một dòng (t.ứ cột) một bội của dòng (t.ứ cột khác).

Ký hiệu: $d_i := d_i + \beta d_k$ (t.ứ $c_i := c_i + \beta c_k$).

Ví dụ 15 Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$A \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_2} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$A \xrightarrow{d_1 = 3d_1} \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A \xrightarrow{d_1 = d_1 + 2d_2} \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Định nghĩa 2.9 (Ma trận bậc thang- dạng bậc thang rút gọn)

Cho $A = (a_{ij})_{m \times n}$ là một ma trận loại $m \times n$ trên K. Ta nói

Ma trận A có *dạng bậc thang* nếu A có dạng

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1k_1} & \dots & a_{1k_2} & \dots & \dots & a_{1k_r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_{2k_2} & \dots & \dots & a_{2k_r} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & a_{rk_r} & \dots & a_{rn} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Ví dụ 16:

Ma trận bậc thang: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Định nghĩa 2.10 (Ma trận bậc thang rút gọn)

Cho $A = (a_{ij})_{m\times n}$ là một ma trận loại $m\times n$ trên K. Ta nói ma trận A là *ma trận bậc thang rút gọn* (*dạng bậc rút gọn)* nếu thỏa các tính chất sau:

i) A có dạng bậc thang.

ii) Các hệ số khác không đầu tiên các dòng khác 0 của A đều bằng 1.

iii) Trên các cột có chứa các số 1 là các hệ số khác 0 đầu tiên trên các dòng khác 0, tất cả các hệ số khác đều bằng 0.

Ví dụ 17:

Ma trận bậc thang rút gọn: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Bài tập tại lớp Cho các ma trận sau:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ma trận nào là ma trận bậc thang, ma trận nào là ma trận bậc thang rút gọn?

Thuật toán đưa ma trận *A* về ma trận bậc thang (chú ý rằng sinh viên có thể làm cách khác)

Bước 1: Dùng PBĐSC đưa hệ số đầu tiên của dòng 1 của ma trận *A* bằng 1.

Bước 2: Dùng PBĐSC loại 3 đưa hệ số đầu tiên của dòng 2, 3, ... của ma trận *A* bằng 0 .

Bước 3: Dùng PBĐSC đưa ma trận *A* về dạng bậc thang.

TRƯỜNG ĐẠI HỌC
HÙNG VƯƠNG TPHCM
KHOA KỸ THUẬT CÔNG NGHỆ

Ví dụ 18

Dùng PBĐSC đưa ma trận sau về dạng bậc thang.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bước 1: Dùng PBĐSC đưa hệ số đầu tiên của dòng 1 của ma trận *A* bằng 1.

$$A \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bước 2: Dùng PBĐSC loại 3 đưa hệ số đầu tiên của dòng 2, 3, ... của ma trận *A* bằng 0 .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[]{\substack{d_2 := d_2 - 2d_1 \\ d_3 := d_3 - d_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

- **Chương 2.** Ma trận – Định thức
- **2.1.** Ma trận
- **2.2.** Các phép toán ma trận
- **2.3.** Phép biến đổi sơ cấp

Ví dụ 19

$$A=\begin{pmatrix}2&4&6\\1&2&5\\1&3&2\end{pmatrix}\xrightarrow{d_1\leftrightarrow d_2}\begin{pmatrix}1&2&5\\2&4&6\\1&3&2\end{pmatrix}\xrightarrow[d_3:=d_3-d_1]{d_2:=d_2-2d_1}\begin{pmatrix}1&2&5\\0&0&-4\\0&1&-3\end{pmatrix}.$$

Bước 3: Dùng PBĐSC đưa ma trận A về dạng bậc thang.

$$\begin{pmatrix}1&2&5\\0&0&-4\\0&1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{d_3\leftrightarrow d_2}\begin{pmatrix}1&2&5\\0&1&-3\\0&0&-4\end{pmatrix}.$$

Tóm lại:

$$A\xrightarrow{d_1\leftrightarrow d_2}\begin{pmatrix}1&2&5\\2&4&6\\1&3&2\end{pmatrix}\xrightarrow[d_3:=d_3-d_1]{d_2:=d_2-2d_1}\begin{pmatrix}1&2&5\\0&0&-4\\0&1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{d_3\leftrightarrow d_2}\begin{pmatrix}1&2&5\\0&1&-3\\0&0&-4\end{pmatrix}.$$

TRƯỜNG ĐẠI HỌC
HÙNG VƯƠNG TPHCM
KHOA KỸ THUẬT CÔNG NGHỆ

- **Chương 2.** Ma trận – Định thức
- **2.1.** Ma trận
- **2.2.** Các phép toán ma trận
- **2.3.** Phép biến đổi sơ cấp

Ví dụ 19

Dùng PBĐSC để tìm ma trận bậc thang với ma trận sau:

$$A=\begin{pmatrix}1&7&1&3&0\\1&7&-1&-2&-2\\2&14&2&7&0\\6&42&3&13&-3\end{pmatrix}$$

Giải

$$A\xrightarrow[\substack{d_3:=d_3-2d_1\\ d_4:=d_4-6d_1}]{d_2:=d_2-d_1}\begin{pmatrix}1&7&1&3&0\\0&0&-2&-5&-2\\0&0&0&1&0\\0&0&-3&-5&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{d_4:=d_4-\frac{3}{2}d_2}\begin{pmatrix}1&7&1&3&0\\0&0&-2&-5&-2\\0&0&0&1&0\\0&0&0&\frac{5}{2}&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_4:=d_4-\frac{5}{2}d_3}\begin{pmatrix}1&7&1&3&0\\0&0&-2&-5&-2\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B.$$

Vậy ma trận B là ma trận bậc thang của ma trận A.

Ví dụ 20

Dùng PBĐSC để tìm ma trận bậc thang rút gọn với ma trận sau:

$$A=\begin{pmatrix}1&7&1&3&0\\1&7&-1&-2&-2\\2&14&2&7&0\\6&42&3&13&-3\end{pmatrix}$$

Giải

$$A\xrightarrow[\substack{d_3:=d_3-2d_1\\ d_4:=d_4-6d_1}]{d_2:=d_2-d_1}\begin{pmatrix}1&7&1&3&0\\0&0&-2&-5&-2\\0&0&0&1&0\\0&0&-3&-5&-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{d_4:=d_4-\frac{3}{2}d_2\\ d_2:=-\frac{1}{2}d_2}]{d_1:=d_1+\frac{1}{2}d_2}\begin{pmatrix}1&7&1&\frac{1}{2}&0\\0&0&1&\frac{5}{2}&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&\frac{5}{2}&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{d_2:=d_2-\frac{5}{2}d_3\\ d_4:=d_4-\frac{5}{2}d_3}]{d_1:=d_1-\frac{1}{2}d_3}\begin{pmatrix}1&7&0&0&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B.$$

Vậy ma trận B là ma trận bậc thang rút gọn của ma trận A.

TRƯỜNG ĐẠI HỌC HÙNG VƯƠNG TPHCM
KHOA KỸ THUẬT CÔNG NGHỆ

- **Chương 2.** Ma trận – Định thức
- **2.1.** Ma trận
- **2.2.** Các phép toán ma trận
- **2.3.** Phép biến đổi sơ cấp

Bài tập tại lớp

Dùng PBĐSC để tìm ma trận bậc thang với các ma trận A,B,C và tìm ma trận dạng rút gọn với D, E:

$$A=\begin{pmatrix}1&-3&2\\3&-4&1\\2&-5&3\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}2&5&6\\1&2&5\\1&3&2\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}-4&1&-6\\1&2&-5\\6&3&-4\end{pmatrix};$$

$$D=\begin{pmatrix}1&3&-1&2\\0&11&-5&3\\2&-5&3&1\\4&1&1&5\end{pmatrix};\quad E=\begin{pmatrix}1&2&-1&2&1\\2&4&1&-2&3\\3&6&2&-6&5\\1&2&-1&2&1\end{pmatrix}.$$

Đáp số:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 9 & -26 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{11} & \frac{13}{11} \\ 0 & 1 & \frac{-5}{11} & \frac{3}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Định nghĩa 2.11 (Hạng của ma trận)

Cho $A = (a_{ij})_{m\times n}$ là một ma trận loại $m \times n$. Giả sử ma trận B là ma trận bậc thang rút gọn của A thông qua PBĐSC. Khi đó, *số lượng dòng khác 0* của ma trận B là *hạng* của ma trận A, ký hiệu là $r(A)$ hay $rank(A)$.

Ví dụ 21 Từ **ví dụ 20**, ta có rank(A)=3.

Chú ý.

Hạng của ma trận A cũng bằng số lượng dòng khác 0 của bất kỳ ma trận bậc thang nào (không nhất thiết dạng rút gọn).

2.4. Ma trận khả nghịch

Định nghĩa 2.12 (Ma trận khả nghịch)

Cho A là một ma trận vuông cấp n. Ta nói

i) A *khả nghịch phải* (t.ứ *khả nghịch trái*) nếu tồn tại ma trận B vuông cấp n sao cho $AB = I_n$ (t.ứ $BA = I_n$).

ii) A *khả nghịch* nếu tồn tại ma trận B vuông cấp n sao $AB = BA = I_n$.

Nếu A khả nghịch thì ma trận B là duy nhất và được gọi là *ma trận nghịch đảo của A*, ký hiệu là $B = A^{-1}$.

Chú ý

A khả nghịch khi và chỉ khi A vừa khả nghịch phải vừa khả nghịch trái.

Nhận xét

1) Nếu ma trận A có một dòng hay một cột bằng 0 thì A không khả nghịch.

2) Ma trận đơn vị I_n khả nghịch và $I_n^{-1} = I_n$.

3) Nếu ma trận A khả nghịch thì A^{-1} cũng khả nghịch và $(A^{-1})^{-1} = A$.

Định lý 2.1

i) Nếu ma trận A khả nghịch và $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ thì ma trận αA cũng khả nghịch và

$$(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}.$$

ii) Nếu ma trận A khả nghịch thì ma trận A^T cũng khả nghịch và

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

iii) Nếu các ma trận $A_1, A_2, \ldots, A_k$ là các ma trận khả nghịch có cùng cấp thì ma trận tích $A_1.A_2 \ldots A_k$ cũng khả nghịch và

$$(A_1.A_2 \ldots A_k)^{-1} = (A_1)^{-1}(A_2)^{-1} \ldots (A_k)^{-1}.$$

Định lý 2.2

Cho A là ma trận vuông cấp n. Các khẳng định sau đây là tương đương:

1) A khả nghịch phải;
2) A khả nghịch trái;
3) A khả nghịch;
4) A có hạng $\text{rank}(A) = n$.
5) Tồn tại một phép BĐSC biến ma trận A thành ma trận đơn vị I_n .

TRƯỜNG ĐẠI HỌC
HÙNG VƯƠNG TPHCM
KHOA KỸ THUẬT CÔNG NGHỆ

- **Chương 2.** Ma trận – Định thức
- **2.1.** Ma trận
- **2.2.** Các phép toán ma trận
- **2.3.** Phép biến đổi sơ cấp
- **2.4.** Ma trận khả nghịch

Thuật toán tìm ma trận nghịch đảo

Trong thực hành, để xét tính khả nghịch của ma trận A vuông cấp n và tìm A^{-1} (nếu có), ta tiến hành như sau:

Xếp I_n bên phải ma trận A như sau: $(A|I_n)$ và dùng PBĐSCD để đưa ma trận A về ma trận đơn vị (nghĩa là lần lượt đưa về dạng tam giác trên và dạng tam giác dưới).

$$(A|I_n) \to (A_1|B_1) \to \cdots \to (A_k|B_k) \to \cdots (I_n|B).$$

Trong quá trình biến đổi có thể xảy ra hai trường hợp:

Trường hợp 1: Trong quá trình biến đổi, có ít nhất một dòng hay một cột bằng 0. Khi đó, A không khả nghịch.

Trường hợp 2: Trong quá trình biến đổi, không có một dòng hay một cột bằng 0. Khi đó, A khả nghịch và $B = A^{-1}$.

Ví dụ 22 Xét tính khả nghịch của A và tìm A^{-1} (nếu có).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 8 & 12 \\ 4 & 8 & 14 & 19 \end{pmatrix}$$

TRƯỜNG ĐẠI HỌC
HÙNG VƯƠNG TPHCM
KHOA KỸ THUẬT CÔNG NGHỆ

- **Chương 2.** Ma trận – Định thức
- **2.1.** Ma trận
- **2.2.** Các phép toán ma trận
- **2.3.** Phép biến đổi sơ cấp
- **2.4.** Ma trận khả nghịch

Giải

$$(A|I_4)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&3&4&1&0&0&0\\2&5&4&7&0&1&0&0\\3&7&8&12&0&0&1&0\\4&8&14&19&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{d_3:=d_3-3d_1\\ d_4:=d_4-4d_1}]{d_2:=d_2-d_1}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&2&3&4&1&0&0&0\\0&1&-2&-1&-2&1&0&0\\0&1&-1&0&-3&0&1&0\\0&0&2&3&-4&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[d_3:=d_3-d_2]{d_1:=d_1-2d_2}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&7&6&5&-2&0&0\\0&1&-2&-1&-2&1&0&0\\0&0&1&1&-1&-1&1&0\\0&0&2&3&-4&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{d_2:=d_2+2d_3\\ d_4:=d_4-2d_3}]{d_1:=d_1-7d_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&-1&12&5&-7&0\\0&1&0&1&-4&-1&2&0\\0&0&1&1&-1&-1&1&0\\0&0&0&1&-2&-2&-2&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{d_2:=d_2-d_4\\ d_3:=d_3-d_4}]{d_1:=d_1+d_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&10&7&-9&1\\0&1&0&0&-2&-3&4&1\\0&0&1&0&1&-3&3&-1\\0&0&0&1&-2&-2&-2&1\end{array}\right)$$

where the right block is $\underbrace{\begin{pmatrix}10&7&-9&1\\-2&-3&4&1\\1&-3&3&-1\\-2&-2&-2&1\end{pmatrix}}_{B=A^{-1}}$.

Vậy A khả nghịch.

Và B là ma trận nghịch đảo của A.

2.5. Phương trình ma trận

TRƯỜNG ĐẠI HỌC
HÙNG VƯƠNG TPHCM
KHOA KỸ THUẬT CÔNG NGHỆ

Định lý 2.3

Cho các ma trận $A\in M_n$ khả nghịch và $B=M_{m\times p}, C=M_{m\times n}$. Xét các phương tình ma trận $AX=B$ và $YA=C$. Khi đó

i) $AX=B\Leftrightarrow X=A^{-1}B.$

ii) $YA=C\Leftrightarrow Y=CA^{-1}.$

Ví dụ 23 Cho hai ma trận:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&-2\\2&-1&-2&-3\\3&2&-1&-5\\2&-3&1&-3\end{pmatrix};\qquad B=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

a) Chứng tỏ A khả nghịch và tìm A^{-1}.

b) Tìm ma trận X thỏa $AXA=AB$.

c) Tìm ma trận X thỏa $A^2XA^2=ABA^2$.

TRƯỜNG ĐẠI HỌC
HÙNG VƯƠNG TPHCM
KHOA KỸ THUẬT CÔNG NGHỆ

- **Chương 2.** Ma trận – Định thức
- **2.1.** Ma trận
- **2.2.** Các phép toán ma trận
- **2.3.** Phép biến đổi sơ cấp
- **2.4.** Ma trận khả nghịch
- **2.5.** Phương trình ma trận

Giải

a) Ta có

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}47&81&-50&-29\\3&5&-3&-2\\2&3&-2&-1\\29&50&-31&-18\end{pmatrix}$$ (Sinh viên tự kiểm tra).

b) $AXA=AB\Leftrightarrow XA=B\Leftrightarrow X=BA^{-1}$

$$X=\begin{pmatrix}44&76&-47&-27\\1&2&-1&-1\\-27&-47&29&17\\29&59&-31&-18\end{pmatrix}.$$

c) $A^2XA^2=ABA^2\Leftrightarrow XA=B\Leftrightarrow X=A^{-1}B$

$$X=\begin{pmatrix}47&34&-131&21\\3&2&-8&1\\2&1&-5&1\\29&21&-81&13\end{pmatrix}.$$

2.6. Định thức

Định nghĩa 2.13 (Định thức của ma trận cấp *n*)

Cho $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là một ma trận vuông cấp *n*. *Định thức* của *A*, được ký hiệu là $\det(A)$ hay $|A|$ là số thực, định bởi như sau:

Với ma trận vuông cấp 1: $\det(A) = |a_{11}| = a_{11}.$

Với ma trận vuông cấp 2: $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$

Với ma trận vuông cấp 3:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13})$$
$$- (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{21}a_{12}a_{33}).$$

Ví dụ 22 Tính định thức của các ma trận sau:

$$A = (-2); \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Giải

a) Ta có $\det(A) = \det(-2) = |-2| = -2.$

b) Ta có $\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1.3 - 1.2 = 3 - 2 = 1.$

c) Ta có $\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (1.2.5 + 2.1.3 + 3.4.1) - (3.2.3 + 1.1.1 + 2.4.5)$

$$= -31.$$

Quy tắc sáu đường chéo Sarrus

Để tính định thức cấp 3: $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & k \end{vmatrix}$

Ta xây dựng mảng chữ nhật bằng cách xếp thêm 2 cột đầu tiên:

$$\begin{array}{ccccc} a & d & g & a & d \\ b & e & h & b & e \\ c & f & k & c & f \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & k \end{vmatrix} = [\text{tổng 3 đường chéo “huyền”}] - [\text{tổng 3 đường chéo “sắc”}].$$

TRƯỜNG ĐẠI HỌC
HÙNG VƯƠNG TPHCM
KHOA KỸ THUẬT CÔNG NGHỆ

- **Chương 2.** Ma trận – Định thức
- **2.1.** Ma trận
- **2.2.** Các phép toán ma trận
- **2.3.** Phép biến đổi sơ cấp
- **2.4.** Ma trận khả nghịch
- **2.5.** Phương trình ma trận
- **2.6.** Định thức

Bài tập tại lớp

Tính định thức của ma trận sau: $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$

Định nghĩa 2.14 (Ma trận bù)

Cho $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là một ma trận vuông cấp n.

Với mỗi số hạng a_{ij} , ma trận nhận được từ A bằng cách xóa dòng i, cột j được gọi là *ma trận bù* của A đối với số hạng a_{ij} . Ký hiệu A_{ij}.

Ví dụ 23: Xét ma trận sau

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Với số hạng a_{23} , ta có ma trận bù của số hạng a_{23} là $A_{23} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$

Với số hạng a_{22} , ta có ma trận bù của số hạng a_{22} là $A_{23} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$

Định nghĩa 2.15 (Phần bù đại số)

TRƯỜNG ĐẠI HỌC
HÙNG VƯƠNG TPHCM
KHOA KỸ THUẬT CÔNG NGHỆ

- **Chương 2.** Ma trận – Định thức
- **2.1.** Ma trận
- **2.2.** Các phép toán ma trận
- **2.3.** Phép biến đổi sơ cấp
- **2.4.** Ma trận khả nghịch
- **2.5.** Phương trình ma trận
- **2.6.** Định thức

Cho $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là một ma trận vuông cấp n. Với mỗi i, j, ta gọi

$$c_{ij} = (-1)^{i+j}.\det(A_{ij})$$

là *phần bù đại số* của hệ số a_{ij}.

Trong đó, A_{ij} là ma trận bù của ma trận A đối với a_{ij} .

Ví dụ 24 Tính các phần bù đại số $c_{12}; c_{23}; c_{11}$ của ma trận sau:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Giải

i) Ta có $c_{12} = (-1)^{1+2}\det(A_{12}) = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^3\left[1.5 - 0.1\right] = -5.$

ii) Ta có $c_{23} = (-1)^{2+3}\det(A_{23}) = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^5\left[1.1 - 0.2\right] = -1.$

iii) Ta có $c_{11} = (-1)^{1+1}\det(A_{11}) = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^2\left[2.5 - 1.1\right] = 9.$

Định lý 2.4. (Khai triển Laplace)

Cho $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là một ma trận vuông cấp n. Với mỗi i, j, gọi c_{ij} là phần bù đại số của hệ số a_{ij}. Ta có

i) Công thức khai triển $\det(A)$ theo dòng i:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.c_{ik} = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \ldots + a_{in}c_{in}.$$

Ví dụ, khai triển theo dòng 2: $\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{2k}.c_{2k} = a_{21}c_{21} + a_{22}c_{22} + \ldots + a_{2n}c_{2n}.$

ii) Công thức khai triển $\det(A)$ theo cột j:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}.c_{kj} = a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + \ldots + a_{nj}c_{nj}.$$

Ví dụ, khai triển theo cột 3: $\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k3}.c_{k3} = a_{13}c_{13} + a_{23}c_{23} + \ldots + a_{n3}c_{n3}.$

TRƯỜNG ĐẠI HỌC
HÙNG VƯƠNG TPHCM
KHOA KỸ THUẬT CÔNG NGHỆ

- **Chương 2.** Ma trận – Định thức
- **2.1.** Ma trận
- **2.2.** Các phép toán ma trận
- **2.3.** Phép biến đổi sơ cấp
- **2.4.** Ma trận khả nghịch
- **2.5.** Phương trình ma trận
- **2.6.** Định thức

Ví dụ 25 Tính định thức của ma trận sau:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Giải

Khai trển Laplace theo dòng 1:

$$\det(A) = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} + a_{14}c_{14}$$

$$= 1.(-1)^{1+1}.\det(A_{11}) + 2.(-1)^{1+2}\det(A_{12}) + 3.(-1)^{1+3}\det(A_{13}) + 4.(-1)^{1+4}\det(A_{14})$$

$$= 160.$$

2.7. Tính chất của định thức

Tính chất 1:

$$\det(A^T) = \det(A).$$

Ví dụ : $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2.$

Tính chất 2: Nếu hoán đổi hai dòng (t.ứ hai cột) thì định thức đổi dấu.

Ví dụ : $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$

Tính chất 3: Nếu mọi thành phần ở dòng thứ i (cột j) của định thức đều có thừa số c thì có thể đặt c ra ngoài định thức.

$$\text{Ví dụ}: \begin{vmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3.1 & 3.3 & 3.2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Tính chất 4: Nếu định thức có một dòng (hay một cột) mà mỗi phần tử là tổng của hai số hạng thì ta có thể tách thành tổng hai định thức.

$$\text{Ví dụ}: \begin{vmatrix} x+1 & x-3 & 2+x \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -3 & x \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

TRƯỜNG ĐẠI HỌC
HÙNG VƯƠNG TPHCM
KHOA KỸ THUẬT CÔNG NGHỆ

Tính chất 5:

Định thức sẽ không đổi nếu ta cộng vào một dòng (hay một cột) với n lần dòng (hay cột) khác.

$$\text{Ví dụ}: \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underline{\underline{d_1 := d_1 + 2d_2}} \begin{vmatrix} 7 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Chú ý.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underline{\underline{d_1 := 2d_1 + d_2}} \begin{vmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$ SAI!

- **Chương 2.** Ma trận – Định thức
- **2.1.** Ma trận
- **2.2.** Các phép toán ma trận
- **2.3.** Phép biến đổi sơ cấp
- **2.4.** Ma trận khả nghịch
- **2.5.** Phương trình ma trận
- **2.6.** Định thức
- **2.7.** Tính chất của định thức

Bài tập tại lớp

Không sử dụng quy tắc sáu đường chéo, hãy sử dụng các tính chất của định thức vừa học và khai triển laplace để chứng tỏ

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = 0$$

Định lý 2.5

1) Nếu ma trận vuông A có một dòng hay một cột bằng 0 thì $\det(A) = 0$.

2) Nếu A là ma trận tam giác trên (t.ứ tam giác dưới) thì $\det(A)$ bằng tích các phần tử trên đường chéo chính của A.

3) Nếu ma trận A có hai dòng (t.ứ cột) tỉ lệ với nhau thì $\det(A) = 0$.

4) Với $A_1, A_2, \ldots, A_k$ là các ma trận vuông cùng cấp. Khi đó

$$\det(A_1 A_2 \ldots A_k) = \det(A_1).\det(A_2)\ldots\det(A_k).$$

5) $$\det(A^k) = \det(A)^k \quad , \forall k \geq 1.$$

6) Nếu A khả nghịch thì $\det(A) \neq 0$ và

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

2.8. Định thức và ma trận nghịch đảo

Định nghĩa 2.16

Cho $A=(a_{ij})_{n\times n}$ ma trận là ma trận vuông cấp n và $C=(c_{ij})_{n\times n}$ là ma trận các phần bù đại số. Ta gọi ma trận chuyển vị C^T của C là *ma trận phù hợp* của A, ký hiệu $adj(A)$.

Định lý 2.6

Ma trận A khả nghịch khi và chỉ khi $\det(A)\neq 0$. Hơn nữa, khi đó

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}adj(A).$$

Ví dụ 26 Xét xem ma trận sau có khả nghịch không và tìm ma trận nghịch đảo bằng công thức định thức (nếu có).

$$A=\begin{pmatrix}2&2&5\\5&3&-8\\19&13&-14\end{pmatrix}.$$

Giải

Tính $\det(A)$:

$$\begin{vmatrix}2&2&5\\5&3&-8\\19&13&-14\end{vmatrix}\underset{\substack{c_3:=c_3-2c_2\\c_2:=c_2-2c_3}}{\overset{c_1:=c_1-c_2}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}0&0&1\\2&31&-14\\6&93&-40\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&31\\6&93\end{vmatrix}=0.$$

Vì $\det(A)=0$ nên A không khả nghịch.

TRƯỜNG ĐẠI HỌC
HÙNG VƯƠNG TPHCM
KHOA KỸ THUẬT CÔNG NGHỆ

- **Chương 2.** Ma trận – Định thức
- **2.1.** Ma trận
- **2.2.** Các phép toán ma trận
- **2.3.** Phép biến đổi sơ cấp
- **2.4.** Ma trận khả nghịch
- **2.5.** Phương trình ma trận
- **2.6.** Định thức
- **2.7.** Tính chất của định thức
- **2.8.** Định thức và ma trận nghịch đảo

Ví dụ 27 Xét xem ma trận sau có khả nghịch không và tìm ma trận nghịch đảo bằng công thức định thức (nếu có).

$$A=\begin{pmatrix}1&3&6\\1&4&10\\1&5&15\end{pmatrix}.$$

Giải

Tính $\det(A)$:

$$\begin{vmatrix}1&3&6\\1&4&10\\1&5&15\end{vmatrix}\underset{d_3:=d_3-d_1}{\overset{d_2:=d_2-d_1}{=\!=}}\begin{vmatrix}1&3&6\\0&1&4\\0&2&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&4\\2&9\end{vmatrix}=1.$$

Vì $\det(A)\neq 0$ nên A khả nghịch.

TRƯỜNG ĐẠI HỌC
HÙNG VƯƠNG TPHCM
KHOA KỸ THUẬT CÔNG NGHỆ

- **Chương 2.** Ma trận – Định thức
- **2.1.** Ma trận
- **2.2.** Các phép toán ma trận
- **2.3.** Phép biến đổi sơ cấp
- **2.4.** Ma trận khả nghịch
- **2.5.** Phương trình ma trận
- **2.6.** Định thức
- **2.7.** Tính chất của định thức
- **2.8.** Định thức và ma trận nghịch đảo

Ta tính

$$c_{11}=\begin{vmatrix}4&10\\5&15\end{vmatrix}=10;\quad c_{12}=-\begin{vmatrix}1&10\\1&15\end{vmatrix}=-5;\quad c_{13}=\begin{vmatrix}1&4\\1&5\end{vmatrix}=1;\quad c_{21}=-\begin{vmatrix}3&6\\5&15\end{vmatrix}=-15;$$

$$c_{22}=\begin{vmatrix}1&6\\1&15\end{vmatrix}=9;\quad c_{23}=-\begin{vmatrix}1&3\\1&5\end{vmatrix}=-2;\quad c_{31}=\begin{vmatrix}3&6\\4&10\end{vmatrix}=6;\quad c_{32}=\begin{vmatrix}1&6\\1&10\end{vmatrix}=-4;$$

$$c_{33}=\begin{vmatrix}1&3\\1&4\end{vmatrix}=1.$$

Do đó $C=\begin{pmatrix}10&-5&1\\-15&9&-2\\6&-4&1\end{pmatrix}$. Suy ra $adj(A)=C^T=\begin{pmatrix}10&-15&6\\-5&9&-4\\1&-2&1\end{pmatrix}.$

Vậy

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}adj(A)=\begin{pmatrix}10&-15&6\\-5&9&-4\\1&-2&1\end{pmatrix}.$$

Bài tập tại lớp

Xét xem ma trận sau có khả nghịch không và tìm ma trận nghịch đảo bằng công thức định thức (nếu có).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Đáp số:

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

KẾT THÚC CHƯƠNG 2

Sinh viên cần đạt các tiêu chí sau:

- Biết các khái niệm về ma trận: ma trận vuông, đơn vị, đường chéo, ...
- Tính toán được các phép toán cộng, trừ, nhân của các ma trận
- Thực hiện đưa ma trận về ma trạng bậc thang, dạng rút gọn.
- Tính được định thức của ma trận.
- Tìm được ma trận nghịch đảo.
- Tính được hạng của ma trận.

Bài tập chương 2

Câu 1. Tính $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$.

Câu 2. Tính A^3 , biết

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & -2\end{pmatrix}; \qquad A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Câu 3. Tìm hạng của các ma trận sau

$$A=\begin{pmatrix}3 & 5 & 7\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 5\end{pmatrix}.$$

Bài tập chương 2

Câu 4. Kiểm tra tính khả nghịch và tìm ma trận khả nghịch (nếu có)

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5 & -1\\ 6 & -1 & 2\\ 6 & 4 & 2\end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & 4 & -2\\ 3 & -2 & 4\end{pmatrix}.$$

Câu 5. Tìm ma trận X thỏa

$$\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & -2\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 16\\ 9 & 10\end{pmatrix}.$$

Câu 6. Tính các định thức sau:

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 9 & 16\\ 1 & 8 & 27 & 64\end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix}a+b & c & 1\\ b+c & a & 1\\ a+c & b & 1\end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix}1 & a^2 & a\\ a & 1 & a^2\\ a^2 & a & 1\end{vmatrix}.$$